Preuves Constructives
Examen
DEA de Programmation

13 Décembre 2000

1 Echauffement

L'étudiant Géo Codetout a construit en théorie de Martin-Löf un terme clos t de type suivant :

$$t : \Pi x : \text{nat}.\Sigma y : nat.((x = S(y)\ +\ x = 0).$$

Dites ce que l'on sait des formes normales des termes suivants : $\pi_1(t\ (S(S(S(0))))), \pi_1(S(0))$ et $\pi_1(0)$.

2 Listes en déduction modulo

On se place en déduction modulo. La signature de la théorie considérée permet de décrire des listes d'entiers naturels ; on a donc les sortes nat et list. Les entiers sont construits à l'aide des constantes 0 et S, comme d'habitude. Les listes sont obtenues à partir des constantes suivantes :

- [] pour la liste vide,
- _ :: _ pour le cons,
- _@_ pour la concaténation,
- rev(_) pour la fonction qui renverse une liste.

Le cons et la concatenation sont notés de manière infixe. Comme d'habitude, on s'autorise a noter $[a; b; c]$ pour, par exemple, $a :: b :: c :: []$.

On s'autorise à raisonner par récurrence structurelle sur les listes. Le principe de récurrence est semblable à l'axiome de Peano ; il est donné par le schéma de regles suivantes pour chaque prédicat P sur les listes :

$$\frac{\Gamma \vdash P([]) \qquad \Gamma \vdash \forall_{\text{nat}} a.\forall_{list} l.P(l) \Rightarrow P(a :: l)}{\Gamma \vdash \forall_{list} l.P(l)}\ (\textsc{RecL})$$

Par ailleurs, on raisonne modulo la congruence engendrée par les règles de réécriture suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
[]@l & \rhd & l & (1)\\
l@[] & \rhd & l & (2)\\
(x :: l)@m & \rhd & x :: (l@m) & (3)\\
(l@m)@n & \rhd & l@(m@n) & (4)\\
\text{rev}([]) & \rhd & [] & (5)\\
\text{rev}(\text{a : : l}) & \rhd & \text{rev(l)}@[a] & (6)\\
\text{rev(l@m)} & \rhd & \text{rev(m)@rev(l)} & (7)
\end{array}$$

a) Donnez les signatures des différentes constantes.

b) Donnez une preuve que la fonction rev(_) est involutive :

$$\forall_{list} l.\text{rev}(\text{rev}(\text{l})) = l.$$

On rappelle à ce sujet les deux règles principales caractérisant l'égalité :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}(\textsc{refl}) \qquad \frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash P'}(\textsc{Leibniz})$$

Où, dans la seconde règle, P' est obtenue en remplaçant une occurence de u par t.

c) On ajoute à la théorie un prédicat discr sur les listes, ainsi que les deux règles de réductions suivantes :

$$\mathsf{discr}([]) \quad \triangleright \quad 0 = 0 \tag{8}$$
$$\mathsf{discr}(a :: l) \quad \triangleright \quad \bot \tag{9}$$

Informellement, que "signifie" la proposition $\mathsf{discr}(l)$?

A l'aide de ce prédicat, donnez une preuve de la proposition $[] = x :: l \Rightarrow \bot$.

d) Si vous deviez étendre la définition de discr, par quoi remplaceriez vous les points de suspension suivants :

$$\mathsf{discr}(\mathrm{rev}(\mathrm{l})) \triangleright \ldots.$$

Informellement, expliquez pourquoi on ne peut pas ajouter une règle de la forme $\mathsf{discr}(l@m) \triangleright \ldots$.

3 Listes dans la théorie de Martin-Löf

On considère maintenant la théorie de Martin-Löf étendue par des listes. Seules les constantes [] et _ :: _ sont primitives, ainsi que la familles d'opérateurs RecL_P pour calculer et raisonner sur les listes. Les règles sont donc :

$$\frac{\Gamma \text{ wf}}{\Gamma \vdash \text{list} : \text{Type}} \qquad \frac{\Gamma \text{ wf}}{\Gamma \vdash [] : \text{list}}$$

$$\frac{\Gamma \text{ wf}}{\Gamma \vdash \_ :: \_ : \text{nat} \to \text{list} \to \text{list}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \text{list} \to \text{Type}}{\Gamma \vdash \mathrm{RecL}_P : (P\ []) \to (\Pi a : \text{nat}.\Pi l' : \text{list}.(P\ l') \to (P\ a :: l')) \to \Pi l : \text{list}.(P\ l)}$$

La β-réduction est étendue par les deux règles suivantes :

$$(\mathrm{RecL}_P\ p_0\ p_c\ []) \quad \triangleright \quad p_0 \tag{10}$$
$$(\mathrm{RecL}_P\ p_0\ p_c\ a :: l) \quad \triangleright \quad (p_c\ a\ l\ (\mathrm{RecL}_P\ p_0\ p_c\ l)) \tag{11}$$

a) Définissez les fonctions _@_ puis rev(_) dans cette théorie des types.

b) Certaines des réductions de la partie 2 sont directement vérifiées par ces nouvelles définitions. Lesquelles ?

c) Les autres réductions de la question 2 peuvent être transformées en égalités ; par exemple $\Pi l : \text{list}.(l@[]) =_{\text{list}} l$. Enoncez tous ces lemmes. Dans quel ordre faut-il les prouver ? De quelles manières ?

d) Indiquez les étapes principales de la preuve de l'involutivité de rev(_).

4 Un doigt d'imprédicativité

Sauriez-vous définir la propriété "être divisible par trois" dans la théorie des types simples de Church ? Donnez le λ-terme qui définit ce prédicat.