MPRI, cours 2-7-1, preuves constructives

examen du 20 novembre 2006

Durée 2 heures.
tous documents autorisés.

1 Echauffement

(a) Soit p un terme tel qu'en Théorie des Types on ait :

$$p : (\Sigma x : N.x + x = 6) \vee (\Sigma x : N.x + x = 7)$$

Quelle est la forme normale de $\pi_1(p)$?
(b) Ecrivez un terme t de type $A \to B \to \Sigma x : A.B$, Un autre de type $(A \to B \to C) \to (\Sigma x : A.B) \to C$ puis de type $((\Sigma x : A.B) \to C) \to A \to B \to C$.

2 Définitions Imprédicatives

(a) Définir en Théorie des types simples (HOL) le prédicat P_{32} sur les entiers qui exprime que les seuls facteurs premiers de l'entier sont 2 et 3 (c'est-à-dire qu'il est de la forme $2^i \times 3^j$).
(b) Traduire cette définition en Calcul des Constructions. Ecrivez un terme p de type $(P_{32}\ 8)$. En général, quelle est, en gros, la taille d'une preuve de $(P_{32}\ 2^i)$?

3 Même idée, autre méthode

On a écrit en théorie des types de Martin-Löf une fonction

$$pair : N \to N$$

qui rend 0 comme résultat si l'argument est impair et 1 sinon.

Ecrivez la fonction qui teste si un entier est une puissance de 2, puis définissez le prédicat "être une puissance de deux".

S'il vous reste du temps à la fin, vous pouvez construire la fonction pair ci-dessus.

4 Système F

Ecrire le terme test0 qui rend 1 si son argument est 0 et 0 si son argument est est un entier non nul. Ecrire ensuite le terme pair qui se comporte comme son homologue de la question précédente.

5 Un peu d'écologie

On veut étendre la théorie des types de Martin-Löf avec des arbres binaires. Pour simplifier, on considère que ces arbres ne contiennent que des nombres dans leurs nœuds.

On ajoute donc à la syntaxe les constantes suivantes avec leurs types :

$$\begin{array}{rcl} Arbre & : & \mathsf{Type} \\ Feuille & : & Arbre \\ Noeud & : & N \to Arbre \to Arbre \\ RAb_P & : & (P\ Feuille) \to \\ & & \quad (\Pi T_1 : Arbre.\Pi T_2 : Arbre.\Pi n : N. \\ & & \quad\quad (P\ T_1) \to (P\ T_2) \to (P\ (Noeud\ n\ T_1\ T_2))) \\ & & \quad \to \Pi T : Arbre.(P\ T) \end{array}$$

(a) Quel est le type de P dans la ligne ci-dessus ?
(b) Quelles règles de réduction ajoute-t-on ? (on s'inspirera, bien sûr, du système T)
(c) On dit qu'un arbre est un tas, si :
- si c'est une feuille,
- ou bien si c'est un nœud, que l'entier à la racine est plus petit que tous les entiers apparaissant dans les deux sous-arbres et que les deux sous-arbres sont des tas.

Comment feriez-vous pour construire le prédicat "être un tas" ?

6 Devinettes

(a) Existe-t-il dans le Calcul des Constructions un terme T et un contexte Γ tel que $\Gamma \vdash T : \mathsf{Type}$ et $T =_\beta T \to T$? Justifiez.
(b) Peut-on construire des termes t clos tel que :

$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.x \leq (f\ y))$$
$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.(f\ y) \leq x)$$

Justifiez rapidement chaque cas.