DEA de Programmation
Preuves Constructives
Examen

6 décembre 2002

1 Martin-Löf et système T

(a) Définissez la multiplication et l'exponentielle dans la théorie de Martin-Löf. On les appellera ensuite mult et exp.

(b) On a fabriqué un terme

$$t : \Pi a : \mathrm{nat}.\Sigma b : \mathrm{nat}.\Sigma c : \mathrm{nat}.(a = (\mathrm{mult}\ (\mathrm{exp}\ \ 2\ b)\ c) \wedge \Pi d : \mathrm{nat}.\neg c = (\mathrm{mult}\ 2\ d)).$$

Écrivez les formes normales de :

$$\pi_1(t\ 10)$$
$$\pi_1(\pi_1(t\ 10)).$$

2 Système T

On dispose du récurseur du système T et du produit cartésien. On veut définir une fonction de division par deux.

Indication : pour cela, définissez une fonction récursive $\mathrm{nat} \rightarrow (\mathrm{nat} * \mathrm{nat})$ bien choisie.

3 Imprédicativité

(a) On est dans la théorie des types simples de Church (ou "HOL").
Comprenez-vous le prédicat suivant ?

$$M \equiv \lambda n : \iota.\lambda x : \iota.\forall_{\iota \rightarrow o} P.(P\ n) \Rightarrow (\forall_\iota y.(P\ y) \Rightarrow (P\ (S\ (S\ y)))) \Rightarrow (P\ x)$$

(b) Traduisez M dans le Calcul des Constructions. Quel est son type ?

(c) Toujours dans CC, soit $t : (M\ 3\ 11)$. Quelle est la forme normale de : $(t\ \lambda z : \mathrm{nat}.\mathrm{nat}\ O\ \lambda a : \mathrm{nat}.\lambda r : \mathrm{nat}.(S\ r))$?

4 Déduction Modulo

On ajoute à l'arithmétique de Peano un symbole de prédicat binaire R ainsi que les règles de réécriture :

$$\begin{array}{rcl} R(0,0) & \rhd & 0 = 0 \\ R(S(x), S(y)) & \rhd & R(x,y) \end{array}$$

(a) Pour chacune des propositions suivantes, dite si elles sont prouvables, si elles sont niables, et expliquer *succintement* pourquoi :

$$R(3,3) \qquad R(3,4) \qquad \neg R(3,4) \qquad \forall x.R(x,x) \qquad \neg\forall x.\forall y R(x,y) \qquad \forall x.\neg R(S(x),x)$$

(b) On rajoute la règle :

$$R(S(x),0) \;\triangleright\; 1=0$$

Quelles propositions ci-dessus deviennent prouvables ?

(c) On rajoute encore :

$$R(0,S(x)) \;\triangleright\; 0=0$$

Que dire alors de R ?

Sauriez-vous transposer la définition de R dans la théorie des types de Martin-Löf de la manière à préserver les réductions ?

(d) On se donne, en sus, un symbole de fonction f d'arité deux avec les règles :

$$\begin{array}{rcl} f(S(x),0) & \triangleright & S(O) \\ f(x,S(y)) & \triangleright & x * f(x,y) \\ R(f(S(S(x)),S(S(x))),S(S(x))) & \triangleright & \bot \end{array}$$

Peut-on prouver $\forall x.\forall y.\exists z.z = f(x,y)$?

(e) La théorie ainsi obtenue est-elle cohérente ?