

MPRI 2-7-1
Fondements des systèmes de preuves

Gilles Dowek et Alexandre Miquel

Jeudi 1^{er} Décembre

Durée 2h.
Tous documents autorisés.

1

(4 pts)

Soit $\Gamma = A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D$. On donne la démonstration en déduction naturelle suivante

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, B \vdash C \Rightarrow D}{\Gamma \vdash B \Rightarrow D} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma B \vdash B \Rightarrow C} \quad \overline{\Gamma B \vdash B}}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma, B \vdash D} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \overline{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash D}$$

- (a) Cette démonstration est-elle sans coupures ?
- (b) Exprimer cette démonstration par un terme du λ -calcul simplement typé.
- (c) Quelle est la forme normale de ce terme ?
- (d) A quelle démonstration correspond-il ?

2

(4 pts)

Dans le $\lambda\Pi$ -calcul, donnez des termes des types suivants

- (a) $\forall x ((\forall y P(y)) \Rightarrow P(x))$
- (b) $P(0) \Rightarrow (\forall x (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow P(S(S(0)))$
- (c) $\forall x P(x)$
- (d) $P(0) \Rightarrow (P(0) \Rightarrow P(0))$

3

(4 pts)

Donner un terme dans le système T exprimant calculatoirement les fonctions suivantes, ou dire (sans justification) qu'il n'en n'existe pas.

- (a) la fonction qui a n associe $n + 2$
- (b) la fonction qui a n associe 0 ou 1 selon la parité de n
- (c) la fonction qui a n associe $2 \times n$
- (d) la fonction qui a n associe 2^n

4

(4 pts)

- (a) Dans la théorie des types de Martin-Löf donnez un terme t de type

$$\forall x \exists y (x = S(y) \vee x = 0)$$

- (b) Quelle est la forme normale du terme $(t \ 7)$?

5

(2 pts)

Soit a un entier et g une fonction des entiers dans les entiers. On définit la fonction g des entiers dans les entiers par

$$g(0) = a$$

$$g(S(n)) = f(g(n))$$

montrer que si g est exprimable dans le système F (λ -calcul polymorphe) alors c'est aussi le cas de la fonction f .

6

(2 pts)

Le terme $\lambda x (x \ x)$ est-il typable dans le système F (λ -calcul polymorphe) ?