

# Le théorème des quatre couleurs

## Projet Informatique - INF431 2014

Benjamin Werner

Le théorème des quatre couleurs doit sans doute sa renommée à la simplicité et au caractère concret de son énoncé : il peut être expliqué facilement à un non-mathématicien. Cela a suffi, et suffit encore, à attiser la curiosité d'innombrables amateurs, qui ont tenté, et tentent encore, de proposer des "preuves" élémentaires. De plus, les seules preuves connues sont fortement calculatoires, ce que l'énoncé ne laisse pas présager à première vue. Ce recours à l'ordinateur, utilisé une première fois en 1976, à une époque où ces machines étaient bien moins répandues qu'aujourd'hui, à sans doute également fait beaucoup pour l'halo de mystère qui semble encore entourer ce résultat.

Ce texte se veut une introduction à ce résultat mathématique bien particulier en général, et à la partie informatique en particulier

## 1 Historique

La première observation connue du phénomène remonte à 1852. Francis Guthrie, cartographe britannique remarque qu'il arrive à colorier toutes les cartes dont il dispose avec seulement quatre couleurs, et ce sans que deux régions contiguës ne se voient attribuées la même couleur. On dit que la carte à l'origine de cette observation aurait été la carte des comtés britanniques de l'époque ; on peut voir une illustration en figure 1. Pour être tout à fait précis :

- Une région est une partie connexe du plan,
- une carte est un ensemble de régions deux-à-deux distinctes,
- deux régions sont contiguës si l'intersection de leurs adhérences comporte au moins un point qui n'appartient pas à l'adhérence d'une autre région.

Le dernier point permet est important. Sans lui, toute tarte coupée en plus de quatre parts constituerait un contre-exemple.

De fait, on s'intéresse généralement à la formulation du théorème en termes de *graphes*. Chaque "pays" étant ramené à un sommet, une arête correspondant à une frontière commune. Le théorème peut alors être simplement formulé ainsi :

Pour tout graphe planaire, il est possible d'assigner à chaque sommet une couleur parmi quatre, de manière à ce qu'aucune arête ne joigne deux sommets de même couleur.

Il faut toutefois noter que passer du problème de coloriage de cartes à celui de graphes n'est pas si simple que cela. Sa formalisation ayant permis d'en éclairer quelques détails délicats, facilement ignorés.

Si Guthrie est resté dans l'Histoire, c'est essentiellement parce qu'on lui doit d'avoir attiré l'attention de la communauté mathématique sur cette question. La gazette retient que :

1852 Guthrie mentionne la question à de Morgan.

1878 Première référence écrite à la conjecture par Cayley.

1879 Première preuve par Kempe [5].

1880 Variante de la preuve par Tait [10].

1890 Heawood trouve une erreur dans la preuve de Kempe ; un an plus tard Petersen trouve une erreur dans celle de Tait. La preuve de Kempe reste toutefois valable pour prouver le théorème des cinq couleurs.

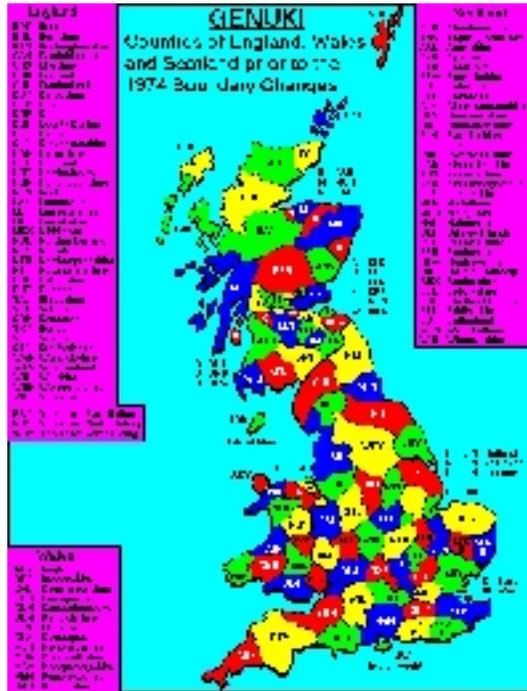


FIGURE 1 – La carte des Contés Britanniques avant 1974 (avec l'autorisation de GENUKI).

1913 Birkhoff propose la notion de *configuration réductible* [1]. C'est la notion centrale de toutes les preuves connues.

1925 En utilisant la notion de réductibilité, Franklin montre que tout contre-exemple est composé de plus de 25 régions. Cette borne sera progressivement améliorée au cours du siècle.

1969 Heinrich Heesch propose une approche pour résoudre le problème et suggère l'utilisation de l'ordinateur pour aboutir [4].

1976 Kenneth Appel et Wolfgang Haken annoncent avoir vérifié le théorème [6, 7, 8]. La preuve considère 1476 configurations, et la vérification a demandé 1200 heures de calcul.

1995 Les théoriciens des graphes Robertson, Seymour et Sanders présentent une variante de la preuve précédente [9]. Elle ne considère que 633 configurations, et les conditions que celles-ci doivent vérifier sont un peu plus simples. La vérification prend alors environ une heure sur un PC (une dizaine de minutes aujourd'hui).

On peut remarquer au passage que la plupart des contributions à la question sont dues à des mathématiciens anglo-saxons, à l'exception des allemands Heesch et Haken.

## 2 La preuve fautive de Kempe

La preuve fautive de Kempe est importante car elle comporte deux idées également essentielles aux preuves "modernes". D'une part qu'il faille trouver le "point faible" du graphe, à savoir un endroit où la densité d'arêtes est faible, et surtout l'idée des permutations de couleurs dans une composante connexe. Cette opération est d'ailleurs encore aujourd'hui désignée comme l'utilisation des "chaînes de Kempe".

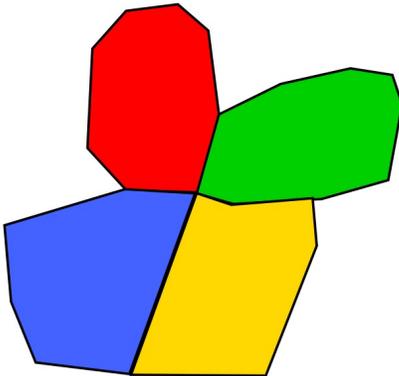
## 2.1 Triangulation

La première remarque est qu'il suffit de résoudre le problème dans le cas de graphes triangulés. En effet, on peut :

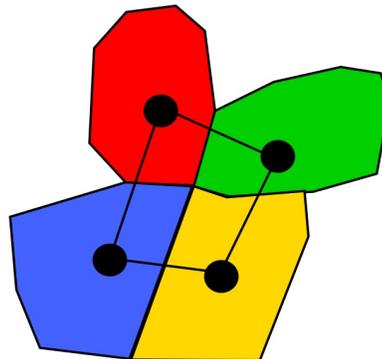
1. Effacer les arêtes parallèles : lorsque plusieurs arêtes joignent les deux mêmes sommets, l'on en garde qu'une. La contrainte sur les coloriages restant évidemment inchangée.
2. chaque fois qu'une région est bordée de plus de trois sommets, on choisit parmi ceux-ci deux sommets qui ne soient pas déjà voisins, et on les joint par une arête supplémentaire. Ce faisant, on rend simplement le problème de coloriage plus difficile : tout coloriage du nouveau graphe sera aussi un coloriage du graphe original.

Si l'on préfère penser en termes de cartes, les graphes triangulaires correspondent à ce que l'on appelle les *cartes cubiques*. C'est-à-dire qu'elles ne comportent pas de "trous" et surtout qu'il n'y a pas de point où plusieurs frontières se rejoignent.

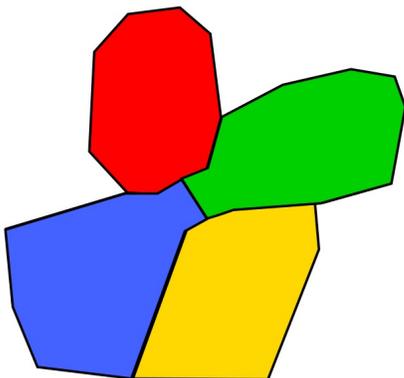
Carte non-cubique



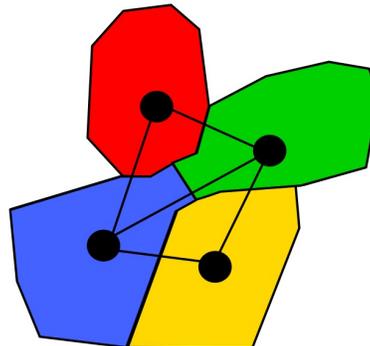
Carte non-cubique  
avec le graphe dual



Carte cubique



Carte cubique  
le graphe est devenu (quasi) triangulaire



## 2.2 La formule d'Euler

En triangulant le graphe, on s'est donc placé d'emblée dans le cas le plus difficile. L'intérêt est que l'on peut alors trouver le "point faible" du graphe. On connaît en effet depuis Euler la formule reliant, pour un

graphe planaire connexe, le nombre de sommets  $s$ , le nombre d'arêtes  $a$  et le nombre de faces  $f$  :

$$a + 2 = s + f$$

Or lorsqu'un graphe est triangulé, on a de plus  $f = 2a/3$ , puisque chaque face "voit" 3 demi-arêtes. La formule d'Euler devient alors :

$$a + 2 = s + \frac{2a}{3}$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{a}{3} + 2$$

Le degré d'un sommet étant le nombre d'arêtes qui le joignent, le degré moyen pour un tel graphe devient  $2a/s$  c'est-à-dire :

$$\bar{d} = 6 - \frac{12}{a + 2}$$

Le point crucial est alors simplement que, puisque le degré moyen est strictement inférieur à 6, il existe au moins un sommet du graphe dont le degré est au plus 5. C'est ce point-là que l'on regarde de plus près.

Le déroulement de la preuve de Kempe est alors :

1. On montre par récurrence sur  $s$  que tout graphe planaire de  $s$  sommets est 4-coloriable.
2. On suppose la propriété vraie pour  $s - 1$  et on considère un graphe de  $s$  sommets. On a vu que l'on peut trianguler ce graphe en gardant constant le nombre de sommets.
3. Ce graphe triangulé comporte au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5. On supprime ce sommet et les arêtes qui le joignent ; on colorie le graphe obtenu par hypothèse de récurrence.
4. On remplace le sommet supprimé. Si son degré est inférieur ou égal à 3, il est évidemment possible de lui assigner une couleur qui n'a pas encore été attribuée à l'un de ses voisins.
5. Restent alors à traiter les cas où ce sommet a quatre ou cinq voisins ; c'est l'objet des paragraphes suivants.

### 2.3 Le sommet de degré quatre

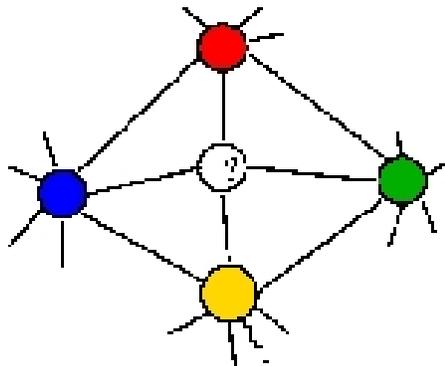
Plus précisément, le seul cas problématique est celui où le coloriage obtenu par hypothèse de récurrence assigne quatre couleurs distinctes aux quatre voisins du sommet considéré :

C'est là que se situe la seconde idée remarquable de Kempe : lorsque l'on considère une *composante connexe bicolore*, il est possible d'inverser les deux couleurs à l'intérieur de cette composante, en préservant la correction du 4-coloriage :

**Définition 1** On considère un graphe 4-colorié. Une composante bi-couleur connexe est un sous graphe connexe tel que :

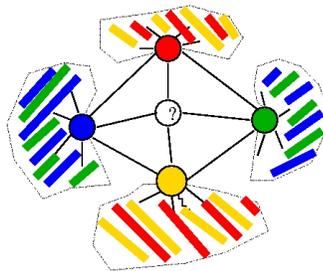
1. ses sommets sont tous coloriés de deux couleurs, qu'on appellera  $A$  et  $B$ ,
2. les sommets du graphes qui sont voisins d'un sommet de la composante, mais ne font pas partie de la composante ne sont pas coloriés par  $A$  ou  $B$ .

Considérons maintenant le cas d'un graphe comportant un sommet de degré 4. Par hypothèse de récurrence, on a colorié tous les sommets sauf celui-là, et ses voisins se sont vus affecter chacune des 4 couleurs



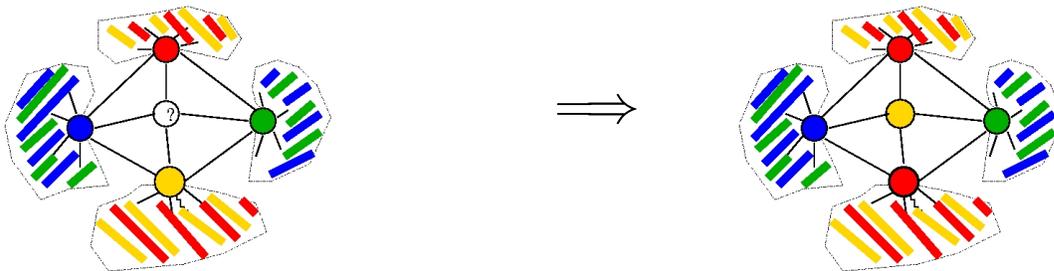
disponibles :

L'idée est alors de considérer les composantes bi-coulores pour les couleurs se faisant face ; dans notre cas

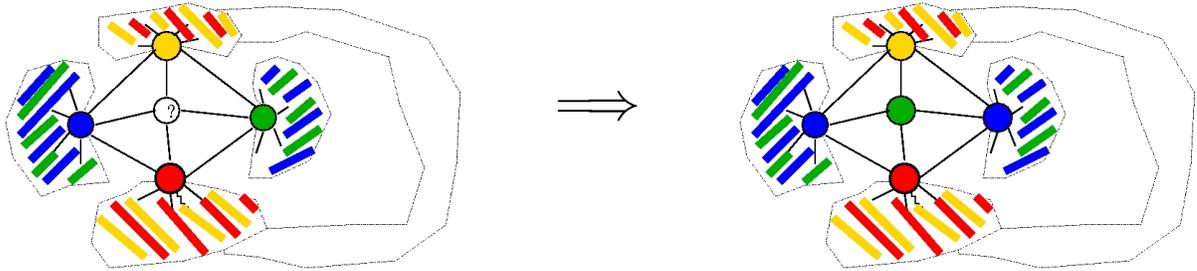


rouge et jaune d'une part, bleu et vert de l'autre.

Si les deux composantes rouge et jaune apparentes sont distinctes, on peut inverser les couleurs à l'intérieur de la première sans affecter la seconde. On "libère" ainsi une couleur pour le sommet central :



Si en revanche ces deux composantes rouge/jaune sont identiques, alors la planarité impose que les deux composantes vert et bleu ne le sont pas. On peut donc effectuer une inversion en conséquence :

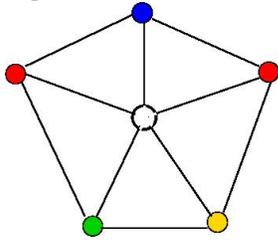


Ceci achève, correctement, le cas du sommet à degré quatre.

## 2.4 Le sommet de degré cinq

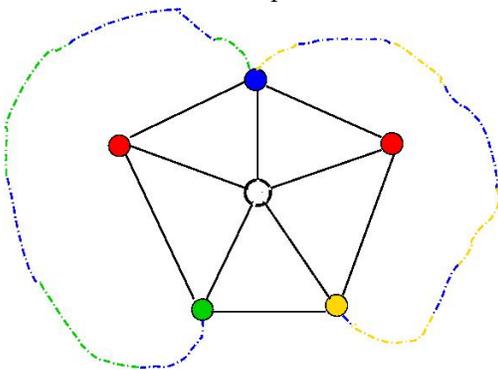
L'erreur de Kempe a été de croire qu'un raisonnement presque aussi simple permettait de traiter le cas d'un graphe dont l'un des sommets est de degré 5. Même si les détails ont surtout un intérêt historique ou anecdotique, il est amusant de regarder son argument dans le détail.

Le seul cas problématique est si les 5 voisins se sont vus affecter les 4 couleurs disponibles. Par symétrie, il est possible de se ramener au cas de figure suivant.

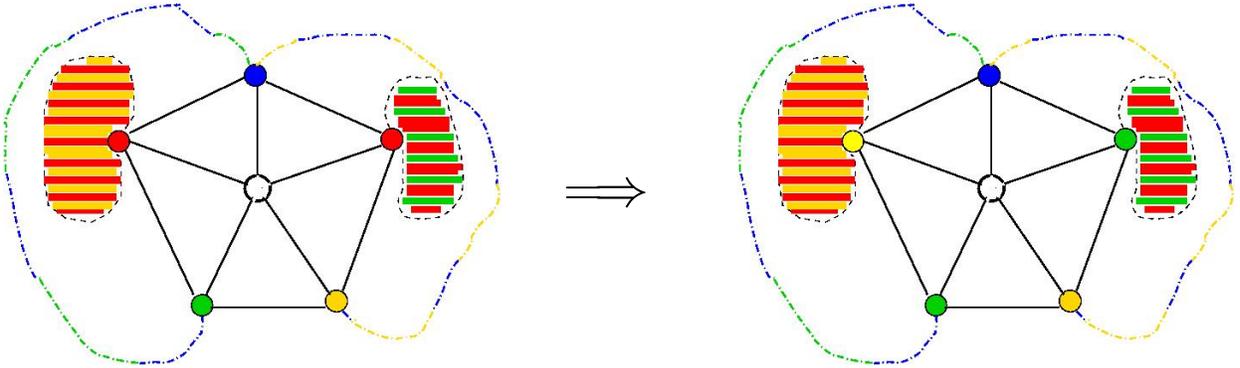


Kempe dit alors :

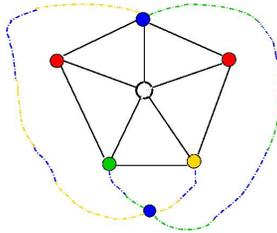
1. Si  $a$  et  $c$  ne sont pas dans la même composante rouge/jaune, on inverse les couleurs dans l'une des deux et on libère la couleur correspondante pour le sommet central.
2. Sinon, si  $a$  et  $d$  ne sont pas dans la même composante rouge/verte, on fait de même.
3. reste alors le cas correspondant au dessin suivant.



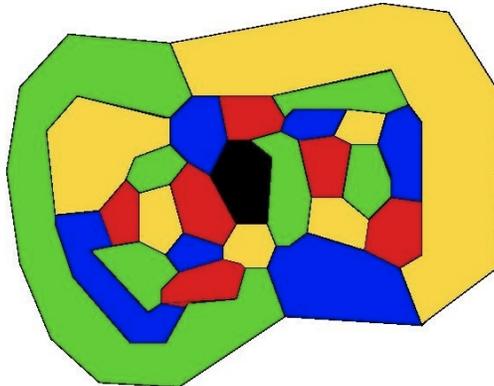
Kempe pense alors que la composante bleu/jaune contenant  $e$  est disjointe de la composante bleu/verte contenant  $b$ . Si c'est le cas, on peut en effet inverser ces deux composantes et libérer ainsi la couleur bleu pour le sommet central.



Malheureusement, la situation 3 peut aussi correspondre au dessin suivant :



et dans ce cas les deux composantes bicolors rouge/jaune et rouge/vertes ne sont pas forcément disjointes. Les inversions prévues ne peuvent alors pas nécessairement se faire. Percy Heawood mis en évidence l'erreur de Kempe en présentant une carte coloriée à l'exception d'un sommet de degré 5, et où aucune suite d'inversions ne permet de finir le coloriage. Voici le contre-exemple de Heawood :



### 3 La contribution de Tait

Alors que la preuve de Kempe n'avait pas encore été invalidée, Tait proposa alors une variante de celle-ci, qui identifiait un outil qui allait se révéler décisif par la suite.

**Définition 2** Une quasi-triangulation, ou graphe quasi-triangulé, est un graphe planaire dont toutes les faces sauf, au plus, une sont bordées de trois arêtes exactement. La face qui n'est pas bordée par trois arêtes est appelée l'extérieur de la quasi-triangulation.

La remarque de Tait est simplement que lorsque l'on considère un graphe planaire quasi-triangulé, c'est-à-dire dont toutes les faces, sauf éventuellement une, sont des triangles, il est équivalent de 4-colorier ses sommets et de 3-colorier les *arêtes*, de telle manière à ce que toute face intérieure soit bordée par les trois couleurs. C'est-à-dire que chacune des trois arêtes de chaque face intérieure se voit affectée une couleur différentes des deux autres.

Il suffit pour cela de définir la couleur d'une arête à partir de celles de ses extrémités par une fonction  $f$  qui soit :

- symétrique en ses deux arguments,  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- telle que  $x \neq y \implies f(x, y) \in \{1; 2; 3\}$ ,
- telle que  $x \neq y \implies f(x, z) \neq f(y, z)$ .

Une telle fonction est, par exemple définie comme :

$$\begin{aligned} f(0, x) &\equiv x \\ f(1, 2) &\equiv 3 \\ f(1, 3) &\equiv 2 \\ f(2, 3) &\equiv 1 \\ f(x, y) &\equiv f(y, x) \text{ pour les autres cas} \end{aligned}$$

Il est immédiat qu'un 4-coloriage des sommets induit un 3-coloriage des arêtes. Le fait qu'un 3-coloriage permette de retrouver le 4-coloriage sous-jacent est du au fait que :

1. Si l'on connaît la couleur  $x$  d'un sommet et la couleur  $f(x, y)$  de l'arête, alors  $y$  est fixée,
2. la somme des couleurs des arêtes d'un cycle est nulle dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

Il suffit donc de connaître  $f(x, y)$  pour tous les sommets  $x$  et  $y$  (cad. toutes les couleurs des arêtes) et la couleur  $x$  d'un sommet (en fait un sommet par composante connexe) pour retrouver la couleur de chaque sommet.

## Inversion dans les tri-coloriages

Un intérêt de la remarque de Tait est qu'elle permet de bien comprendre la combinatoire des inversions de couleurs dans les quasi-triangulation.

Un trois coloriage sur une quasi-triangulation induit immédiatement un trois-coloriage sur le cycle formé par les arêtes de l'extérieur, comme celui de la figure 2.

On peut alors choisir une *couleur pivot*, par exemple rouge. Considérons que les arêtes rouges sont des murs infranchissables.

1. Si l'on est à l'extérieur de la quasi-triangulation en face d'une arête non rouge, par exemple verte (respectivement bleue), on peut franchir cette arête.
2. On se trouve alors à l'intérieur d'une face triangulaire. bordée par une arête rouge infranchissable, une verte (respectivement bleue) déjà franchie et une bleue (respectivement verte).
3. Si l'on s'interdit également de revenir sur ses pas, on n'a donc pas le choix et l'on doit franchir l'arête bleue (respectivement verte).
4. On se retrouve alors soit à nouveau à l'extérieur, auquel cas on a fini le parcours, soit dans une autre face triangulaire, auquel cas on est à nouveau dans la situation 1 et on peut ré-itérer le processus.

Il est facile de se convaincre qu'au cours d'un tel parcours on ne va jamais passer deux fois par une même face. On finit donc toujours par retrouver l'extérieur de la quasi-triangulation. Qui plus est, on "sort" de la quasi-triangulation par une arête verte ou bleue distincte de celle par laquelle on a commencé le parcours.

On voit également que l'on peut faire le même parcours à l'envers : si l'on commence par l'arête de sortie, on terminera par l'arête d'entrée. *Autrement dit, étant donné un trois-coloriage, le choix d'une couleur pivot induit un appariement deux-à-deux entre les arêtes qui ne sont pas de cette couleur pivot.*

On voit un exemple d'appariement signé en figure 2.

On peut maintenant faire trois remarques cruciales :



## 4 Recollement

Considérons deux quasi-triangulations, qui ne partagent que leur face externe. On dira qu'elles sont *complémentaires*. Leur réunion est évidemment une triangulation. De plus, cette triangulation est trois-coloriables (pour les arêtes) si et seulement si il existe un trois-coloriage pour chaque quasi-triangulation, et que ces trois-coloriages coïncident sur les arêtes de la face externe (commune).

La réductibilité, étudiée dans le paragraphe suivant correspond à une propriété forte de certaines quasi-triangulations : quelque soit la quasi-triangulation complémentaire, pourvu que cette dernière soit trois-coloriable, il est toujours possible de trouver un trois-coloriage de la réunion.

## 5 Réductibilité

Appelons  $n$  le nombre d'arêtes du bord. Un coloriage  $c$  du bord est donc un mot de longueur  $n$  composé de trois couleurs. Étant donné un chromogramme  $w$  et une couleur pivot  $p$ , on définit la relation  $w \simeq_p c$  par les clauses :

1.  $\square \simeq_p \square$  où  $\square$  désigne à la fois le coloriage et le chromogramme vide.
2. Si  $w \simeq_p c$  alors  $w_- \simeq_p cp$ .
3. Si  $a$  est une couleur distincte de  $p$  et  $w \simeq_p c$ , alors  $(w)^+ \simeq_p aca$ .
4. Si  $a$  et  $b$  sont deux couleurs distinctes et différentes de  $p$  et  $w \simeq_p c$ , alors  $(w)^- \simeq_p acb$ .

On dit alors que le coloriage  $c$  *convient* au chromogramme  $w$  pour le pivot  $p$ .

La remarque simple mais cruciale est alors que : si la quasi-triangulation admet un trois-coloriage qui, lorsque l'on choisit le pivot  $p$ , a le même appareillage par le chromogramme  $w$ , alors quelque soit  $c$  et  $p'$  tel que  $w \simeq_p c$ , il est possible de re-colorier la quasi-triangulation pour obtenir un trois-coloriage induisant  $c$  sur le bord.

Soit maintenant un ensemble  $\mathcal{C}$  de coloriages du bord, dont on suppose qu'ils peuvent tous être obtenus à partir de trois-coloriages corrects. Soit maintenant un coloriage  $c$  tel que :

$$\exists p. \forall w. w \simeq_p c \implies \exists c' \in \mathcal{C}. w \simeq_p c'.$$

Autrement dit, on peut choisir un pivot tel que, quel que soit le chromogramme correspondant au trois-coloriage sous-jacent, il est toujours possible de se ramener à un coloriage de  $\mathcal{C}$ .

Alors, si l'on veut recoller la quasi-triangulation avec une autre quasi-triangulation  $K$  qui admet un trois-coloriage induisant  $c$  sur le bord, on comprend que sous la condition précédente, il est possible de re-colorier  $K$  pour aboutir à un coloriage du bord qui soit élément de  $\mathcal{C}$ .

On peut évidemment itérer ce processus. On arrive ainsi aux définitions suivantes, étant donné une quasi-triangulation  $K_0$  :

- Soit  $\mathcal{C}_0$  l'ensemble des coloriages du bord correspondant à des trois-coloriages corrects de  $K_0$ .
- Soit  $\mathcal{C}_{i+1} \equiv \{c, \exists p, \forall w, w \simeq_p c \implies \exists c' \in \mathcal{C}_i, w \simeq_p c'\} \cup \mathcal{C}_i$ .

Comme la suite des  $\mathcal{C}_i$  est croissante pour l'inclusion, elle admet évidemment un point-fixe  $\mathcal{C}_\infty$ .

On dit alors que la quasi-triangulation est D-réductible si  $\mathcal{C}_\infty$  contient tous les coloriages possibles (vérifiant les conditions de parité).

La propriété essentielle est :

**Théorème 1** *Soit deux quasi-triangulations  $K_1$  et  $K_2$  ayant des bords de même longueur. Si les  $K_1$  et  $K_2$  sont toutes les deux trois-coloriables et si  $K_1$  est D-réductible, alors le recollement de  $K_1$  et  $K_2$  est trois-coloriable (et donc quatre-coloriable).*

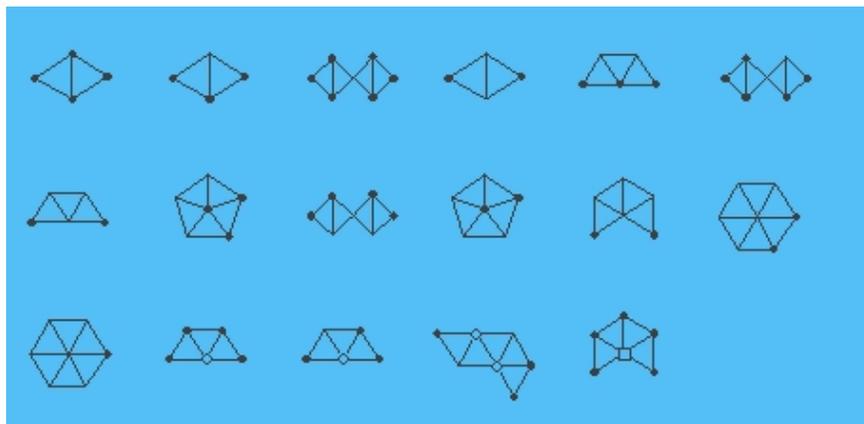
## 6 Les preuves modernes

Avec la notion de réductibilité, on a la clé des preuves modernes (et correctes) du théorème des quatre couleurs : on va exhiber un ensemble de quasi-triangulations qu'on appellera *configurations* tel que :

- Ces configurations soient toutes réductibles.
- l'ensemble des configurations soit *inévitable*, c'est-à-dire que toute triangulation contient soit une configuration, soit vérifie un autre critère garantissant qu'elle est quatre-coloriable.

L'ensemble inévitable de configurations est obtenu en ne cherchant plus le sommet de plus petit degré dans le graphe, mais celui ayant le plus petit nombre de voisins de distance 2. Formellement, ce sommet est décrit à travers un certain nombre de règles de grammaire de graphes qui, lorsqu'elles peuvent être appliquées localement vont déplacer des valeurs de poids d'un sommet à un autre. On cherche alors le sommet de plus grand poids.

L'intérêt de cette présentation sous forme de règles est qu'elle conduit à une méthode utilisable pour effectivement démontrer l'inévitabilité. L'ensemble inévitable, dans la démonstration de 1995, est composé de 633 configurations, dont voici les premières :



### C-réductibilité

Pour être précis, seule une minorité de ces configurations est D-réductibles. La plupart sont C-réductibles, c'est-à-dire qu'elles sont munies d'un *contrat* correspondant à une ou deux arêtes marquées en gras sur le dessins. Lorsque l'on calcule  $\mathcal{C}_\infty$  on va trouver un certain nombre de coloriages que l'on ne sait pas traiter. On remarque alors que lorsque l'on calcule l'ensemble  $\mathcal{C}_\infty$  correspondant à la configuration *après contraction des arêtes du contrat*, on ne sait toujours pas traiter ces coloriages. On en déduit donc que si ces coloriages manquant permettaient de construire un contre-exemple aux quatre couleurs, alors on pourrait faire de même avec la configuration contractée. Ce qui suffit à conclure qu'il ne s'agit pas d'un contre-exemple minimal.

## 7 Vérification de la réductibilité

Le programme vérifiant la réductibilité calcule donc, pour chaque configuration, les ensembles  $\mathcal{C}_i$  successifs jusqu'à arriver au point-fixe.

### 7.1 Algorithme naïf

On commence par calculer  $\mathcal{C}_0$  en énumérant tous les coloriages. Il est bien sûr avantageux d'utiliser une bonne stratégie pour cela, mais il ne s'agit pas d'une étape critique. Dans la pratique, on trouve jusqu'à un peu plus de 20.000 éléments à  $\mathcal{C}_0$  pour 500.000 coloriages de bonne parité.

On peut remarquer qu'il est possible de calculer  $\mathcal{C}_{i+1}$  directement à partir de  $\mathcal{C}_i$  :

$$\mathcal{C}_{i+1} \equiv \{c, \exists p, \forall w, w \simeq_p c \implies \exists c' \in \mathcal{C}_i, w \simeq_p c'\} \bigcup \mathcal{C}_i$$

il faut pour cela énumérer tous les mots  $w$  (n'appartenant pas déjà à  $\mathcal{C}_i$ , tous les pivots  $p$  possibles, tous les chromogrammes  $w$  tels que  $w \simeq_p c$ , puis vérifier s'il existe une reconfiguration  $c'$  du coloriage suivant  $w$  telle que  $c' \in \mathcal{C}_i$ .

Cet algorithme est facile à implémenter et économe en mémoire; il est en revanche très inefficace. Ce sont les deux dernières étapes qui demandent du calcul. La seconde sera la plus coûteuse, car elle doit être effectuée plus souvent.

## 7.2 Algorithme habituel

On a donc clairement intérêt à garder en mémoire non seulement l'ensemble  $\mathcal{C}_i$  courant, mais aussi l'ensemble des chromogrammes correspondants. C'est-à-dire :

$$\mathcal{K}_i \equiv \{w, \exists p, \exists c \in \mathcal{C}_i, w \simeq_p c\}.$$

On peut alors re-définir :

$$\mathcal{C}_{i+1} \equiv \{c, \exists p, \forall w, w \simeq_p c \implies w \in \mathcal{K}_i\} \bigcup \mathcal{C}_i$$

ce qui suggère immédiatement une implémentation plus efficace.

1. On calcule  $\mathcal{C}_0$  et on initialise  $i$  à 0.
2. On parcourt  $\mathcal{C}_i$  et pour chaque élément  $c$ , pour chaque pivot  $p$ , on ajoute tous les chromogrammes  $w$  tels que  $w \simeq_p c$  à  $\mathcal{K}_i$ .
3. On parcourt les  $w$  que l'on vient d'ajouter; pour chacun, on parcourt les  $c'$  tel que  $w \simeq_p c'$ . Parmi ceux-ci, on repère ceux tel que tous les  $w' \simeq_p c'$  sont déjà éléments de  $\mathcal{K}_i$ . Ces coloriages  $c'$  sont ajoutés à  $\mathcal{C}_i$ . Une fois cette étape terminée on a calculé  $\mathcal{C}_{i+1}$ .
4. On peut alors revenir à l'étape 2. Si jamais on n'a ajouté aucun coloriage à  $\mathcal{C}_i$ , le calcul est terminé.

Bien sûr, on représente alors les ensembles  $\mathcal{K}_i$  comme des arbres quaternaires, puisque les chromogrammes peuvent être vus comme des mots d'un alphabet de quatre lettres. Là encore il est possible de gagner de la place mémoire en considérant que l'on a moins de liberté pour les dernières lettres.

## 7.3 Algorithme optimisé

L'algorithme décrit ci-dessus et qui est utilisé, par exemple par Robertson et ses co-auteurs. C'est donc lui qui est (très minutieusement) décrit dans les écrits accompagnant leur article.

La vitesse d'exécution plus limitée de Coq<sup>1</sup> a conduit à chercher une optimisation supplémentaire. On remarque qu'à chaque fois qu'un nouveau chromogramme est ajouté à  $\mathcal{K}_i$ , il faut, pour chaque  $c'$  parcourir et tester tous les chromogrammes correspondants. On peut éviter ce parcours en remarquant qu'il est possible de *pré-calculer*, pour chaque coloriage  $c$  et chaque pivot  $p$  le nombre de chromogrammes  $w$  tels que  $w \simeq_p c$ . On va donc utiliser une représentation plus fine des ensembles  $\mathcal{C}_i$  : pour chaque  $c$  et chaque  $p$ , on va stocker le nombre de chromogrammes correspondants qui ne sont pas éléments de  $\mathcal{K}_i$ .

L'algorithme devient alors :

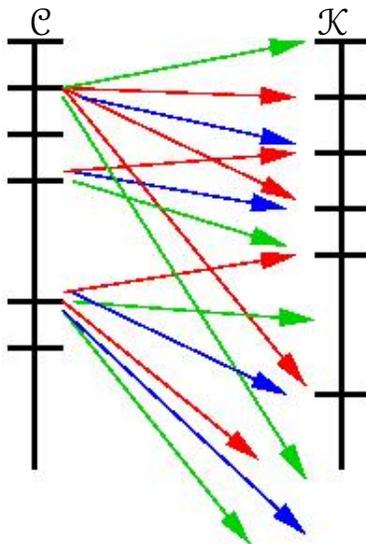
1. On calcule  $\mathcal{C}_0$  et on initialise  $i$  à 0.
2. On parcourt  $\mathcal{C}_i$  et pour chaque élément  $c$ , pour chaque pivot  $p$ , on ajoute tous les chromogrammes  $w$  tels que  $w \simeq_p c$  à  $\mathcal{K}_i$ .

---

1. Cette optimisation a été proposée par Georges Gonthier a un moment où la compilation était seulement en cours d'intégration à Coq.

3. A chaque fois qu'un chromogramme  $w$  est ajouté à  $\mathcal{K}_i$ , on parcourt les  $c'$  qui lui correspondent et on décrémente le compteur correspondant dans  $\mathcal{C}_i$ . Si jamais ce compteur tombe à 0, alors  $c'$  fait partie des nouveaux éléments de  $\mathcal{C}_{i+1}$ .
4. On parcourt les  $c'$  qui viennent d'être ajoutés pour passer de  $\mathcal{C}_i$  à  $\mathcal{C}_{i+1}$  et on revient à l'étape 2.

On peut décrire la combinatoire du problème initial en la décrivant par un graphe dont les sommets sont les coloriages et les chromogrammes, avec une arête entre  $w$  et  $c$  si  $w \simeq_p c$  :



On peut remarquer qu'avec cette optimisation, l'algorithme parcourt exactement *une fois* chaque arête ; ce qui semble optimal.

Cette optimisation permet de traiter les calculs de réductibilité dans un cadre fonctionnel dans un temps presque comparable au programme C fourni par Robertson et ses co-auteurs.

## 8 Quelques remarques

Je passe ici sous silence bien d'autres aspects de la preuve formelle, qui sont décrits dans tous les détails par Georges Gonthier [2]. Les plus importants sont sans doute :

- Le traitement formel des graphes planaires orientés comme des *hypercartes*. Cette structure combinatoire, indépendamment découverte par des théoriciens de graphes comme Robert Cori, permet de définir formellement et de manière utilisable, les notions de faces, de chemins, d'extérieur et d'intérieur d'une configuration, de contraction et d'effacement d'arêtes, etc.
- Le rôle du langage de preuve. Georges Gonthier ayant développé au cours de ce développement un certain nombre de tactiques de preuves particulièrement adaptée à un certain style de formalisation. Ce que l'on peut remarquer à ce propos, et que ce style de preuve exploite lui aussi très largement la capacité de la théorie des types à raisonner *modulo le calcul*. Mais non pas à grande échelle comme dans la partie calculatoire décrite ci-dessus, mais à petite échelle. Les propositions se réécrivent petit à petit, en évitant à chaque fois le recours à des lemmes explicites.

## Références

- [1] G. D. Birkhoff. The reducibility of maps. *American Journal of Mathematics*, 35 :115–128, 1913.
- [2] G. Gonthier. A computer checked proof of the four-color theorem. available on the web, 2005.

- [3] Georges Gonthier and Benjamin Werner. Le théorème des quatre couleurs : ingénierie d'une preuve formelle. *La lettre de l'Académie des sciences*, 21, 2007.
- [4] Heinrich Heesch. Untersuchungen zum vierfarbenproblem. 80/a/b, 1969.
- [5] Alfred Kempe. On the geographical problem of the four colours. *American Journal of Mathematics*, 2 (part 3) :271–283, 1879.
- [6] Wolfgang Haken Kenneth Appel. Every planar map is four colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 :711–712, 1976.
- [7] Wolfgang Haken Kenneth Appel. Every planar map is 4-colorable – 1 : Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21 :421–490, 1977.
- [8] Wolfgang Haken Kenneth Appel. Every planar map is 4-colorable – 2 : Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21 :491–567, 1977.
- [9] Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. The four-colour theorem. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 70(1) :2–44, 1997.
- [10] P. G. Tait. Note on a theorem in the geometry of position. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 29 :657–660, 1880.