

Université Paris Diderot (Paris 7)  
UFR d'Informatique

THÈSE  
pour l'obtention du diplôme de  
Docteur de l'Université Paris Diderot, spécialité informatique

SÉMANTIQUE DES JEUX  
ASYNCHRONES ET RÉÉCRITURE  
2-DIMENSIONNELLE

présentée et soutenue publiquement par

Samuel MIMRAM

le 1<sup>er</sup> décembre 2008

devant le jury composé de

M.	Pierre-Louis	CURIEN	président
M.	Éric	GOUBAULT	
M.	André	HIRSCHOWITZ	rapporteur
M.	Martin	HYLAND	rapporteur
M.	Paul-André	MELLIÈS	directeur de thèse
M.	Dale	MILLER	
Mlle	Nobuko	YOSHIDA	

# Merki

---

Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans les innombrables personnes que j'ai eu la chance de rencontrer et avec qui j'ai pu discuter. Je tiens ici à les remercier. Si ces trois années ont été un véritable plaisir pour moi, c'est en particulier grâce à elles. En premier lieu, je tiens évidemment à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Paul-André Melliès, qui m'a introduit aux thématiques développées au sein de cette thèse, ainsi qu'au monde de la recherche. Jamais avare en discussions et en idées, que ce soit à propos de science ou du reste, il a su à la fois me guider dans mon travail et m'ouvrir à des pans nouveaux de l'informatique et des mathématiques. Merci pour ces heures joyeuses passées au tableau ou ailleurs.

Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury de me faire l'honneur de leur présence pour juger de mon travail. Merci à Pierre-Louis Curien sans qui notre formidable laboratoire ne serait sans doute pas aussi formidable. Merci à Éric Goubault avec qui j'ai découvert que les programmes vivent dans un univers géométrique. Merci à André Hirschowitz d'avoir accepté d'être mon rapporteur ainsi que pour les travaux novateurs en sémantique des jeux de la dynastie Hirschowitz. Merci aussi à Martin Hyland d'avoir bien voulu être mon rapporteur, ainsi que pour les longues discussions au cours desquelles il m'a expliqué tant de choses *subtiles*. Merci à Dale Miller dont les travaux sur les jeux et la focalisation affinent notre compréhension des preuves. Merci enfin à Nobuko tant pour sa présence dans mon jury que pour m'avoir accueilli trois mois à Londres où j'ai beaucoup appris.

Merci aussi à Yves Lafont qui n'a malheureusement pas pu faire partie de ce jury. Cette thèse doit énormément aux ponts qu'il a su bâtir entre l'informatique et l'algèbre. Qu'il continue encore longtemps à les consolider et à en inventer d'autres.

Le laboratoire PPS a été un environnement incroyablement riche et stimulant. À toute heure, on peut y trouver quelqu'un pour parler, boire un café ou faire des mots croisés. Les nombreux thésards ont en particulier contribué à sa bonne ambiance : merci à Nicolas pour les discussions par dessus nos écrans toujours en musique, merci à mes amis Séverine (et docteur Pasquale), Christine (qui coiffe au poteau), Sylvain, Gim, Grégoire, Pierre, Mehdi (ouaf), Fabien, Stéphane, Barbara et Jaap. Sans oublier les vieux Joachim, Caroline, Fabien, Sam et Manu, et la bande d'italiens Michele, Damiano, Pietro, Giulio, Paolo et Stefano. Et bon courage à Jonas à qui je passe le flambeau. Merci aussi pour les échanges très enrichissants avec ceux qui ont déjà passé leur thèse depuis plus longtemps, en particulier Olivier Laurent (comme quoi on peut faire des jeux

et avoir des cheveux), Russ Harmer (bio-man), Vincent Balat (euh, il est plus thésard lui ?), Claudia Faggian, Boris Yakobowski, Juliusz Chroboczek, Daniele Varacca, Pierre Letouzey, Alexandre Miquel, Samy Abbes, Ralf Treinen et Roberto Di Cosmo. Merci à Odile qui fait tourner ça rond. Merci aussi à Albert Burroni et François Métayer du canal catégorique, pour qui les polygraphes n'ont presque aucun secret.

Mais les thésards ne sont pas qu'à PPS. Il y en a aussi au LIAFA, en face : merci à Marie, à Julien, à Claire et aux autres. Il y en a aussi à l'X : un grand merci à David et à Romain avec qui on s'amuse bien et on fait même de l'informatique sur des ordinateurs, merci aussi à Alexis, à Olivier et aux autres. Il y en a même à Marseille via Lyon : merci à Marc et à Étienne. Ou encore à Lille : merci à Emmanuel avec qui on a fait de la zik et surtout du bis, voire pire. Merci aussi aux thésards qui sont restés à l'ENS Lyon. Et pour finir sur Paris d'où on est parti : merci à Martin. Bon courage aux thésards de PPS et d'ailleurs pour la fin.

Mon premier contact avec la recherche s'est fait durant le stage que j'ai effectué avec monsieur Daniel papa-du-MIM Hirschhoff, merci pour son soutien, son humour au niveau des blagues et ses douches froides ; merci aussi à Étienne Lozes de m'avoir aidé durant ce stage. Merci aussi à Thierry Coquand pour mon deuxième contact. J'ai eu par la suite la grande chance de rencontrer des gens de partout, toujours sympathiques et ouverts, grâce à qui j'ai pu beaucoup apprendre. Merci à Laurent Régnier, merci aux frères Michel et Tom Hirschowitz, merci à Emmanuel Haucourt, merci à Yves Guiraud, merci à Pierre Hyvernât, merci à Patrick Baillot et merci à Daniel de Carvalho. Merci aussi à John Baez pour les catégories et le café. J'ai eu la chance de passer trois mois à Londres et de rencontrer Nobuko Yoshida, Martin Berger et Kohei Honda, un grand merci à eux ainsi qu'à ceux avec qui j'ai pu boire des bières (anglaises).

Mais la science n'est pas tout. Merci à Alexis, à Benjamin, à David, à Grégory, à Henri et à Louis avec qui j'ai chargé les instrus dans la voiture. La Gouaille est immortelle.

Merci à mes amis avec qui on a bien rigolé pendant ce temps.

Merci à ma famille, à ma mère Isabelle, à mon père Marc, à ma sœur Elsa, à mon frère Léo, à mes grands-parents Papy et Mamy, ainsi qu'aux autres membres pour leur soutien indéfectible.

Merci à ceux que j'aurais oublié de citer ici.

Merci Caroline, ma vie est toujours comme dans un film de cinéma grâce à toi.

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>0 Théorie des catégories</b>	<b>14</b>
0.1 Catégories . . . . .	14
0.2 2-catégories . . . . .	18
0.3 Diagrammes de corde . . . . .	21
0.4 Adjonctions . . . . .	24
0.5 Catégories monoïdales . . . . .	26
0.6 Catégories monoïdales fermées . . . . .	37
0.7 Bicatégories . . . . .	39
0.8 Monades . . . . .	41
<b>I Causalité dans les jeux asynchrones</b>	<b>45</b>
<b>1 Graphes asynchrones cubiques</b>	<b>46</b>
1.1 Graphes asynchrones . . . . .	47
1.2 Structures d'événements . . . . .	51
1.3 La Propriété du Cube . . . . .	54
1.4 Caractérisation des graphes de transitions . . . . .	57
1.4.1 Événements initiaux . . . . .	57
1.4.2 Résidu d'un chemin après un événement . . . . .	60
1.4.3 La catégorie des chemins modulo homotopie . . . . .	63
1.4.4 La catégorie de factorisations . . . . .	67
1.4.5 Un treillis distributif . . . . .	69
1.4.6 Représentation des classes d'homotopie . . . . .	73
<b>2 Sémantique des jeux asynchrones</b>	<b>76</b>
2.1 Jeux et stratégies monochromes . . . . .	80
2.1.1 Une catégorie de jeux monochromes . . . . .	82
2.1.2 Stratégies positionnelles . . . . .	86
2.1.3 Stratégies préservant la compatibilité . . . . .	89
2.2 Une catégorie de stratégies à deux joueurs . . . . .	96
2.2.1 Stratégies ingénues . . . . .	96
2.2.2 La catégorie des stratégies ingénues . . . . .	98
2.3 Stratégies courtoises . . . . .	100
2.3.1 Caractérisation des positions d'arrêt . . . . .	103

2.3.2	Stratégies concurrentes . . . . .	108
2.4	Stratégies séquentiellement innocentes . . . . .	113
2.4.1	Stratégies alternées innocentes . . . . .	114
2.4.2	Stratégies séquentiellement innocentes . . . . .	116
2.4.3	Modélisation d'un $\lambda$ -calcul affine parallèle . . . . .	125
2.5	Stratégies ordonnancées . . . . .	129
2.5.1	Vers le modèle relationnel . . . . .	130
2.5.2	Jeux avec tests d'ordonnancement . . . . .	131
2.5.3	Stratégies avec positions d'interaction . . . . .	133
2.5.4	Orthogonalité . . . . .	135
2.5.5	Jeu ordonnancés . . . . .	136
2.5.6	Stratégies ordonnancables . . . . .	139
2.5.7	Interprétation de la logique linéaire . . . . .	141
2.5.8	Jeux asynchrones et L-réseaux . . . . .	145
<b>II Causalité dans les diagrammes de corde</b>		<b>149</b>
<b>3</b>	<b>Présentations de catégories monoïdales</b>	<b>150</b>
3.1	La catégorie simpliciale . . . . .	152
3.2	Polygraphes . . . . .	156
3.3	Une présentation de la catégorie simpliciale . . . . .	163
3.4	Modèles d'une théorie . . . . .	165
3.5	Autres techniques de présentation . . . . .	169
3.6	Structures algébriques catégoriques . . . . .	171
3.6.1	Objets symétriques . . . . .	171
3.6.2	Monoïdes . . . . .	173
3.6.3	Monoïdes commutatifs . . . . .	174
3.6.4	Bigèbres . . . . .	175
3.6.5	Paires duales . . . . .	185
<b>4</b>	<b>Présentation d'une sémantique de jeux</b>	<b>186</b>
4.1	Présentation de catégories de matrices . . . . .	186
4.1.1	Présentation des matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$ . . . . .	186
4.1.2	Présentation des relations . . . . .	199
4.1.3	Présentation des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	201
4.2	Présentation d'une sémantique de jeux . . . . .	202
4.2.1	Logique propositionnelle du premier ordre . . . . .	202
4.2.2	Sémantique de jeux . . . . .	203
4.2.3	Présentation de la sémantique de jeux . . . . .	210
4.2.4	Stratégies causales et stratégies asynchrones . . . . .	217
4.3	Présentation des ordres partiels finis . . . . .	219
4.3.1	Présentation des ordres partiels finis . . . . .	219
4.3.2	Présentation des ordres partiels non stables . . . . .	224
4.3.3	Présentation des fonctions croissantes . . . . .	226

<b>5 Présentations confluentes</b>	<b>233</b>
5.1 Système de réécriture monoïdaux . . . . .	233
5.2 Indécidabilité de la confluence . . . . .	239
5.3 Catégories de réseaux . . . . .	243
5.3.1 Réseaux symétriques . . . . .	244
5.3.2 Réseaux non symétriques . . . . .	247
5.4 Unification dans les catégories monoïdales . . . . .	249
5.4.1 Multicatégories de multicontextes . . . . .	249
5.4.2 Multicatégories de régions . . . . .	252
5.4.3 Multicatégories de régions de réseaux . . . . .	261
5.4.4 Un algorithme d'unification . . . . .	263
5.5 Présentation localement confluente de $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ . . . . .	269
<b>A Logique linéaire</b>	<b>276</b>
<b>B Stratégies innocentes</b>	<b>278</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>280</b>
<b>Index</b>	<b>289</b>

# Introduction

---

L'ordinateur est une machine somme toute assez mystérieuse. On tape des données sur un clavier, des courants se promènent dans de petits fils, et finalement s'affichent devant nos yeux ébahis des résultats auxquels il nous aurait mis infiniment plus de temps d'arriver sans la machine. C'est d'autant plus impressionnant que les résultats produits sont souvent justes. Ou parfois faux. Ou encore ces résultats ne sont jamais produits. Ou même l'ordinateur commet une erreur fatale. Du point de vue de la machine, les résultats ne sont jamais ni faux ni justes, ce sont simplement des courants qui déambulent dans ses circuits électroniques. Leur signification n'est pas intrinsèque mais apportée par l'observateur. Si l'informatique veut développer des théories et des techniques permettant d'obtenir des programmes dont on peut être sûr qu'ils sont corrects (c'est-à-dire qu'ils renvoient toujours un résultat qui est la réponse attendue), elle doit commencer par formaliser la situation en cernant la notion générale de *calcul*. D'une part, elle doit définir de façon abstraite ce qu'est une machine calculante telle qu'un ordinateur, d'autre part elle doit préciser la signification que l'on prête aux calculs.

**Modèles de calcul.** Plus généralement que sur un ordinateur, l'étude des programmes se fait dans le cadre d'un *modèle de calcul*, qui définit le système dans lequel les calculs vont se dérouler. Un tel modèle est décrit par un langage dont les termes expriment l'état du système, ainsi que par un ensemble de règles de réduction selon lesquelles cet état va évoluer au cours du temps dans le système. Le langage peut être considéré comme la *syntaxe* d'un langage de programmation abstrait, les règles décrivant les spécifications opérationnelles de ce langage de programmation. Les nombreux modèles introduits montrent la variété des approches possibles pour décrire ce qu'est une machine calculante. Par exemple, parmi les modèles fondateurs de la discipline introduits dans les années 1930, citons les machines de Turing qui ressemblent peut-être le plus aux ordinateurs actuels, le  $\lambda$ -calcul de Church et de Kleene qui est un calcul fondé uniquement sur le concept de fonction, ou encore les fonctions récursives partielles de Kleene. Plus récemment, la palette a encore été diversifiée par l'introduction de nouveaux modèles tels que le  $\pi$ -calcul, les divers réseaux logiques (réseaux de preuve, d'interaction, différentiels), les automates cellulaires, etc. Ainsi, loin de se cantonner à l'étude des ordinateurs, l'informatique a révélé de nombreuses façons de décrire les processus calculatoires, chacun mettant l'accent sur un aspect différent du calcul : la gestion des ressources, le parallélisme, ou encore les liens avec la logique.

**Invariants du calcul.** Quel que soit le modèle utilisé, les calculs se résument essentiellement à une série de manipulations de symboles utilisant les règles du modèle. Par exemple, dans un langage contenant les entiers, le calcul de l'addition de deux entiers  $m$  et  $n$  peut être effectué par le programme `add` défini récursivement de la façon suivante :

$$\text{add}(m, n + 1) = \text{add}(m + 1, n) \quad \text{et} \quad \text{add}(m, 0) = m$$

Le calcul de la somme des entiers quatre et trois peut être réalisé par le programme `add(4, 3)` qui passe de l'écriture de l'entier sept sous la forme  $4 + 3$  à son écriture sous la forme 7 par les étapes successives suivantes :

$$4 + 3 \quad \rightarrow \quad 5 + 2 \quad \rightarrow \quad 6 + 1 \quad \rightarrow \quad 7 + 0 \quad \rightarrow \quad 7$$

Au cours du calcul, l'expression manipulée est toujours une façon particulière d'écrire l'entier sept. Le rôle du programme est ainsi de transformer une écriture quelconque d'un entier donné sous la forme d'une somme, en une écriture sous une forme canonique, ne faisant pas intervenir de symbole d'addition. L'entier dont les écritures sont manipulées est donc un *invariant du calcul*. Par exemple, l'entier sept est un invariant du programme de `add(4, 3)` et, de façon plus générale, l'entier qui est égal à la somme de deux entiers  $m$  et  $n$  est un invariant du programme `add(m, n)`. En ce sens, les invariants du calcul décrivent de façon abstraite ce que font les programmes. La *sémantique* d'un langage de programmation a pour but d'associer à tout programme une interprétation dans un univers mathématique. Nous nous intéresserons en particulier aux *sémantiques dénotationnelles*, qui sont invariantes au cours du déroulement du calcul, car celles-ci décrivent de façon plus ou moins précise le « comportement » des programmes, capturant en partie la réalité abstraite qu'ils incarnent.

**Preuves, programmes et systèmes.** L'une des découvertes à la base de l'informatique moderne est la correspondance précise, établie par Curry et Howard, entre des formalismes calculatoires et des formalismes logiques. Ainsi, les termes du  $\lambda$ -calcul simplement typé sont en bijection avec les preuves en logique intuitionniste minimale : une preuve est donc essentiellement la même chose qu'un programme typé. Cette correspondance apporte un éclairage nouveau sur la logique en lui donnant un aspect calculatoire allant bien au delà des considérations de prouvabilité. Une preuve d'une implication  $A \Rightarrow B$  n'est en effet pas simplement le témoin du fait que si l'on a une preuve de  $A$  alors on a une preuve de  $B$ , mais véritablement une façon particulière de transformer une preuve de  $A$  en une preuve de  $B$ . De même, la règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

est le pendant logique de l'application des  $\lambda$ -termes : à partir d'une preuve  $f$  de  $A \Rightarrow B$  et d'une preuve  $x$  de  $A$ , on peut construire la preuve  $fx$  de  $B$ . L'évaluation d'une telle application par la règle d'évaluation du  $\lambda$ -calcul, appelée  $\beta$ -réduction, correspond alors à une transformation de la preuve qui élimine la règle de coupure. Ceci permet entre autres de montrer que le type d'un terme est préservé au cours de son évaluation, la logique fournit donc un invariant des programmes typés. Et réciproquement, toute sémantique dénotationnelle des programmes typés nous renseigne sur la nature des preuves mêmes, en leur associant des dénotations invariantes par élimination des coupures.

**Logique linéaire.** L'étude approfondie d'une sémantique d'un système logique, les espaces de cohérence, a amené Girard à introduire la logique linéaire [Gir87]. Cette logique peut être vue comme une décomposition de la logique classique tenant compte de la notion de ressource : les règles de contraction et d'affaiblissement, qui permettent de dupliquer ou d'effacer certaines hypothèses, deviennent explicites et ne peuvent être utilisées que sur certaines formules qui les autorisent. Bien que bénigne en apparence, cette prise en compte fine de la multiplicité des hypothèses a amené à une compréhension approfondie des principes sous-jacents à la logique. Ainsi, la flèche intuitionniste habituelle peut être décomposée en logique linéaire à l'aide de deux ingrédients : d'une part la flèche linéaire  $A \multimap B$  qui est une implication dans laquelle la preuve de  $B$  doit utiliser exactement une fois l'hypothèse  $A$  et d'autre part l'exponentielle  $!A$  qui représente une preuve duplicable de la formule  $A$ . La flèche intuitionniste peut alors être retrouvée grâce à la formule

$$A \Rightarrow B = !A \multimap B$$

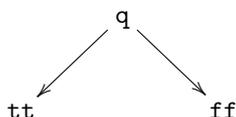
La preuve d'une implication intuitionniste est une preuve qui doit utiliser exactement une fois une hypothèse utilisable un nombre quelconque de fois. De même, la conjonction et la disjonction se trouvent chacune différenciées en deux connecteurs : la *tenseur*  $\otimes$  et le *avec*  $\&$  pour la conjonction, et le *par*  $\wp$  et la *somme*  $\oplus$  pour la disjonction. De façon un peu surprenante au premier abord, ces constructions ont des interprétations très naturelles en utilisant les concepts issus de la théorie de la concurrence. Intuitivement, par la correspondance de Curry-Howard, un programme de type  $A \otimes B$ , tout comme un programme de type  $A \wp B$  est constitué d'un programme de type  $A$  et d'un programme de type  $B$  qui s'exécutent en parallèle. Dans le cas du programme de type  $A \otimes B$ , les deux sous-programmes sont entièrement indépendants, tandis qu'ils peuvent communiquer et se synchroniser entre eux si le programme est de type  $A \wp B$ . Le rôle du critère de correction de la logique linéaire [Gir87, DR89], caractérisant les réseaux correspondant à des preuves, est essentiellement d'assurer cette indépendance entre les deux composantes d'un tenseur.

La logique linéaire possède une autre propriété remarquable : ses connecteurs sont naturellement *polarisés* – les connecteurs  $\otimes$  et  $\oplus$  sont positifs et les connecteurs  $\wp$  et  $\&$  sont négatifs – la polarité pouvant être caractérisée par des propriétés communes vérifiées par les connecteurs de même polarité. Cette remarque a été le point de départ de la découverte par Andréoli de la propriété de *focalisation* des preuves en logique linéaire [And92] : toute preuve de logique linéaire peut être réorganisée en une preuve dans laquelle les connecteurs sont introduits par « blocs » maximaux de même polarité. Cette propriété est elle aussi liée au caractère intrinsèquement asynchrone et concurrent de la logique linéaire.

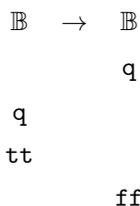
L'étude, d'un point de vue dynamique, des phénomènes concurrents sous-jacents aux programmes et à la logique est au cœur des motivations des travaux contenus dans cette thèse.

## Sémantiques de jeux asynchrones

Les sémantiques de jeux constituent une famille de sémantiques dénotationnelles des langages de programmation s'attachant à capturer le comportement *interactif* des programmes ou des preuves, c'est-à-dire la façon dont ils vont réagir aux informations qui leur sont fournies. Les échanges d'informations entre le programme et le reste du système y sont modélisés sous forme ludique, par des échanges de *coups* dans un jeu auquel deux joueurs participent : le Joueur, qui représente le programme, et l'Opposant, qui représente l'environnement du programme. Ainsi, le type d'un programme est interprété par un *jeu*, qui est un ensemble de coups polarisés (la polarité d'un coup indique lequel des deux joueurs peut jouer le coup), ainsi que les règles du jeu, modélisées ici par l'ordre dans lequel les coups doivent être joués. Par exemple, le type  $\mathbb{B}$  des booléens en appel par nom induit le jeu suivant :



Ce jeu contient un coup Opposant  $q$  et deux coups Joueur  $tt$  et  $ff$ . Lorsque l'Opposant veut connaître la valeur d'un booléen, il joue le coup  $q$  qui doit être pensé comme une question de l'environnement. Le booléen peut alors soit répondre  $tt$  s'il est le booléen vrai, soit  $ff$  dans le cas contraire. Bien entendu, le booléen ne peut donner sa valeur qu'après que l'environnement la lui a demandé ; ceci est représenté par des dépendances entre les coups imposées par le jeu, que nous avons fait figurer par des flèches dans le diagramme ci-dessus. Au cours du jeu, les deux protagonistes échangent des suites de coups, appelées *parties*, jouant chacun tour à tour. Un programme est interprété dans le modèle par une *stratégie* représentée par l'ensemble des parties que le programme est prêt à jouer ; en ce sens, les sémantiques de jeux sont des sémantiques de traces, encore appelées sémantiques entrelacées. Considérons par exemple le programme `not`, de type  $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ , qui prend en argument un booléen et renvoie sa négation. La stratégie correspondante contient la partie suivante :



Au cours de cette partie, l'environnement cherche à savoir le résultat de la fonction `not` en jouant le premier coup  $q$ . La fonction interroge ensuite son argument pour connaître sa valeur en jouant le second coup  $q$ . Si cette valeur est vraie (l'argument joue le coup  $tt$ ) alors la fonction renvoie faux (elle joue le coup  $ff$ ). Bien évidemment, la stratégie contient aussi la partie  $q \cdot q \cdot ff \cdot tt$  correspondant au cas où l'argument est faux.

On peut faire remonter les premiers travaux de sémantique des jeux dans les années 1960, à Lorenzen [Lor61] qui a considéré les preuves d'une formule

comme des « jeux de dialogues » dans lesquels le Joueur, qui essaie de montrer que la formule est vraie, est face à un Opposant qui tente de réfuter la formule. Ces travaux seront à la base du modèle de jeux défini par Blass [Bla72] qui fournira de façon très naturelle l'un des premiers modèles de jeux de logique linéaire [Bla92]. On cherche souvent à construire des modèles compositionnels, dans lesquels l'interprétation de la coupure de deux preuves peut être déduite de l'interprétation des deux preuves, et à les organiser ainsi en catégories. Cependant, la composition du modèle Blass n'est pas associative à cause d'un phénomène subtil lié à la polarité des jeux, analysé par Abramsky [Abr03], soulignant ainsi la difficulté de construire un modèle catégorique de jeux de la logique linéaire. Les sémantiques de jeux peuvent néanmoins souvent être structurées en catégories. Ceci a été pour la première fois remarqué par Joyal [Joy77] qui a montré que les stratégies alternées introduites par Conway [Con01] pouvaient être munies d'une loi de composition et organisées de sorte à former une catégorie.

**Innocence.** La théorie de la sémantique des jeux a véritablement pris son envol dans les années 1990 grâce à deux percées indépendantes. Les jeux de Abramsky, Jagadeesan et Malacaria [AJM00] d'une part, et les *jeux à points* de Hyland et Ong [HO00] (ainsi que Nickau [Nic94]) d'autre part. Ces travaux, préfigurés par le modèle des algorithmes séquentiels de Berry et Currien [BC82], et accompagnés par toute une série de modèles interactifs de la logique linéaire [AJ94, HO93, Lam95, BDER97a], ont tous deux été motivés par la recherche de modèles précis pour un langage de programmation minimal mais réaliste appelé PCF, un langage fonctionnel en appel par nom avec des types de base et un opérateur de point fixe. Par un modèle précis, nous entendons ici un modèle *pleinement adéquat*, dans lequel deux programmes ont la même interprétation précisément lorsqu'aucun programme ne peut les distinguer [Plo77, Mil77]. La principale difficulté pour obtenir les résultats de pleine adéquation des modèles de jeux que nous avons mentionnés a été de caractériser les stratégies définissables [Cur07], c'est-à-dire les stratégies se comportant effectivement comme des programmes dans le sens où elles sont l'interprétation d'un programme. En particulier, dans le modèle de Hyland et Ong, l'*innocence* est l'une des propriétés fondamentales caractérisant les stratégies définissables. Celle-ci nous apprend qu'une stratégie correspondant à un programme réagit en fonction d'un souvenir partiel qu'elle a du déroulement de la partie, appelé sa *vue*. Par la correspondance de Curry-Howard, ce résultat peut aussi être interprété du point de vue des preuves : une preuve est une façon d'explorer une formule qui ne dépend que de la branche courante de la dérivation en calcul des séquents.

Ce domaine de recherche a été un véritable succès. En relâchant de diverses façons les conditions imposées aux stratégies, telles que l'innocence, il est soudainement devenu possible de donner des modèles de PCF (ou de sa variante en appel par valeur [HY99]) étendu par diverses constructions telles que les références [AM96], les opérateurs de contrôle [Lai97], le non-déterminisme [HM99], etc. D'un point de vue pratique, l'élaboration de ces modèles est prometteuse et permet progressivement le développement de nouvelles techniques d'analyse et de vérification de programmes [MH98, Ong02, GM03]. Celles-ci ont en particulier l'avantage d'être compositionnelles : on peut vérifier un programme morceau



Ils ont les mêmes graphes sous-jacents, donc les mêmes traces, mais dans le premier graphe asynchrone les chemins  $a \cdot b$  et  $b \cdot a$  sont liés par une relation notée  $\sim$  et appelée *homotopie* qui indique que l'on peut passer du premier chemin au second chemin en faisant permuer des événements successifs indépendants. La présence d'une homotopie doit être pensée dans le sens de la topologie algébrique (dirigée) [Hat02], comme la possibilité de déformer continûment un chemin en un autre : effectuer les actions  $a$  et  $b$  en parallèle, c'est faire  $a$  puis  $b$ , ou  $b$  puis  $a$ , ou n'importe quel entrelacement des deux actions entre ces deux cas extrêmes. Le lien avec la géométrie va ici plus loin que la simple analogie [Pra91, Gou00]. Le rapprochement de la théorie de la concurrence et de la topologie algébrique s'est révélé fructueux et fournit progressivement de nouveaux outils pour l'analyse des programmes [GH05].

**Sémantiques de jeux asynchrones.** La théorie de la concurrence étant relativement récente, il ne s'est pas dégagé de consensus autour d'un calcul de processus ou d'un système de type qui soit canonique, contrairement au  $\lambda$ -calcul simplement typé dans le cadre séquentiel par exemple. Les sémantiques de jeux et celles des calculs concurrents étant toutes deux des sémantiques de traces, il est tentant de les rapprocher afin d'avoir un point de vue qui permette d'affiner notre compréhension de la structure des interactions concurrentes. Les *jeux concurrents* introduits par Abramsky et Melliès [AM99] pour donner un modèle pleinement complet du fragment additif et multiplicatif de la logique linéaire ont commencé à explorer la définition d'une sémantique de jeux vraiment concurrente. Dans ce modèle, les stratégies sont décrites par des opérateurs de clôture qui, à toute position du jeu, associent la plus haute position du jeu que la stratégie est capable d'atteindre. La possibilité qu'a une stratégie de jouer plusieurs coups en parallèle à une position donnée est ainsi grossièrement représentée. Cette sémantique restait cependant assez éloignée des sémantiques entrelacées habituelles. Des sémantiques de jeux de langages comportant des constructions concurrentes ont ensuite été introduites par Ghica, Laird et Murawski [Lai01, GM04, Lai05] dans lesquelles les stratégies sont décrites comme des ensembles de traces. Afin de modéliser les constructions concurrentes, les stratégies de ces sémantiques sont closes par permutation de certains coups. Enfin, une version relâchée des desseins de la ludique [Gir01] a été proposée par Curien et Faggian [CF05], les *L-réseaux*, qui vit à la jonction de la syntaxe des preuves en logique linéaire et de la sémantique de jeux sur des structures d'événements.

Les parties ont été pensées pour la première fois comme des traces de Mazurkiewicz dans les travaux de Melliès sur les jeux asynchrones [Mel04]. Au lieu d'être des chemins dans un graphe comme dans les jeux de Conway, les parties deviennent les chemins d'un graphe asynchrone. Ceci a permis en particulier à Melliès de donner une reformulation purement diagrammatique et locale de la notion d'innocence de Hyland et Ong [Mel04], révélant ainsi une dynamique asynchrone derrière les calculs séquentiels. Cette reformulation procède en deux temps. Tout d'abord, on peut se ramener à des stratégies affines, dans lesquelles un coup est joué au plus une fois : une stratégie utilisant plusieurs fois un argument peut être vue comme une stratégie ayant accès à un nombre infini de copies de cet argument, et utilisant au plus une fois chacune des copies, de façon uniforme. Ici, l'uniformité signifie essentiellement que la stratégie agit de façon

indépendante du choix des copies qu'elle utilise, ce qui est modélisé dans les jeux AJM [AJM00] en imposant aux stratégies de respecter une relation d'équivalence sur les parties, et peut être reformulé par une condition de stabilité des stratégies par actions de groupe sur les coups [Mel03]. Dans un second temps, on montre que la condition d'innocence sur les stratégies affines peut être ramenée à deux conditions de cohérence. Considérons une stratégie innocente  $\sigma$  sur le type  $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$  (le produit de deux booléens). Si l'on interroge la composante de gauche de  $\sigma$  puis sa composante de droite et qu'elle répond respectivement vrai et faux alors si on interroge sa composante de droite puis sa composante de gauche, elle doit répondre respectivement faux et vrai. L'une des conditions de cohérence impose ce type de comportement aux stratégies et l'autre condition est similaire. Cette compréhension asynchrone de l'innocence a été à la base d'un modèle de jeu pleinement complet de la logique linéaire introduit par la suite [Mel05a, Mel05b].

**Asynchronie non-alternée.** Notre travail tente à la fois d'unifier les différentes approches des sémantiques asynchrones et de faire émerger les structures propres à la concurrence.

Il existe de nombreuses définitions de stratégies vraiment concurrentes :

- comme un ensemble de parties (dans les sémantiques de jeux séquentielles),
- comme un sous-graphe asynchrone du jeu (le sous-graphe visité),
- comme une structure d'événements indiquant la causalité des coups,
- comme un opérateur de clôture (dans les jeux concurrents),
- comme une relation (une reconstruction du modèle relationnel de la logique linéaire à partir des jeux a été initiée dans [BDER97b]).

Ces modèles apportent tous un angle de vue particulier sur le comportement des programmes modélisés : certains présentent l'interaction de façon dynamique (les ensembles de parties, les opérateurs de clôture), d'autres de façon entièrement statique (les relations) ; certains présentent l'interaction à petits pas (les ensembles de parties), d'autres à grands pas (les opérateurs de clôture) ; certains présentent exhaustivement les interactions possibles (les ensembles de parties), d'autres s'attachent à décrire la causalité qui génère ces interactions (les structures d'événements). Nous montrons dans cette thèse que les jeux asynchrones permettent d'établir un lien précis entre ces modèles en apparence très différents.

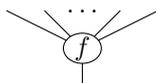
D'un point de vue conceptuel, il nous a fallu repenser les jeux asynchrones dans un cadre non-alterné. En effet, la plupart des sémantiques de jeux supposent que, au cours d'une partie, l'Opposant et le Joueur jouent chacun à leur tour un coup. Cette alternance joue le rôle d'une horloge qui assure le bon déroulement de la composition des stratégies : à chaque instant, on sait dans quel sens va le flux d'informations entre les deux stratégies. Elle est cependant contraignante et peu naturelle dans le cadre de processus concurrents, deux processus évoluant de manière indépendante n'ayant pas a priori de façon de se synchroniser. Afin de retrouver une composition ayant des propriétés satisfaisantes pour les stratégies non-alternées, il faut remplacer le principe d'alternance par un principe d'*asynchronie*. Il est fondé sur la supposition que les échanges d'information se font à des vitesses incomparables les unes aux autres et sur lesquelles

on ne peut rien savoir, ce qui impose aux stratégies d'être closes par permutations de certains coups indépendants. Par exemple, supposons qu'une stratégie joue un coup  $a$  puis un coup  $b$ , qui sont tous deux des coups Joueur. Si ces deux coups sont indépendants, par le principe d'asynchronie elle ne peut pas savoir si ces coups seront reçus par son environnement dans l'ordre dans lequel elle les a envoyés ou dans l'ordre inverse ; la stratégie doit donc aussi pouvoir jouer le coup  $b$  puis le coup  $a$  afin de ne pas faire de supposition sur la vitesse de transmission des coups  $a$  et  $b$ . Il en est de même si les coups  $a$  et  $b$  sont tous deux des coups Opposant, ou si  $a$  est un coup Joueur et  $b$  un coup Opposant : le seul type de dépendance qu'une stratégie a le droit d'imposer est la dépendance d'un coup Joueur sur un coup Opposant.

Ceci nous a amenés à proposer une reformulation diagrammatique de la condition d'innocence dans un cadre asynchrone et non-alterné. Cette caractérisation est loin dans sa forme de la définition originelle de Hyland et Ong, car la définition de la vue sur laquelle est fondée leur définition de l'innocence dépend fortement de l'hypothèse d'alternance sur les parties. Notre travail ouvre ainsi la voie à une possible extension de la notion d'innocence aux calculs concurrents. Divers raffinements et extensions sont envisageables, nous montrons en particulier comment la discipline d'indépendance des composantes d'un tenseur imposée par la logique linéaire peut être formulée dans notre cadre en équipant les jeux de *tests d'ordonnement* sur les stratégies.

## Présentation algébrique de la causalité

L'utilisation de l'écriture influence grandement notre façon de décrire les phénomènes. En particulier, la représentation des programmes et des preuves s'est longtemps faite uniquement à l'aide de langages de termes, ce qui essentiellement restreint leur description à des arbres. Les sommets des arbres correspondant aux termes sont des constructeurs

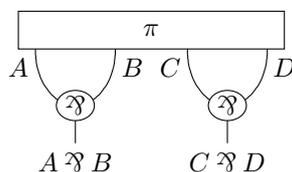


du langage et leurs fils sont les arguments de ces constructeurs. Ces sommets peuvent naturellement être vus comme des opérations ayant plusieurs entrées (les arguments  $x_1, \dots, x_n$  de  $f$ ) et une sortie (le terme  $f(x_1, \dots, x_n)$ ). Sous l'influence de la logique linéaire en particulier, la nécessité de syntaxes graphiques plus riches que des arbres s'est fait ressentir. Par exemple, les preuves formalisées en calcul des séquents sont trop linéaires : des preuves

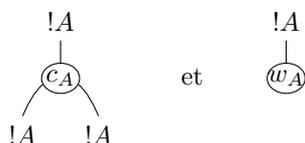
$$\frac{\frac{\pi}{\vdash \Gamma, A, B, C, D}}{\vdash \Gamma, A, B, C \wp D}(\wp) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\pi}{\vdash \Gamma, A, B, C, D}}{\vdash \Gamma, A \wp B, C, D}(\wp)}{\vdash \Gamma, A \wp B, C \wp D}(\wp)$$

ne diffèrent que par la commutation bénigne des règles d'introduction du connecteur  $\wp$ . Les réseaux de la logique linéaire [Gir87] ont été introduits afin de disposer d'une syntaxe qui identifie deux preuves équivalentes par ce type de

commutations, représentant les deux preuves ci-dessus par un même réseau de la forme



D'autre part, les flèches de contraction  $c_A : !A \rightarrow !A \otimes !A$  et d'affaiblissement  $w_A : !A \rightarrow 1$ , qui dupliquent et effacent respectivement une preuve de  $!A$  de façon explicite, sont naturellement pensées comme des « co-constructeurs » que l'on peut représenter respectivement par



Ces deux opérations ont une entrée, la preuve de  $!A$ . L'opération  $c_A$  a deux sorties, les deux copies produites de la preuve, tandis que l'opération  $w_A$  n'en a aucune, car elle efface son argument. Ainsi, ont été progressivement développées des syntaxes dont les termes sont des diagrammes 2-dimensionnels, comme les réseaux de la logique linéaire de Girard [Gir87], les réseaux d'interaction de Lafont [Laf90], et plus récemment les bigraphes de Milner [Mil06], etc. Ces syntaxes sont toutes fondées sur la donnée d'opérations ayant un nombre d'entrées et un nombre de sorties fixés, les termes de ces langages étant construits en reliant des instances de ces opérations par des liens, qui connectent les sorties de certaines opérations aux entrées d'autres opérations. Elles apportent un regard nouveau sur le calcul, le décrivant comme la déformation d'un nœud abstrait représentant le programme, constitué des lignes entrelacées des diagrammes le représentant.

Les langages diagrammatiques se sont révélés extrêmement utiles et intuitifs pour manipuler des preuves. Cependant, en raison de leur nature géométrique, il n'est pas a priori simple de leur donner une définition formelle, qui décrive précisément les manipulations autorisées sur les termes. Une réponse a été apportée en théorie des catégories, qui utilise le même type de langages graphiques, appelés *diagrammes de corde* à cause de leur ressemblance avec des assemblages de bouts de ficelles. Joyal et Street [JS91] ont montré que ces diagrammes, considérés à déformations continues près, peuvent être munis de compositions les structurant en 2-catégories, et ces 2-catégories sont précisément les 2-catégories librement générées. Ces langages peuvent ainsi être considérés comme la représentation géométrique de structures algébriques libres de faible dimension. De par son caractère très général, ce type de syntaxe a été indépendamment utilisé dans divers domaines des sciences et apparaît aujourd'hui comme un point de jonction entre la théorie des catégories, la logique, la théorie du calcul, la topologie et la physique [Kas95, Str07, Bae07].

**Présentations polygraphiques.** Nous avons mentionné l'équivalence entre les 2-catégories de diagrammes et les 2-catégories libres. Mais libres sur quoi exactement ? Intuitivement, ces 2-catégories sont générées à partir d'ensembles typés de générateurs de dimension 0, 1 et 2. La définition précise de cette structure génératrice est un cas particulier d'une construction introduite par Burroni [Bur93], les *polygraphes*, qui donne un cadre formel pour décrire les 2-catégories librement générées, et qui permet dans toute sa généralité de générer des  $\omega$ -catégories libres en toute dimension.

Ce formalisme permet en particulier de généraliser aux catégories la notion de *présentation* d'un monoïde. Rappelons que la présentation d'un monoïde est la description de ce monoïde sous forme du quotient, par des relations, du monoïde libre sur certains générateurs. Les présentations finies, dont les générateurs et les relations sont en nombre fini, sont particulièrement intéressantes, car elles permettent de décrire de façon finie un monoïde de cardinal a priori infini. Elles ouvrent par exemple la voie à une manipulation par l'ordinateur de ces monoïdes, permettant d'automatiser certains calculs sur ces derniers. De même, une ( $n$ -)catégorie peut être présentée par un polygraphe comme le quotient d'une catégorie libre par certaines relations typées. Cette idée est naturelle dès que l'on conçoit une catégorie comme un « monoïde typé », dans le sens où une catégorie à un objet est précisément un monoïde. Elle était présente dès l'introduction des polygraphes par Burroni et les techniques permettant d'établir des présentations de catégories ont ensuite été retravaillées en profondeur par Lafont [Laf03]. D'un point de vue pratique, ces présentations ont les mêmes avantages que les présentations de monoïdes, en particulier lorsqu'elles sont finies. De plus, elles permettent de révéler la structure algébrique interne des catégories présentées. Par exemple, la catégorie simpliciale, dont les objets sont les ensembles finis totalement ordonnés et les morphismes sont les fonctions croissantes, est présentée par un polygraphe qui correspond précisément à la théorie algébrique habituelle des monoïdes dans une catégorie monoïdale. Ce résultat dit en substance que la catégorie simpliciale est la plus petite catégorie contenant un monoïde. De ce point de vue, elle est entièrement décrite par la notion de monoïde et décrit entièrement la notion de monoïde.

**Causalité en logique du premier ordre.** Afin d'étudier la structure sous-jacente à la causalité en logique, nous nous sommes intéressés à une sémantique de jeux qui s'attache à modéliser les dépendances du premier ordre en logique propositionnelle. Les coups Opposant correspondent dans les preuves aux règles d'introduction des connecteurs universels, et les coups Joueur aux règles d'introduction des connecteurs existentiels. Cette modélisation est motivée par l'intuition suivante. Pour prouver une formule de la forme  $\exists x.P(x)$ , la stratégie doit fournir un terme  $t$  pour lequel la formule  $P(t)$  est prouvable, tandis que lors des preuves de formules de la forme  $\forall x.P(x)$ , l'environnement va tenter de réfuter la formule en fournissant un témoin  $t$  pour lequel la stratégie va devoir prouver la formule  $P(t)$ . Pour fournir le témoin d'une quantification existentielle, la stratégie peut avoir besoin de l'information fournie par l'environnement. Par

exemple, considérons la preuve

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \neg P(x), P(x)} (\text{Ax})}{\vdash \neg P(x), \exists y.P(y)} (\exists)}{\vdash \forall x.\neg P(x), \exists y.P(y)} (\forall)$$

Le connecteur existentiel n'aurait pas pu être introduit avant le connecteur universel (en lisant la preuve de bas en haut), car la stratégie a besoin de l'information contenue dans la variable  $x$  fournie par l'environnement pour pouvoir donner un témoin pour  $y$ . Dans la stratégie correspondant à cette preuve, cela sera modélisé par une relation de dépendance

$$\forall x \text{ .....} \rightarrow \exists y$$

du coup correspondant à  $\exists y$  sur le coup correspondant à  $\forall x$ .

Ainsi, les stratégies définissent des relations d'ordre sur les connecteurs des formules. Les stratégies définissables, qui sont l'interprétation d'une preuve, peuvent être caractérisées par deux conditions externes qui imposent à l'ordre de la stratégie d'être compatible avec l'ordre imposé par le jeu et permettent de s'assurer que les dépendances exprimées par cet ordre partiel sont toujours d'un coup Joueur sur un Opposant. Nous montrons que la catégorie monoïdale de ces stratégies peut être présentée par un polygraphe correspondant à une version polarisée de la théorie des bigèbres bicommutatives. Au delà d'une compréhension fine de la forme des stratégies de la catégorie, les intérêts d'une telle présentation sont multiples. D'une part, elle donne une caractérisation interne des stratégies innocentes : les stratégies ne sont plus caractérisées par certaines conditions au sein d'une catégorie plus grosse, le polygraphe engendre toutes les stratégies et n'engendre qu'elles. Ceci permet a posteriori de montrer de façon simple que les stratégies de la catégorie sont les stratégies définissables, et que les stratégies composent (avec la caractérisation externe des stratégies, il faut montrer que les conditions imposées aux stratégies sont préservées par composition). D'autre part, les diagrammes de cordes associés au polygraphe donnent une description formelle des diagrammes de dépendance qui sont naturellement utilisés pour représenter les stratégies, en reliant les coups Joueur aux coups Opposant dont ils dépendent.

## Plan

Après le chapitre 0 rappelant quelques notions fondamentales en théorie des catégories, la thèse est constituée de deux parties.

La première partie s'attache à étendre la notion d'innocence en sémantique des jeux à un cadre asynchrone et non-alterné. Au chapitre 1, nous redémontrons la caractérisation, par la Propriété du Cube, des graphes asynchrones générés par un ordre partiel. Le chapitre 2 introduit progressivement une sémantique de jeux asynchrone et non-alternée pour la logique linéaire. Nous commençons par définir une classe de stratégies positionnelles dont nous caractérisons les éléments soit comme des ensembles de traces, soit comme des sous-graphes asynchrones du jeu sur lequel elles sont définies (section 2.1). Ces stratégies sont

ensuite raffinées afin de prendre en compte la polarité des coups, ce qui permet de définir une notion de composition et d'organiser ainsi ces stratégies en une catégorie (section 2.2). Le modèle des jeux concurrents peut en particulier être retrouvé à l'intérieur de cette catégorie, et nous en caractérisons les morphismes à l'aide d'une condition caractéristique de l'asynchronie appelée courtoisie (section 2.3). De même, nous caractérisons les stratégies affines innocentes au sein de cette catégorie (section 2.4). Nous montrons enfin comment ce modèle peut être enrichi de tests interactifs afin de donner une sémantique de la logique linéaire capturant sémantiquement la différence entre les connecteurs  $\otimes$  et  $\wp$  (section 2.5).

La seconde partie est dévolue à la description d'une catégorie de jeux comme une catégorie monoïdale libre. Le chapitre 3 introduit la notion de présentation d'une catégorie monoïdale par un polygraphe, et rappelle les définitions de structures algébriques classiques dans les catégories monoïdales. Dans le chapitre 4, nous définissons une sémantique de jeux pour le fragment sans connecteurs de la logique propositionnelle du premier ordre et donnons une présentation de cette catégorie, qui correspond à une version polarisée de la théorie des bigèbres bi-commutatives. Au chapitre 5, les preuves de ces résultats amenant à considérer de nombreux cas, nous nous sommes enfin intéressés à la possibilité d'une automatisation partielle de celles-ci et décrivons un algorithme d'unification pour les termes de catégories monoïdales libres, permettant d'étudier la confluence locale de présentations monoïdales.

**Références.** Une grande partie du contenu de cette thèse est disponible en langue anglaise sous forme de publications ou de notes. Le contenu du Chapitre 2 est présenté dans l'article *Asynchronous Games : Innocence without Alternation* [MM07], ainsi que dans une note plus détaillée intitulée *Asynchronous Games without Alternation*. Enfin, la note *Presentation of a Game Semantics for First-Order Propositional Logic* présente le contenu du Chapitre 4. Ces textes sont tous disponibles en ligne sur mon site de l'internet.

## Chapitre 0

# Théorie des catégories

---

La théorie des catégories est une théorie de la structure en mathématiques. Elle s'attache à étudier des classes d'objets mathématiques en décrivant non pas directement la structure propre de ces objets, mais les rapports qu'ils entretiennent les uns avec les autres. Ce point de vue « social » sur les mathématiques a permis le développement d'une théorie qui s'est révélée être très générale et suffisamment abstraite pour pouvoir s'appliquer à de nombreuses situations, notamment celles proposées par l'informatique.

Il nous a semblé utile d'écrire un chapitre rappelant les outils principaux de la théorie des catégories qui seront intensivement utilisés dans cette thèse, en particulier pour structurer la sémantique des jeux introduite au Chapitre 2, ainsi que pour décrire une sémantique de jeux comme une structure catégorique libre aux Chapitres 3, 4 et 5. Le sujet étant très vaste, nous ne prétendons bien sûr pas être exhaustifs. Nous avons en particulier tenté de présenter les catégories structurées que nous utilisons (catégories, catégories monoïdales, 2-catégories, etc.), en mettant en avant les notations sous forme de diagrammes de corde des morphismes de ces catégories. L'introduction donnée ici pourra notamment être complétée par l'ouvrage de référence de MacLane [Mac71] qui propose une excellente et très complète introduction au domaine, par le livre de Leinster [Lei04] qui s'attache à décrire les développements récents de cette théorie en dimension supérieure, et par le chapitre de Melliès [Mel08] qui explique les liens entre la théorie des catégories et la logique linéaire.

## 0.1 Catégories

**Définition 0.1** (Catégorie). Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée :

- d'une classe  $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$  dont les éléments sont appelés *objets* ;
- d'une classe  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$  dont les éléments sont appelés *morphismes*, on utilise souvent la notation

$$f : A \rightarrow B$$

pour indiquer que  $f$  est un morphisme de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , l'objet  $A$  est alors appelé la *source* de  $f$  et l'objet  $B$  son *but* ;

- d'une opération binaire

$$- \circ_C - : \text{Hom}_C(B, C) \times \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(A, C)$$

appelée *composition*, en particulier, pour tous morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ , le morphisme

$$g \circ_C f : A \rightarrow C$$

est appelé *composée* des morphismes  $f$  et  $g$ ;

- d'un morphisme

$$\text{id}_A^C : A \rightarrow A$$

pour tout objet  $A$  appelé *identité* sur  $A$ ;

qui satisfont les axiomes suivants :

- *associativité* : pour tous objets  $A, B, C$  et  $D$ , et tous morphismes

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C \quad \text{et} \quad h : C \rightarrow D,$$

l'égalité

$$(h \circ_C g) \circ_C f = h \circ_C (g \circ_C f)$$

est vérifiée;

- *unité* : pour tous objets  $A$  et  $B$ , et tout morphisme  $f : A \rightarrow B$ , les égalités

$$\text{id}_B^C \circ_C f = f = f \circ_C \text{id}_A^C$$

sont vérifiées.

Dans la suite, on omettra l'indice  $C$  de  $\text{Hom}$ ,  $\text{id}$ ,  $\circ$ , etc. lorsque la catégorie dont il s'agit peut être aisément déduite du contexte. L'identité  $\text{id}_A$  sur un objet  $A$  est parfois simplement notée  $A$  et l'ensemble  $\text{Hom}_C(A, B)$  est parfois simplement noté  $\mathcal{C}(A, B)$ .

Deux morphismes sont qualifiés de *coinitiaux* lorsqu'ils ont même source, de *cofinaux* lorsqu'ils ont même but, et de *parallèles* lorsqu'ils sont à la fois coinitiaux et cofinaux.

*Exemple 0.2.* À titre d'exemple, introduisons quelques catégories fondamentales.

- La catégorie **Set** dont les objets sont les ensembles et les morphismes entre deux objets  $A$  et  $B$  sont les fonctions de  $A$  dans  $B$  avec la composition et les identités habituelles.
- La catégorie **Rel** dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes entre deux objets  $A$  et  $B$  sont les relations de  $A$  dans  $B$  avec la composition et les identités habituelles.
- La catégorie **Mon** dont les objets sont les monoïdes et les morphismes entre deux objets  $(A, +, 0)$  et  $(B, \times, 1)$  sont les morphismes de monoïdes, c'est-à-dire les fonctions  $f : A \rightarrow B$  telles que

$$\forall m, n \in A, \quad f(m + n) = f(m) \times f(n) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

avec la composition et les identités habituelles.

- La catégorie **Grph** dont les objets sont les graphes (voir Définition 1.1) et les morphismes sont les morphismes de graphes.
- Tout ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$  induit une catégorie dont les objets sont les éléments de  $E$ , telle qu'il y a exactement un morphisme d'un objet  $x$  à un objet  $y$  si  $x \leq y$  et aucun morphisme sinon.

*Remarque 0.3.* Le terme *classe* dans la Définition 0.1 ci-dessus peut être informellement considéré comme un synonyme d'ensemble. Cependant, la classe des objets d'une catégorie est parfois plus « grosse » qu'un ensemble. Par exemple, dans la catégorie **Set** la classe des objets ne forme pas un ensemble, car la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel – ainsi que la théorie des ensembles de Gödel-Bernays – serait inconsistante si la classe de tous les ensembles était un ensemble, par le paradoxe de Cantor. Il faut donc prendre des précautions particulières pour éviter ce type d'inconsistances lorsque l'on travaille avec de telles *grosses catégories*. Ces détails subtils dépassent le cadre de cette thèse et nous resterons volontairement informels sur ces points.

On représente souvent un morphisme  $f : A \rightarrow B$  par un diagramme

$$A \xrightarrow{f} B$$

De même la composée  $g \circ f : A \rightarrow C$  de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  peut être représentée par

$$A \xrightarrow{g \circ f} C \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Enfin, on représente souvent deux morphismes parallèles  $f : A \rightarrow B$  et  $g : A \rightarrow B$  par un diagramme

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Ce diagramme est dit *commutatif* lorsque les deux morphismes  $f$  et  $g$  sont égaux. Les diagrammes commutatifs sont l'un des moyens habituellement utilisés pour exprimer des égalités entre morphismes en théorie des catégories.

**Définition 0.4** (Sous-catégorie). Une *sous-catégorie*  $\mathcal{D}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est une catégorie telle que

- $\text{Ob}_{\mathcal{D}} \subseteq \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ ,
- pour toute paire  $A$  et  $B$  d'objets de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,
- pour tous objets  $A, B$  et  $C$ , et toute paire d'éléments  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$ ,  $g \circ_{\mathcal{C}} f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, C)$ ,
- pour tout objet  $A$ ,  $\text{id}_A^{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A)$ .

La composition de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de  $\mathcal{D}$  est définie par  $g \circ_{\mathcal{D}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f$  et l'identité sur un objet  $A$  est  $\text{id}_A^{\mathcal{D}} = \text{id}_A^{\mathcal{C}}$ . Une sous-catégorie  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  est dite *pleine* lorsque pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

*Exemple 0.5.* Nous noterons **FinSet** la sous-catégorie pleine de **Set** dont les objets sont les ensembles *finis*.

**Définition 0.6** (Épimorphisme, monomorphisme). Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  est un *épimorphisme* s'il est simplifiable à droite c'est-à-dire si pour tout objet  $C$  et toute paire de morphismes  $g_1, g_2 : B \rightarrow C$ ,

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \quad \text{implique} \quad g_1 = g_2.$$

De façon duale, un morphisme  $f : A \rightarrow B$  est un *monomorphisme* s'il est simplifiable à gauche.

**Définition 0.7** (Isomorphisme). Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est un *isomorphisme* (ou encore est *invertible*) lorsqu'il existe un morphisme  $g : B \rightarrow A$  tel que

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Un tel morphisme  $g$ , lorsqu'il existe, est déterminé de façon unique par  $f$  et est appelé l'*inverse* de  $f$ , souvent noté  $f^{-1}$ .

**Définition 0.8** (Catégorie opposée). La *catégorie opposée* d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , notée  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , est la catégorie dont les objets sont les objets de  $\mathcal{C}$ , dont les morphismes sont définis par  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ , et dont la composition et les identités sont induites par celles de  $\mathcal{C}$ .

Par une « co-structure », on entend souvent la structure dans la catégorie opposée. Par exemple, un *comonoïde* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un monoïde dans  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , etc.

Nous définissons à présent les notions de foncteur et de transformation naturelle, qui sont les notions naturelles de morphisme entre catégorie et entre foncteurs.

**Définition 0.9** (Foncteur). Un *foncteur*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée :

- d'une fonction  $F : \text{Ob}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Ob}_{\mathcal{D}}$  qui à tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  associe un objet  $FA$  de  $\mathcal{D}$ ;
- d'une fonction  $F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ , souvent simplement notée  $F$ , pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , qui à tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  associe un morphisme  $Ff : FA \rightarrow FB$  de  $\mathcal{D}$ ;

qui satisfont les axiomes suivants :

- *préservation de la composition* : pour tous objets  $A, B$  et  $C$ , et tous morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de  $\mathcal{C}$ , l'égalité

$$F_{A,C}(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F_{B,C}g \circ_{\mathcal{D}} F_{A,B}f$$

est vérifiée ;

- *préservation des identités* : pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , l'égalité

$$F_{A,A}\text{id}_A^{\mathcal{C}} = \text{id}_{FA}^{\mathcal{D}}$$

est vérifiée.

Un foncteur  $F$  est *plein* (resp. *fidèle*) lorsque les fonctions  $F_{A,B}$  sont injectives (resp. surjectives) pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 0.10** (Catégorie **Cat**). On note **Cat** la catégorie dont les objets sont les catégories et dont les morphismes entre deux objets  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont les foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . La composée  $G \circ F$  de deux foncteur  $F$  et  $G$  est parfois simplement notée  $GF$ . Le foncteur identité sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est noté  $\text{Id}_{\mathcal{C}}$  ou parfois simplement  $\mathcal{C}$ .

**Définition 0.11** (Transformation naturelle). Étant données deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  et deux foncteurs parallèles  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , une *transformation naturelle*  $\theta : F \rightarrow G$  entre les foncteurs  $F$  et  $G$  est une famille  $\theta_A : FA \rightarrow GA$  de morphismes de  $\mathcal{D}$ , indexée par les objets  $A$  de  $\mathcal{C}$ , appelés *composantes* de la transformation naturelle, telle que pour tous objets  $A$  et  $B$  et tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\theta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\theta_B} & GB \end{array}$$

commute dans  $\mathcal{D}$ .

**Définition 0.12** (Catégorie tranche). La *catégorie tranche* d'une catégorie  $\mathcal{C}$  au dessous d'un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , notée  $A \downarrow \mathcal{C}$  est la catégorie

- dont les objets sont les paires  $(f, B)$ , où  $B$  est un objet et  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ ,
- dont les morphismes  $h : (f, B) \rightarrow (g, C)$  sont les morphismes  $h : B \rightarrow C$  de  $\mathcal{C}$  pour lesquels le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

commute,

la composition et les identités étant induites par celles de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Dualement, la catégorie tranche  $\mathcal{C} \downarrow B$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  au dessus d'un objet  $B$  de  $\mathcal{C}$  a pour objets les paire  $(A, f)$ , où  $A$  est un objet et  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ , les morphismes étant définis de façon similaire à la définition précédente.

## 0.2 2-catégories

La notion de catégorie peut être généralisée en enrichissant sa structure de « morphismes entre morphismes », appelés 2-cellules, qui équipent les catégories d'une structure 2-dimensionnelle : si les morphismes décrivent comment transformer un objet d'une catégorie en un autre, les 2-cellules d'une 2-catégorie

décrivent comment transformer un morphisme en un autre morphisme parallèle. Nous verrons que ce cadre permet de formuler de façon interne les définitions de nombreuses structures catégoriques classiques (adjonctions, monades, etc.). Une introduction plus poussée aux 2-catégories peut être trouvée dans l'article de Kelly et Street [KS72].

**Définition 0.13** (2-catégorie). Une 2-catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée :

- d'une classe  $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$  dont les éléments sont appelés 0-cellules ou *objets* ;
- d'une catégorie  $\text{Hom}(A, B)$  pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$  dont les objets  $f : A \rightarrow B$  sont appelés 1-cellules, les morphismes  $\alpha : f \Rightarrow g$  sont appelés 2-cellules, la loi de composition est notée  $\bullet$  et est appelée *composition verticale* et les identités sont appelées *identités verticales* ;
- d'un foncteur  $- \circ - : \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  appelé *composition horizontale* ;
- d'une 1-cellule  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  pour tout objet  $A$ , appelée *identité horizontale* sur  $A$  ;

telles que la composition horizontale est associative : pour toutes 0-cellules  $A, B, C$  et  $D$ , pour toutes 1-cellules  $f, f' : A \rightarrow B, g, g' : B \rightarrow C$  et  $h, h' : C \rightarrow D$ , pour toutes 2-cellules  $\alpha : f \Rightarrow f', \beta : g \Rightarrow g'$  et  $\gamma : h \Rightarrow h'$ ,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f), \quad (h' \circ g') \circ f' = h' \circ (g' \circ f') \quad \text{et} \quad (\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

et admet les identités comme éléments neutres : pour toutes 0-cellules  $A$  et  $B$ , pour toutes 1-cellules  $f, f' : A \rightarrow B$ , pour toute 2-cellule  $\alpha : f \Rightarrow f'$ ,

$$\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A, \quad \text{id}_B \circ f' = f' = f' \circ \text{id}_A \quad \text{et} \quad \text{id}_{\text{id}_B} \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \text{id}_{\text{id}_A}$$

Une 2-cellule  $\alpha : f \Rightarrow f' : A \rightarrow B$  est souvent représentée par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & \Downarrow \alpha & B \\ & \curvearrowleft & \\ & f' & \end{array}$$

De même, la composition horizontale de deux morphismes est figurée par

$$\begin{array}{ccc} & f & g \\ & \curvearrowright & \curvearrowright \\ A & \Downarrow \alpha & B & \Downarrow \beta & C \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & f' & & g' & \end{array} = \begin{array}{ccc} & g \circ f & \\ & \curvearrowright & \\ A & \Downarrow \beta \circ \alpha & C \\ & \curvearrowleft & \\ & g' \circ f' & \end{array}$$

et la composition verticale par

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & \xrightarrow{f'} & B \\ & \Downarrow \alpha & \\ & \Downarrow \beta & \\ & \curvearrowleft & \\ & f'' & \end{array} = \begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & \xrightarrow{f'} & B \\ & \Downarrow \beta \bullet \alpha & \\ & \curvearrowleft & \\ & f'' & \end{array}$$

*Exemple 0.14.* La 2-catégorie  $\mathbf{Cat}_2$  a les catégories comme 0-cellules, les foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  comme 1-cellules entre deux 0-cellules  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , et les transformations naturelles  $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  comme 2-cellules entre deux 1-cellules  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

*Remarque 0.15.* Cette construction se généralise aux dimensions supérieures : il est possible de définir une notion de  $n$ -catégorie pour tout entier  $n$ , ainsi qu'une notion d' $\omega$ -catégorie contenant des  $n$ -cellules en toute dimension  $n$ .

**Propriété 0.16** (Lois d'échange et de Godement). *Dans toute 2-catégorie  $\mathcal{C}$ ,*

- la loi d'échange entre les compositions horizontale et verticale est vérifiée : pour toutes 2-cellules

$$\begin{array}{ccc} \alpha : f \Rightarrow f' : A \rightarrow B & \text{et} & \beta : g \Rightarrow g' : B \rightarrow C \\ \alpha' : f' \Rightarrow f'' : A \rightarrow B & & \beta' : g' \Rightarrow g'' : B \rightarrow C \end{array}$$

on a

$$(\beta' \bullet \beta) \circ (\alpha' \bullet \alpha) = (\beta' \circ \alpha') \bullet (\beta \circ \alpha)$$

et pour toutes 1-cellules  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ , on a

$$\text{id}_{g \circ f} = \text{id}_g \circ \text{id}_f$$

- la loi de Godement est vérifiée : pour toute paire de 2-cellules

$$\alpha : f \Rightarrow f' : A \rightarrow B \quad \text{et} \quad \beta : g \Rightarrow g' : B \rightarrow C$$

on a

$$(\beta \circ f') \bullet (g \circ \alpha) = (g' \circ \alpha) \bullet (\beta \circ f).$$

De même qu'à la Définition 0.4, on peut définir la notion de *sous-2-catégorie*  $\mathcal{D}$  d'une 2-catégorie  $\mathcal{C}$ , qui est une 2-catégorie telle que  $\text{Ob}_{\mathcal{D}} \subseteq \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ , pour toute paire de 0-cellules  $A$  et  $B$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$  est une sous-catégorie de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , qui est close par composition et identités horizontales et telle que les identités et les compositions coïncident avec celles de  $\mathcal{C}$ . Une sous-2-catégorie  $\mathcal{D}$  d'une 2-catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *pleine* lorsque pour toute paire de 0-cellules  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{D}$ , les catégories  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  sont égales. Si  $\mathcal{C}$  est une 2-catégorie et  $A$  et  $B$  deux 0-cellules de  $\mathcal{C}$ , nous noterons  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^2(A, B)$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  n'ayant que  $A$  et  $B$  comme 0-cellules.

**Définition 0.17** (2-foncteur). Un 2-foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux 2-catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée

- d'une fonction  $F$  qui à toute 0-cellule  $A$  de  $\mathcal{C}$  associe une 0-cellule  $FA$  de  $\mathcal{D}$ ;
- d'un foncteur  $F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ , souvent simplement noté  $F$ , pour toute paire de 0-cellules  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ ;

telles que

- la composition horizontale est préservée : pour toutes 0-cellules  $A, B$  et  $C$ , pour toutes 1-cellules  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ ,

$$F_{A,C}(g \circ f) = F_{B,C}g \circ F_{A,B}f$$

et pour toutes 0-cellules  $A, B$  et  $C$ , pour toutes 1-cellules  $f, f' : A \rightarrow B$  et  $g, g' : B \rightarrow C$ , pour toutes 2-cellules  $\alpha : f \Rightarrow f'$  et  $\beta : g \Rightarrow g'$ ,

$$F_{A,C}(\beta \circ \alpha) = F_{B,C}\beta \circ F_{A,B}\alpha,$$

- les identités horizontales sont préservées : pour toute 0-cellule  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,

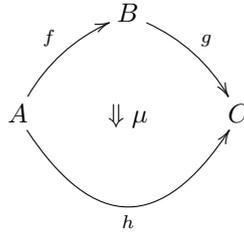
$$F_{A,A}\text{id}_A = \text{id}_{F_A}.$$

On note **2-Cat** la catégorie des 2-catégories et 2-foncteurs.

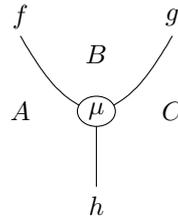
### 0.3 Diagrammes de corde

Les égalités entre morphismes dans une 2-catégorie peuvent au premier abord paraître abscones et difficiles à manipuler. Cependant, leur nature géométrique peut être révélée en représentant les morphismes sous forme graphique à l'aide de diagrammes appelés *diagrammes de corde*. Ces diagrammes ont été introduits par le physicien Penrose [Pen71, PR84] comme des notations pratiques pour manipuler les morphismes dans des catégories monoïdales et ont ensuite été formalisés par Joyal et Street [JS91]. Ils constituent toujours un sujet actif de recherche ; Baez et Dolan [BD95] cherchent par exemple à les généraliser en dimension supérieure.

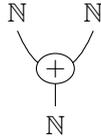
Supposons donnée une 2-catégorie  $\mathcal{C}$ . Soient  $A, B$  et  $C$  des 0-cellules et  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  et  $h : A \rightarrow C$  des 1-cellules de cette 2-catégorie. Comme nous l'avons expliqué à la Définition 0.13, une 2-cellule  $\mu : g \circ f \Rightarrow h$  est habituellement représentée par



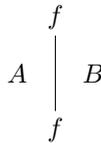
De ce diagramme de dimension 2, on peut déduire un diagramme de corde en suivant le principe de dualité de Poincaré qui nous amène à transformer éléments de dimension  $k$  de ce diagramme en éléments de dimension  $2 - k$ . Ainsi, les 0-cellules  $A, B$  et  $C$  deviennent des régions du plan, les 1-cellules  $f, g$  et  $h$  deviennent (restent) des fils et la 2-cellule  $\mu$  devient un point. On obtient alors le diagramme



qui rend compte de l'intuition selon laquelle la 2-cellule  $\mu$  est une opération qui prend deux entrées (de types respectifs  $f$  et  $g$ ) pour produire une sortie (de type  $h$ ), de même que l'addition  $+$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dans un langage de programmation prend deux entiers (de type  $\mathbb{N}$ ) pour renvoyer un entier :



En particulier, les identités prennent une entrée et la rendent en sortie. Une identité  $\text{Id} : f \Rightarrow f : A \rightarrow B$  sera donc représentée par un fil



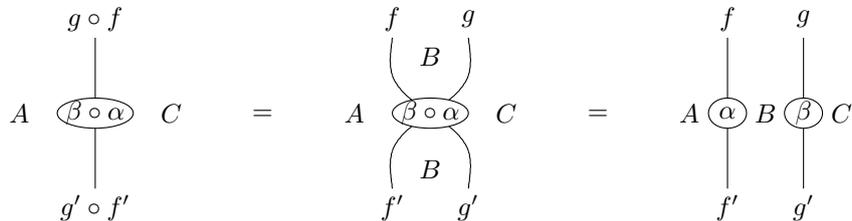
Les compositions ont des représentations simples dans ce langage diagrammatique. Ainsi, si  $\alpha : f \Rightarrow f' : A \rightarrow B$  et  $\beta : g \Rightarrow g' : B \rightarrow C$  sont deux 2-cellules représentées respectivement par



le diagramme correspondant à leur composée horizontale

$$\beta \circ \alpha : g \circ f \Rightarrow g' \circ f' : A \rightarrow C$$

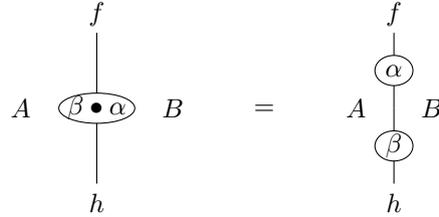
est obtenu en plaçant les deux diagrammes « côte à côte » :



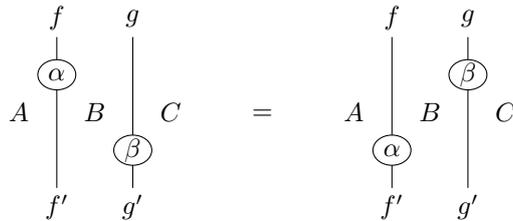
De même, le diagramme représentant la composée verticale

$$\beta \bullet \alpha : f \Rightarrow h : A \rightarrow B$$

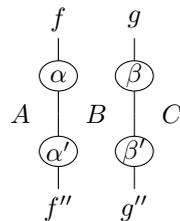
de deux 2-cellules  $\alpha : f \Rightarrow g : A \rightarrow B$  et  $\beta : g \Rightarrow h : A \rightarrow B$  est obtenu en mettant les deux diagrammes « l'un au dessus de l'autre » et en « reliant » les fils de sorties de  $\alpha$  aux fils d'entrée de  $\beta$  :



L'un des intérêts principaux de ces diagrammes est qu'ils intègrent les égalités entre 2-cellules inhérentes aux 2-catégories comme des déformations topologiques. Ainsi, l'égalité de Godement décrite à la Propriété 0.16 peut être représentée par



Cette égalité prend un sens géométrique dès que l'on remarque que l'on peut déformer de façon continue le membre gauche de l'égalité de sorte à obtenir le membre droit. Il est aisé de vérifier qu'il en est de même pour toutes les autres égalités définissant les 2-catégories. En particulier, les deux membres de l'égalité de la loi d'échange de la Définition 0.13 sont tous les deux représentés par le même diagramme



La réciproque est aussi vraie et bien plus subtile : deux diagrammes équivalents modulo déformations continues représentent le même morphisme. Ce résultat nous assure donc que l'interprétation d'un diagramme en termes de morphismes dans une catégorie monoïdale n'est pas ambiguë. Il a été démontré et formalisé en détail par Joyal et Street [JS91] et peut être formulé de la façon suivante : la 2-catégorie des diagrammes modulo déformations continues est équivalente à la 2-catégorie générée par un 2-polygraphe sans relations (voir Section 3.2).

Dans la suite, nous nous efforçons de donner les représentations des diagrammes commutatifs sous forme de diagrammes de corde. On omettra parfois

les étiquettes des 2-cellules lorsque celles-ci peuvent être déterminées de façon univoque à l'aide du contexte, par le nombre de fils d'entrée et de sortie de la cellule. Il en est de même pour les étiquettes des 1-cellules et des 0-cellules. Nous donnerons aussi parfois des représentations graphiques de morphismes qui permettent de visualiser des manipulations algébriques mais ne sont pas précisément des diagrammes de corde dans le sens décrit ci-dessus. Nous préciserons alors que ces représentations sont informelles.

Les diagrammes de corde de cette thèse ont été dessinés par un programme que nous avons créé avec l'aide de Nicolas Tabareau appelé *strid* – pour *string diagram*. La syntaxe des fichiers décrivant ces diagrammes est similaire à celle du paquet  $\text{\LaTeX} \text{Xy-matrix}$  (aussi utilisé ici pour dessiner les diagrammes commutatifs) mais des diagrammes duaux sont générés, en calculant des splines cubiques pour avoir de jolies cordes réalistes. Ce programme est librement disponible à l'adresse <http://strid.sf.net/>.

## 0.4 Adjonctions

La notion d'adjonction peut être définie dans un cadre 2-catégorique de la façon suivante.

**Définition 0.18** (Adjonction). Une *adjonction*  $(A, B, f, g, \eta, \varepsilon)$  dans une 2-catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée :

- de deux 0-cellules  $A$  et  $B$ ,
- de deux 1-cellules  $f, g : A \rightarrow B$ ,
- de deux 2-cellules

$$\eta : A \Rightarrow g \circ f : A \rightarrow A \quad \text{et} \quad \varepsilon : f \circ g \Rightarrow B : B \rightarrow B$$

respectivement représentées par

$$\begin{array}{c} B \\ \frown \\ f \quad A \quad g \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} g \quad B \quad f \\ \smile \\ A \end{array}$$

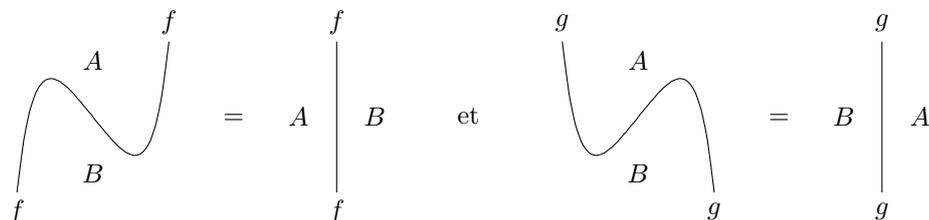
telles que les égalités

$$\begin{array}{c} A \\ \curvearrowright \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B \\ \downarrow \eta \\ B \\ \downarrow \varepsilon \\ B \end{array} = \begin{array}{c} f \\ \curvearrowright \\ A \xrightarrow{f} B \\ \downarrow f \\ f \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} A \\ \curvearrowright \\ B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \\ \downarrow \eta \\ B \\ \downarrow \varepsilon \\ B \end{array} = \begin{array}{c} g \\ \curvearrowright \\ B \xrightarrow{g} A \\ \downarrow g \\ g \end{array}$$

sont vérifiées. Graphiquement,



La 1-cellule  $f$  (resp.  $g$ ) est alors appelée *adjoint à gauche* (resp. *à droite*) de  $g$  (resp. de  $f$ ). Les 2-cellules  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont respectivement appelées *unité* et *counité* de l'adjonction.

Les deux égalités de la définition précédente sont souvent appelées *équations de zig-zag* en raison de leur représentation sous forme de diagrammes de corde.

**Propriété 0.19.** Dans une 2-catégorie, l'adjoint à gauche (resp. à droite) d'une 1-cellule est unique à isomorphisme près, lorsqu'il existe.

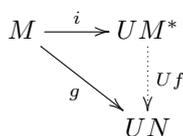
On retrouve la définition habituelle de foncteurs adjoints en spécialisant la définition à la 2-catégorie  $\mathbf{Cat}_2$  :

**Définition 0.20** (Adjonction). Une *adjonction* entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée de deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et d'une famille de bijections

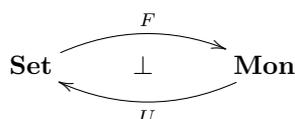
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB)$$

pour tous objets  $A$  de  $\mathcal{C}$  et  $B$  de  $\mathcal{D}$ , naturelle en  $A$  et  $B$ . On utilise parfois la notation  $F \dashv G$  pour indiquer que le foncteur  $F$  est l'adjoint à gauche de  $G$ .

*Exemple 0.21.* Notons  $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$  le *foncteur d'oubli* qui à tout monoïde  $(M, +, 0)$  associe l'ensemble sous-jacent  $M$ . Il est appelé ainsi, car il « oublie » la structure de monoïde sur l'ensemble. Ce foncteur admet un adjoint à gauche  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$  qui à tout ensemble  $M$  associe le monoïde libre  $(M^*, \cdot, 1)$  sur  $M$  : ses éléments sont les listes  $\langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle$  d'éléments de  $M$ , la multiplication est donnée par la concaténation des listes et l'unité est la liste vide  $\langle \rangle$ . Alternativement, le monoïde libre  $M^*$  sur un ensemble  $M$  peut être décrit par la propriété universelle suivante. Ce monoïde est la donnée d'un objet  $M^*$  de  $\mathbf{Mon}$  et d'un morphisme  $i : M \rightarrow UM^*$  dans  $\mathbf{Set}$  tel que pour tout objet  $N$  de  $\mathbf{Mon}$  et tout morphisme  $g : M \rightarrow UN$  il existe un unique morphisme  $f : M^* \rightarrow N$  dans  $\mathbf{Mon}$  tel que le diagramme



commute dans  $\mathbf{Set}$  : il existe une unique façon d'étendre une fonction de  $M$  dans  $UN$  en un morphisme de monoïdes de  $M^*$  dans  $N$ . L'unité de l'adjonction



a pour composantes les fonctions  $\eta_M : M \rightarrow UFM = M^*$  qui à tout élément  $m$  de  $M$  associent la liste  $\langle m \rangle$  et sa counité a pour composantes les morphismes de monoïdes  $\varepsilon_{(M, \cdot, 1)} : FU(M, \cdot, 1) \rightarrow (M, \cdot, 1)$  qui à une liste  $\langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle$  associe l'élément  $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$  de  $M$ .

De façon générale, les « constructions libres » sont les adjoints à gauche des foncteurs d'oubli. À titre d'exemple, citons aussi l'exemple des catégories libres sur un graphe : le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grph}$  qui à toute catégorie  $\mathcal{C}$  associe le graphe sous-jacent (i.e. oublie la composition et les identités) admet un adjoint à gauche  $F : \mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$  qui à tout graphe  $G$  associe la catégorie libre  $G^*$  sur  $G$ . Les objets de  $G^*$  sont les sommets de  $G$ , les morphismes entre deux objets  $A$  et  $B$  sont les chemins de  $A$  à  $B$  dans  $G$ , la composition est donnée par la concaténation des chemins et les identités sont les chemins vides.

*Exemple 0.22.* Si  $(P, \leq)$  et  $(Q, \preceq)$  sont deux ensembles partiellement ordonnés alors une adjonction entre les catégories associées est précisément une correspondance de Galois entre ces ensembles partiellement ordonnés.

**Définition 0.23** (Équivalence de catégories). Deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une adjonction entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dont l'unité et la counité sont inversibles.

Deux catégories sont équivalentes si elles sont isomorphes à *isomorphisme près*. Cette intuition peut être raffinée par la caractérisation suivante de l'équivalence entre catégories.

**Propriété 0.24.** *Deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont équivalentes si et seulement si il existe un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  plein et fidèle tel que tout objet  $B$  de  $\mathcal{D}$  il existe un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  pour lequel  $B$  est isomorphe à  $FA$ .*

En particulier, une catégorie est équivalente à chacun de ses squelettes :

**Définition 0.25** (Squelette). Un *squelette*  $\mathcal{D}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  telle que tout objet de  $\mathcal{C}$  est isomorphe (dans  $\mathcal{C}$ ) à un unique objet de  $\mathcal{D}$ .

## 0.5 Catégories monoïdales

Il est fréquent que des catégories soient munies d'une structure de monoïde sur les morphismes, le morphisme produit  $f \otimes g$  de deux morphismes  $f$  et  $g$  correspondant intuitivement à « effectuer les actions des morphismes  $f$  et  $g$  en parallèle ». La notion de catégorie monoïdale permet donner un cadre formel général pour décrire ce type de situations.

**Définition 0.26** (Catégorie monoïdale). Une *catégorie monoïdale*  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$  est une catégorie  $\mathcal{C}$  équipée :

- d'un foncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

appelé *produit tensoriel* ;

- d'un objet  $I$  de  $\mathcal{C}$  appelé *objet unité* ;

- d'une transformation naturelle inversible  $\alpha$  de composantes

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

appelée *associateur* ;

- de deux transformations naturelles inversibles  $\lambda$  et  $\rho$ , de composantes respectives

$$\lambda_A : I \otimes A \rightarrow A \quad \text{et} \quad \rho_A : A \otimes I \rightarrow A$$

respectivement appelées *uniteur à gauche* et *uniteur à droite* ;

tels que les diagrammes suivants commutent pour tous objets  $A, B, C$  et  $D$  :

$$\begin{array}{ccc} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\ \alpha_{A \otimes B,C,D} \downarrow & & & & \downarrow A \otimes \alpha_{B,C,D} \\ (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\ \rho_A \otimes B \searrow & & \swarrow A \otimes \lambda_B \\ & A \otimes B & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (I \otimes A) \otimes B & \xrightarrow{\lambda_A \otimes B} & A \otimes B & & I \otimes I & & (A \otimes B) \otimes I & \xrightarrow{\rho_A \otimes B} & A \otimes (B \otimes I) \\ \alpha_{I,A,B} \searrow & & \swarrow \lambda_{A \otimes B} & & \lambda_I \downarrow & \rho_I \downarrow & \alpha_{A,B,I} \searrow & & \swarrow A \otimes \rho_B \\ & I \otimes (A \otimes B) & & & I & & A \otimes (B \otimes I) & & \end{array}$$

Une catégorie monoïdale est dite *stricte* lorsque les transformations naturelles  $\alpha, \lambda$  et  $\rho$  sont des identités.

Dans la définition ci-dessus, la notation  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  fait référence au produit cartésien dans la catégorie **Cat**, voir l'Exemple 0.38.

*Exemple 0.27.* La catégorie  $(\mathbf{Set}, \times, 1)$  est monoïdale munie du produit cartésien sur les ensembles avec l'ensemble à un élément  $1 = \{\emptyset\}$  comme unité. Bien sûr une catégorie peut admettre plusieurs structures monoïdales (ou aucune). Ainsi, la catégorie  $(\mathbf{Set}, \uplus, \emptyset)$  est aussi une catégorie monoïdale avec l'union disjointe comme produit tensoriel et l'ensemble vide comme unité.

**Propriété 0.28.** *Dans la Définition 0.26, la commutation des deux premiers diagrammes implique la commutation des trois derniers.*

**Propriété 0.29** (Lois d'échange et de Godement). *Dans toute catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ ,*

- la loi d'échange est vérifiée : pour tous morphismes  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : D \rightarrow E$  et  $i : E \rightarrow F$ , on a

$$(g \circ f) \otimes (i \circ h) = (g \otimes i) \circ (f \otimes h)$$

- la loi de Godement est vérifiée : pour tous morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$ , on a

$$(B \otimes g) \circ (f \otimes C) = (f \otimes D) \circ (A \otimes g)$$

- l'identité est monoïdale : pour tous objets  $A$  et  $B$ , on a

$$\text{id}_{A \otimes B} = \text{id}_A \otimes \text{id}_B.$$

**Définition 0.30** (Foncteur monoïdal). Un foncteur monoïdal lâche entre deux catégories monoïdales  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \rho_{\mathcal{C}})$  et  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, \lambda_{\mathcal{D}}, \rho_{\mathcal{D}})$  est la donnée d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , d'une transformation naturelle  $\phi$  de composantes  $\phi_{A,B} : FA \otimes FB \rightarrow F(A \otimes B)$  et d'un morphisme  $\phi_I : I_{\mathcal{D}} \rightarrow FI_{\mathcal{C}}$  tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (FA \otimes FB) \otimes FC & \xrightarrow{\alpha_{FA,FB,FC}} & FA \otimes (FB \otimes FC) \\ \phi_{A,B} \otimes FC \downarrow & & \downarrow FA \otimes \phi_{B,C} \\ F(A \otimes B) \otimes FC & & FA \otimes F(B \otimes C) \\ \phi_{A \otimes B, C} \downarrow & & \downarrow \phi_{A,B \otimes C} \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{F\alpha_{A,B,C}} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I \otimes FA & \xrightarrow{\lambda_{FA}} & FA \\ \phi_I \otimes FA \downarrow & & \uparrow F\lambda_A \\ FI \otimes FA & \xrightarrow{\phi_{I,A}} & F(I \otimes A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FA \otimes I & \xrightarrow{\rho_{FA}} & FA \\ FA \otimes \phi_I \downarrow & & \uparrow F\rho_A \\ FA \otimes FI & \xrightarrow{\phi_{A,I}} & F(A \otimes I) \end{array}$$

commutent dans  $\mathcal{D}$  pour tous objets  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Un foncteur monoïdal lâche est *fort* (resp. *strict*) lorsque les morphismes  $\phi_{A,B}$  et  $\phi_I$  sont des isomorphismes (resp. des identités) pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ . Dans la suite, sauf mention contraire explicite, les foncteurs monoïdaux considérés seront forts.

**Définition 0.31** (Transformation naturelle monoïdale). Une transformation naturelle monoïdale  $\theta : (F, \phi) \rightarrow (G, \psi)$  entre deux foncteurs monoïdaux lâches  $(F, \phi), (G, \psi) : (\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}) \rightarrow (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$  est la donnée d'une transformation naturelle  $\theta : F \rightarrow G$  entre les deux foncteurs sous-jacents pour laquelle les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} FA \otimes FB & \xrightarrow{\theta_A \otimes \theta_B} & GA \otimes GB \\ \phi_{A,B} \downarrow & & \downarrow \psi_{A,B} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{\theta_{A \otimes B}} & G(A \otimes B) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & I & \\ \phi_I \swarrow & & \searrow \psi_I \\ FI & \xrightarrow{\theta_I} & GI \end{array}$$

commutent dans  $\mathcal{D}$  pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ .

Le théorème de cohérence suivant dû à Mac Lane nous assure en un certain sens que la définition que nous avons donnée des catégories monoïdales est la « bonne » et permet de plus souvent de simplifier les études de catégories monoïdales, car il montre qu'il n'est pas restrictif de ne s'intéresser qu'aux catégories monoïdales *strictes*, dans le sens suivant.

**Propriété 0.32** (Cohérence des catégories monoïdales). *Toute catégorie monoïdale est équivalente (via une paire de foncteur monoïdaux forts) à une catégorie monoïdale stricte.*

Nous noterons **MonCat** la catégorie des catégories monoïdales et foncteurs monoïdaux forts et **StrMonCat** la sous-catégorie des catégories monoïdales strictes et foncteurs monoïdaux stricts.

En topologie, la *suspension* d'un espace  $\mathcal{E}$  permet de considérer un espace de dimension  $n$  comme un espace de dimension  $n + 1$  en le « suspendant » à un point. De même, une catégorie monoïdale peut être vue comme une 2-catégorie à un objet (qui joue le rôle du point de suspension).

**Propriété 0.33.** *La catégorie **StrMonCat** est équivalente à la sous-catégorie pleine de **2-Cat** dont les objets sont les 2-catégories avec une unique 0-cellule.*

*Remarque 0.34.* De façon plus générale, la notion de 2-catégorie peut être relâchée en la notion de *bicatégorie* (voir Définition 0.55) qui permet d'étendre ce résultat aux catégories monoïdales qui ne sont pas nécessairement strictes : toute catégorie monoïdale peut être considérée comme une bicatégorie avec une unique 0-cellule.

La Propriété 0.32 nous assure ainsi que dans la plupart des études menées sur les catégories monoïdales on peut se borner, sans perte de généralité, au cas de catégories monoïdales strictes. De plus, la Propriété 0.33 nous montre qu'une catégorie monoïdale stricte est essentiellement le même objet mathématique qu'une 2-catégorie à une 0-cellule. Ceci justifie l'utilisation des diagrammes de corde introduits à la Section 0.3 pour représenter les morphismes dans des catégories monoïdales. Bien entendu, les régions de ces diagramme seront toutes du même type car il n'y a qu'une seule 0-cellule.

La notion habituelle de monoïde peut être généralisée et formulée dans le cadre des catégories monoïdales de la façon suivante.

**Définition 0.35** (Monoïde). Un *objet monoïde*  $(M, \mu, \eta)$  dans une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est la donnée d'un objet  $M$  et de deux morphismes

$$\mu : M \otimes M \rightarrow M \quad \text{et} \quad \eta : I \rightarrow M$$

respectivement représentés par

$$\begin{array}{c} M \quad M \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad \quad \\ \downarrow \\ M \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ M \end{array}$$

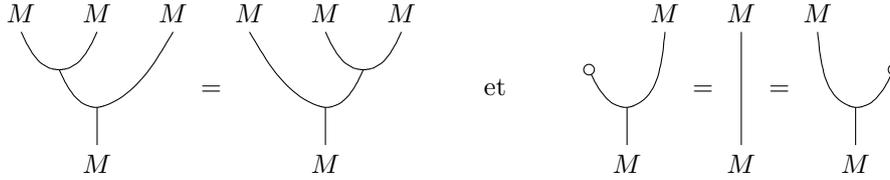
tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\alpha_{M,M,M}} & M \otimes (M \otimes M) & \xrightarrow{M \otimes \mu} & M \otimes M \\ \mu \otimes M \downarrow & & & & \downarrow \mu \\ M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & & & M \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 I \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes M} & M \otimes M & \xleftarrow{M \otimes \eta} & M \otimes I \\
 & \searrow \lambda_M & \downarrow \mu & \swarrow \rho_M & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

commutent. Graphiquement,



Un *morphisme de monoïdes* entre deux objets monoïdes  $(M, \mu, \eta)$  et  $(M', \mu', \eta')$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est un morphisme  $f : M \rightarrow M'$  de  $\mathcal{C}$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes M & \xrightarrow{f \otimes f} & M' \otimes M' \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
 M & \xrightarrow{f} & M'
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta} & M \\
 \eta' \searrow & & \swarrow f \\
 & & M'
 \end{array}$$

commutent.

Étant donnée une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$ , nous noterons  $\text{Mon}(\mathcal{C})$  la catégorie dont les objets sont les monoïdes de  $\mathcal{C}$  et les morphismes sont les morphismes de monoïdes.

La propriété suivante montre qu'un monoïde peut être vu comme une catégorie. De ce point de vue, les catégories sont une généralisation typée de la notion de monoïde.

**Propriété 0.36.** *La catégorie **Mon** des monoïdes dans **Set** est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie **Cat** dont les objets sont les catégories avec un objet.*

De même, nous avons expliqué qu'une catégorie monoïdale peut être vue comme une 2-catégorie à un objet. Ce phénomène fait partie de ce que Baez appelle la *table périodique* dont nous avons fait figurer les premières cases à la Figure 1. Dans la case  $(n, k)$  est décrite la  $(n + k)$ -catégorie avec une  $j$ -cellule pour tout entier  $j < k$ .

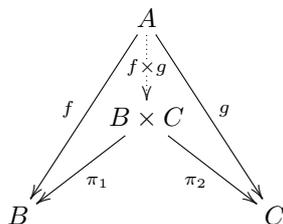
Il arrive fréquemment qu'une catégorie admette une structure monoïdale induite par l'existence de produits cartésiens. Le produit cartésien peut être défini de façon générale dans le cadre catégorique par la définition suivante.

**Définition 0.37** (Produit cartésien). Un *produit* de deux objets  $B$  et  $C$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un objet noté  $B \times C$  ainsi que de deux morphismes  $\pi_1 : B \times C \rightarrow B$  et  $\pi_2 : B \times C \rightarrow C$  tels que pour toute paire de morphismes

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$k = 0$	ensembles	catégories	2-catégories
$k = 1$	monoïdes	catégories monoïdales	2-catégories monoïdales
$k = 2$	monoïdes commutatifs	catégories monoïdales tressées	2-catégories monoïdales tressées
$k = 3$	“	catégories monoïdales symétriques	2-catégories monoïdales sylleptiques
$k = 4$	“	“	2-catégories monoïdales symétriques
$k = 5$	“	“	“

FIGURE 1 : Table périodique de Baez des  $n$ -catégories suspendues  $k$  fois.

$f : A \rightarrow B$  et  $g : A \rightarrow C$  il existe un unique morphisme de  $A$  dans  $B \times C$ , noté  $f \times g$ , pour lequel le diagramme



commute. Le *coproduit* (parfois appelé la *somme*) de deux objets est défini de façon duale.

Un objet 1 d’une catégorie  $\mathcal{C}$  est dit *terminal* lorsque pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  il existe un unique morphisme de  $A$  dans 1. Une catégorie  $\mathcal{C}$  est *cartésienne*, ou encore *a les produits finis*, lorsqu’elle a un objet terminal et toute paire d’objets admet un produit.

Les produits sont uniques à isomorphisme près : si  $D$  et  $D'$  sont deux produits d’une même paire d’objets  $B$  et  $C$  alors  $D$  et  $D'$  sont isomorphe. Ceci explique pourquoi, par abus de langage, on dira parfois « le produit de deux objets ». De même deux objets terminaux d’une même catégorie sont nécessairement isomorphes.

*Exemple 0.38.* Donnons quelques exemples courants de catégories cartésiennes.

- La catégorie **Set** est cartésienne. Le produit cartésien de deux ensembles  $A$  et  $B$  est

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \}$$

et l’objet terminal est l’ensemble à un élément.

- La catégorie **Rel** est cartésienne. Les produits et l'objet terminal sont définis de la même façon que dans **Set**.
- La catégorie **Cat** est cartésienne. La catégorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  produit de deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  a pour objets

$$\text{Ob}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = \text{Ob}_{\mathcal{C}} \times \text{Ob}_{\mathcal{D}}$$

et pour morphismes

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, A'), (B, B')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A', B').$$

La composition et les identités sont définies par

$$(g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f') \quad \text{et} \quad \text{id}_{(A, A')} = (\text{id}_A, \text{id}_{A'}).$$

La catégorie terminale est la catégorie à un objet et un morphisme (l'identité sur cet objet).

- Une catégorie d'ordre est cartésienne lorsque l'ordre sous-jacent admet un élément maximal et que toute paire d'éléments admet une borne inférieure.

**Propriété 0.39.** *Toute catégorie cartésienne est monoïdale avec comme produit tensoriel sur une paire d'objets  $A$  et  $B$  un choix de produit cartésien noté  $A \otimes B = A \times B$ , avec un objet terminal comme élément neutre et avec le produit tensoriel de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  le morphisme  $f \otimes g$  défini par le produit  $(f \circ \pi_1) \times (g \circ \pi_2)$ .*

*Remarque 0.40.* Les produits cartésiens étant définis par propriété universelle, ils ne sont uniques qu'à isomorphisme près. La construction ci-dessus faisant intervenir un *choix* de produits, elle ne définit pas strictement une unique catégorie. On peut cependant montrer que deux catégories ainsi définies sont fortement équivalentes, ce qui explique pourquoi par la suite nous parlerons parfois de la structure monoïdale associée au produit cartésien.

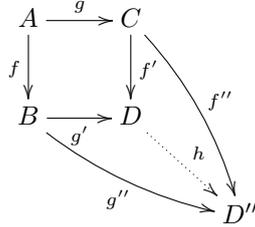
Il est parfois nécessaire de considérer des coproduits (ou des produits) qui ne sont définis que sur les morphismes qui « proviennent » d'un objet  $A$  dans le sens suivant.

**Définition 0.41** (Somme amalgamée, produit fibré). La *somme amalgamée* (ou *pushout* pour les anglophones) de deux morphismes cointiaux  $f : A \rightarrow B$  et  $g : A \rightarrow C$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un objet  $D$  de  $\mathcal{C}$  et de deux morphismes  $f' : C \rightarrow D$  et  $g' : B \rightarrow D$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & C \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{g'} & D \end{array}$$

commute et pour tout objet  $D''$  et morphismes  $f'' : C \rightarrow D''$  et  $g'' : B \rightarrow D''$  il

existe un unique morphisme  $h : D \rightarrow D''$  pour lequel le diagramme

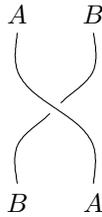


commute. Le *produit fibré* (ou *pullback*) de deux morphismes cofinaux  $f : A \rightarrow C$  et  $g : B \rightarrow C$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est défini de façon duale.

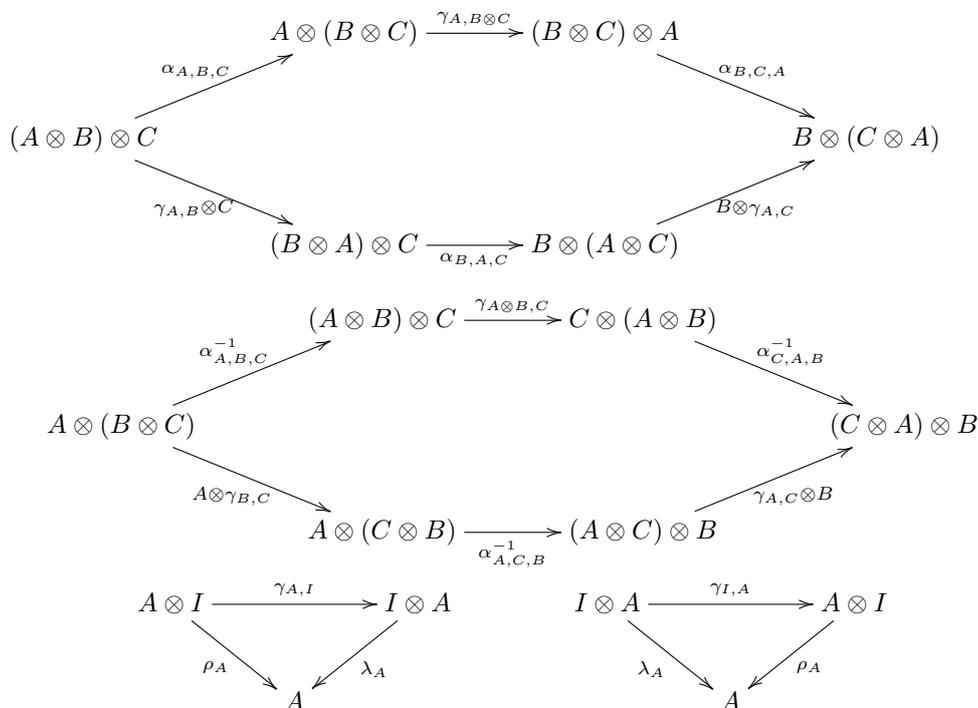
*Exemple 0.42.* Soit  $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$  un diagramme dans la catégorie **Set** et notons  $\iota_1$  et  $\iota_2$  les injections respectives des ensembles  $B$  et  $C$  dans leur union disjointe  $B \uplus C$ . La somme amalgamée du diagramme est alors l'ensemble  $B \uplus C$  quotienté par la relation  $\approx$  qui est la plus petite relation telle que  $\iota_1 \circ f(a) \approx \iota_2 \circ g(a)$  pour tout élément  $a \in A$ . Cet exemple permet de comprendre la dénomination : c'est la somme  $B \uplus C$  des ensembles  $B$  et  $C$  dans laquelle on a amalgamé les images par  $f$  et  $g$  des éléments de  $A$ .

La structure de catégorie monoïdale peut être enrichie de diverses façons. Il est en particulier souvent utile de considérer des catégories dans lesquelles on peut échanger des objets, ce que la notion suivante de catégorie monoïdale tressée formalise.

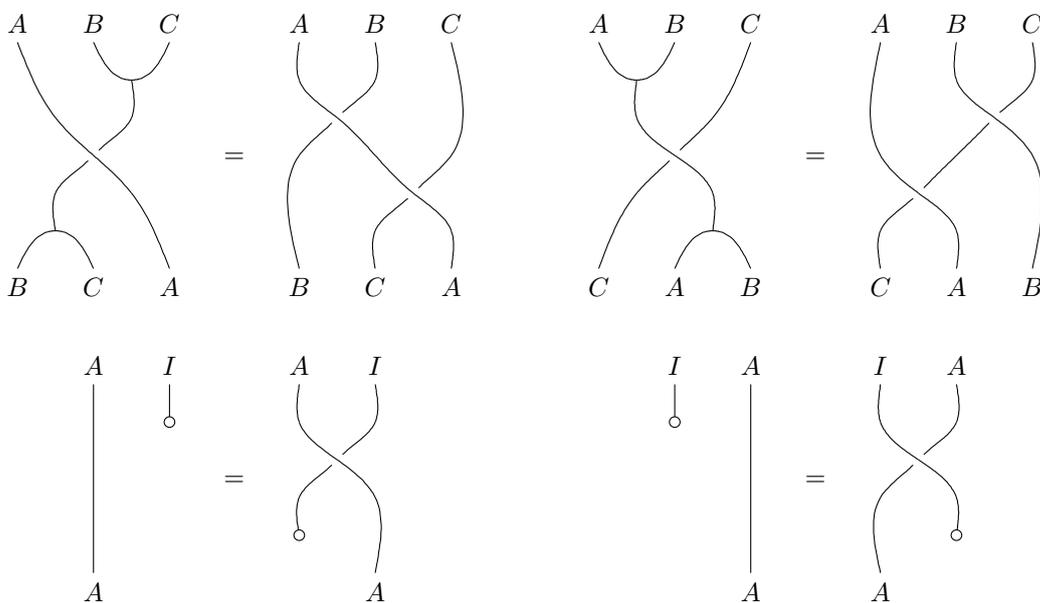
**Définition 0.43** (Catégorie monoïdale tressée). Une *catégorie monoïdale tressée*  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$  est une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$  équipée d'un isomorphisme naturel  $\gamma$  appelé *tressage*, de composantes  $\gamma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  souvent représentées par



tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets  $A, B$  et  $C$  :



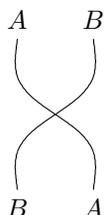
Informellement, ces diagrammes peuvent être représentés graphiquement par



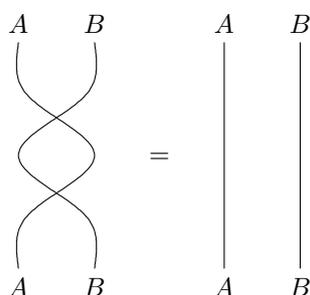
Une catégorie monoïdale tressée est *symétrique* lorsque les composantes du tressage satisfont l'équation

$$\gamma_{B,A} \circ \gamma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}.$$

Le tressage étant alors son propre inverse, il est souvent représenté par

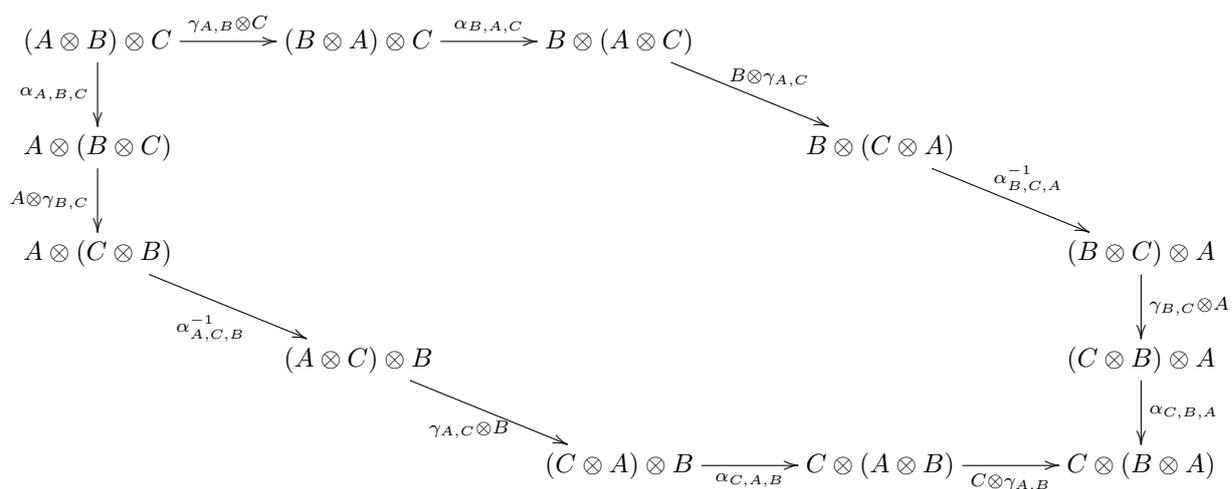


et l'équation qu'il doit satisfaire peut être représentée graphiquement par

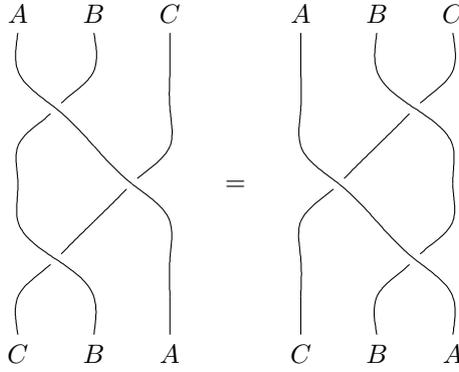


**Propriété 0.44.** Dans la Définition 0.43, la commutation des deux premiers diagrammes implique celle des deux derniers.

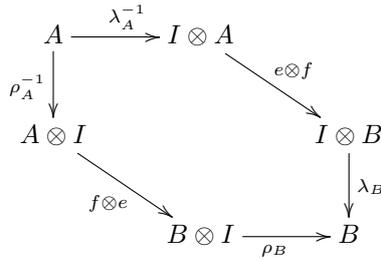
**Propriété 0.45** (Égalité de Yang-Baxter). Dans toute catégorie monoïdale tressée  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ , le diagramme suivant commute pour tous objets  $A, B$  et  $C$  :



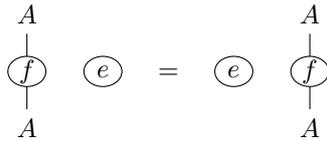
Graphiquement,



**Propriété 0.46.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \gamma)$  une catégorie monoïdale tressée et  $e : I \rightarrow I$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , le diagramme



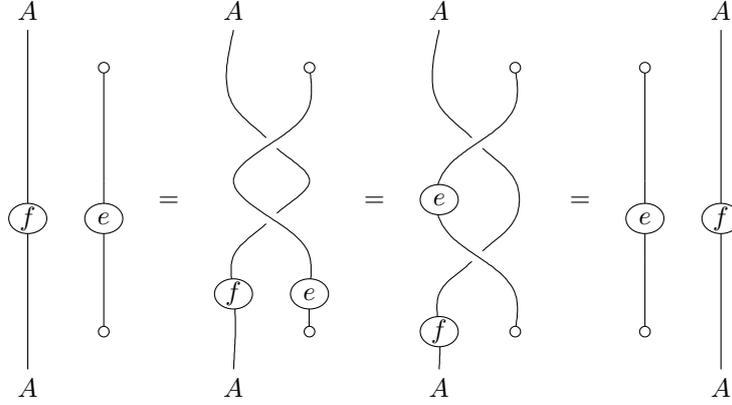
commute. Graphiquement,



*Démonstration.* On a la suite d'égalités suivante en utilisant principalement la naturalité de  $\gamma$ , la loi d'échange et l'égalité  $\rho_A \circ \gamma_{I,A} = \lambda_A$  de la définition des catégories monoïdales tressées :

$$\begin{aligned}
 \rho_B \circ (f \otimes e) \circ \rho_A^{-1} &= \rho_B \circ (f \otimes I) \circ (A \otimes e) \circ \gamma_{I,A} \circ \gamma_{I,A}^{-1} \circ \rho_A^{-1} \\
 &= \rho_B \circ (f \otimes I) \circ \gamma_{I,A} \circ (e \otimes A) \circ \gamma_{I,A}^{-1} \circ \rho_A^{-1} \\
 &= (\rho_B \circ \gamma_{I,B}) \circ (I \otimes f) \circ (e \otimes A) \circ (\rho_A \circ \gamma_{I,A})^{-1} \\
 &= \lambda_B \circ (e \otimes f) \circ \lambda_B^{-1}
 \end{aligned}$$

Informellement, cette suite d'égalités peut être représentée par



□

**Définition 0.47.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$  et  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$  deux catégories monoïdales tressées. Un foncteur monoïdal

$$(F, \phi) : (\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}) \rightarrow (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$$

entre les catégories monoïdales sous-jacentes est dit *tressé* lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FA \otimes FB & \xrightarrow{\gamma_{A,B}} & FB \otimes FA \\ \phi_{A,B} \downarrow & & \downarrow \phi_{B,A} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{F\gamma_{A,B}} & F(B \otimes A) \end{array}$$

commute dans  $\mathcal{D}$  pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ . Le foncteur est dit *symétrique* lorsque les catégories  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$  et  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$  sont de plus symétriques. Une transformation naturelle monoïdale entre deux foncteurs monoïdaux tressés est dite *tressée*; une transformation naturelle monoïdale entre deux foncteurs monoïdaux symétriques est dite *symétrique*.

## 0.6 Catégories monoïdales fermées

En  $\lambda$ -calcul, un terme  $M$  ayant une variable libre  $x$  induit une valeur  $\lambda x.M$  représentant la fonction  $x \mapsto M$ . Cette notion de *fermeture* présente dans la plupart des langages fonctionnels peut être axiomatisée dans le cadre des catégories monoïdales par la notion de catégorie monoïdale fermée. Informellement, une catégorie monoïdale est fermée lorsque tout morphisme est représenté par un objet de cette catégorie. Nous donnons ici la définition de fermeture dans le cadre, plus simple, des catégories monoïdales symétriques.

**Définition 0.48** (Catégorie monoïdale symétrique fermée). Une catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$  est fermée lorsque pour tout objet  $B$ , le



commutent. Graphiquement,

$A \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} A = A \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} A$ 
   et   $A^* \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} A^* = A^* \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} A^*$

Un *dual à gauche*  ${}^*A$  d'un objet  $A$  est un objet tel que  $A$  est un dual à droite de  ${}^*A$ .

*Remarque 0.52.* Un objet  $A^*$  est un dual à droite d'un objet  $A$  dans une catégorie monoïdale précisément lorsque cet objet est adjoint à droite de l'objet  $A$  si l'on considère la catégorie monoïdale comme une 2-catégorie ayant un unique objet.

**Définition 0.53** (Catégorie compacte fermée). Une catégorie monoïdale symétrique est *compacte fermée* lorsque tout objet admet un dual à droite.

*Exemple 0.54.* La catégorie **Rel** munie de la structure monoïdale induite par le produit cartésien est compacte fermée, le dual d'un objet étant l'objet lui-même.

La notion de catégorie compacte fermée a été introduite par Kelly et Laplaza [KL80]. Ces catégories constituent une famille de catégories  $*$ -autonomes : on peut en effet montrer que toute catégorie compacte fermée est monoïdale fermée et  $*$ -autonome. Cette famille est particulièrement simple (et parfois trop), car on a l'isomorphisme  $A \otimes B \cong (A^* \otimes B^*)^*$ . Ainsi, dans les modèles de logique linéaire fournis par des catégories compactes fermées, le tenseur et le par ont la même interprétation.

## 0.7 Bicatégories

Certaines structures mathématiques forment « presque » des catégories, dans le sens où l'on peut y définir une notion de composition qui n'est pas strictement associative mais seulement associative à une transformation près. Par exemple, les chemins dans un espace topologique sont définis comme les fonctions continues d'un intervalle unité dans l'espace. La concaténation de tels chemins n'est alors associative qu'à reparamétrisation près des chemins. La notion de bicatégorie introduite par Bénabou [Bén67] relâche celle de catégorie et donne un cadre formel pour l'étude de telles structures.

**Définition 0.55** (Bicatégorie). Une *bicatégorie*  $\mathcal{B}$  est la donnée

- d'une classe  $\text{Ob}_{\mathcal{B}}$  de 0-cellules ou *objets*,
- d'une catégorie  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , dont les objets sont appelés 1-cellules ou *morphismes*, les morphismes sont appelés 2-cellules et la composition *composition verticale* est notée  $\bullet$ ,
- d'un foncteur  $- \circ - : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  appelé *composition horizontale* pour tous objets  $A, B$  et  $C$ ,

- d'une 1-cellule distinguée  $\text{id}_A$  de  $\text{Hom}_B(A, A)$ , pour tout objet  $A$ , appelée *identité horizontale* sur  $A$ ,
- d'un isomorphisme naturel

$$\alpha_{f,g,h} : h \circ (g \circ f) \Rightarrow (h \circ g) \circ f$$

pour tous morphismes composables  $f, g$  et  $h$ ,

- d'isomorphismes naturels

$$\lambda_f : f \circ \text{id}_A \Rightarrow f \quad \text{et} \quad \rho_f : \text{id}_B \circ f \Rightarrow f$$

pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$

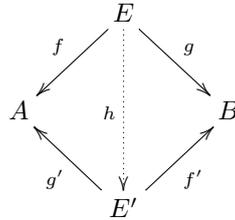
qui satisfont des axiomes similaires à ceux des catégories monoïdales.

Un *compas* dans une catégorie donnée est un diagramme

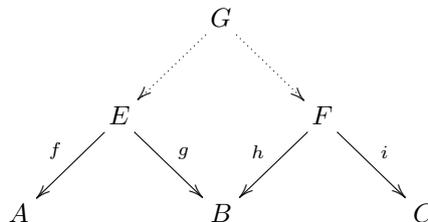
$$A \xleftarrow{f} E \xrightarrow{g} B \tag{1}$$

dans cette catégorie. Les compas d'une catégorie peuvent souvent être structurés en une bicatégorie de la façon suivante.

**Définition 0.56** (Bicatégorie de compas). Supposons donnée une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant les produits fibrés. La *bicatégorie des compas dans  $\mathcal{C}$* , notée  $\text{Span}(\mathcal{C})$ , est la bicatégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de  $\mathcal{C}$ , dont les morphismes d'un objet  $A$  dans un objet  $B$  sont les triplets  $(f, E, g)$  formant un diagramme (1) dans  $\mathcal{C}$  et dont les 2-cellules entre deux morphismes parallèles  $(f, E, g)$  et  $(f', E', g')$  sont les morphismes  $h : E \rightarrow E'$  de  $\mathcal{C}$  faisant commuter le diagramme



L'identité sur un objet  $A$  est le morphisme  $(\text{id}_A, A, \text{id}_A)$  et la composée de deux morphismes  $(f, E, g) : A \rightarrow B$  et  $(h, F, i)$  de cette bicatégorie est induite par un choix de produit fibré du diagramme  $E \xrightarrow{g} B \xleftarrow{h} F$  :



Les produits fibrés étant définis par propriété universelle, la composition n'est associative qu'à une 2-cellule canonique inversible près.

Par exemple, la bicatégorie  $\text{Span}(\mathbf{FinSet})$  est *presque* la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes  $M : m \rightarrow n$  sont les matrices de taille  $m \times n$ , dans le sens suivant. Si  $n$  est un entier, notons  $\underline{n}$  l'ensemble  $\underline{n} = \{0, \dots, n-1\}$ . À isomorphisme près, tout ensemble fini est de cette forme. Tout compas  $(f, E, g) : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  induit une matrice de taille  $m \times n$  définie par  $M(i, j) = |\{ e \in E \mid f(e) = i \text{ et } g(e) = j \}|$ . En ce sens, un tel compas peut être considéré comme une matrice à coefficients dans  $\mathbb{N}$  dans laquelle on a *nommé* tous les entiers 1 apparaissant dans les coefficients de la matrice, un coefficient  $k$  étant vu comme une somme de  $n$  entiers 1. La composition dans la catégorie  $\text{Span}(\mathbf{FinSet})$  correspond à la composition habituelle des matrices et n'est associative qu'à isomorphisme près, car elle fait intervenir un *choix* de nommage des coefficients de la composée. Par exemple, l'ensemble  $\underline{1}$  étant terminal dans  $\mathbf{FinSet}$ , un compas  $\underline{1} \rightarrow \underline{1}$  est réduit à un ensemble  $E$  et la composée de deux tels ensemble est donnée par l'union disjointe. Si ces deux ensembles sont disjoints, on peut choisir leur union comme composée; mais lorsque ces ensembles ont des éléments en commun, il faut *renommer* les coefficients communs afin de pouvoir composer par union. Il est alors difficile de trouver un choix de nommage rendant la composition strictement associative, mais les deux composées de trois morphismes composables seront de toutes façons isomorphes quel que soit le choix de nommage. Ce phénomène est bien connu en informatique et on travaille souvent *modulo  $\alpha$ -conversion* lorsque l'on définit des langages de termes avec lieurs (le  $\lambda$ -calcul par exemple). Cette technique a le pendant catégorique suivant : à toute bicatégorie on peut associer une catégorie en quotientant les morphismes de la catégorie par les 2-cellules canoniques  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\rho$ , puis en oubliant la structure de 2-cellules. Par exemple, la catégorie obtenue par ce procédé en rendant stricte la bicatégorie  $\text{Span}(\mathbf{FinSet})$  donne lieu à une catégorie équivalente à la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ . Ce procédé de *strictification* nous sera ainsi utile, bien qu'il n'ait pas de bonnes propriétés catégoriques; en particulier, il ne donne pas lieu à une équivalence entre la catégorie des bicatégories et la catégorie des catégories.

*Remarque 0.57.* Les catégories de compas apportent aussi un point de vue nouveau sur la théorie des catégories. On peut en particulier montrer qu'une monade (en un sens bicatégorique) dans la bicatégorie  $\text{Span}(\mathbf{Set})$  est précisément une catégorie. Nous décrivons un exemple d'utilisation de cette façon de considérer les catégories à la Section 3.5.

## 0.8 Monades

Il est parfois judicieux de considérer des structures algébriques comme des opérations agissant sur une catégorie. Par exemple, dans la catégorie  $\mathbf{Set}$ , l'opération qui à tout ensemble associe le monoïde libre sur cet ensemble induit un foncteur  $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ . On peut alors considérer un monoïde  $M$  quelconque comme une façon d'*évaluer* les éléments du monoïde libre sur  $M$ , c'est-à-dire comme un morphisme particulier  $h : TM \rightarrow M$ . Les *monades* permettent, entre autres, de formaliser cette vision des structures.

**Définition 0.58** (Endofoncteur). Un *endofoncteur*  $F$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Étant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $(\text{End}(\mathcal{C}), \otimes, I)$  la catégorie monoïdale stricte dont les objets sont les endofoncteurs de  $\mathcal{C}$  et les

morphismes sont les transformations naturelles entre ces endofoncteurs, et dont le produit tensoriel  $\otimes$  est donné sur les objets par la composition  $\circ$  des foncteurs et admet l'endofoncteur identité comme unité  $I$ .

**Définition 0.59** (Monade). Une *monade* dans une 2-catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'une 0-cellule  $A$  de  $\mathcal{C}$  et d'un monoïde dans la catégorie  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^2(A, A)$  (la 2-catégorie  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^2(A, A)$  n'ayant qu'une seule 0-cellule, on peut la considérer comme une catégorie monoïdale stricte par la Propriété 0.33). Une *monade*  $T$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est une monade dans la 2-catégorie  $\mathbf{Cat}_2$ .

Plus explicitement, une monade  $(T, \mu, \varepsilon)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et de deux transformations naturelles  $\mu : T \otimes T \rightarrow T$  et  $\eta : \text{Id} \rightarrow T$  satisfaisant les diagrammes d'associativité et d'unité induits par la Définition 0.35.

**Propriété 0.60.** Toute adjonction  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$  entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  induit une monade  $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  sur  $\mathcal{C}$  dont l'unité est  $\eta$  et dont la multiplication est  $G\varepsilon G : GF GF \rightarrow GF$ .

*Exemple 0.61.* L'adjonction entre **Set** et **Mon** de l'Exemple 0.21 induit une monade  $UF$  sur **Set** dont l'unité a été décrite et la multiplication est la fonction qui à une liste de listes associe une liste de la façon suivante :

$$\langle \langle m_1^1, \dots, m_{k_1}^1 \rangle, \dots, \langle m_1^p, \dots, m_{k_p}^p \rangle \rangle \mapsto \langle m_1^1, \dots, m_{k_1}^1, \dots, m_1^p, \dots, m_{k_p}^p \rangle$$

De même, nous avons vu à l'Exemple 0.22 qu'une correspondance de Galois pouvait être vue comme une adjonction. La monade associée est alors l'opérateur de clôture associé à la correspondance.

**Définition 0.62** (Algèbre d'une monade). Une *algèbre*  $(A, h)$  d'une monade  $(T, \mu, \eta)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  (aussi appelée *T-algèbre*) est la donnée d'un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  et d'un morphisme  $h : TA \rightarrow A$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T^2A & \xrightarrow{Th} & TA \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow h \\ TA & \xrightarrow{h} & A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A} & A \\ \eta_A \searrow & & \nearrow h \\ & TA & \end{array}$$

commutent. Un *morphisme d'algèbres* entre deux algèbres  $(A, h)$  et  $(A', h')$  d'une même monade  $(T, \mu, \eta)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est un morphisme  $f : A \rightarrow A'$  dans  $\mathcal{C}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TA' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

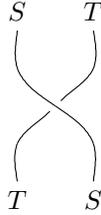
commute.

La composée des foncteurs sous-jacents à deux monades sur une même catégorie n'est pas nécessairement munie d'une structure de monade. C'est cependant le cas lorsqu'il existe une loi distributive [Bec69] entre ces dernières.

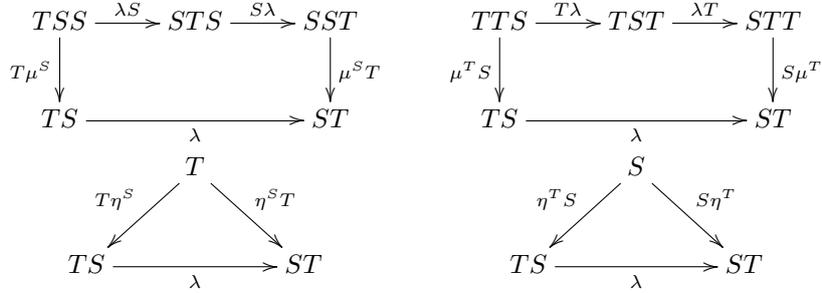
**Définition 0.63** (Loi distributive entre monades). Une loi distributive entre deux monades  $(S, \mu^S, \eta^S)$  et  $(T, \mu^T, \eta^T)$  sur une même catégorie  $\mathcal{C}$  est une transformation naturelle

$$\lambda : TS \rightarrow ST$$

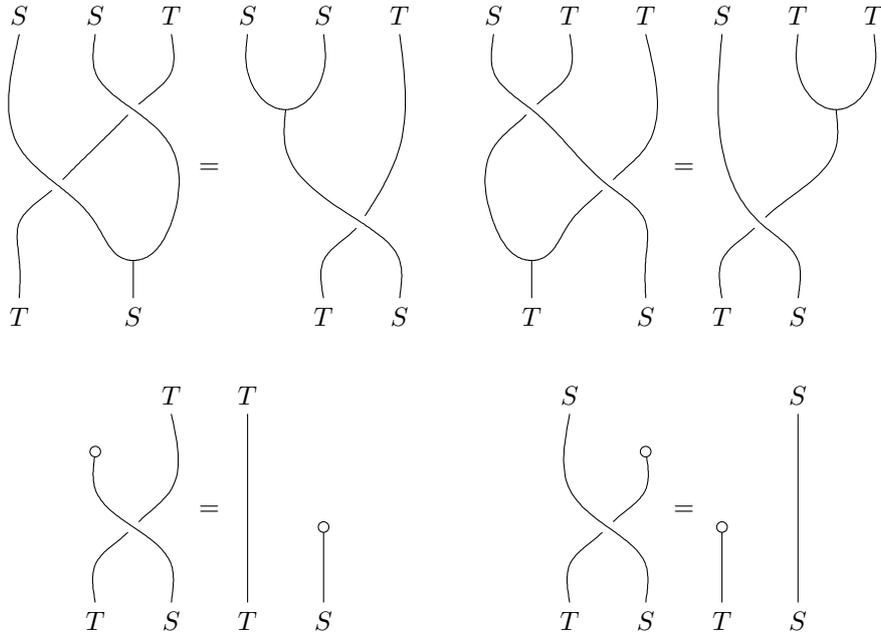
représentée par



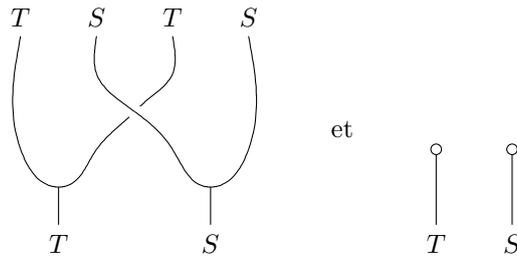
telle que les diagrammes



commutent. Graphiquement,



Une telle loi distributive induit une structure de monade sur le foncteur  $ST$  dont la multiplication est la transformation naturelle  $(\mu^S \mu^T) \bullet (S\lambda T)$  et l'unité la transformation naturelle  $\eta^S \eta^T$  (l'opération  $\bullet$  désigne ici la composition verticale de la 2-catégorie  $2\text{-Cat}$ ). La multiplication et l'unité de cette monade peuvent être respectivement représentées par



Première partie

Causalité dans les jeux  
asynchrones

## Chapitre 1

# Graphes asynchrones cubiques

---

Les sémantiques de jeux sont habituellement définies comme des sémantiques entrelacées : les stratégies  $\gamma$  sont modélisées par des ensembles de traces. Nous allons ici travailler dans l'esprit de la *vraie concurrence* et considérer des traces *modulo une relation d'indépendance* sur les événements. Ces traces seront donc non pas des chemins dans certains graphes, mais des chemins dans des *graphes asynchrones*. Cette notion, que nous introduisons dans ce chapitre, étend légèrement celle de *système de transition asynchrone* initialement formulée par Shields [Shi85] et Bednarczyk [Bed88], puis diffusée par Nielsen et Winskel [WN95]. Nous la définissons comme un graphe équipé de tuiles 2-dimensionnelles permutant deux transitions successives  $m : x \rightarrow y$  et  $n : y \rightarrow z$ . Ceci nous mène précisément à ce que Droste et Kuske appellent un *automate avec des relations de concurrence* [DK95].

Nous nous intéresserons particulièrement aux graphes asynchrones satisfaisant une propriété additionnelle, appelée *Propriété du Cube* (ou encore *Axiome du Cube*), déjà remarquée par Panangaden, Shanbhogue et Stark dans le cadre des automates avec relations de concurrence [PSS90], par Melliès afin de définir une axiomatique permettant d'étudier le théorème de standardisation en  $\lambda$ -calcul [GLM92], et étudiée en détail par Kuske dans sa thèse de doctorat [Kus94]; voir [DK02] pour un panorama sur le sujet. Cette famille de graphes asynchrones peut être vue comme une extension bénigne des structures d'événements, qui en capture les propriétés principales. Nous rappelons à la Section 1.2 que toute structure d'événements  $(E, \leq, \smile)$  génère un graphe asynchrone  $G$ , appelé son *graphe de transitions*, dont les sommets sont les configurations de la structure d'événements et les transitions sont les événements, et il s'avère que ce graphe asynchrone vérifie la Propriété du Cube. Nous montrons à la Section 1.4 une sorte de réciproque à cette propriété. À tout graphe asynchrone  $G$ , nous associons une catégorie  $[G]$ , dont les objets sont les sommets de  $G$  et dont les morphismes sont les chemins de  $G$  considérés modulo permutation de transitions indépendantes. Lorsque le graphe asynchrone  $G$  satisfait la Propriété du Cube, tout chemin

$$s : x_0 \xrightarrow{m_1} x_1 \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} x_{k-1} \xrightarrow{m_k} x_k$$

de ce graphe induit un *treillis distributif*  $L_s$  sur l'ensemble des préfixes du chemin  $s$ , modulo permutation de transitions indépendantes. Par le Théorème de

Représentation de Birkhoff [Bir33], ce treillis distributif est généré par un *ordre partiel*  $(M_s, \leq_s)$  sur l'ensemble  $M_s = \{m_1, \dots, m_k\}$  des événements apparaissant dans le chemin  $s$ . Cette ordre partiel est une structure d'événements particulière, dans laquelle deux événements  $m_i$  et  $m_j$  sont deux à deux compatibles. Pour cette raison, un graphe asynchrone vérifiant la Propriété du Cube doit être vu comme un graphe asynchrone se comportant *localement* comme une structure d'événements.

La preuve de cette propriété fondamentale des graphes asynchrones (ou de variantes de cette notion) peut être trouvée dans la littérature [Pra91, BDK97]. Nous avons cependant trouvé intéressant d'en présenter une preuve, utilisant des techniques de résidus sur les chemins issues de la réécriture, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, cette propriété montre qu'il est possible d'imposer localement l'existence d'une structure de dépendance causale globale. Ceci est peut-être un peu surprenant au premier abord, et les preuves permettent de véritablement comprendre les mécanismes à l'œuvre, notamment de calcul d'intersections et d'unions de chemins, pour passer de la formulation locale à la formulation globale. D'autre part, la plupart des outils techniques que nous introduisons ici seront utilisés dans la suite, lorsque nous étudierons les sémantiques de jeux asynchrones, en particulier les manipulations de résidus de chemins modulo homotopie. Enfin, le cadre des graphes asynchrones est légèrement plus général que celui habituellement proposé dans la littérature. En effet, un aspect intéressant de notre formulation est le fait que la notion d'événement n'est pas primitive dans le système mais est reconstruite en utilisant les tuiles 2-dimensionnelles du graphe asynchrone. De même, la notion d'incompatibilité devient implicite : deux événements  $m$  et  $n$  sont incompatibles lorsqu'ils n'apparaissent jamais dans le même chemin.

## 1.1 Graphes asynchrones

**Définition 1.1** (Graphe). Un *graphe* (orienté)  $(V, E, \partial_0, \partial_1)$  est un diagramme

$$V \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xrightarrow{\partial_1} \end{array} E$$

dans la catégorie **Set**. Les éléments de l'ensemble  $V$  sont appelés *sommets* (ou *positions*) et les éléments de l'ensemble  $E$  sont appelés *arêtes* (ou *transitions*). Le morphisme  $\partial_0 : E \rightarrow V$  (resp.  $\partial_1 : E \rightarrow V$ ) est appelé morphisme *source* (resp. morphisme *but*). Une arête  $m$  telle que  $\delta_0 m = x$  et  $\delta_1 m = y$  sera souvent notée

$$m : x \longrightarrow y \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow{m} y.$$

Un *chemin* dans un graphe  $G$  est une suite  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , souvent notée  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ , dont les éléments sont des arêtes de  $G$  telles que pour tout entier  $i$ , avec  $1 \leq i < k$ , on ait  $\partial_1 m_i = \partial_0 m_{i+1}$ . Un chemin  $s = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$  d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$  sera souvent noté

$$s : x \twoheadrightarrow y \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow{s} y$$

ou encore

$$x_0 \xrightarrow{m_1} x_1 \xrightarrow{m_2} x_2 \cdots x_{n-1} \xrightarrow{m_n} x_n$$

si l'on veut préciser les arêtes qui constituent le chemin ainsi que leur source et leur but. La concaténation de deux chemins  $s$  et  $t$  tels que  $\partial_1 s = \partial_0 t$  est notée  $s \cdot t$  et le chemin vide sur un sommet  $x$  est noté  $\varepsilon_x$  (ou simplement  $\varepsilon$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le sommet  $x$  concerné). La longueur  $|s|$  d'un chemin  $s$  est définie par induction sur  $s$  par  $|\varepsilon| = 0$  et  $|s \cdot m| = |s| + 1$ , où  $m$  est une arête.

**Définition 1.2** (Graphe asynchrone). Un *graphe asynchrone*  $(G, \diamond)$ , encore appelé *système de transition asynchrone*, est un graphe  $G$  équipé d'une relation symétrique  $\diamond$ , appelée *tuilage*, sur les chemins cointiaux et cofinaux de longueur 2 de  $G$ , notée

$$x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{p} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{q} z \quad (1.1)$$

Diagrammatiquement, une relation de la forme (1.1) définit une tuile 2-dimensionnelle

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ m \swarrow & & \searrow n \\ y_1 & \sim & y_2 \\ p \searrow & & \swarrow q \\ & z & \end{array} \quad (1.2)$$

La clôture par concaténation de la relation  $\diamond$  est notée  $\overset{1}{\sim}$ . Elle met en relation deux chemins cointiaux et cofinaux

$$s : x \twoheadrightarrow z \quad \text{et} \quad t : x \twoheadrightarrow z$$

lorsque ces chemins admettent des factorisations respectives de la forme

$$s = x \xrightarrow{s} y_1 \xrightarrow{m} y_2 \xrightarrow{p} y_3 \xrightarrow{t} z \quad \text{et} \quad t = x \xrightarrow{s} y_1 \xrightarrow{n} y'_2 \xrightarrow{q} y_3 \xrightarrow{t} z$$

telles qu'il existe une tuile

$$y_1 \xrightarrow{m} y_2 \xrightarrow{p} y_3 \quad \diamond \quad y_1 \xrightarrow{n} y'_2 \xrightarrow{q} y_3$$

dans le graphe asynchrone.

**Définition 1.3** (Homotopie). La relation d'*homotopie*  $\sim$  est la plus petite relation d'équivalence sur les chemins qui contienne la relation  $\overset{1}{\sim}$ .

Deux chemins  $s$  et  $t$  tels que  $s \sim t$  sont nécessairement cointiaux et cofinaux et sont alors dits *homotopes*, ce que l'on représentera graphiquement par un diagramme

$$\begin{array}{c} x \\ \left. \begin{array}{l} s \\ \sim \\ t \end{array} \right\} \\ y \end{array}$$

L'homotopie est par définition compatible avec la concaténation : pour tous chemins

$$s_1, s_2 : x \twoheadrightarrow y \quad \text{et} \quad t_1, t_2 : y \twoheadrightarrow z$$

tels que  $s_1 \sim s_2$  et  $t_1 \sim t_2$ , on a  $s_1 \cdot t_1 \sim s_2 \cdot t_2$ . La classe d'équivalence modulo homotopie d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  est notée  $[s]$ .

Dans la suite, nous suivons les principes de la vraie concurrence et travaillons modulo homotopie. Ceci nous amène à définir la catégorie  $[G]$  des chemins modulo homotopie d'un graphe asynchrone  $G$ .

**Définition 1.4** (Catégorie des chemins modulo homotopie). La *catégorie*  $[G]$  des chemins modulo homotopie associée à un graphe asynchrone  $G$  a les sommets de  $G$  pour objets et les classes d'équivalence  $[s]$  de chemins  $s : x \twoheadrightarrow y$  modulo homotopie comme morphismes de  $x$  à  $y$ . La composition est donnée par concaténation des chemins et l'identité sur un objet  $x$  est le chemin vide  $\varepsilon_x : x \twoheadrightarrow x$ .

**Définition 1.5** (Compatibilité). Deux transitions cointiales

$$x \xrightarrow{m} y_1 \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{n} y_2$$

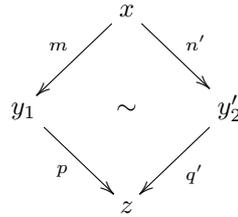
sont dites *compatibles* si il existe deux transitions cofinales

$$y_1 \xrightarrow{p} z \quad \text{et} \quad y_2 \xrightarrow{q} z$$

formant une tuile (1.2) dans le graphe asynchrone. La notion de transitions cofinales *compatibles en arrière* est définie dualement.

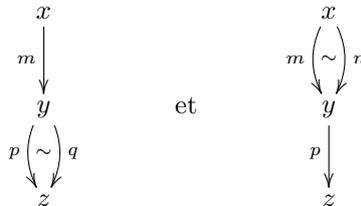
Dans la suite, on supposera de plus que dans tous les graphes asynchrones que l'on considère, les tuiles (1.2) satisfont les propriétés suivantes :

1. les transitions  $m$  et  $n$  sont distinctes ;
2. les transitions  $p$  et  $q$  sont distinctes ;
3. la paire de transitions  $(n, q)$  est uniquement déterminée par la paire de transitions  $(m, p)$  (et réciproquement) : pour tout chemin  $x \xrightarrow{n'} y'_2 \xrightarrow{q'} z$  tel que l'on ait une tuile



on a  $y'_2 = y_2$ ,  $n' = n$  et  $q' = q$ .

Les deux premières conditions interdisent des tuiles de la forme



La dernière condition permet de s'assurer qu'un chemin peut être complété d'au plus une façon en une tuile (1.2).

**Définition 1.6** (Événement). On définit la relation  $\overset{e}{\approx}$  sur les transitions d'un graphe asynchrone  $G$  comme la plus petite relation d'équivalence telle que

$$x \xrightarrow{m} y_1 \overset{e}{\approx} y_2 \xrightarrow{q} z$$

lorsqu'il existe deux transitions  $x \xrightarrow{n} y_2$  et  $y_1 \xrightarrow{p} z$  telles qu'il existe une tuile (1.2) dans  $G$ . L'événement  $\lceil m \rceil$  associé à une transition  $x \xrightarrow{m} y$  est la classe d'équivalence de la transition  $m$  par  $\overset{e}{\approx}$ . À l'inverse, la transition  $x \xrightarrow{m} y$  sera considérée comme une *occurrence* de l'événement  $\lceil m \rceil$ .

Dans la suite, on supposera que les graphes asynchrones que nous considérons satisfont de plus les conditions suivantes :

1. pour toute paire de transitions cointiales  $x \xrightarrow{m} y_1$  et  $x \xrightarrow{n} y_2$ , si  $\lceil m \rceil = \lceil n \rceil$  alors  $m = n$  ;
2. pour toute paire de transitions cofinales  $x_1 \xrightarrow{m} y$  et  $x_2 \xrightarrow{n} y$ , si  $\lceil m \rceil = \lceil n \rceil$  alors  $m = n$  ;
3. dans tout chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  il n'apparaît pas de transitions  $x \xrightarrow{m} x'$  et  $y \xrightarrow{n} x'$  telles que  $\lceil m \rceil = \lceil n \rceil$ .

La dernière condition implique en particulier que le graphe est acyclique. Ces suppositions ne sont pas strictement nécessaires mais elles simplifient l'exposé des preuves et sont validées dans tous les graphes asynchrones que nous serons amenés à considérer. En particulier, si  $e$  est un événement, on parlera parfois d'une transition  $x \xrightarrow{e} y$  pour désigner une transition  $x \xrightarrow{m} y$  telle que  $\lceil m \rceil = e$ . La première des conditions ci-dessus nous assure que cet abus de langage n'introduit aucune ambiguïté. De même, par abus de langage, nous parlerons d'un chemin  $e_1 \cdot e_2 \cdots e_k : x \twoheadrightarrow y$ , où les  $e_i$  sont des événements. Il est à noter que par les deux premières conditions ci-dessus, la suite d'événements  $e_1, \dots, e_k$  définit, lorsqu'il existe, un unique chemin ayant le sommet  $x$  pour source et le sommet  $y$  pour but.

**Définition 1.7** (Permutation entre événements). Deux événements  $m$  et  $n$  *permutent* à une position  $x$ , ce que l'on note

$$m \cdot n \diamond_x n \cdot m$$

lorsqu'il existe trois positions  $y_1, y_2$  et  $z$ , et quatre transitions formant une tuile

$$x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{n} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{m} z.$$

**Définition 1.8** (Indépendance). Un événement  $m$  est *indépendant* d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow z$ , ce que l'on note

$$m \parallel s$$

lorsqu'il existe une transition  $m : x \rightarrow x'$  de la source  $x$  du chemin et

- le chemin  $s$  est le chemin vide  $\varepsilon_x : x \twoheadrightarrow x$ ,
- ou bien le chemin  $s$  se factorise en

$$x \xrightarrow{n} y \xrightarrow{t} z$$

où  $n$  est un événement et  $t$  un chemin tels que

$$m \cdot n \diamond_x n \cdot m \quad \text{et} \quad m \parallel t.$$

Diagrammatiquement, notre définition inductive d'indépendance peut être représentée par

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{n} & y & \xrightarrow{t} & z \\
 m \downarrow & \sim & \downarrow & \parallel & \downarrow m \\
 x' & \xrightarrow{n} & y' & \xrightarrow{t} & z'
 \end{array}$$

où la notation utilisée pour la tuile de droite a la signification suivante. Lorsqu'un événement  $m$  est indépendant d'un chemin

$$x \xrightarrow{n_1} x_1 \xrightarrow{n_2} \dots \xrightarrow{n_{k-1}} x_{k-1} \xrightarrow{n_k} y$$

il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{n_1} & x_1 & \dots & x_{k-1} & \xrightarrow{n_k} & y \\
 m \downarrow & \sim & \downarrow & & \downarrow & \sim & \downarrow m \\
 x' & \xrightarrow{n_1} & x'_1 & \dots & x'_{k-1} & \xrightarrow{n_k} & y'
 \end{array} \quad (1.3)$$

que nous abrégeons en

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{n_1} & x_1 & \dots & x_{k-1} & \xrightarrow{n_k} & y \\
 m \downarrow & & & & \parallel & & \downarrow m \\
 x' & \xrightarrow{n_1} & x'_1 & \dots & x'_{k-1} & \xrightarrow{n_k} & y'
 \end{array}$$

La propriété suivante est immédiate.

**Propriété 1.9** (Compatibilité de l'indépendance avec la concaténation). *Soit  $m$  un événement et  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : y \twoheadrightarrow z$  sont deux chemins dans un graphe asynchrone  $G$ . On a alors :*

$$m \parallel s \cdot t \quad \text{ssi} \quad m \parallel s \quad \text{et} \quad m \parallel t.$$

## 1.2 Structures d'événements

Nous rappelons quelques définitions classiques liées aux structures d'événements. Une introduction plus complète pourra être trouvée dans [Win87].

**Définition 1.10** (Structure d'événements). Une *structure d'événements*  $(E, \leq, \smile)$  est un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$ , dont les éléments sont appelés *événements*, muni d'une relation irréflexive et symétrique  $\smile$  sur  $E$ , qui satisfait les propriétés suivantes.

1. *Finitude de la causalité* : tout événement  $e$  définit un ensemble clos par dépendance causale

$$e \downarrow = \{ e' \in E \mid e' \leq e \}$$

qui est fini.

2. *Héréditarité de l'incompatibilité* : pour tous événements  $e_1, e_2$  et  $e_3$  de  $E$ ,

$$e_1 \smile e_2 \quad \text{et} \quad e_2 \leq e_3 \quad \text{implique} \quad e_1 \smile e_3.$$

La relation  $\leq$  est appelée *dépendance causale* et la relation  $\smile$  *incompatibilité*. Deux événements  $e_1$  et  $e_2$  sont dit *causalement dépendants* lorsque  $e_1 \leq e_2$ ; *causalement indépendants* lorsque ni  $e_1 \leq e_2$ , ni  $e_2 \leq e_1$ ; *incompatibles* lorsque  $e_1 \smile e_2$ , *compatibles* sinon; *indépendants* lorsqu'ils sont à la fois compatibles et causalement indépendants.

En particulier, tout ensemble partiellement ordonné peut être considéré comme une structure d'événements dont la relation d'incompatibilité est vide.

*Remarque 1.11.* Nous utilisons dans cette thèse la notation  $\smile$  des espaces de cohérence [Gir89] au lieu de la notation originelle  $\#$  de Winskel pour dénoter la relation d'incompatibilité binaire.

**Définition 1.12** (Configuration). Une *configuration*  $x$  d'une structure d'événements  $(E, \leq, \smile)$  est un ensemble d'événements deux à deux compatibles, clos par dépendance causale :

$$\forall e \in x, \forall e' \in E, \quad e' \leq e \quad \text{implique} \quad e' \in x.$$

Un événement  $e$  est dit *activé* en une configuration  $x$  lorsque  $x \uplus \{e\}$  est une configuration.

Un *domaine*  $(D, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné avec un plus petit élément, dans lequel tout ensemble filtré admet une plus petite borne supérieure. Rappelons qu'un sous-ensemble  $X$  de  $D$  est *filtré* lorsque

$$\forall x, y \in X, \quad \exists z \in X, \quad x \leq z \quad \text{et} \quad y \leq z.$$

Toute structure d'événement génère un domaine  $(D, \subseteq)$  qui peut être décrit de la façon suivante [WN95].

**Définition 1.13** (Domaine généré par une structure d'événements). Le *domaine généré par une structure d'événements*  $(D, \subseteq)$  est le domaine dont les éléments sont les configurations, ordonnées par inclusion. Son plus petit élément est la configuration vide et la borne supérieure d'un sous-ensemble  $X \subseteq D$  est l'union de toutes les configurations dans  $X$ .

De façon plus générale, une structure d'événements définit un graphe asynchrone :

**Définition 1.14** (Graphe de transitions). Le *graphe de transitions*  $(G, \diamond)$  d'une structure d'événements  $(E, \leq, \smile)$  est le graphe asynchrone dont

- les positions sont les configurations  $x$  de  $E$ ,
- les transitions  $(x, e) : x \twoheadrightarrow y$  sont les couples  $(x, e)$  formés d'une configuration  $x$  et d'un événement  $e$  activé en  $x$ , et relie la position  $x$  à la position  $y = x \uplus \{e\}$ , où  $\uplus$  désigne l'union disjointe,

- deux chemins de longueur 2 de la forme

$$x \xrightarrow{(x,m)} y_1 \xrightarrow{(y_1,n)} z \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{(x,n)} y_2 \xrightarrow{(y_2,m)} z$$

dans le graphe  $G$  sont reliés par une tuile

$$x \xrightarrow{(x,m)} y_1 \xrightarrow{(y_1,n)} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{(x,n)} y_2 \xrightarrow{(y_2,m)} z$$

dans le graphe asynchrone  $G$ .

Dans le graphe de transitions d'une structure d'événements, deux chemins parallèles de longueur deux sont toujours homotopes, car leurs transitions proviennent de deux événements indépendants de la structure d'événements.

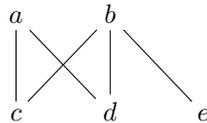
*Remarque 1.15.* Cette construction est très similaire au plongement de Yoneda d'une catégorie  $\mathcal{C}$  dans la catégorie de préfaisceaux  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$  associée. En particulier, supposons que  $(E, \leq)$  soit un ensemble partiellement ordonné et notons  $\mathcal{E}$  la catégorie d'ordre associée. Le plongement de Yoneda associe à tout élément  $m$  de  $E$  le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(-, m)$ . L'image d'un élément  $n$  de  $E$  par ce foncteur étant un ensemble non vide si et seulement si  $n \leq m$ , la fonction qu'il induit sur les objets est uniquement déterminée par la donnée de l'ensemble  $\{ n \in E \mid n \leq m \}$ . De façon plus générale, la catégorie image de la catégorie  $\mathcal{E}$  par le plongement de Yoneda est équivalente à la catégorie  $[G]$ , où  $G$  est le graphe de transition de l'ordre partiel, considéré comme une structure d'événements.

Si  $G$  est le graphe de transitions d'une structure d'événements  $(E, \leq, \surd)$ , les événements associés à deux transitions

$$x \xrightarrow{(x,m)} y \quad \text{et} \quad x' \xrightarrow{(x',m')} y'$$

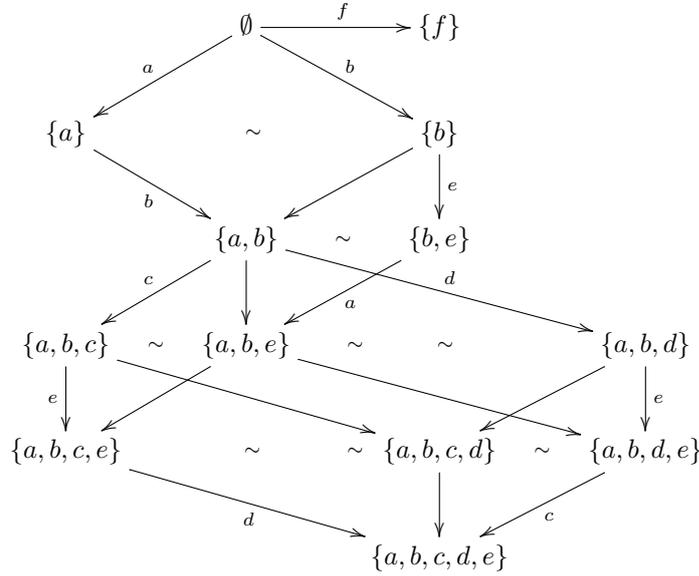
sont les mêmes si et seulement si  $m = m'$ . Pour cette raison, nous assimilerons dans la suite les événements associés aux transitions du graphe asynchrone aux événements de la structure d'événements.

*Exemple 1.16.* Considérons la structure d'événements  $(E, \leq, \surd)$ , où  $E$  est l'ensemble fini  $\{a, b, c, d, e, f\}$ , dans laquelle l'événement  $f$  est initial et incompatible avec tous les autres événements et les autres événements sont deux à deux compatibles, et l'ordre partiel sur  $\{a, b, c, d, e\}$  est le suivant :



(les lignes entre deux éléments figurent les relations de dépendance, les plus petits éléments étant figurés en haut). Le graphe de transitions associé à cet

ordre partiel est le suivant :



*Remarque 1.17.* Deux transitions cointiales dans le graphe de transitions d'une structure d'événements sont compatibles au sens de la Définition 1.5 si et seulement si elles proviennent d'événements indépendants dans la structure d'événements.

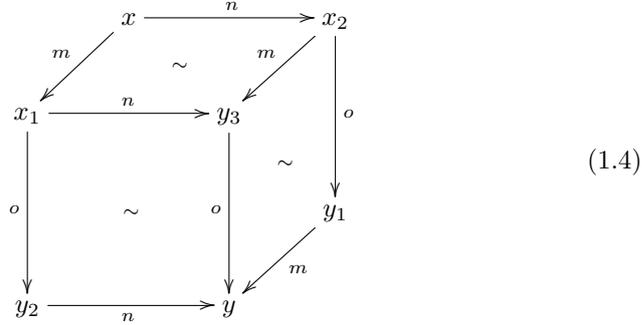
*Remarque 1.18.* Si  $(E, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné dont  $G$  est le graphe de transitions alors les chemins maximaux de  $G$  (ayant la position  $\emptyset$  pour source) sont en bijection avec les *linéarisations* de l'ordre partiel, c'est-à-dire les ordres totaux sur  $E$  étendant l'ordre  $\leq$ .

On peut constater que le domaine  $(D, \subseteq)$  associé à une structure d'événements et son graphe de transitions  $G$  sont essentiellement la même entité. Par exemple, deux configurations  $x$  et  $y$  sont reliées par une inclusion  $x \subseteq y$  dans le domaine si et seulement si il existe un chemin (potentiellement infini) du sommet  $x$  au sommet  $y$  dans  $G$ . La seule différence entre le domaine et le graphe de transitions est ainsi que la vision ordre partiel est remplacée par une vision diagrammatique.

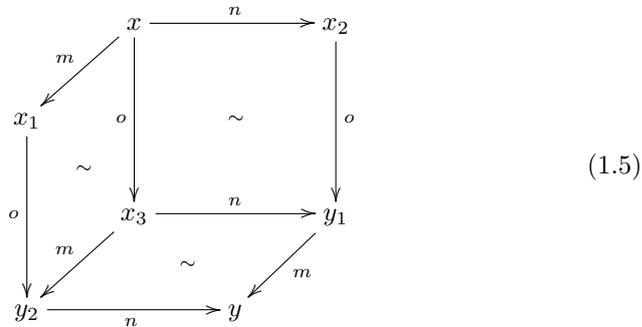
### 1.3 La Propriété du Cube

Nous formulons dans cette section la propriété du cube sur les graphes asynchrones. Nous avons vu à la Définition 1.14 qu'à toute structure d'événements on pouvait associer de façon canonique un graphe asynchrone. On est alors naturellement amené à se demander si, à isomorphisme près, tout graphe asynchrone

peut être généré de la sorte. Il n'en est rien. Par exemple, le graphe asynchrone



n'est le graphe de transitions d'aucune structure d'événements (par souci de clarté, nous avons étiqueté les transitions par les événements). En effet, les événements  $m$ ,  $n$  et  $o$  associés aux transitions étant deux à deux compatibles, en vertu de la Remarque 1.17 une structure d'événements générant ce graphe asynchrone serait nécessairement de la forme  $E = (\{m, n, o\}, \leq, \sim)$  où  $\sim$  est la relation vide. De plus,  $\leq$  est aussi nécessairement la relation vide. Par exemple, dans le chemin  $m \cdot o \cdot n$ , l'événement  $o$  se produit avant  $n$ , on n'a donc pas  $n \leq o$ , et le chemin  $n \cdot o \cdot m$  montre que l'on a pas non plus  $o \leq n$ . L'événement  $o$  étant ainsi minimal dans la structure d'événements, si le graphe (1.4) était le graphe de transitions de la structure d'événements  $E$ , il contiendrait une transition  $x \xrightarrow{o} y_3$ . En poussant plus loin ce raisonnement, on montre que le graphe de transitions de la structure d'événements  $E$  contient aussi le graphe asynchrone



Réciproquement, il est facile de constater que tout graphe de transition contenant un graphe asynchrone de la forme (1.5) contient aussi un graphe asynchrone de la forme (1.4).

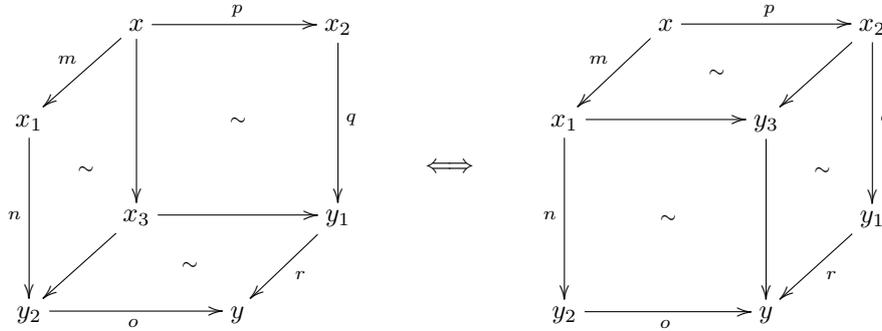
On en déduit donc que tout graphe asynchrone vérifie la Propriété du Cube que l'on peut formuler de la façon suivante.

**Définition 1.19** (Propriété du Cube). Un graphe asynchrone  $G$  vérifie la *Propriété du Cube*, encore parfois appelée *Axiome du Cube*, lorsque tout diagramme hexagonal dans  $G$ , induit par deux chemins

$$x \xrightarrow{m} x_1 \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{o} y \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{p} x_2 \xrightarrow{q} y_1 \xrightarrow{r} y$$

cointiaux et cofinaux, est rempli par des tuiles 2-dimensionnelles comme figuré dans le membre gauche du diagramme ci-dessous si et seulement si il est

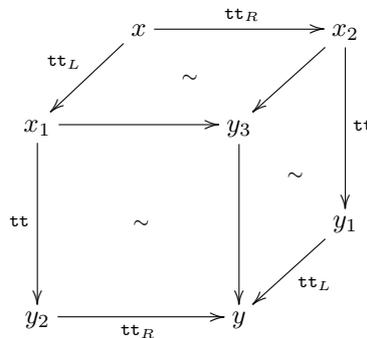
rempli par des tuiles 2-dimensionnelles comme figuré dans le membre droit du diagramme ci-dessous.



Il apparaîtra dans la suite que chaque direction de l'équivalence de la Propriété du Cube décrit une propriété bien précise de la causalité dans le graphe asynchrone. L'implication de gauche à droite indique que l'occurrence d'un événement  $\lceil n \rceil$  ne peut pas rendre compatible deux événements  $\lceil m \rceil$  et  $\lceil p \rceil$  qui étaient auparavant en conflit. Cette situation, que la Propriété du Cube écarte, est étudié par van Glabeek et Plotkin dans [vGP04], où elle est appelée *conflict résoluble*. L'implication de droite à gauche indique qu'un événement  $\lceil n \rceil$  ne peut pas dépendre d'un événement  $\lceil m \rceil$  ou d'un événement  $\lceil p \rceil$  : il dépend de l'un, de l'autre, des deux ou d'aucun, mais les *causalités disjonctives* sont écartées. Cette propriété est un avatar de la propriété de stabilité de Berry [Ber78], ce qui a été étudié par Panangaden, Shanbhogue et Stark [PSS90], ainsi que par Mellès [GLM92, Mel05c]. En particulier, considérons la fonction *ou parallèle* ajoutée par Plotkin [Pl077] au langage de programmation PCF. Cette fonction, notée `por`, a pour type  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ , où  $\mathbb{B}$  désigne le type des booléens dont les valeurs sont `tt` (pour *vrai*) et `ff` (pour *faux*), et a pour définition

$$\text{por}(\text{tt}, M) \Rightarrow \text{tt} \quad \text{por}(M, \text{tt}) \Rightarrow \text{tt} \quad \text{por}(\text{ff}, \text{ff}) \Rightarrow \text{ff}$$

où  $M$  est un terme quelconque et  $\Rightarrow$  désigne la relation de réduction du calcul. Informellement, cette fonction évalue donc ses deux arguments en parallèle et renvoie `tt` dès que l'un de ses arguments s'est évalué vers la valeur `tt`, ou `ff` si ses deux arguments s'évaluent vers `ff`. Une sémantique de trace naturelle pour cette fonction contiendrait le graphe



où  $\text{tt}_L$  (resp.  $\text{tt}_R$ ) est la valeur `tt` de la composante de gauche (resp. de droite) de l'argument. Ce graphe asynchrone ne vérifie donc pas l'implication de droite

à gauche de la Propriété du Cube, précisément parce que la fonction `por` n'est pas stable. Nous distinguerons dans la suite les deux directions de la Propriété du Cube de la façon suivante.

**Définition 1.20** (Propriété du Cube en avant et en arrière). L'implication de gauche à droite de la Propriété du Cube est appelée *Propriété du Cube en avant* et celle de droite à gauche est appelée *Propriété du Cube en arrière*.

**Propriété 1.21.** *Le graphe de transitions d'une structure d'événements vérifie la Propriété du Cube.*

## 1.4 Caractérisation des graphes de transitions

La Propriété du Cube permet essentiellement de caractériser les graphes asynchrones qui sont isomorphes au graphe de transitions d'une structure d'événements, fournissant ainsi une réciproque à la Propriété 1.21 : la classe d'homotopie d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  est caractérisée par un ordre partiel sur les événements apparaissant dans ce chemin. Cette section est dévolue à la démonstration de ce Théorème 1.68.

### 1.4.1 Événements initiaux

Commençons par introduire deux notions différentes, mais liées, d'*événement initial* d'un chemin. La première définition est simple et conceptuelle, tandis que la seconde définition est plus technique mais amène à une définition plus naturelle de résidu.

**Définition 1.22** (Événement initial modulo homotopie). Un événement  $m$  est *initial* dans un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  *modulo homotopie* lorsqu'il existe une transition  $m : x \twoheadrightarrow y$  et un chemin  $t : y \twoheadrightarrow z$  tel que le chemin

$$x \xrightarrow{m} y \twoheadrightarrow z$$

est homotope au chemin  $s$ .

La seconde définition d'événement initial est fondée sur une méthode, provenant de la théorie de la réécriture, pour « extraire » un événement  $m$  apparaissant dans un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  en le « tirant » jusqu'à obtenir une occurrence de cet événement à la position  $x$ .

**Définition 1.23** (Événement initial modulo indépendance). Un événement  $m$  est *initial* dans un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  *modulo indépendance* lorsque le chemin  $s$  peut être factorisé en

$$x \xrightarrow{s_1} y_1 \xrightarrow{m} y_2 \xrightarrow{s_2} z$$

de sorte que l'on ait

$$m \parallel s_1.$$

On note  $\chi(s)$  l'ensemble des événements du chemin  $s$  qui sont initiaux modulo indépendance.

Ces deux définitions d'événement initial coïncident dans le cas où le graphe asynchrone sous-jacent vérifie la Propriété du Cube en avant :

**Propriété 1.24.** *Dans un graphe asynchrone  $G$  satisfaisant la Propriété du Cube en avant, un événement  $m$  est initial dans un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  modulo homotopie si et seulement si il est initial dans le chemin modulo indépendance.*

*Démonstration.* L'implication de droite à gauche est immédiate par définition de l'indépendance (Définition 1.8) et peut être montrée par induction sur le chemin  $s$ . L'implication de gauche à droite est plus subtile et nécessite la Propriété du Cube en avant. Supposons que l'événement  $m$  soit initial dans le chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  modulo homotopie. Par définition, il existe un chemin  $m \cdot t : x \twoheadrightarrow z$  tel que  $m \cdot t \sim s$ . Ceci signifie qu'il existe une suite de pas d'homotopie

$$m \cdot t = t_1 \stackrel{1}{\sim} t_2 \stackrel{1}{\sim} \dots \stackrel{1}{\sim} t_k = s$$

mettant en relation des chemins  $t_1, \dots, t_k$  de la position  $x$  à la position  $z$ . On montre par induction sur  $k$  que chacun des chemins  $t_i$  se factorise comme indiqué dans l'énoncé de la Propriété. Pour  $k = 0$ , le chemin admet une factorisation qui convient en posant  $s_1 = \varepsilon$  et  $s_2 = t$  car  $s = m \cdot t$ . Sinon, supposons la Propriété vérifiée par les chemins  $t_1, \dots, t_k$  et montrons qu'elle est encore vraie pour  $t_{k+1} = s$ , avec  $t_k \stackrel{1}{\sim} t_{k+1}$ . Par définition de l'équivalence  $\stackrel{1}{\sim}$ , les chemins  $t_k$  et  $s$  se factorisent respectivement en

$$t_k = s_1 \cdot n \cdot p \cdot s_2 \quad \text{et} \quad s = s_1 \cdot p \cdot n \cdot s_2$$

c'est-à-dire que le chemin  $s$  est obtenu à partir de  $t_k$  en permutant les deux événements consécutifs  $n$  et  $p$ . Nous distinguons alors plusieurs cas, selon la position de l'événement  $m$  dans le chemin  $t_k$ .

- Si l'événement  $m$  apparaît dans le chemin  $s_1$  alors le chemin  $s_1$  se factorise en  $s_1 = s'_1 \cdot m \cdot s''_1$  où  $m \parallel s'_1$  par hypothèse d'induction. Le chemin  $s$  se factorise donc de façon convenable en

$$s = s'_1 \cdot m \cdot s''_1 \cdot p \cdot n \cdot s_2$$

et la Propriété est vérifiée.

- Si les événements  $m$  et  $n$  coïncident alors  $m \parallel s$  par hypothèse d'induction. La permutation

$$m \cdot p \quad \diamond_x \quad p \cdot m$$

à partir du but du chemin  $s_1$  implique alors que  $m \parallel s_1 \cdot p$ . On en déduit que le chemin  $s$  se factorise de façon convenable en

$$s = s_1 \cdot p \cdot m \cdot s_2$$

et la Propriété est vérifiée.

- Si les événements  $m$  et  $p$  coïncident alors  $m \parallel s_1 \cdot n$  par hypothèse d'induction. On en déduit immédiatement que  $m \parallel s_1$  et le chemin  $s$  se factorise de façon convenable en

$$s = s_1 \cdot m \cdot n \cdot s_2.$$

- Le cas véritablement intéressant est celui où l'événement  $m$  apparaît dans le chemin  $s_2$ , c'est-à-dire lorsque le chemin  $s_2$  se factorise en

$$s_2 = s'_2 \cdot m \cdot s''_2.$$

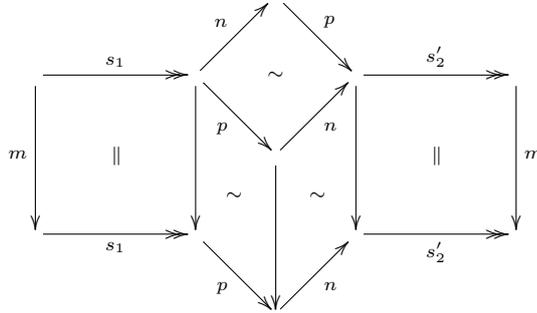
Par hypothèse d'induction, on a alors

$$m \parallel s_1 \cdot n \cdot p \cdot s'_2$$

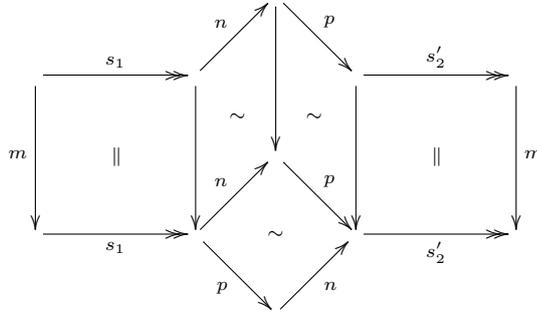
ce qui est équivalent, d'après la Propriété 1.9, à

$$m \parallel s_1, \quad m \parallel n \cdot p \quad \text{et} \quad m \parallel s'_2.$$

Diagrammatiquement,



Nous pouvons maintenant appliquer la Propriété du Cube en avant et obtenir ainsi le diagramme



On en déduit alors aisément que

$$m \parallel s_1, \quad m \parallel p \cdot n \quad \text{et} \quad m \parallel s'_2.$$

En utilisant encore une fois la Propriété 1.9, ceci est équivalent à

$$m \parallel s_1 \cdot p \cdot n \cdot s'_2.$$

On a finalement établi que le chemin  $s$  se factorise en

$$s = s_1 \cdot p \cdot n \cdot s'_2 \cdot m \cdot s''_2$$

et la Propriété est vérifiée.

□

On en déduit aisément que lorsque la Propriété du Cube en avant est satisfaite,

**Propriété 1.25.** *Pour tout événement  $m$  et chemins  $s, t : x \twoheadrightarrow y$ ,*

$$m \parallel s \quad \text{et} \quad s \sim t \quad \text{implique} \quad m \parallel t.$$

*Démonstration.* La preuve est fondée sur l'observation suivante : dans tout graphe asynchrone,

$$m \parallel s \quad \text{ssi} \quad m \in \chi(s \cdot m).$$

On en déduit la série d'équivalences

$$m \parallel s \quad \text{ssi} \quad m \in \chi(s \cdot m) \quad \text{ssi} \quad m \in \chi(t \cdot m) \quad \text{ssi} \quad m \parallel t$$

où l'équivalence du milieu peut être déduite de l'homotopie  $s \cdot m \sim t \cdot m$  et de la Propriété 1.24. □

### 1.4.2 Résidu d'un chemin après un événement

Nous adaptons maintenant un outil clé de la théorie de la réécriture à notre cadre et définissons la notion de *résidu  $s/t$*  d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  après un chemin coinitial compatible  $t : x \twoheadrightarrow z$ . Intuitivement, le résidu  $s/t$  est le chemin partant de la position  $z$  qui contient tous les événements de  $s$  qui n'ont pas déjà eu d'occurrence dans le chemin  $t$ . Ce résidu n'est défini que si les deux chemins  $s$  et  $t$  sont *compatibles* dans un sens précisé plus loin.

Tout d'abord, nous définissons le résidu  $s/m$  d'un chemin  $s$  après un événement  $m$  lorsque cet événement est indépendant de  $s$ , ou initial modulo indépendance.

**Définition 1.26** (Résidu d'un chemin après un événement indépendant). Si  $s : x \twoheadrightarrow y$  est un chemin et  $m$  est un événement indépendant de  $s$ , le résidu  $s/m$  du chemin  $s$  après l'événement  $m$  est défini inductivement par

- $\varepsilon_x/m = \varepsilon_{x'}$ , où  $x'$  est la position définie par la transition  $m : x \rightarrow x'$ ,
- $(n \cdot s)/m = n \cdot (s/m)$ .

Ainsi, le diagramme (1.3) décrit une situation où le chemin

$$x \xrightarrow{s} y = x \xrightarrow{n_1} x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{k-1} \xrightarrow{n_k} y$$

admet le chemin

$$x' \xrightarrow{s/m} y' = x' \xrightarrow{n_1} x'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x'_{k-1} \xrightarrow{n_k} y'$$

comme résidu après l'événement indépendant  $m$ .

**Définition 1.27** (Résidu d'un chemin après un événement initial). Si  $s : x \twoheadrightarrow y$  est un chemin et  $m \in \chi(s)$  est un événement initial du chemin  $s$  modulo indépendance, le résidu  $s/m : x' \twoheadrightarrow z$  du chemin  $s$  après l'événement  $m$  est défini inductivement par

- $\varepsilon_x/m = \varepsilon_{x'}$ , où  $x'$  est la position définie par la transition  $m : x \rightarrow x'$ ,

$$\bullet (n \cdot s)/m = \begin{cases} s & \text{si } m = n \\ n \cdot (s/m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Définition 1.23 d'un événement initial modulo indépendance, le chemin  $s$  se factorise en  $s_1 \cdot m \cdot s_2$ , où l'événement  $m$  est indépendant du chemin  $s_1$ . On peut alors observer que

$$s/m = (s_1/m) \cdot s_2$$

où  $s_1/m$  est défini à la Définition 1.26. En particulier,

**Propriété 1.28.** *Supposons que  $m \in \chi(s)$  est un événement initial d'un chemin  $s$  modulo indépendance. On a alors :*

$$s \sim m \cdot (s/m).$$

**Propriété 1.29.** *Dans un graphe asynchrone  $G$  satisfaisant la Propriété du Cube en avant, tout événement  $m$  et tous chemins  $s, t : x \twoheadrightarrow y$  satisfait :*

$$\begin{array}{llllll} m \parallel s & \text{et} & s \sim t & \text{implique} & m \parallel t & \text{et} & s/m \sim t/m, \\ m \in \chi(s) & \text{et} & s \sim t & \text{implique} & m \in \chi(t) & \text{et} & s/m \sim t/m. \end{array}$$

Nous étendons maintenant la notion de résidu et définissons le résidu d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  après un chemin  $t : x \twoheadrightarrow z$ . Comme nous l'avons précédemment expliqué, ce résidu  $s/t$  n'est défini que lorsque les chemins  $s$  et  $t$  sont compatibles dans le sens suivant.

**Définition 1.30** (Chemins compatibles). Deux chemins cointiaux  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$  sont *compatibles*, ce que l'on note

$$s \uparrow t$$

lorsque

- le chemin  $t$  est le chemin vide  $\varepsilon_x$ ,
- ou bien le chemin  $t$  se factorise en

$$x \xrightarrow{m} x' \xrightarrow{t'} z$$

où  $m$  est soit un événement indépendant du chemin  $s$  :

$$m \parallel s$$

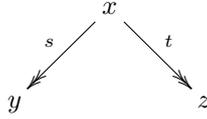
soit un événement initial du chemin  $s$  modulo permutation

$$m \in \chi(s)$$

et  $t'$  est un chemin tel que

$$s/m \uparrow t'.$$

La relation de compatibilité  $s \uparrow t$  est définie de façon asymétrique, par induction sur le chemin  $s$ . En effet, nous « remplissons par des tuiles » le diagramme



formé par les chemins  $s$  et  $t$  dans un ordre prédéterminé et assez rigide. Il est possible de donner une définition équivalente et entièrement symétrique, en construisant le diagramme progressivement, tuile après tuile, en mettant les tuiles dans n'importe quel ordre, suivant ainsi un principe déjà utilisé par Dehornoy [Deh00]. On peut alors en déduire que la relation de compatibilité est symétrique :

**Propriété 1.31.** *Étant donnés deux chemins coinitiaux  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$ , on a*

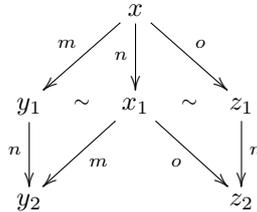
$$s \uparrow t \quad \text{ssi} \quad t \uparrow s.$$

Elle est aussi réflexive :

**Propriété 1.32.** *Pour tout chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$ , on a*

$$s \uparrow s.$$

*Remarque 1.33.* La relation de compatibilité n'est cependant pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive. Dans le graphe asynchrone



on a les chemins  $m : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $n : x \twoheadrightarrow x_1$  sont compatibles, ainsi que les chemins  $n : x \twoheadrightarrow x_1$  et  $o : x \twoheadrightarrow z_1$ . Mais les chemins  $m : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $o : x \twoheadrightarrow z_1$  ne sont pas compatibles.

Nous pouvons maintenant définir notre notion générale de résidu de la façon suivante.

**Définition 1.34** (Résidu d'un chemin après un chemin). Le *résidu* d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  après un chemin compatible  $t : x \twoheadrightarrow z$  est le chemin  $s/t : z \twoheadrightarrow v$  défini par induction sur le chemin  $t$  par :

- $s/\varepsilon_x = s$ ,
- $s/(m \cdot t) = (s/m)/t$ .

Il est à noter que l'hypothèse de compatibilité entre les chemins  $s$  et  $t$  nous assure que le résidu  $s/t$  est toujours bien défini.

Nous montrons maintenant que les notions de compatibilité et de résiduation interagissent comme on pourrait s'y attendre avec la concaténation des chemins et l'homotopie entre chemins.

**Propriété 1.35** (Compatibilité et concaténation). Soient  $s : x \twoheadrightarrow y_2$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$  deux chemins tels que  $s$  se factorise en

$$x \xrightarrow{s_1} y_1 \xrightarrow{s_2} y_2.$$

Le chemin  $s$  est alors compatible avec le chemin  $t$  si et seulement si

$$s_1 \uparrow t \quad \text{et} \quad s_2 \uparrow (t/s_1).$$

**Propriété 1.36** (Résiduation et concaténation). Supposons que  $s : x \twoheadrightarrow y_2$  et  $t : x \twoheadrightarrow z_2$  soient deux chemins compatibles, se factorisant respectivement en

$$x \xrightarrow{s_1} y_1 \xrightarrow{s_2} y_2 \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{t_1} z_1 \xrightarrow{t_2} z_2.$$

On a alors

$$s/t = (s_1/t) \cdot (s_2/(t/s_1)) = (s/t_1)/t_2$$

les membres des égalités étant tous définis en vertu de la Propriété 1.35.

**Propriété 1.37** (Compatibilité et homotopie). Soient  $s : x \twoheadrightarrow y$ ,  $t : x \twoheadrightarrow z$  et  $t' : x \twoheadrightarrow z$  trois chemins tels que  $t \sim t'$ . On a alors

$$s \uparrow t \quad \text{ssi} \quad s \uparrow t'.$$

**Propriété 1.38** (Résiduation et homotopie). Soient  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$  deux chemins compatibles et  $t' : x \twoheadrightarrow z$  un chemin homotope à  $t$ . On a alors

$$s/t = s/t'$$

le résidu  $s/t'$  étant défini car les chemins  $s$  et  $t'$  sont compatibles d'après la Propriété 1.37

**Propriété 1.39** (Auto-résiduation). Pour tout chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$ , on a

$$s/s = \varepsilon_x$$

le résidu étant défini d'après la Propriété 1.32.

Ces deux dernières propriétés nous permettront dans la suite d'utiliser la notion de résidu sur des chemins considérés modulo homotopie.

### 1.4.3 La catégorie des chemins modulo homotopie

Nous tirons maintenant parti de la notion de résidu et montrons que, dans la catégorie  $[G]$  des chemins modulo homotopie associée à un graphe asynchrone  $G$  introduite à la Définition 1.4, tous les morphismes sont à la fois épi et mono lorsque la catégorie vérifie la Propriété du Cube. Plus précisément, nous montrons que la propriété d'être épi découle de la Propriété du Cube en avant, et dualement la propriété d'être mono découle de la Propriété du Cube en arrière. Ces deux propriétés referont surface lorsque nous associerons une catégorie  $L_s$  à tout chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  du graphe asynchrone. Cette catégorie, appelée *catégorie de factorisations* du chemin  $s$ , se révélera en effet être une catégorie d'ordre lorsque la propriété d'être épi (ou d'être mono) est satisfaite.

**Propriété 1.40.** *Si  $G$  est un graphe asynchrone satisfaisant la Propriété du Cube en avant, tout morphisme de  $[G]$  est épi.*

*Démonstration.* Soit  $m : x \rightarrow y$  une transition et  $s, t : y \twoheadrightarrow z$  deux chemins du graphe asynchrone  $G$  tels que

$$m \cdot s \sim m \cdot t.$$

L'événement  $m$  est initial modulo indépendance dans chacun des chemins  $m \cdot s$  et  $m \cdot t$ . Nous appliquons alors les Propriétés 1.28 et 1.29 et en déduisons la série d'équivalences homotopiques

$$s \sim (m \cdot s)/m \sim (m \cdot t)/m \sim t.$$

On en déduit que le morphisme  $[m] : x \rightarrow y$  associée à la transition  $m : x \rightarrow y$  est épi dans la catégorie  $[G]$ . Comme tout morphisme de  $[G]$  est la composée de tels morphismes, nous pouvons conclure.  $\square$

Nous avons pris soin depuis le début de définir les graphes asynchrones de façon « auto-duale » dans le sens où, en inversant les direction des transitions, on obtient toujours un graphe asynchrone. La dualité a son importance car elle transporte par exemple la Propriété du Cube en avant en la Propriété du Cube en arrière. Ceci nous permet d'énoncer une propriété duale de la Propriété 1.40.

**Corollaire 1.41.** *Si  $G$  est un graphe asynchrone satisfaisant la Propriété du Cube en arrière, tout morphisme de  $[G]$  est mono.*

Nous montrons que la catégorie  $[G]$  a les produits fibrés et les sommes amalgamées de morphismes compatibles lorsque le graphe asynchrone  $G$  satisfait le Propriété du Cube. Caractérisons tout d'abord les situations dans lesquelles deux chemins cointiaux  $s : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $t : x \twoheadrightarrow y_2$  sont compatibles.

**Propriété 1.42.** *Deux chemins cointiaux  $s : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $t : x \twoheadrightarrow y_2$  sont compatibles si et seulement si il existe un sommet  $z$  et deux chemins  $s' : y_1 \twoheadrightarrow z$  et  $t' : y_2 \twoheadrightarrow z$  tels que*

$$s \cdot s' \sim t \cdot t'.$$

*En particulier, si  $s : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $t : x \twoheadrightarrow y_2$  sont deux chemins compatibles alors il existe une position  $z$  et deux résidus*

$$s/t : y_1 \twoheadrightarrow z \quad \text{et} \quad t/s : y_2 \twoheadrightarrow z.$$

*Ces résidus sont cofinaux et satisfont*

$$s \cdot (s/t) \sim t \cdot (t/s).$$

*Démonstration.* Nous montrons les deux directions de l'équivalence séparément.

Nous montrons l'implication de gauche à droite par induction sur la longueur du chemin  $s$ , c'est-à-dire que si

$$s/t : y_1 \twoheadrightarrow z_1 \quad \text{et} \quad t/s : y_2 \twoheadrightarrow z_2$$

sont les résidus respectifs de  $s$  après  $t$  et de  $t$  après  $s$  alors  $z_1 = z_2$  et

$$s \cdot (t/s) \sim t \cdot (s/t).$$

Si  $s$  est le chemin vide  $\varepsilon_x$  alors  $s/t = \varepsilon_{y_2} : y_2 \twoheadrightarrow y_2$  et  $t/s = t : x \twoheadrightarrow y_2$ , et par réflexivité de l'homotopie on a

$$s \cdot (t/s) = t \sim t = t \cdot (s/t).$$

Sinon, supposons que le chemin  $s$  se factorise en

$$x \xrightarrow{m} x_1 \xrightarrow{s/m} y_1.$$

Les chemins  $s$  et  $t$  étant compatibles, nous savons que  $(s/m) \uparrow (t/m)$  et

$$m \parallel t \quad \text{ou} \quad m \in \chi(t).$$

Par hypothèse d'induction, nous savons que

$$(s/m) \cdot ((t/m)/(s/m)) \sim (t/m) \cdot ((t/m)/(s/m))$$

(et cette homotopie est définie, dans le sens où les deux chemins sont cointiaux et cofinaux), ce qui nous permet de déduire

$$s \cdot (t/s) = m \cdot (s/m) \cdot ((t/m)/(s/m)) \sim m \cdot (t/m) \cdot ((t/m)/(s/m)) = t \cdot (t/s)$$

ce qui conclut notre preuve par induction.

L'implication de gauche à droite peut être montrée par induction sur la longueur du chemin  $s$ . Si  $s$  est le chemin  $\varepsilon_x$  alors les chemins  $s' = t$  et  $t' = \varepsilon_{y_2}$  conviennent. Sinon, le chemin  $s$  se factorise en

$$x \xrightarrow{m} x_1 \xrightarrow{s/m} y_1$$

D'après la Propriété 1.29, nous savons que

$$(s/m) \cdot s' = (s \cdot s')/m \sim (t \cdot t')/m.$$

De plus  $m \in \chi(t \cdot t')$ . Il s'en suit aisément par la Propriété 1.24 que

$$m \parallel t \quad \text{ou} \quad m \in \chi(t)$$

et dans ces cas, on a respectivement

$$(t \cdot t')/m = (t/m) \cdot (t'/m) \quad \text{et} \quad (t \cdot t')/m = (t/m) \cdot t'.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction et prouver dans les deux cas que  $(s/m) \uparrow (t/m)$ , ce qui nous permet de conclure que  $s \uparrow t$ .  $\square$

**Définition 1.43** (Morphismes compatibles). Deux morphismes cointiaux

$$f_1 : x \rightarrow y_1 \quad \text{et} \quad f_2 : x \rightarrow y_2$$

dans une catégorie  $\mathcal{C}$  sont *compatible* lorsqu'il existe une paire de morphismes cofinaux

$$g_1 : y_1 \rightarrow z \quad \text{et} \quad g_2 : y_2 \rightarrow z$$

telle que

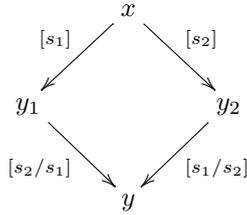
$$g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2.$$

**Définition 1.44** (Catégories avec sommes amalgamées compatibles). Une catégorie  $\mathcal{C}$  a les *sommes amalgamées compatibles* lorsque toute paire de morphismes cointiaux compatibles a une somme amalgamée.

**Propriété 1.45.** Soit  $G$  un graphe asynchrone ayant la Propriété du Cube en avant. Alors  $[G]$  a les sommes amalgamées compatibles : si  $[s_1] : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $[s_2] : x \twoheadrightarrow y_2$  sont deux morphismes compatibles de  $[G]$ , alors leur somme amalgamée existe et est donnée par la position  $y$ , et les deux morphismes

$$[s_2/s_1] : y_1 \twoheadrightarrow y \quad \text{et} \quad [s_1/s_2] : y_2 \twoheadrightarrow y.$$

Diagrammatiquement,



*Démonstration.* Soient  $[s_1] : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $[s_2] : x \twoheadrightarrow y_2$  deux morphismes compatibles dans  $[G]$ . Par définition de la compatibilité, il existe une paire de chemins  $t_1 : y_1 \twoheadrightarrow z$  et  $t_2 : y_2 \twoheadrightarrow z$  tels que  $s_1 \cdot t_1 \sim s_2 \cdot t_2$ . D'après la Propriété 1.42, nous savons que

$$(s_2/s_1) \cdot (t_1/(s_2/s_1)) \sim t_1 \cdot (s_2/s_1)/t_1$$

où  $(s_2/s_1)/t_1$  est le chemin vide  $\varepsilon_z$  car

$$\begin{aligned} (s_2/s_1)/t_1 &= s_1/(s_1 \cdot t_1) \quad \text{d'après la Propriété 1.36,} \\ &= s_2/(s_2 \cdot t_2) \quad \text{d'après la Propriété 1.37, car } s_1 \cdot t_1 \sim s_2 \cdot t_2, \\ &= (s_2/s_2)/t_2 \quad \text{d'après la Propriété 1.36,} \\ &= \varepsilon_x/t_2 \quad \text{d'après la Propriété 1.39,} \\ &= \varepsilon_x \quad \text{par définition des résidus.} \end{aligned}$$

De même, on a

$$(s_1/s_2) \cdot (t_2/(s_1/s_2)) \sim t_2.$$

Notons que pour toute autre paire de chemins  $s'_1 \in [s_1]$  et  $s'_2 \in [s_2]$ , on a

$$s'_2/s'_1 \sim s_2/s_1 \quad \text{et} \quad s'_1/s'_2 \sim s_1/s_2.$$

La somme amalgamée sera donc définie modulo homotopie. De l'équivalence précédente on peut déduire les équivalences homotopiques

$$s_1 \cdot (s_2/s_1) \cdot (t_1/(s_2/s_1)) \sim s_1 \cdot t_1 \sim s_2 \cdot t_2 \sim (s_1/s_2) \cdot (t_2/(s_1/s_2))$$

et

$$(s_2/s_1) \cdot (t_1/(s_2/s_1)) \sim (s_1/s_2) \cdot (t_2/(s_1/s_2))$$

car les morphismes de  $[G]$  sont épi.

Soit  $y$  la position telle que

$$s_2/s_1 : y_1 \twoheadrightarrow y \quad \text{et} \quad s_1/s_2 : y_2 \twoheadrightarrow y.$$

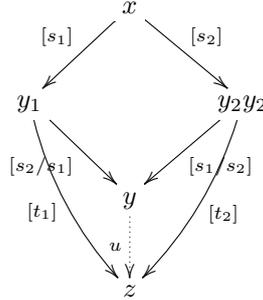
Supposons qu'il existe un chemin  $u : y \twoheadrightarrow z$  tel que

$$(s_2/s_1) \cdot u \sim t_1 \quad \text{et} \quad (s_1/s_2) \cdot u \sim t_2.$$

On a alors

$$(s_2/s_1) \cdot (t_1/(s_2/s_1)) \sim u \sim (s_1/s_2) \cdot (t_2/(s_1/s_2)).$$

Il existe donc un chemin  $u : y \twoheadrightarrow z$ , qui est unique modulo homotopie, tel que le diagramme



commute.

Ceci montre que la position  $y$  munie des deux chemins  $[s_2/s_1] : y_1 \twoheadrightarrow y$  et  $[s_1/s_2] : y_2 \twoheadrightarrow y$  modulo homotopie forme la somme amalgamée des chemins  $[s_1] : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $[s_2] : x \twoheadrightarrow y_2$  modulo homotopie.  $\square$

Les définitions posées jusqu'ici étant auto-duales, le dual de la Propriété 1.45 est aussi vérifié lorsque le graphe asynchrone a la Propriété du Cube en arrière.

### 1.4.4 La catégorie de factorisations

Nous introduisons la notion de catégorie de factorisations associée à un morphisme  $s : x \twoheadrightarrow z$  et appliquons cette construction aux morphismes de la catégorie  $[G]$ .

**Définition 1.46** (Catégorie de factorisations). À tout morphisme  $f : x \rightarrow z$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , une *catégorie de factorisations* peut être associée de la façon suivante :

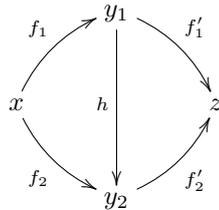
- ses objets sont les paires composables  $(f_1, y_1, f'_1)$  de morphismes

$$f_1 : x \rightarrow y_1 \quad \text{et} \quad f'_1 : y_1 \rightarrow z$$

tels que

$$f'_1 \circ f_1 = f$$

- ses morphismes  $h : (f_1, y_1, f'_1) \rightarrow (f_2, y_2, f'_2)$  sont les morphismes  $h : y_1 \rightarrow y_2$  tels que le diagramme



commute.

De façon équivalente, la catégorie de factorisations associée à un morphisme  $f : x \rightarrow z$  peut être définie comme la catégorie tranche au dessous de  $f$  de la catégorie tranche de  $\mathcal{C}$  au dessus de  $z$  (la notion de catégorie tranche est introduite à la Définition 0.12). Cette construction peut être effectuée dans deux ordres différents qui mènent à deux catégories isomorphes :

$$(x \downarrow \mathcal{C}) \downarrow f \cong f \downarrow (\mathcal{C} \downarrow z).$$

**Définition 1.47** (Catégorie des factorisations). À tout chemin  $s : x \twoheadrightarrow z$  d'un graphe asynchrone  $G$  on peut associer la *catégorie des factorisations de  $s$* , notée  $L_s$ , qui est la catégorie des factorisations de sa classe d'homotopie  $[s]$  considérée comme un morphisme de la catégorie  $[G]$ .

Plus explicitement, un objet  $(x, s_1, y, s_2, z)$  de la catégorie  $L_s$  est une paire de chemins composables

$$x \xrightarrow{s_1} y \quad \text{et} \quad y \xrightarrow{s_2} z \tag{1.6}$$

considérés modulo homotopie, tels que  $s \sim s_1 \cdot s_2$ . Un morphisme

$$u : (x, s_1, y, s_2, z) \rightarrow (x, s'_1, y', s'_2, z)$$

est un chemin  $u : y \twoheadrightarrow y'$ , considéré modulo homotopie, tel que

$$s_1 \cdot u \sim s'_1 \quad \text{et} \quad y \cdot s'_2 \sim s_2.$$

La situation dans laquelle le graphe asynchrone  $G$  satisfait la Propriété du Cube en avant est particulièrement intéressante. En effet, nous avons montré que dans ce cas tout morphisme de  $[G]$  est épi. Par conséquent, toute paire de morphismes (1.6) telle que  $s \sim s_1 \cdot s_2$  est déterminée de façon unique modulo homotopie par son préfixe  $s_1$ . On peut donc identifier les objets de la catégorie  $L_s$  avec les préfixes de  $s$  modulo homotopie. Nous allons voir que la catégorie  $L_s$  est réduite à un ordre partiel dont les éléments sont les préfixes de  $s$  modulo homotopie ordonnés par la relation de préfixage modulo homotopie. La construction d'un ordre partiel sur les chemins partant d'une position donnée  $x$  est bien connue dans la littérature sur les graphes asynchrones [WN95]. Ici, nous restreignons cette construction aux préfixes du chemin  $s$  afin de montrer qu'il définit un treillis distributif  $L_s$ .

**Définition 1.48** (Catégorie d'ordre). Une *catégorie d'ordre*  $\mathcal{C}$  est une catégorie dans laquelle il y a au plus un morphisme entre deux objets.

Une catégorie d'ordre définit une relation  $\leq$  sur ses objets, définie par  $x \leq y$  lorsqu'il existe un morphisme de  $x$  à  $y$ , et cette relation caractérise la catégorie. Notons que la relation  $\leq$  est nécessairement réflexive (car la catégorie a des identités) et transitive (car la catégorie admet une loi de composition), mais pas nécessairement antisymétrique.

Il n'est pas difficile de constater que, lorsque le graphe asynchrone sous-jacent  $G$  satisfait la Propriété du Cube en avant,

**Propriété 1.49.** *La catégorie de factorisations  $L_s$  est une catégorie d'ordre.*

*Démonstration.* Comme nous l'avons précédemment mentionné, nous identifions les objets de  $L_s$  avec les préfixes du chemin  $s$  considérés modulo homotopie ; et les morphismes  $t : s_1 \rightarrow s_2$  avec les chemins  $t$  tels que  $s_1 \cdot t \sim s_2$  aussi considérés modulo homotopie. La preuve découle immédiatement du fait que, par la Propriété 1.40, les morphismes de  $[G]$  sont épi. Toute paire de morphismes  $t, u : s_1 \rightarrow s_2$  satisfait en effet les équivalences homotopiques

$$s_1 \cdot t \sim s_2 \sim s_1 \cdot u$$

et le caractère épi des morphismes implique que  $t \sim u$ . □

Il est possible de caractériser simplement l'ordre induit par  $L_s$  sur les préfixes du chemin  $s$  modulo homotopie. En effet, en notant  $s \lesssim t$  lorsqu'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  est un préfixe d'un chemin  $t : x \twoheadrightarrow z$  modulo homotopie, on a :

**Propriété 1.50.** *Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux préfixes d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  modulo homotopie. Il existe un morphisme de la classe d'homotopie  $[s_1]$  à la classe d'homotopie  $[s_2]$  dans la catégorie  $L_s$  si et seulement si  $s_1 \lesssim s_2$ .*

Dans un graphe asynchrone satisfaisant la Propriété du Cube en Avant, la relation  $\lesssim$  définit un préordre dont les classes d'équivalence sont simplement les classes d'homotopie :

**Propriété 1.51.** *Pour toute paire de chemins coiniciaux  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$ , on a*

$$s \lesssim t \lesssim s \quad \text{implique} \quad s \sim t.$$

On en déduit immédiatement que

**Propriété 1.52.** *La catégorie  $L_s$  induit un ordre partiel sur ses objets.*

### 1.4.5 Un treillis distributif

Nous montrons maintenant que la catégorie  $L_s$  est un ordre partiel sur ses objets qui a une structure de treillis distributif. Ceci nous permettra grâce au théorème de représentation de Birkhoff de montrer le Théorème 1.68, qui peut véritablement être considéré comme le théorème fondamental des graphes asynchrones. Commençons par rappeler quelques notions de la théorie des treillis qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 1.53** (Semi-treillis). Un *sup-semitreillis*  $(L, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné dans lequel toute paire d'éléments  $x$  et  $y$  admet une borne supérieure. Dualement, un *inf-semitreillis* est un ensemble partiellement ordonné dans lequel toute paire d'éléments admet une borne inférieure.

On rappelle que la *borne supérieure*  $x \vee y$  de deux éléments  $x$  et  $y$  est un élément  $z$  de  $L$  tel que  $z \geq x$  et  $z \geq y$  et, pour tout élément  $z'$  de  $L$ ,

$$z' \geq x \quad \text{et} \quad z' \geq y \quad \text{implique} \quad z' \geq z.$$

**Définition 1.54** (Treillis). Un *treillis*  $(L, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné qui est à la fois un sup-semitreillis et un inf-semitreillis.

*Remarque 1.55.* Un treillis *fini*  $(L, \leq)$  admet toujours un élément maximal  $\top = \bigvee L$  et un élément minimal  $\perp = \bigwedge L$ .

**Définition 1.56** (Treillis distributif). Un treillis  $(L, \leq)$  est *distributif* lorsque pour tous éléments  $x, y$  et  $z$  de  $L$ , on a

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

La catégorie des treillis distributifs finis est notée **FinDLat**. Ses objets sont les treillis distributifs de support fini et ses morphismes sont les fonctions préservant les bornes supérieure et inférieure.

*Remarque 1.57.* L'axiome de la définition précédente est équivalent à l'axiome dual

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

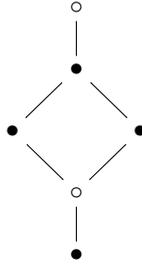
*Exemple 1.58.* Pour tout ensemble  $E$ , l'ensemble  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  des sous-ensembles de  $E$  ordonnés par inclusion est un treillis distributif, la borne supérieure de deux ensembles  $A$  et  $B$  étant donnée par leur union  $A \cup B$  et leur borne inférieure étant donnée par leur intersection  $A \cap B$ .

**Définition 1.59** (Sup-irréductibilité). Un élément  $m$  d'un treillis  $(L, \leq)$  est *sup-irréductible* lorsqu'il est distinct de l'élément minimal de  $L$  (s'il en existe un) et pour tous éléments  $n$  et  $o$  de  $L$ ,

$$m = n \vee o \quad \text{implique} \quad m = n \quad \text{ou} \quad m = o.$$

On note  $\mathcal{J}(L, \leq)$  l'ensemble des éléments sup-irréductibles de  $(L, \leq)$ .

*Exemple 1.60.* Les éléments sup-irréductibles d'un treillis distributif fini sont les éléments qui couvrent exactement un élément. On rappelle qu'un élément  $y$  d'un treillis  $(L, \leq)$  *couvre* un élément  $x$  de ce treillis lorsque  $x < y$  et qu'il n'existe pas d'élément  $z$  de  $L$  tel que  $x < z < y$  (on dit aussi parfois que  $y$  est un *successeur immédiat* de  $x$ ). Ainsi, nous avons figuré par  $\bullet$  les éléments sup-irréductibles de l'ordre partiel



représenté par son diagramme de Hasse, l'élément minimal étant figuré en haut.

**Définition 1.61** (Idéal). Un *idéal*  $I$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$  est un sous-ensemble de  $E$  clos vers le bas :

$$\forall m \in E, \forall n \in I, \quad m \leq n \quad \text{implique} \quad m \in I.$$

Nous noterons  $\mathcal{I}(E, \leq)$  l'ensemble des idéaux de l'ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$ .

Pour tout ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$ , l'ensemble  $\mathcal{I}(E, \leq)$  muni de l'ordre induit par l'inclusion est un treillis distributif. De même, pour tout

treillis distributif  $(L, \leq)$  la restriction de l'ordre partiel  $\leq$  à l'ensemble  $\mathcal{J}(L, \leq)$  munit ce dernier d'un ordre partiel. Les fonction  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  peuvent ainsi être étendues en une paire de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{I} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{FinPOSet} & & \mathbf{FinDLat} \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

où **FinPOSet** est la catégorie des ensembles finis partiellement ordonnés. Le théorème de représentation de Birkhoff [Bir33, DP02] pour les treillis distributifs nous indique alors que

**Théorème 1.62** (Théorème de représentation de Birkhoff). *La paire de foncteurs  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{FinPOSet} \cong \mathbf{FinDLat}.$$

Nous avons montré à la Propriété 1.52 que la catégorie de factorisations  $L_s$  d'un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  d'un graphe asynchrone  $G$  satisfaisant la Propriété du Cube est réduite à un ordre partiel, noté  $(L_s, \preceq)$ . Nous montrons maintenant que cet ordre partiel a une structure de treillis distributif. La preuve est fondée sur une réduction de toute factorisation  $s_1 \cdot s_2$  de  $s$  modulo homotopie à l'ensemble  $M_{s_1}$  des événements qui apparaissent dans le chemin  $s_1$ .

**Définition 1.63.** L'ensemble  $M_s$  d'événements apparaissant dans un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  est défini inductivement par

- $M_\varepsilon = \emptyset$ ,
- $M_{m \cdot t} = \{m\} \uplus M_t$ .

En particulier, le chemin vide  $\varepsilon$  est le seul chemin dont l'ensemble d'événements soit vide.

La propriété suivante renforce l'intuition déjà mentionnée que le résidu  $s_1/s_2$  d'un chemin  $s_1$  après un chemin  $s_2$  est le chemin contenant les événements de  $s_1$  qui n'ont pas déjà eu lieu dans  $s_2$ .

**Propriété 1.64.** *Si  $s_1 : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $s_2 : x \twoheadrightarrow y_2$  sont deux chemins compatibles alors le résidu de  $s_1$  après  $s_2$  satisfait*

$$M_{s_1/s_2} = M_{s_1} \setminus M_{s_2}.$$

Commençons par expliquer comment les bornes supérieure et inférieure de deux éléments

$$x \xrightarrow{s_1} y_1 \xrightarrow{s'_1} z \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{s_2} y_2 \xrightarrow{s'_2} z \quad (1.7)$$

de l'ordre partiel  $L_s$  sont calculées dans un graphe asynchrone  $G$  satisfaisant la Propriété du Cube en avant. Par définition de la factorisation, on a

$$s_1 \cdot s'_1 \sim s \sim s_2 \cdot s'_2.$$

D'après la Propriété 1.42, les deux chemins  $s_1$  et  $s_2$  sont compatibles. Ceci nous permet de définir l'élément  $s_1 \vee s_2$  comme la factorisation de  $s$  dont le préfixe est

$$s_1 \vee s_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_1 \cdot (s_2/s_1)$$

qui est unique modulo homotopie. Il découle de la Propriété 1.45 que ceci définit une borne supérieure dans l'ensemble partiellement ordonné  $L_s$ . La Propriété 1.64 nous permet en particulier de déduire que l'identité

$$M_{s_1 \vee s_2} = M_{s_1} \cup M_{s_2}$$

est vérifiée.

**Propriété 1.65.** Soient  $(s_1, y_1, s'_1)$  et  $(s_2, y_2, s'_2)$  deux éléments de  $L_s$ . Alors,

$$M_{s_1} = M_{s_2} \quad \text{ssi} \quad s_1 \sim s_2.$$

*Démonstration.* L'implication de droite à gauche est simple. Montrons l'implication de gauche à droite. Soient  $(s_1, y_1, s'_1)$  et  $(s_2, y_2, s'_2)$  deux éléments de  $L_s$  tels que  $M_{s_1} = M_{s_2}$ . Par définition de  $L_s$ , on a

$$s_1 \cdot s'_1 \sim s_2 \cdot s'_2$$

Par la Propriété 1.42, on a donc

$$s_1 \cdot (s_2/s_1) \sim s_2 \cdot (s_1/s_2).$$

On sait de plus que

$$M_{s_2/s_1} = M_{s_2} \setminus M_{s_1} = \emptyset = M_{s_1} \setminus M_{s_2} = M_{s_1/s_2}$$

par la Propriété 1.64. On en déduit que les chemins  $s_2/s_1$  et  $s_1/s_2$  sont tout les deux vides et finalement les chemins  $s_1$  et  $s_2$  sont homotopes.  $\square$

De façon duale, si le graphe asynchrone  $G$  satisfait la Propriété du Cube en arrière, on peut montrer que les chemins  $s'_1$  et  $s'_2$  de (1.7) on un produit fibré dans  $[G]$ , c'est-à-dire qu'il existe une position  $y_1 \wedge y_2$  et une paire

$$t_1 : y_1 \wedge y_2 \twoheadrightarrow y_1 \quad \text{et} \quad t_2 : y_1 \wedge y_2 \twoheadrightarrow y_2$$

de chemins tels qu'il existe un chemin  $t : x \twoheadrightarrow y_1 \wedge y_2$ , unique modulo homotopie, tel que

$$t \cdot t_1 \sim s_1 \quad \text{et} \quad t \cdot t_2 \sim s_2.$$

Ce chemin  $t$  sera noté  $s_1 \wedge s_2$  car il est déterminé de façon unique modulo homotopie par les chemins  $s_1$  et  $s_2$ . De plus, on peut montrer que ce chemin satisfait

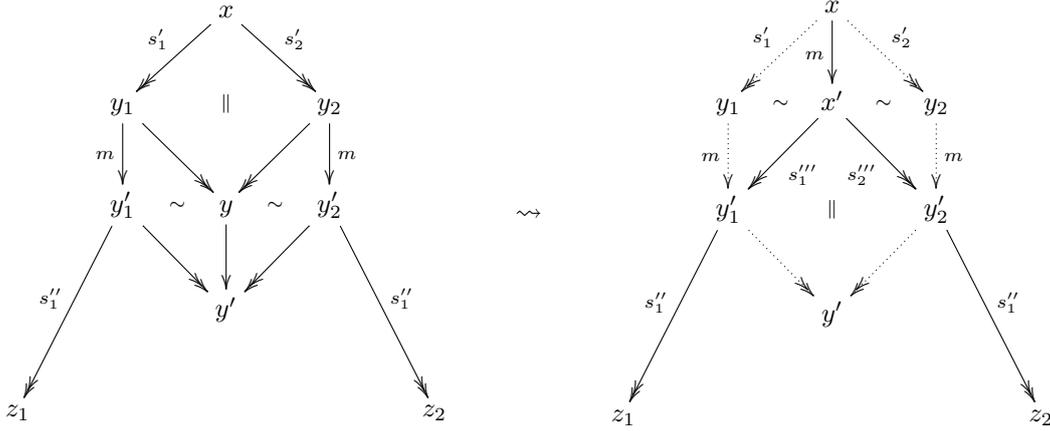
$$M_{s_1 \wedge s_2} = M_{s_1} \cap M_{s_2}.$$

*Remarque 1.66.* L'intersection de deux chemins  $s_1 : x \twoheadrightarrow z_1$  et  $s_2 : x \twoheadrightarrow z_2$  compatibles peut être calculée de façon plus concrète de la façon suivante, par induction sur le nombre d'événements communs à  $s_1$  et  $s_2$ . S'il n'existe pas de tel événement alors l'intersection des deux chemins est le chemin vide  $\varepsilon : x \twoheadrightarrow x$ . Sinon, notons  $m$  l'événement commun à  $s_1$  et  $s_2$  qui apparaisse le premier dans  $s_2$

(le plus proche de la position initiale commune  $x$ ). Les chemins  $s_1$  et  $s_2$  se factorisent alors respectivement en

$$x \xrightarrow{s'_1} y_1 \xrightarrow{m} y'_1 \xrightarrow{s''_1} \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{s'_2} y_2 \xrightarrow{m} y'_2 \xrightarrow{s''_2}$$

Par utilisation répétée de la Propriété du Cube en arrière l'événement  $m$  peut être tiré au début des deux chemins :



Nous obtenons ainsi une transition  $m : x \rightarrow x'$  et deux chemins

$$s''_1 : x' \rightarrow y'_1 \quad \text{et} \quad s''_2 : x' \rightarrow y'_2$$

tels que  $s'_1 \cdot m \sim m \cdot s''_1$  et  $s'_2 \cdot m \sim m \cdot s''_2$ . De plus, par hypothèse d'induction, il existe un chemin d'intersection  $u : x' \rightarrow z$  des chemins  $s''_1 \cdot s'_1 : x' \rightarrow z_1$  et  $s''_2 \cdot s'_2 : x' \rightarrow z_2$ . Finalement, l'intersection des chemins  $s_1$  et  $s_2$  est le chemin  $m \cdot u : x \rightarrow z$ .

Nous pouvons déduire de ce qui précède que

**Propriété 1.67** (Structure de treillis distributif). *L'ensemble partiellement ordonné  $(L_s, \preceq)$  est un treillis distributif, avec les opérations  $\vee$  et  $\wedge$  précédemment définies comme bornes respectivement supérieure et inférieure.*

*Démonstration.* D'après la Propriété 1.65, le treillis  $(L_s, \preceq)$  est isomorphe au treillis  $(P_s, \subseteq)$ , où l'ensemble  $P_s$  est défini par  $P_s = \{ M_t \mid t \in L_s \}$  et ordonné par inclusion ensembliste. Ce treillis étant un ensemble d'ensembles clos par union et intersection, il est distributif.  $\square$

### 1.4.6 Représentation des classes d'homotopie

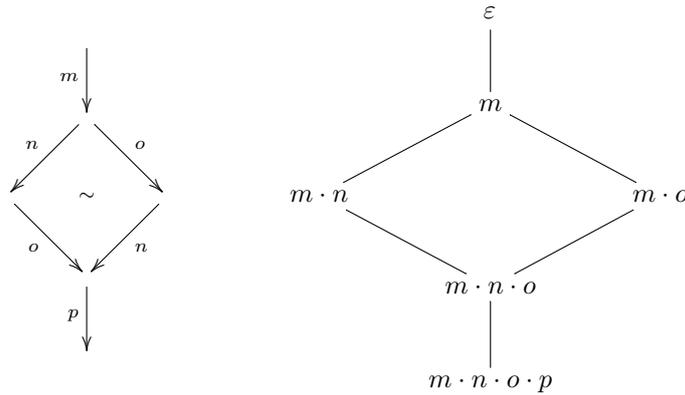
Nous pouvons finalement prouver le théorème principal de ce chapitre.

**Théorème 1.68** (Représentation d'une classe d'homotopie par un ordre partiel). *La classe d'homotopie d'un chemin  $s : x \rightarrow y$  d'un graphe asynchrone  $G$  est isomorphe à l'ensemble des linéarisations de l'ordre partiel  $(M_s, \leq)$ , où  $M_s$  est l'ensemble des événements apparaissant dans le chemin  $s$  et l'ordre  $\leq$  est défini par  $m \leq n$  si et seulement si  $m$  apparaît avant  $n$  dans tout chemin de la classe d'homotopie de  $s$ , c'est-à-dire si*

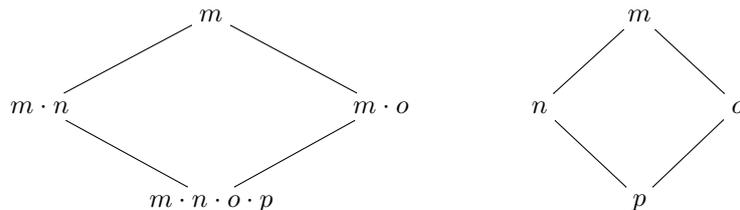
$$\forall t \in [s], \quad \exists t_1, t_2, \quad t = t_1 \cdot n \cdot t_2 \quad \text{implique} \quad m \in M_{t_1}.$$

*Démonstration.* Nous avons vu à la Propriété 1.67 que l'ensemble partiellement ordonné  $(L_s, \preceq)$  est isomorphe au treillis  $(P_s, \subseteq)$ . Par le Théorème 1.62 de représentation de Birkhoff, il est donc isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre partiel induit sur ses sup-irréductibles ordonné par inclusion. Pour tout élément  $m$  de l'ensemble partiellement ordonné  $(M_s, \leq)$ , la clôture vers le bas  $\{m\} \downarrow$  de l'ensemble  $\{m\}$  est un élément de  $P_s$ . Les éléments de l'ensemble  $P_s$  étant clos par union, pour tout élément  $M$  de  $P_s$ , si l'on note  $(m_i)_{i \in I}$  la famille (finie) des éléments maximaux de  $M$  par rapport à l'ordre  $\leq$ , on a  $M = \bigcup_{i \in I} \{m_i\} \downarrow$ . Un tel ensemble  $M$  est donc sup-irréductible dans  $(P_s, \subseteq)$  précisément lorsque l'ensemble d'indice  $I$  est réduit à un élément, c'est-à-dire lorsque  $M$  est de la forme  $\{m\} \downarrow$  pour un certain élément  $m$  de  $M_s$ . Il est de plus simple de vérifier que l'ordre d'inclusion sur les ensembles de la forme  $\{m\} \downarrow$  correspond précisément à l'ordre  $\leq$  sur les éléments de  $M_s$ , dans le sens où l'ensemble des sup-irréductibles  $\{m\} \downarrow$  (avec  $m \in M_s$ ) ordonné par l'inclusion est isomorphe à l'ensemble partiellement ordonné  $(M_s, \leq)$ . On en déduit finalement que les chemins  $t$  de la classe d'homotopie de  $s$ , qui sont en bijection avec les suite maximales  $\varepsilon = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = t$  de préfixes de  $s$  modulo homotopie (i.e. les  $t_i$  sont des éléments de  $L_s$ ), sont en bijection avec les linéarisations de l'ordre partiel  $(M_s, \leq)$ .  $\square$

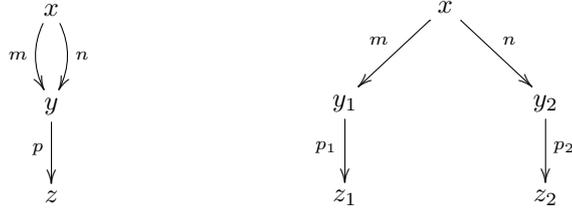
*Exemple 1.69.* Considérons le graphe asynchrone suivant (figuré à gauche)



et notons  $s$  le chemin  $s = m \cdot n \cdot o \cdot p$ . Nous avons dessiné à droite l'ensemble partiellement ordonné correspondant  $(L_s, \preceq)$  des préfixes de  $s$  modulo homotopie. L'ensemble  $\{m, m \cdot n, m \cdot o, m \cdot n \cdot o \cdot p\}$  des éléments sup-irréductibles de cet ordre partiel a été calculé à l'Exemple 1.60. On peut alors constater que l'ordre partiel induit sur ces éléments sup-irréductibles par la relation de préfixage modulo homotopie (figuré à gauche dans la figure ci-dessous) est bien isomorphe à l'ordre partiel  $(M, \leq)$  sur les coups  $M = \{m, n, o, p\}$  de  $s$  décrit dans l'énoncé du théorème (figuré à droite).



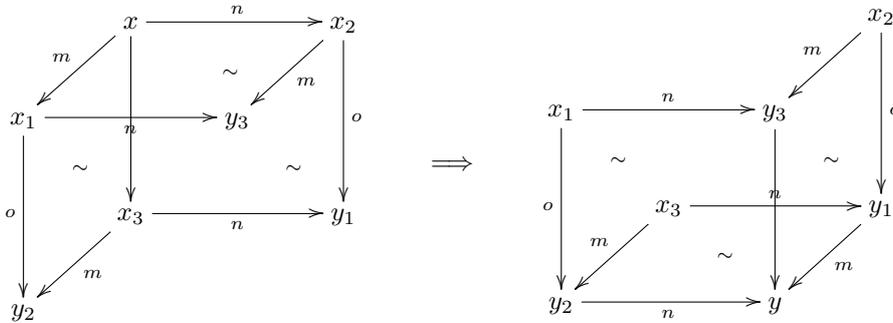
La notion de position dans un graphe asynchrone ne correspond pas toujours exactement à la notion de classe d'homotopie. Par exemple, dans le graphe asynchrone ci-dessous (figuré à gauche)



deux chemins non homotopes de source  $x$  ont pour but la position  $z$  : les chemins  $m \cdot p$  et  $n \cdot p$ . Cependant, ce graphe asynchrone peut toujours être transformé en un graphe asynchrone déplié dont les positions sont précisément les classes d'homotopie de chemins ayant la position  $x$  pour source (figuré à droite dans la figure ci-dessus) de la façon suivante :

**Définition 1.70** (Dépliage d'un graphe asynchrone). Le *dépliage*  $DG$  d'un graphe asynchrone  $G$  à partir d'une position  $x$  de  $G$  est le graphe asynchrone dont les objets sont les classes d'homotopie  $[s]$  de chemins  $s : x \twoheadrightarrow y$  de  $G$  et les transitions de la forme  $m : [s] \rightarrow [s \cdot m]$ , où  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $m : y \twoheadrightarrow z$  sont des chemins de  $G$ . Les tuiles rendent homotopes toute paire de chemins cointiaux et cofinaux. Un graphe asynchrone est dit *déplié* à partir d'une position  $x$  lorsqu'il est isomorphe à son dépliage à partir de  $x$ .

Les graphes de transitions d'une structure d'événements vérifient aussi la variante suivante de la Propriété du Cube :



Il peut être montré que les graphes asynchrones dépliés qui vérifient la Propriété du Cube ainsi que la variante décrite ci-dessus sont précisément les graphes asynchrones qui sont le graphe de transitions d'une structure d'événements [SNW93]. Intuitivement, cette nouvelle propriété impose que si  $m$ ,  $n$  et  $o$  sont trois événements deux à deux compatibles alors ils sont tous les trois compatibles. Elle est donc liée à la façon dont nous avons axiomatisé l'incompatibilité dans les structures d'événements, par une relation binaire. Il est possible de formuler la définition de structure d'événements de sorte à se passer de cette nouvelle propriété dans les graphes de transitions associés, en équipant les structures d'événements non pas d'une relation d'incompatibilité binaire mais d'un ensemble spécifiant les sous-ensembles d'événements qui sont compatibles [Win87].

## Chapitre 2

# Sémantique des jeux asynchrones

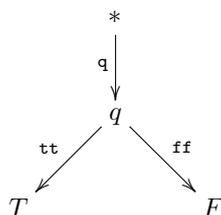
---

Les jeux asynchrones ont été introduits par Melliès [Mel04] dans le but d'unifier l'approche entrelacée offerte par les jeux à pointeurs de Hyland et Ong [HO00] et les jeux concurrents, capables de représenter des stratégies jouant plusieurs coups en parallèle [AM99]. Dans ces sémantiques, les jeux sont des graphes asynchrones dans lesquels les transitions, ou coups, sont généralement munis d'une polarité indiquant si elles doivent être jouées par le Joueur ou l'Opposant. Une partie est un chemin partant de la position initiale du jeu, souvent notée  $*$ , et une stratégie est un ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés.

Tout d'abord, remarquons que les tuiles asynchrones du jeu fournissent une nouvelle façon de décrire les *pointeurs de justification* entre les coups (voir l'Annexe B pour un bref rappel des jeux à pointeurs). Par exemple, considérons le jeu correspondant au type des booléens  $\mathbb{B}$  déjà présenté en introduction, où l'Opposant commence par poser une question  $q$  et le Joueur répond en répondant soit  $tt$  (vrai) ou  $ff$  (faux). Ce jeu, décrit dans les jeux à pointeurs par l'arène



sera représenté dans les jeux asynchrones par l'arbre de décision



où  $*$  est la position initiale du jeu et les trois autres positions sont définies par

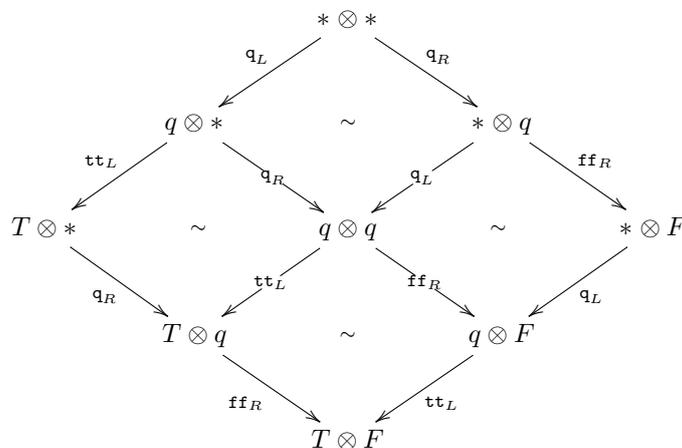
$$* = \emptyset, \quad q = \{q\}, \quad T = \{q, tt\} \quad \text{et} \quad F = \{q, ff\}$$

Il n'y a aucune concurrence au sein de ce jeu, qui peut être vu aussi bien comme un jeu à pointeurs que comme un graphe asynchrone. Le jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  est constitué de deux copies de ce jeu, jouées « en parallèle ». Il simule une machine très

simple, contenant deux cellules mémoire booléennes. Au cours d'une interaction typique, l'Opposant commence par jouer un coup  $q_L$  pour demander la valeur de la cellule mémoire de gauche et le Joueur répond  $tt_L$ . Ensuite, l'Opposant demande, avec le coup  $q_R$  la valeur de la cellule mémoire de droite, et le Joueur répond  $ff_R$ . La partie est représentée de la façon suivante dans les jeux à pointeurs :

$$q_L \cdot tt_L \cdot q_R \cdot ff_R$$

La partie contient deux pointeurs de justification, chacun étant représenté par une flèche partant d'un coup en direction d'un coup précédent. Par exemple, le pointeur de justification du coup  $tt_L$  au coup  $q_L$  indique que la réponse  $tt_L$  doit nécessairement être jouée après la question  $q_L$ . La même situation est décrite en utilisant des tuiles 2-dimensionnelles dans le jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  :



(nous n'avons représenté qu'une portion du jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ , qui ressemble à une fleur dont l'un des pétale est figuré ci-dessus, le pétale correspondant au cas où la cellule mémoire de gauche contient *vrai* et celle de gauche contient *faux*). Le pointeur de justification entre la réponse  $tt_L$  et sa question  $q_L$  est ici remplacée par une *dépendance* entre les deux coups, empêchant le coup  $tt_L$  d'être permuté avant le coup  $q_L$ . La dépendance elle-même est exprimée par une obstruction « topologique » : l'absence de tuile 2-dimensionnelle permutant la transition  $tt_L$  avant la transition  $q_L$  dans le jeu asynchrone  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ . Le passage de l'une à l'autre des représentations se fait précisément grâce à la Propriété du Cube expliquée au Chapitre 1. Nous avons en effet vu que toute structure d'événements génère un graphe asynchrone vérifiant la Propriété du Cube. Et une arène, dont la définition est rappelée à l'Annexe B, peut être vue comme une structure d'événements. Réciproquement, les graphes asynchrones des jeux asynchrones seront toujours supposés vérifier la Propriété du Cube et pourront ainsi être considérés comme des sortes d'arènes généralisées.

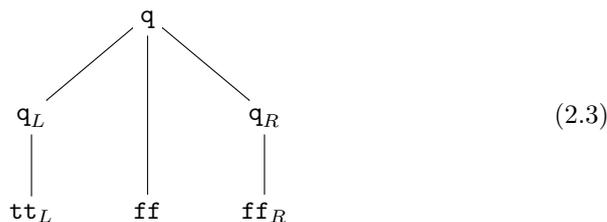
Cette correspondance simple entre les pointeurs de justification et les tuiles asynchrones permet une reformulation, dans le langage des jeux asynchrones, de la définition initiale de *stratégie innocente* dans les jeux à pointeurs, définition qui était fondée sur la notion de vue. De façon surprenante, cette reformulation permet d'aboutir à une définition de l'innocence locale et purement diagrammatique, qui ne mentionne plus la notion de vue. Cette reformulation, d'abord

effectuée dans un cadre alterné [Mel04], puis étendue ici à un cadre non-alterné (Section 2.4), nous révèle que les stratégies innocentes sont *positionnelles*, dans le sens où elles sont caractérisées par le sous-graphe asynchrone du jeu qu'elles explorent. Ainsi, si une stratégie innocente contient une partie  $s$  et une partie  $t \cdot u$ , où  $t$  est un chemin homotope à  $s$ , alors le chemin  $s \cdot u$  sera aussi dans la stratégie (voir la Section 2.1). Il s'en suit qu'une stratégie innocente est entièrement caractérisée par l'ensemble des positions du jeu (pensées ici comme des classes d'homotopie de parties) qu'elle atteint. Nous montrons à la Section 2.3 que cet ensemble de positions définit un opérateur de clôture et donc une stratégie au sens des jeux concurrents. Les jeux asynchrones offrent ainsi un point de vue simple permettant d'unifier les jeux à pointeurs et les jeux concurrents.

**Asynchronie non-alternée.** Nous avons précédemment expliqué comment construire le jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  en mettant deux copies du jeu  $\mathbb{B}$  en parallèle. Plus généralement, toute formule de la logique linéaire définit une structure d'événements, qui à son tour génère un graphe asynchrone associé à la formule. Par exemple, la structure d'événements associée à la formule

$$(\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}) \multimap \mathbb{B} \quad (2.2)$$

contient l'ensemble partiellement ordonné suivant de coups compatibles :



qui peut aussi être vu comme une position (maximale) dans le jeu asynchrone associé à la formule.

Ce jeu implémente l'interaction entre une fonction booléenne de type (2.2) et ses deux arguments booléens. Au cours d'une partie type, l'Opposant commence en jouant le coup  $\mathfrak{q}$ , demandant la valeur du résultat booléen. Le Joueur réagit alors en demandant avec  $\mathfrak{q}_L$  la valeur de l'argument de gauche, et l'Opposant répond  $\mathfrak{tt}_L$ . Ensuite, le Joueur demande avec  $\mathfrak{q}_R$  la valeur de l'argument de droite et l'Opposant répond  $\mathfrak{ff}_R$ . À ce point de l'interaction, connaissant la valeur de ses deux arguments, le Joueur répond  $\mathfrak{ff}$  à la question initiale :

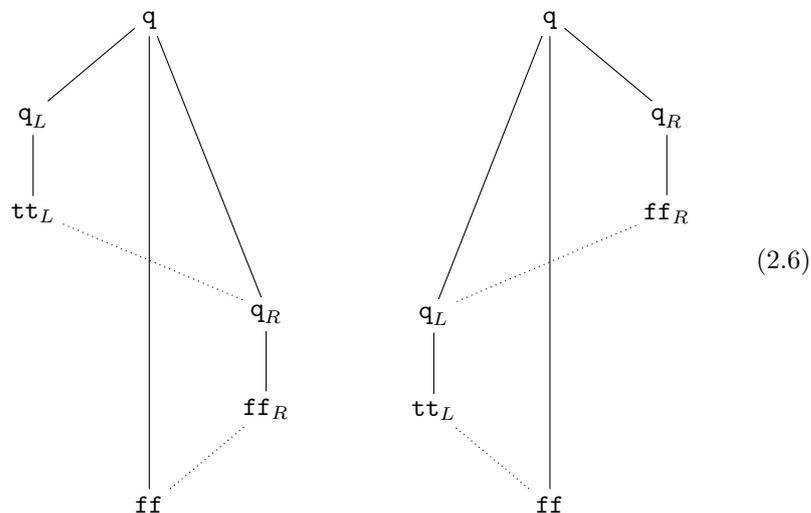
$$\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}_L \cdot \mathfrak{tt}_L \cdot \mathfrak{q}_R \cdot \mathfrak{ff}_R \cdot \mathfrak{ff} \quad (2.4)$$

Bien sûr, le Joueur aurait pu décider d'explorer ses deux arguments dans l'ordre inverse, de la droite vers la gauche, ce qui aurait induit la partie

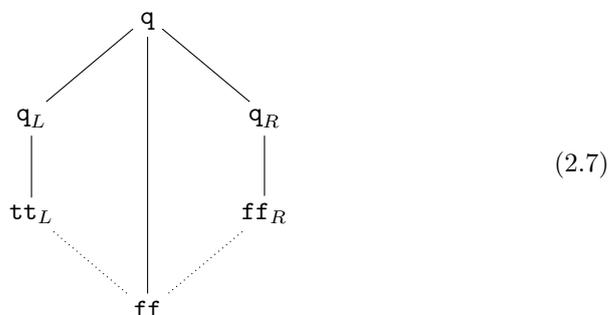
$$\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}_R \cdot \mathfrak{ff}_R \cdot \mathfrak{q}_L \cdot \mathfrak{tt}_L \cdot \mathfrak{ff} \quad (2.5)$$

Les deux parties débutent de la position initiale  $*$  et atteignent la même position du jeu asynchrone. Elles peuvent être vues comme les différentes linéarisations

(au sens de la théorie de l'ordre) de l'ordre partiel (2.3), dans le sens suivant :



La partie (2.4) est un élément de la stratégie représentant l'implémentation *gauche* de la *conjonction stricte*, tandis que la partie (2.5) est un élément de la stratégie représentant son implémentation *droite*. Remarquons que ces deux stratégies sont alternées. Une troisième implémentation de la conjonction est possible, l'implémentation *parallèle*, où la conjonction demande la valeur de ses deux arguments en même temps. La stratégie associée n'est plus alternée : elle contient la partie (2.4), la partie (2.5), ainsi que toutes les autres linéarisations (qui peuvent être non-alternées) de l'ordre partiel suivant :



Ceci illustre un phénomène intéressant, de nature concurrente : toute partie  $s : * \rightarrow x$  d'une stratégie asynchrone  $\sigma$  cohabite avec d'autres parties  $t : * \rightarrow x$  au sein de la stratégie qui atteignent la même position  $x$  et sont homotopes à  $s$ . Ces parties explorent un sous-graphe du jeu qui vérifie la Propriété du Cube. Autrement dit, l'ensemble des parties homotopes à  $s$  de la stratégie  $\sigma$  est isomorphe à l'ensemble des linéarisations d'un ordre partiel sur les coups apparaissant dans  $s$ , et cet ordre partiel raffine l'ordre du jeu sur ces coups – dans l'exemple (2.7), ce raffinement correspond à l'ajout des dépendances du coup  $ff$  sur les coups  $tt_L$  et  $ff_R$  figurées en traits pointillés. Notre définition de stratégie *ingénue* nous assurera de l'existence d'un tel « ordre de causalité » sous-jacent, pour toute position  $x$  atteinte par la stratégie. Elle définira un faisceau d'ordres partiels, induisant une structure d'événements obtenue en recollant les ordres partiels les uns avec les autres.

**Stratégies ordonnancées.** Nous introduisons à la Section 2.5 la notion de *stratégie ordonnancée*, définie comme une stratégie ingénue satisfaisant des propriétés permettant de s'assurer que la composition va bien se dérouler dans le sens suivant. Considérons la stratégie ingénue  $\sigma$  de type  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  générée par l'ordre partiel suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{q}_L & & \mathbf{q}_R \\
 | & \cdots & | \\
 \mathbf{tt}_L & & \mathbf{ff}_R
 \end{array} \tag{2.8}$$

La stratégie répond  $\mathbf{tt}_L$  à la question  $\mathbf{q}_L$  mais ne répond  $\mathbf{ff}_R$  à la question  $\mathbf{q}_R$  que si la question  $\mathbf{q}_L$  a déjà été posée. La composition de la stratégie  $\sigma$  avec l'implémentation *droite* de la conjonction stricte dessinée à droite de (2.6) induit une partie  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_R$  qui se termine en un interblocage (*deadlock*) à la position  $\{\mathbf{q}, \mathbf{q}_R\}$ . D'un autre côté, la composition de cette stratégie  $\sigma$  avec l'implémentation gauche ou l'implémentation parallèle se déroule bien, et mène à une interaction complète.

Ce phénomène dynamique peut être compris en introduisant deux nouveaux connecteurs binaires  $\otimes$  et  $\otimes$  qui décrivent une composition séquentielle dans les jeux asynchrones. Le jeu  $A \otimes B$  est défini comme la restriction 2-dimensionnelle du jeu  $A \otimes B$  aux parties  $s$  telles que tout coup joué avant un coup de  $A$  est aussi un coup de  $A$ ; ou de façon équivalente, tout coup joué après un coup de  $B$  est un coup de  $B$ . Le jeu  $A \otimes B$  est simplement défini comme le jeu  $B \otimes A$ , dans lequel la composante  $B$  débute les parties. La stratégie  $\sigma$  de  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  se restreint en une stratégie dans le sous-jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ , qui la réfléchit dans le sens où toute partie  $s \in \sigma$  est homotope à une partie  $t \in \sigma$  du sous-jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ . Ceci n'est plus vrai lorsque la stratégie  $\sigma$  est restreinte au sous-jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ , car la partie  $\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{tt}_L \cdot \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{ff}_R$  est un élément de  $\sigma$  qui n'est pas équivalent modulo homotopie à une partie  $t \in \sigma$  du sous-jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ . Pour cette raison, nous considérons que la stratégie  $\sigma$  se comporte bien dans le jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$  mais *pas* du jeu  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ .

Ceci nous a amené à un critère interactif, détectant dynamiquement si une stratégie  $\sigma$  respecte l'indépendance des composantes d'un tenseur dans les formules de la logique linéaire. Ce critère est fondé sur des *conditions d'ordonnancement*. L'idée consiste à *aiguiller* tout produit tensoriel  $\otimes$  de la formule en  $\otimes$  ou  $\otimes$  et à tester si chaque partie  $s$  de la stratégie  $\sigma$  est équivalente modulo homotopie à une partie  $t \in \sigma$  dans le sous-jeu induit. Chacun de ces aiguillages  $\mathcal{S}$  reflète un choix d'ordonnancement de la part d'une contre-stratégie : il permet ainsi de s'assurer que les stratégies sont assez flexibles pour s'adapter à *tout* ordonnancement du produit tensoriel par l'Opposant. Syntaxiquement, ceci signifie que la stratégie satisfait une variante dirigée du critère d'acyclicité introduit par Girard [Gir87] et reformulé par Danos et Regnier [DR89].

Les résultats contenus dans ce chapitre ont en partie été publiés dans [MM07]. La Figure 2.1 récapitule les principales conditions que nous considérerons pour les stratégies.

## 2.1 Jeux et stratégies monochromes

Les catégories de jeux et stratégies considérées en sémantique des jeux sont généralement définies sur des jeux à deux joueurs. Cependant, certaines constructions de bases ne font pas intervenir la polarité des coups et peuvent être réalisées en

Condition	Sec. (Déf.)	Définition
Positionnalité	2.1.2 (2.15)	
Compatibilité en avant	2.1.3 (2.22)	implique
Compatibilité en arrière	2.1.3 (2.22)	implique
Déterminisme	2.2.1 (2.33)	implique
Courtoisie	2.3 (2.40)	implique
Forte courtoisie	2.3 (2.44)	implique
Réceptivité	2.3.2 (2.67)	implique
Séquentialité en avant	2.4.2 (2.69)	implique  ou
Séquentialité en arrière	2.4.2 (2.69)	implique  ou

FIGURE 2.1 : Principales conditions imposées aux stratégies positionnelles.

toute généralité dans une catégorie de *jeux monochromes*, dans laquelle les coups ne sont pas polarisés. Nous commençons par construire une catégorie  $\mathbf{Jeux}_1$  de tels jeux qui sera à la base des catégories de jeux que nous introduirons dans les sections suivantes. Nous étudions ensuite une classe de stratégies qui vérifient une condition de *positionalité*. Ces stratégies sont particulièrement intéressantes, car elles peuvent être assimilées au sous-graphe du jeu qu'elles explorent, nous permettant ainsi d'utiliser, pour les stratégies, les techniques développées au Chapitre 1 sur les graphes asynchrones. Lorsque ces stratégies vérifient de plus des propriétés très naturelles de *préservation de la compatibilité*, nous verrons que les stratégies positionnelles peuvent être caractérisées comme des ensembles de traces particuliers.

### 2.1.1 Une catégorie de jeux monochromes

Les jeux sont habituellement définis comme des structures d'événements particulières. Toute structure d'événements induisant un graphe asynchrone (son graphe de transitions), nous définissons ici plus généralement un jeu comme un graphe asynchrone muni d'une position initiale.

**Définition 2.1** (Jeu). Un *jeu*  $A = (G, *)$  est un graphe asynchrone  $G$  avec un sommet distingué  $*$ , appelé *position initiale*, tel que toute position  $x$  est atteignable, c'est-à-dire qu'il existe un chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$ . Un événement d'un jeu est appelé un *coup*.

Pour simplifier notre présentation, quitte à travailler avec le dépliage des graphes asynchrones à partir de la position initiale (voir la Définition 1.70), nous supposons que les graphes que nous considérerons sont *contractibles*, c'est-à-dire tels que deux chemins cointiaux et cofinaux sont homotopes et que toute position est atteignable à partir de la position initiale  $*$  (i.e. il existe un chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$ ).

**Définition 2.2** (Partie). Une *partie* sur un jeu  $A$  est un chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$  ayant pour source la position initiale du jeu.

**Définition 2.3** (Stratégie). Une *stratégie*  $\sigma$  sur un jeu  $A$  est un ensemble de parties sur le jeu  $A$ .

Nous écrirons  $\sigma : A$  pour indiquer que  $\sigma$  est une stratégie sur un jeu  $A$ . Il est à noter que nous n'imposons pas (pour le moment) à nos stratégies d'être closes par préfixe comme c'est le cas dans la plupart des sémantiques de jeux. Ceci jouera un rôle crucial lors de la construction des morphismes identité de la catégorie. Nous ne leur imposons pas non plus d'être non vides, car la composée de deux stratégies non vides peut être vide.

Deux jeux  $A$  et  $B$  peuvent être combinés pour former leur produit tensoriel  $A \otimes B$ , qui représente le jeu correspondant aux jeux  $A$  et  $B$  sur lesquels on peut jouer en parallèle.

**Définition 2.4** (Produit tensoriel). Le *produit tensoriel*  $A \otimes B = (G_{A \otimes B}, *_{A \otimes B})$  de deux jeux  $A = (G_A, *_A)$  et  $B = (G_B, *_B)$  est défini comme suit. Son graphe asynchrone sous-jacent est le graphe dont

- les positions sont les paires  $(x_A, x_B)$ , aussi notées  $x_A \otimes x_B$ , où  $x_A$  est une position de  $G_A$  et  $x_B$  est une position de  $G_B$ ,

- les transitions sont de la forme

$$x_A \otimes x_B \xrightarrow{m \otimes x_B} y_A \otimes x_B$$

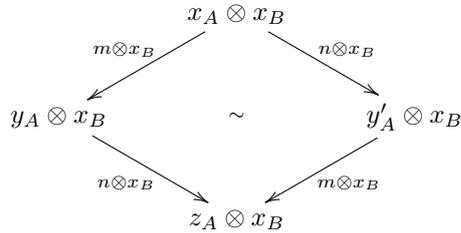
où  $x_A \xrightarrow{m} y_A$  est une transition de  $A$ , ou de la forme

$$x_A \otimes x_B \xrightarrow{x_A \otimes m} x_A \otimes y_B$$

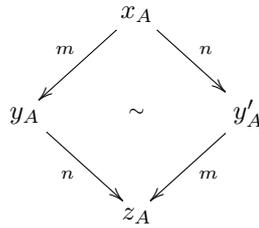
où  $x_B \xrightarrow{m} y_B$  est une transition de  $B$ . Par souci de simplicité on notera parfois simplement ces transitions

$$x_A \otimes x_B \xrightarrow{m} y_A \otimes x_B \quad \text{et} \quad x_A \otimes x_B \xrightarrow{m} x_A \otimes y_B.$$

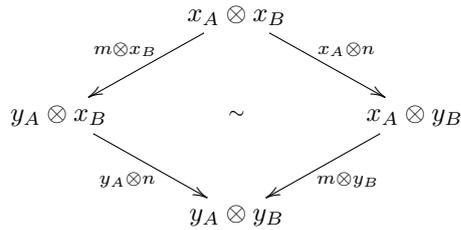
La relation de tuilage relie deux chemins de la forme



lorsqu'il existe une tuile



dans  $A$ , de même les tuiles de  $B$  induisent des tuiles dans  $A \otimes B$ , et enfin tous les chemins de la forme



sont reliés par une tuile. Enfin, la position initiale du jeu  $A \otimes B$  est la position  $*_{A \otimes B} = *_A \otimes *_B$ .

Par construction, tout chemin de  $A \otimes B$  peut être vu comme l'entrelacement d'un chemin  $s_A$  de  $A$  et d'un chemin  $s_B$  de  $B$  définis comme suit.

**Définition 2.5** (Projection d'un chemin). Si  $s : x_A \otimes x_B \twoheadrightarrow y_A \otimes y_B$  est un chemin d'un jeu  $A \otimes B$  alors la *projection*  $s_A : x_A \twoheadrightarrow y_A$  du chemin  $s$  sur le jeu  $A$  est le chemin défini par induction sur la longueur de  $s$  de la façon suivante.

- Si  $s$  est le chemin vide alors  $(\varepsilon_{x_A \otimes y_A})_A = \varepsilon_{x_A}$ .
- Sinon  $s$  se factorise en

$$x_A \otimes x_B \xrightarrow{m \otimes x_B} x'_A \otimes x_B \xrightarrow{s'} y_A \otimes y_B$$

auquel cas  $s_A = m \cdot s'_A$ , ou en

$$x_A \otimes x_B \xrightarrow{x_A \otimes m} x_A \otimes x'_B \xrightarrow{s'} y_A \otimes y_B$$

auquel cas  $s_A = s'_A$ .

La *projection*  $s_B : x_B \longrightarrow y_B$  de  $s$  sur le jeu  $B$  est définie de façon similaire.

En particulier, si  $s : *_{A \otimes B} \longrightarrow x_A \otimes x_B$  est une partie d'un jeu  $A \otimes B$  alors sa projection  $s_A : *_A \longrightarrow x_A$  sur le jeu  $A$  est une partie, ainsi que sa projection  $s_B : *_B \longrightarrow x_B$  sur le jeu  $B$ . Les entrelacements de deux mêmes chemins sont toujours homotopes par définition du jeu  $A \otimes B$  :

**Propriété 2.6.** *Pour tous chemins parallèles  $s, t : x_A \otimes x_B \longrightarrow y_A \otimes y_B$  d'un jeu  $A \otimes B$ , si  $s_A = t_A$  et  $s_B = t_B$  alors les chemins  $s$  et  $t$  sont homotopes.*

À l'inverse, les chemins de  $A$  et de  $B$  peuvent être injectés dans le jeu  $A \otimes B$  :

**Définition 2.7** (Injection d'un chemin). Si  $s : x_A \longrightarrow y_A$  est un chemin d'un jeu  $A$  et  $x_B$  est une position d'un jeu  $B$ , l'*injection* du chemin  $s$  dans le jeu  $A \otimes B$  à la position  $x_B$ , notée  $s \otimes x_B : x_A \otimes x_B \longrightarrow y_A \otimes x_B$ , est le chemin défini par induction sur la longueur de  $s$  par

- $\varepsilon_{x_A} \otimes x_B = \varepsilon_{x_A \otimes x_B}$ ,
- et  $(m \cdot s) \otimes x_B = (m \otimes x_B) \cdot (s \otimes x_B)$ .

On définit de même l'injection d'un chemin  $s : x_B \longrightarrow y_B$  de  $B$  dans  $A \otimes B$  à une position  $x_A$  de  $A$ .

Dans la suite, si  $s : *_{A \otimes B} \longrightarrow x_A \otimes x_B$  est une partie de  $A \otimes B$ , on parlera simplement de l'injection de  $s$  dans  $A \otimes B$  pour désigner la partie  $s \otimes *_{B \otimes C}$ , que l'on notera parfois encore  $s$ . De plus, par souci de concision, on considérera que le produit tensoriel ainsi défini est strictement associatif et on notera  $s_{A,B}$  pour la restriction au jeu  $A \otimes B$  d'un chemin  $s$  sur le jeu  $A \otimes B \otimes C$ , etc.

Tout paire de stratégies  $\sigma : A \otimes B$  et  $\tau : B \otimes C$  induit par *interaction* une stratégie  $\sigma \div \tau$  sur le jeu  $A \otimes B \otimes C$  définie par

$$\sigma \div \tau = \{ s \in A \otimes B \otimes C \mid s_{A,B} \in \sigma \text{ et } s_{B,C} \in \tau \}.$$

On déduit alors la composée des stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  en masquant, dans les traces de l'interaction, les coups joués dans la composante interne  $B$ . Ce type de composition est parfois appelé *composition parallèle avec masquage*.

**Définition 2.8** (Composition). La *composée* de deux stratégies  $\sigma : A \otimes B$  et  $\tau : B \otimes C$  est la stratégie  $\tau \circ \sigma$  sur le jeu  $A \otimes C$  définie par

$$\tau \circ \sigma = \{ s_{A,C} \mid s \in \sigma \div \tau \}.$$

**Lemme 2.9.** *La composition est associative.*

**Définition 2.10** (Stratégie identité). La stratégie identité  $\text{id}_A : A \otimes A$  sur un jeu  $A$  est la plus petite stratégie contenant la partie vide et telle que, pour toute partie  $s : *A \otimes *A \twoheadrightarrow x_A \otimes x_A$  dans  $\text{id}_A$ , et toute transition  $m : x_A \rightarrow y_A$  dans  $A$ , les parties

$$*A \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_A \xrightarrow{m \otimes x_A} y_A \otimes x_A \xrightarrow{y_A \otimes m} y_A \otimes y_A$$

et

$$*A \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_A \xrightarrow{x_A \otimes m} x_A \otimes y_A \xrightarrow{m \otimes y_A} y_A \otimes y_A$$

sont aussi dans  $\text{id}_A$ .

**Lemme 2.11.** *Pour toute stratégie  $\sigma : A \otimes B$ , on a*

$$\text{id}_B \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ \text{id}_A.$$

**Définition 2.12** (Catégorie des jeux monochromes). La catégorie des jeux monochromes  $\mathbf{Jeux}_1$  est la catégorie dont les objets sont les jeux monochromes et les stratégies entre deux jeux  $A$  et  $B$  sont les stratégies sur le jeu  $A \otimes B$ . La composition est donnée par la Définition 2.8 et les identités par la Définition 2.10.

**Définition 2.13** (Stratégie close par préfixe). Une stratégie  $\sigma : A$  est *close par préfixe* lorsque pour toute partie de  $\sigma$  de la forme  $* \xrightarrow{s} x \xrightarrow{m} y$ , la partie  $s$  est aussi dans  $\sigma$ . La clôture par préfixe d'une stratégie  $\sigma : A$  est notée  $\text{prefix}(A)$ .

*Remarque 2.14.* Les stratégies closes par préfixe de  $\mathbf{Jeux}_1$  ne forment pas une sous-catégorie de cette catégorie car l'identité n'est pas close par préfixe. Il est donc important, pour pouvoir définir une catégorie de jeux monochromes, de considérer des stratégies qui ne sont pas closes par préfixe, contrairement à la coutume en sémantique des jeux.

La catégorie  $(\mathbf{Jeux}_1, \otimes, I)$  est monoïdale avec comme unité du produit tensoriel le jeu  $I$  réduit à une unique position. Elle est de plus symétrique si on la munit de plus de la transformation naturelle  $\gamma$  de composantes

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

définies de façon similaire à l'identité : une stratégie  $\gamma_{A,B}$  est définie comme la plus petite stratégie qui contient la partie vide  $\varepsilon_{A \otimes B \otimes B \otimes A}$  et telle que si

$$s : *A \otimes *B \otimes *B \otimes *A \twoheadrightarrow x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A$$

est une partie de  $\gamma_{A,B}$  alors pour toute transition  $m : x_A \rightarrow y_A$  de  $A$  les parties

$$*A \otimes *B \otimes *B \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} y_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} y_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes y_A$$

et

$$*A \otimes *B \otimes *B \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes y_A \xrightarrow{m} y_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes y_A$$

sont aussi dans  $\gamma_{A,B}$  et pour toute transition  $m : x_B \rightarrow y_B$  de  $B$  les parties

$$*A \otimes *B \otimes *B \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} x_A \otimes y_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} x_A \otimes y_B \otimes y_B \otimes x_A$$

et

$$*A \otimes *B \otimes *B \otimes *A \xrightarrow{s} x_A \otimes x_B \otimes x_B \otimes x_A \xrightarrow{m} x_A \otimes x_B \otimes y_B \otimes x_A \xrightarrow{m} x_A \otimes y_B \otimes y_B \otimes x_A$$

sont aussi dans  $\gamma_{A,B}$ . Enfin, la catégorie monoïdale symétrique  $(\mathbf{Jeux}_1, \otimes, I, \gamma)$  est compacte fermée si on la munit de la dualité définie par  $A^* = A$  pour tout jeu  $A$  avec comme unité la stratégie  $\eta_A : I \rightarrow A^* \otimes A$  définie comme l'identité  $\text{id}_A$  et la stratégie  $\varepsilon_A : A \otimes A^* \rightarrow I$  aussi définie comme l'identité  $\text{id}_A$ .

### 2.1.2 Stratégies positionnelles

Nous nous intéresserons dans la suite à des stratégies que nous appelons *positionnelles*, qui sont caractérisées par le sous-graphe du jeu qu'elles visitent. Nous commençons par donner la définition de ces stratégies dans le cadre des stratégies closes par préfixe puis nous étendons la définition au cas général. Cette définition adapte la définition de positionalité donnée par Melliès dans le cadre alterné [Mel04] à un cadre monochrome et nous verrons qu'elle s'étend de façon immédiate au cadre non-alterné.

**Définition 2.15** (Stratégie close par préfixe positionnelle). Une stratégie close par préfixe  $\sigma : A$  est *positionnelle* lorsque

$$s \cdot u \in \sigma \quad \text{et} \quad s \sim t \quad \text{et} \quad t \in \sigma \quad \text{implique} \quad t \cdot u \in \sigma$$

pour tous chemins  $s, t : * \twoheadrightarrow x$  et  $u : x \twoheadrightarrow y$ . Diagrammatiquement,

$$\sigma \ni \begin{array}{c} * \\ \downarrow s \\ x \\ \downarrow u \\ y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow s \\ x \\ \downarrow t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow t \\ x \end{array} \in \sigma \quad \text{implique} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow t \\ x \\ \downarrow u \\ y \end{array} \in \sigma$$

Une stratégie close par préfixe positionnelle  $\sigma : A$  est essentiellement la même chose qu'un sous-graphe du graphe du jeu  $A$  dans lequel toute position est atteignable à partir de la position initiale  $*$  du jeu. Ce sous-graphe hérite d'une structure 2-dimensionnelle du graphe asynchrone sous-jacent, induisant ainsi un graphe asynchrone, noté  $G_\sigma$ , dont les positions sont les positions  $x$  atteignables par une partie  $s : * \twoheadrightarrow x$  de  $\sigma$  et les transitions sont les transitions visitées par au moins une partie de  $\sigma$ . À l'inverse, la stratégie  $\sigma$  peut être retrouvée comme l'ensemble de toutes les parties de  $G_\sigma$ .

Il est conceptuellement intéressant de remarquer que notre notion de stratégie positionnelle est de même nature que la notion de jeu asynchrone. En effet, une stratégie close par préfixe positionnelle  $\sigma : A$  est la même chose qu'un sous-jeu du jeu original  $A$  dans le sens suivant :

**Définition 2.16** (Sous-jeu). Un jeu  $B = (G_B, *_B)$  est un *sous-jeu* d'un jeu  $A = (G_A, *_A)$  lorsque le graphe sous-jacent de  $G_B$  est un sous-graphe du graphe sous-jacent de  $G_A$ , avec la même position initiale  $*_B = *_A$ , dans lequel toute position est atteignable à partir de la position initiale, et la relation de tuilage  $\diamond_B$  de  $B$  est héritée de la relation de tuilage  $\diamond_A$  de  $A$  dans le sens où

$$m \cdot n \diamond_B p \cdot q \quad \text{ssi} \quad m \cdot n \diamond_A p \cdot q$$

pour toutes transitions  $m : x \longrightarrow y_1$ ,  $n : y_1 \longrightarrow z$ ,  $p : x \longrightarrow y_2$  et  $q : y_2 \longrightarrow z$  du jeu  $B$ .

**Propriété 2.17.** *Pour tout jeu  $A$ , l'ensemble des stratégies non vides, closes par préfixe et positionnelles  $\sigma : A$  est en bijection avec l'ensemble des sous-jeux de  $A$ .*

*Démonstration.* Notons  $SG$  la stratégie associée à un graphe asynchrone  $G$ , définie comme l'ensemble des parties de  $G$ . Il est aisé de constater que pour tout sous-jeu  $G$  d'un jeu  $A$ , le graphe  $G_{SG}$  est isomorphe à  $G$ . Réciproquement, considérons une stratégie  $\sigma : A$ . L'inclusion  $\sigma \subseteq SG_\sigma$  est simple à établir, montrons l'inclusion inverse  $SG_\sigma \subseteq \sigma$  en montrant que toute partie  $s$  de  $G_\sigma$  est dans  $\sigma$  par induction sur la longueur de  $s$ . Si  $s$  est la partie vide alors  $s$  est dans la stratégie  $\sigma$  qui est non vide et close par préfixe. Sinon, soit  $* \xrightarrow{s} x \xrightarrow{m} y$  une partie de  $G_\sigma$ . Par hypothèse d'induction, la partie  $s$  est dans la stratégie  $\sigma$ . De plus, la transition  $m : x \longrightarrow y$  étant dans  $G_\sigma$ , il existe un chemin  $* \xrightarrow{t} x \xrightarrow{m} y$  dans la stratégie  $\sigma$ . Les chemins  $s$  et  $t$  étant cointiaux et cofinaux, ils sont homotopes. Par positionalité de la stratégie  $\sigma$ , la partie  $s \cdot m$  est aussi dans  $\sigma$ .  $\square$

Cette propriété est techniquement intéressante, car elle nous permettra dans la suite de considérer des chemins  $s : x \twoheadrightarrow y$  d'une stratégie positionnelle  $\sigma$  dont l'origine n'est pas la position initiale  $*$  du jeu : nous parlerons d'un tel chemin  $s$  de  $\sigma$  pour désigner implicitement un chemin dans le sous-jeu associé à la stratégie.

Nous étendons maintenant la notion de stratégie positionnelle au cas général des stratégies qui ne sont pas nécessairement closes par préfixe.

**Définition 2.18** (Stratégie positionnelle). Une stratégie  $\sigma : A$  est *positionnelle* lorsque

1. sa clôture par préfixe  $\text{prefix}(\sigma)$  est positionnelle au sens de la Définition 2.15,
2. et pour tous chemins  $s, t : * \twoheadrightarrow x$  et  $u : x \twoheadrightarrow y$ , on a

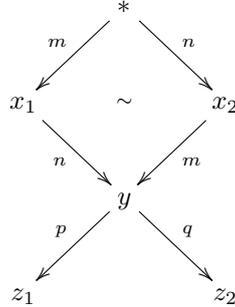
$$s \cdot u \in \sigma \quad \text{et} \quad s \sim t \quad \text{et} \quad t \in \sigma \quad \text{implique} \quad t \cdot u \in \sigma.$$

Diagrammatiquement,

$$\sigma \ni \begin{array}{c} * \\ \downarrow s \\ x \\ \downarrow u \\ y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow s \\ x \\ \downarrow t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow t \\ x \end{array} \in \sigma \quad \text{implique} \quad \begin{array}{c} * \\ \downarrow t \\ x \\ \downarrow u \\ y \end{array} \in \sigma.$$

*Remarque 2.19.* Il semble difficile de donner une version directe de la Définition 2.18, qui ne ferait pas intervenir – directement ou indirectement – la clôture par préfixe  $\text{prefix}(\sigma)$  de la stratégie  $\sigma$  et imposerait néanmoins que  $\text{prefix}(\sigma)$  soit

positionnelle au sens de la Définition 2.15. En effet, considérons le jeu



et une stratégie  $\sigma$  qui contiendrait les parties  $m \cdot n \cdot p$  et  $n \cdot m \cdot q$ . On doit imposer à  $\text{prefix}(\sigma)$  d'être positionnelle en tant que stratégie close par préfixe, c'est-à-dire en particulier que les parties  $n \cdot m \cdot p$  et  $m \cdot n \cdot q$  soient aussi dans  $\sigma$ .

Une stratégie positionnelle non vide  $\sigma : A$  est donc caractérisée par la donnée du sous-jeu  $G_{\text{prefix}(\sigma)}$  de  $A$ , que nous noterons simplement  $G_\sigma$ , induit par sa clôture par préfixe et de l'ensemble  $\sigma^\bullet$  de ses positions acceptantes défini comme suit.

**Définition 2.20** (Positions acceptantes). L'ensemble  $\sigma^\bullet$  des positions acceptantes d'une stratégie  $\sigma : A$  est l'ensemble des positions atteintes par une partie de la stratégie :

$$\sigma^\bullet = \{ x \mid \exists s : * \twoheadrightarrow x, \quad s \in \sigma \}.$$

La stratégie  $\sigma$  peut être retrouvée à partir du sous-jeu  $G_\sigma$  qu'elle induit ainsi que par l'ensemble  $\sigma^\bullet$  de ses positions acceptantes par

$$\sigma = \{ s : * \twoheadrightarrow x \mid s \in G_\sigma \quad \text{et} \quad x \in \sigma^\bullet \} \quad (2.9)$$

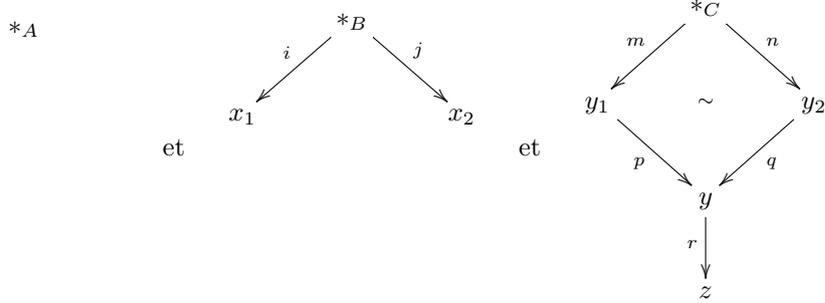
Par la Propriété 2.17, on sait en effet que la stratégie  $\text{prefix}(\sigma)$  est égale à la clôture par préfixe de la stratégie définie dans le membre droit de (2.9). L'égalité (2.9) peut ensuite être prouvée de façon similaire à la Propriété 2.17. On peut remarquer que toute position maximale  $x$  du sous-jeu  $G_\sigma$  d'un jeu  $A$ , associé à une stratégie positionnelle  $\sigma : A$ , appartient à l'ensemble  $\sigma^\bullet$  de ses positions acceptantes. Réciproquement, un couple  $(G, X)$  où  $G$  est un sous-jeu de  $A$  et  $X$  est un ensemble de positions de  $G$  vérifiant cette propriété provient d'une stratégie positionnelle :

**Propriété 2.21.** *Pour tout jeu  $A$ , l'ensemble des stratégies positionnelles non vides  $\sigma : A$  est en bijection avec les couples  $(G, X)$ , où  $G$  est un sous-jeu de  $A$  et  $X$  est un sous-ensemble des positions de  $G$  contenant toutes les positions maximales de  $G$ .*

Cette Propriété généralise la Propriété 2.17 au cadre des stratégies positionnelles non nécessairement closes par préfixe.

Les stratégies positionnelles forment une classe intéressante de stratégies, mais cette classe n'est pas close par composition : la composée de deux stratégies positionnelles n'est pas nécessairement positionnelle. En effet, considérons le

jeu  $A$  réduit à une position et les jeux  $B$  et  $C$  dont les graphes asynchrones sont respectivement



et les stratégies  $\sigma : A \rightarrow B$  et  $\tau : B \rightarrow C$  définies comme les clôtures par préfixe des ensembles respectifs

$$\{ i, j \} \quad \text{et} \quad \{ i \cdot m \cdot p \cdot r, j \cdot n \cdot q \}$$

Il est immédiat de vérifier que ces deux stratégies sont positionnelles. Cependant leur composée, qui est la clôture par préfixe de l'ensemble

$$\{ m \cdot p \cdot r, n \cdot q \}$$

n'est pas positionnelle, car elle ne contient par exemple pas la partie  $n \cdot q \cdot r$ . Cette disparité semble être liée au fait que nos stratégies sont monochromes et non déterministes. À la Section 2.2.1, nous introduisons la catégorie des jeux et stratégies *ingénues* pour lesquelles ces propriétés sont préservées par composition.

### 2.1.3 Stratégies préservant la compatibilité

Dorénavant, nous supposons que tous les jeux que nous considérons satisfont la Propriété du Cube 1.19. Nous considérerons de plus des stratégies qui satisfont deux propriétés de préservation de la compatibilité très naturelles. Ces conditions imposent à une stratégie de ne pas « créer d'incompatibilité » : si une stratégie joue deux transitions  $m : x \rightarrow y_1$  et  $n : x \rightarrow y_2$  qui sont compatibles dans le jeu alors elles doivent être aussi compatibles dans la stratégie, dans le sens où jouer l'une de ces transitions ne peut pas empêcher de jouer l'autre. Ainsi, si une stratégie joue deux coups qui sont spécifiés comme étant indépendants par le jeu, elle doit pouvoir les jouer en parallèle. Il est simple de vérifier que le graphe asynchrone associé à une stratégie positionnelle  $\sigma : A$ , préservant la compatibilité, vérifie la Propriété du Cube lorsque  $A$  la vérifie. Ceci qui nous permettra par la suite d'utiliser les techniques développées au Chapitre 1 directement sur les stratégies : on peut calculer l'intersection de deux chemins ou l'union de deux chemins compatibles à l'intérieur d'une telle stratégie.

Nous montrons dans cette section que les stratégies positionnelles préservant la compatibilité peuvent être directement caractérisées comme un ensemble de chemins vérifiant certaines propriétés.

**Définition 2.22** (Préservation de la compatibilité). Une stratégie positionnelle  $\sigma : A$  *préserve la compatibilité* lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes.

1. *Préservation de la compatibilité en avant* : si

$$m : x \longrightarrow y_1 \quad \text{et} \quad n : x \longrightarrow y_2$$

sont deux transitions cointiales de  $\sigma$  telles qu'il existe deux transitions  $p : y_1 \longrightarrow z$  et  $q : y_2 \longrightarrow z$  formant une tuile

$$x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{p} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{q} z$$

dans  $A$  alors les transitions  $p$  et  $q$  sont aussi dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



où les flèches en traits pointillés indiquent des transitions dans  $A$ .

2. *Préservation de la compatibilité en arrière* : dualement, si

$$p : y_1 \longrightarrow z \quad \text{et} \quad q : y_2 \longrightarrow z$$

sont deux transitions cofinales de  $\sigma$  telles qu'il existe deux transitions  $m : x \longrightarrow y_1$  et  $n : x \longrightarrow y_2$  formant une tuile

$$x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{p} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{q} z$$

dans  $A$  alors les transitions  $m$  et  $n$  sont aussi dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



Ces deux conditions peuvent être simplement reformulées directement sur les stratégies vues comme des ensembles de parties (et non comme des sous-jeux) dans le cas des stratégies positionnelles closes par préfixe.

**Propriété 2.23.** *Une stratégie close par préfixe  $\sigma : A$  est positionnelle et satisfait les deux propriétés de préservation de la compatibilité de la Définition 2.22 si et seulement si elle satisfait les trois propriétés suivantes.*

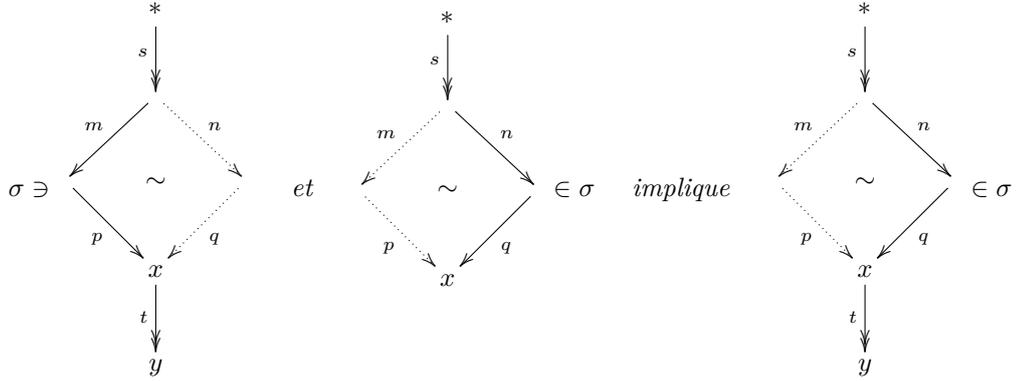
1. *Pour toute paire de parties cofinales*

$$s \cdot m \cdot p : * \twoheadrightarrow x \quad \text{et} \quad s \cdot n \cdot q : * \twoheadrightarrow x$$

et pour tout chemin  $t : x \twoheadrightarrow y$ , on a

$s \cdot m \cdot p \cdot t \in \sigma$ ,  $m \cdot p \sim n \cdot q$  et  $s \cdot n \cdot q \in \sigma$  implique  $s \cdot n \cdot q \cdot t \in \sigma$ .

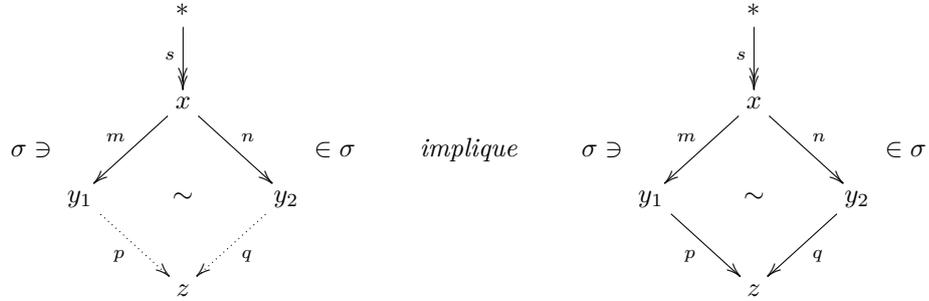
Diagrammatiquement,



2. Pour toute partie  $s : * \twoheadrightarrow x$  et toute paire de transitions coiniciales  $m : x \twoheadrightarrow y_1$  et  $n : x \twoheadrightarrow y_2$  telles qu'il existe une position  $z$  et deux transitions  $p : y_1 \twoheadrightarrow z$  et  $q : y_2 \twoheadrightarrow z$  induisant une tuile

$$x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{p} z \quad \diamond \quad x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{q} z$$

si les chemins  $s \cdot m$  et  $s \cdot n$  sont dans la stratégie  $\sigma$  alors les chemins  $s \cdot m \cdot p$  et  $s \cdot n \cdot q$  sont aussi dans  $\sigma$ . Diagrammatiquement,

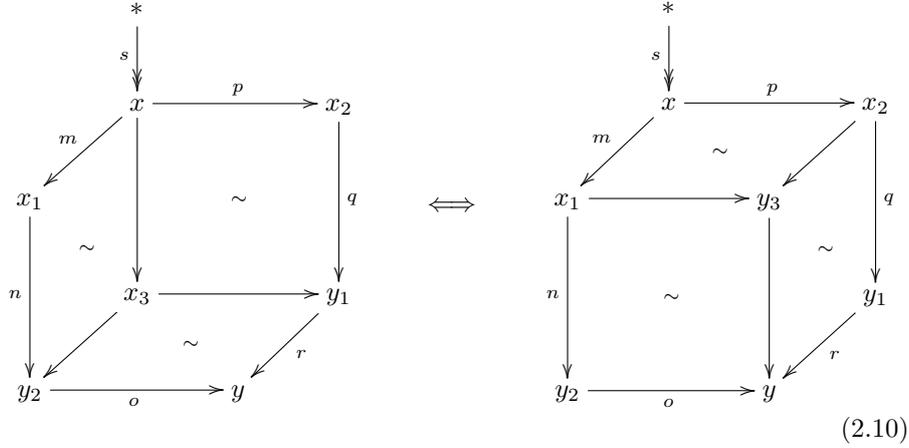


3. Pour toute paire de parties

$$s \cdot m \cdot n \cdot o : * \twoheadrightarrow y \quad \text{et} \quad s \cdot p \cdot q \cdot r : * \twoheadrightarrow y$$

dans la stratégie  $\sigma$ , les parties deux à deux homotopes du membre gauche du diagramme ci-dessous sont dans  $\sigma$  si et seulement si les parties deux à

deux homotopes du membre droit du diagramme ci-dessous sont dans  $\sigma$  :



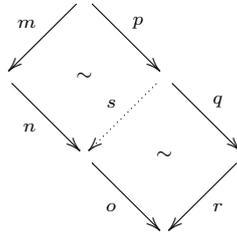
Il est aisé de constater que si  $\sigma : A$  est une stratégie close par préfixe positionnelle vérifiant les propriétés de préservation de la compatibilité alors elle vérifie les trois conditions ci-dessus. La condition 1 peut être déduite de la positionalité de  $\sigma$ , la condition 2 de la préservation de la compatibilité en avant et la condition 3 des propriétés de préservation de la compatibilité et du fait que le jeu  $A$  vérifie la Propriété du Cube. L'implication inverse est plus subtile, nous la montrons maintenant.

**Définition 2.24** ( $\sigma$ -homotopie). Nous définissons une relation  $\overset{1}{\sim}_\sigma$  sur les parties d'une stratégie  $\sigma$  par

$$s \overset{1}{\sim}_\sigma t \quad \text{ssi} \quad s \overset{1}{\sim} t.$$

La relation de  $\sigma$ -homotopie, notée  $\sim_\sigma$ , est la plus petite relation d'équivalence qui contient  $\overset{1}{\sim}_\sigma$ . La classe d'équivalence d'un chemin  $s$  par  $\sigma$ -homotopie est notée  $[s]_\sigma$ .

Si l'on considère une homotopie entre deux chemins  $s$  et  $t$  comme la possibilité de « déformer de façon continue »  $s$  en  $t$ , une relation de  $\sigma$ -homotopie entre les chemins  $s$  et  $t$  exprime donc la possibilité de déformer  $s$  en  $t$  tout en restant dans la stratégie  $\sigma$ . Bien entendu deux chemins homotopes ne sont pas nécessairement  $\sigma$ -homotopes dans le cas général. Par exemple, sur le jeu



les chemins  $m \cdot n \cdot o$  et  $p \cdot q \cdot r$  de la stratégie  $\sigma = \{m \cdot n \cdot o, p \cdot q \cdot r\}$  sont homotopes mais ne sont pas  $\sigma$ -homotopes. Nous allons cependant voir que lorsque la stratégie  $\sigma$  vérifie les conditions de la Propriété 2.23, les relations d'homotopie et de  $\sigma$ -homotopie coïncident sur les chemins de  $\sigma$ .

**Définition 2.25** (Graphe asynchrone  $\sigma$ -positionnel). Le *graphe asynchrone  $\sigma$ -positionnel* associé à une stratégie  $\sigma : A$  est le graphe asynchrone, noté  $G(\sigma)$ , dont

- les sommets sont les classes d'équivalence  $[s]_\sigma$  par  $\sigma$ -homotopie des chemins  $s$  de  $\sigma$ ,
- les arrêtes sont les transitions  $m$  de  $A$  telles que

$$m : [s]_\sigma \longrightarrow [s \cdot m]_\sigma$$

- les tuiles sont de la forme

$$[s]_\sigma \xrightarrow{m} [s \cdot m]_\sigma \xrightarrow{n} [s \cdot m \cdot n]_\sigma \quad \diamond_\sigma \quad [s]_\sigma \xrightarrow{p} [s \cdot p]_\sigma \xrightarrow{q} [s \cdot p \cdot q]_\sigma$$

où  $s \cdot m \cdot n$  et  $s \cdot p \cdot q$  sont deux chemins tels que  $s \cdot m \cdot n \stackrel{1}{\sim} s \cdot p \cdot q$  (on a donc  $[s \cdot m \cdot n]_\sigma = [s \cdot p \cdot q]_\sigma$ ).

Supposons donnée une stratégie  $\sigma : A$ , close par préfixe, qui vérifie les trois conditions de la Propriété 2.23.

**Lemme 2.26.** *Pour tous chemins  $s, t : * \twoheadrightarrow x$  et  $u : x \twoheadrightarrow y$  de  $A$  tels que les chemins  $s \cdot u$  et  $t$  sont dans la stratégie  $\sigma$  et  $s \sim_\sigma t$ , le chemin  $t \cdot u$  est aussi dans  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Les chemins  $s$  et  $t$  étant supposés  $\sigma$ -homotopes, il existe une suite de pas d'homotopie  $s = s_1 \stackrel{1}{\sim} s_2 \stackrel{1}{\sim} \dots \stackrel{1}{\sim} s_k = t$  entre les chemins  $s$  et  $t$  telle que tous les chemins  $s_i$  sont des parties de la stratégie  $\sigma$ . On peut alors raisonner par récurrence sur la longueur de cette suite et montrer le résultat en utilisant la première propriété de la Propriété 2.23 pour montrer le cas inductif.  $\square$

Nous en déduisons la Propriété suivante qui nous assure que considérer des chemins dans le graphe  $G(\sigma)$  a un sens.

**Propriété 2.27** ( $\sigma$ -positionalité). *Pour toute transition  $m : [s]_\sigma \longrightarrow [s \cdot m]_\sigma$  du graphe asynchrone  $G(\sigma)$  et tout chemin  $t$  de la classe de  $\sigma$ -homotopie  $[s]_\sigma$  du chemin  $s$ , le chemin  $t \cdot m$  est une partie de  $\sigma$ .*

**Propriété 2.28.** *Le graphe asynchrone  $G(\sigma)$  satisfait la Propriété du Cube.*

*Démonstration.* Montrons que le graphe asynchrone  $G(\sigma)$  satisfait la Propriété du Cube en avant (la Propriété du Cube en arrière peut être montrée de façon similaire). Supposons qu'il existe une paire de chemins

$$[\varepsilon]_\sigma \xrightarrow{s} [s]_\sigma \xrightarrow{m} [s \cdot m]_\sigma \xrightarrow{n} [s \cdot m \cdot n]_\sigma \xrightarrow{o} [s \cdot m \cdot n \cdot o]_\sigma$$

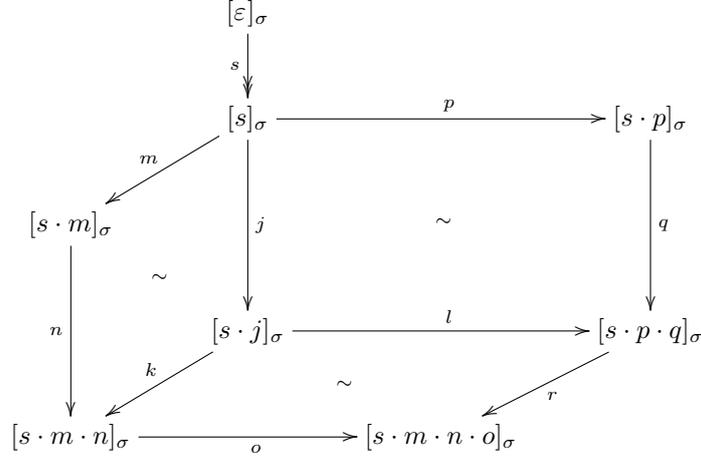
et

$$[\varepsilon]_\sigma \xrightarrow{s} [s]_\sigma \xrightarrow{p} [s \cdot p]_\sigma \xrightarrow{q} [s \cdot p \cdot q]_\sigma \xrightarrow{r} [s \cdot p \cdot q \cdot r]_\sigma$$

dans  $G(\sigma)$  qui induise trois tuiles

$$m \cdot n \cdot o \sim j \cdot k \cdot o \sim j \cdot l \cdot r \sim p \cdot q \cdot r$$

telles que figurées dans le membre gauche de (2.10) :



D'après la Propriété 2.27, on en déduit que les chemins

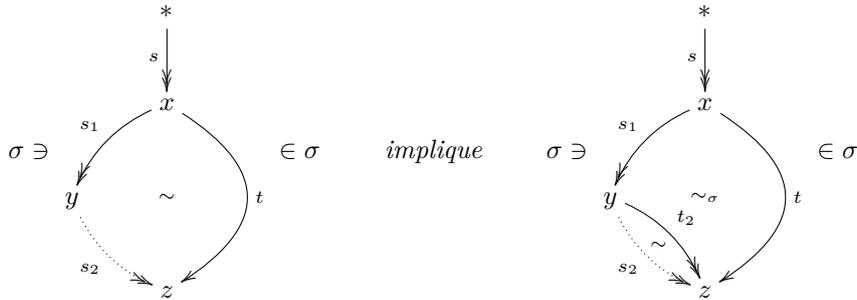
$$s \cdot m \cdot n \cdot o \sim s \cdot j \cdot k \cdot o \sim s \cdot j \cdot l \cdot r \sim s \cdot p \cdot q \cdot r$$

sont des chemins de  $\sigma$  homotopes. On peut donc conclure car la stratégie satisfaisant la deuxième propriété de la Propriété 2.23, le graphe  $G_\sigma$  satisfait la Propriété du Cube en avant.  $\square$

**Propriété 2.29.** Soient  $s : * \twoheadrightarrow x$ ,  $s_1 : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : x \twoheadrightarrow z$  trois chemins de  $A$  tels que les parties  $s_0 \cdot s_1$  et  $s_0 \cdot t$  soient dans la stratégie  $\sigma$ . S'il existe un chemin  $s_2 : y \twoheadrightarrow z$  tel que  $s_1 \cdot s_2 \sim t$  alors il existe un chemin  $t_2 = t/s_1 : y \twoheadrightarrow z$  tel que

$$s \cdot s_1 \cdot t_2 \in \sigma, \quad s_2 \sim t_2 \quad \text{et} \quad s \cdot s_1 \cdot t_2 \sim_\sigma s \cdot t.$$

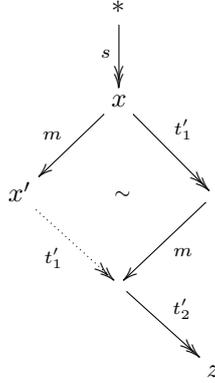
Diagrammatiquement,



*Démonstration.* Le résultat est montré par induction sur la longueur du chemin  $s_1$ . Si  $s_1$  est le chemin vide alors le chemin  $t_2 = t$  convient. Sinon, le chemin  $s_1$  est de la forme  $x \xrightarrow{m} x' \xrightarrow{s'_1} y$ . Les chemins  $s_1 \cdot s_2$  et  $t$  étant supposés homotopes, la transition  $m$  est initiale modulo homotopie dans le chemin  $t$ . Le graphe asynchrone sous-jacent au jeu  $A$  étant supposé vérifier la Propriété du Cube, la transition  $m$  est initiale modulo indépendance dans le chemin  $t$  par la Propriété 1.24. On a donc

$$s'_1 \cdot s_2 = (m \cdot s'_1 \cdot s_2) \sim t/m$$

par la Propriété 1.38. Le chemin  $t$  peut donc s'écrire  $t'_1 \cdot m \cdot t'_2$  et la stratégie  $\sigma$  induit un sous-graphe asynchrone du graphe asynchrone du jeu  $A$  de la forme



et par une utilisation répétée des conditions 1 et 2 de la Propriété 2.23, que la stratégie  $\sigma$  est supposée satisfaisante, il est aisé de montrer que le chemin  $s \cdot m \cdot t'_1 \cdot t'_2 = s \cdot m \cdot (t/m)$  est dans la stratégie  $\sigma$  et, en notant  $t'$  le chemin  $t/m : x' \twoheadrightarrow z$ , que  $s \cdot t = s \cdot t'_1 \cdot m \cdot t'_2 \sim_\sigma s \cdot m \cdot t'$ . On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction aux chemins  $s \cdot m : * \twoheadrightarrow x'$ ,  $s'_1 : x' \twoheadrightarrow y$  et  $t' : x' \twoheadrightarrow z$  et en déduire l'existence d'un chemin  $t_2 : y \twoheadrightarrow z$  tel que

$$s \cdot m \cdot s'_1 \cdot t_2 \in \sigma, \quad s_1 \sim t_2 \quad \text{et} \quad s \cdot m \cdot s'_1 \cdot t_2 \sim_\sigma s \cdot m \cdot t'.$$

Le chemin  $s \cdot s_1 \cdot t_2 = s \cdot m \cdot s'_1 \cdot t_2$  est donc dans  $\sigma$ , les chemins  $s_2$  et  $t_2$  sont homotopes et on a

$$s \cdot s_1 \cdot t_2 = s \cdot m \cdot s'_1 \cdot t_2 \sim_\sigma s \cdot m \cdot t' \sim_\sigma s \cdot t$$

ce qui nous permet de conclure.  $\square$

En spécialisant la Propriété précédente au cas où le chemin  $s_2$  est vide, on en déduit immédiatement

**Corollaire 2.30.** *Si  $s : * \twoheadrightarrow x$  et  $t : * \twoheadrightarrow x$  sont deux chemins homotopes de la stratégie  $\sigma$  alors ils sont  $\sigma$ -homotopes :*

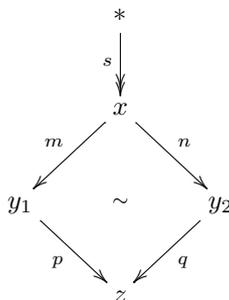
$$s \sim t \quad \text{implique} \quad s \sim_\sigma t.$$

On peut finalement aisément en conclure que

**Propriété 2.31.** *Les graphes asynchrones  $G_\sigma$  et  $G(\sigma)$  sont isomorphes.*

En particulier, la stratégie  $\sigma$  est positionnelle et le sous-graphe asynchrone  $G_\sigma$  du jeu  $A$  qu'elle induit est un jeu, car il vérifie la Propriété du Cube d'après la Propriété 2.28. On peut donc en particulier calculer l'intersection de deux chemins modulo homotopie dans ce graphe asynchrone. Si  $p : y_1 \twoheadrightarrow z$  et  $q : y_2 \twoheadrightarrow z$  sont deux transitions de  $G_\sigma$ , il existe deux chemins  $s_1 : * \twoheadrightarrow y_1$  et  $s_2 : * \twoheadrightarrow y_2$  tels que  $s_1 \cdot p$  et  $s_2 \cdot q$  sont des parties de  $\sigma$ . L'intersection des parties  $s_1$  et  $s_2$  est une partie  $s : * \twoheadrightarrow x$  de  $\sigma$  telle qu'il existe deux transitions

$m : x \longrightarrow y_1$  et  $n : x \longrightarrow y_2$  induisant un diagramme



dans le graphe asynchrone  $G_\sigma$ , montrant que la stratégie  $\sigma$  préserve la compatibilité en arrière. Ceci conclut notre preuve de la Propriété 2.23.

Cette caractérisation est particulièrement intéressante car elle nous permettra de manipuler les stratégies soit comme des ensembles de traces, soit comme des sous-jeux du jeu sur lequel elles sont définies. Elle peut être étendue de façon évidente au cadre général des stratégies qui ne sont pas nécessairement closes par préfixe : il nous suffit d'imposer aux stratégies  $\sigma$  de satisfaire

1. une variante de la première propriété : pour tous chemins

$$s \cdot m \cdot p : * \twoheadrightarrow x, \quad s \cdot n \cdot q : * \twoheadrightarrow x \quad \text{et} \quad t : x \twoheadrightarrow y$$

tels que

$$s \cdot m \cdot p \cdot t \in \sigma, \quad m \cdot p \sim n \cdot q \quad \text{et} \quad s \cdot n \cdot q \in \text{prefix}(\sigma)$$

le chemin  $s \cdot n \cdot q \cdot t$  appartient à la stratégie  $\sigma$ ,

2. la seconde et la troisième des propriétés de la Propriété 2.23 sur la clôture par préfixe  $\text{prefix}(\sigma)$  de la stratégie  $\sigma$ .

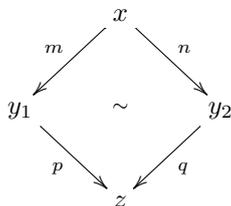
## 2.2 Une catégorie de stratégies à deux joueurs

Notre notion de jeu polarisé est obtenue de façon simple en séparant les coups des jeux monochromes en deux classes, les coups du Joueur et les coups de l'Opposant. La polarisation va nous permettre d'introduire une reformulation asynchrone de la notion de *déterminisme*. Si les stratégies positionnelles ne composent généralement pas, nous verrons que les stratégies positionnelles déterministes préservant la compatibilité forment une catégorie.

### 2.2.1 Stratégies ingénues

**Définition 2.32** (Jeu). Un *jeu polarisé*  $A = (G, *, \lambda)$  est un jeu monochrome  $(G, *)$  équipé d'une fonction  $\lambda : E \rightarrow \{-1, +1\}$  qui à toute transition du graphe asynchrone sous-jacent  $G = (V, E, \diamond)$  associe une polarité compatible avec les

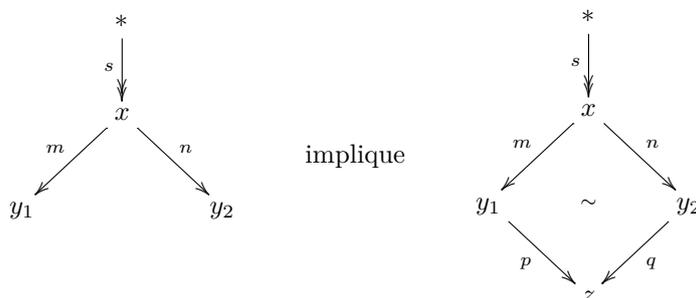
tuiles dans le sens où pour toute tuile



de  $G$ , on a  $\lambda(m) = \lambda(q)$  et  $\lambda(n) = \lambda(p)$ . Un coup  $m$  est appelé un *coup Joueur* lorsque  $\lambda(m) = +1$  et un *coup Opposant* sinon.

De même que dans le cadre monochrome, une *stratégie* est définie comme un ensemble de parties et les notions de stratégie positionnelle, de préservation de la compatibilité, etc. s'étendent de façon immédiate. Cependant la polarisation des coups nous permet maintenant d'introduire les notions de stratégie déterministes et ingénues.

**Définition 2.33** (Stratégie déterministe). Une stratégie  $\sigma : A$  close par préfixe est *déterministe* lorsque pour tout chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$  et toutes transitions  $m : x \rightarrow y_1$  et  $n : x \rightarrow y_2$ , où  $m$  est une transition Joueur, tels que les parties  $s \cdot m$  et  $s \cdot n$  soient dans la stratégie  $\sigma$ , il existe une paire de transitions cofinales  $p : y_1 \rightarrow z$  et  $q : y_2 \rightarrow z$  formant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$ . Diagrammatiquement,



Une stratégie est dite *déterministe* lorsque sa clôture par préfixe l'est, dans le sens précédent.

On peut remarquer que notre notion de déterminisme est asynchrone et diffère de la notion habituelle de déterminisme : en particulier, une stratégie peut être prête à jouer plusieurs coups joueur dans une position donnée, à condition de pouvoir converger plus tard. Dans le cas où la stratégie est positionnelle, la définition de déterminisme peut être légèrement simplifiée.

**Propriété 2.34.** Une stratégie positionnelle est déterministe si et seulement si pour toute paire de transitions coinitiales  $m : x \rightarrow y_1$  et  $n : x \rightarrow y_2$  de  $\sigma$ , où  $m$  est une transition Joueur, il existe une paire de transitions cofinales  $p : y_1 \rightarrow z$

et  $q : y_2 \longrightarrow z$  formant une tuile. Diagrammatiquement,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x \\ \swarrow m \quad \searrow n \\ y_1 \quad y_2 \end{array} & \text{implique} & \begin{array}{c} x \\ \swarrow m \quad \searrow n \\ y_1 \quad y_2 \\ \swarrow p \quad \searrow q \\ z \end{array} \quad (2.11)
 \end{array}$$

Par application répétée de cette propriété, il est aisé de constater qu'une stratégie positionnelle déterministe est close par résiduation après une transition Joueur :

**Lemme 2.35.** *Si  $m : x \longrightarrow y_1$  est une transition Joueur et  $s : x \longrightarrow y_2$  un chemin appartenant tous deux à une stratégie positionnelle déterministe  $\sigma$  alors les chemins  $m$  et  $s$  sont compatibles et le chemin  $m \cdot (s/m)$  est dans la stratégie  $\sigma$ .*

**Définition 2.36** (Stratégie ingénue). Une stratégie  $\sigma : A$  est *ingénue* lorsqu'elle satisfait les propriétés suivantes :

1. elle est *positionnelle*,
2. elle *préserve la compatibilité*,
3. elle est *déterministe*.

### 2.2.2 La catégorie des stratégies ingénues

Le *produit tensoriel*  $A \otimes B$  de deux jeux polarisés  $A$  et  $B$  est défini de même que dans le cadre monochrome (Définition 2.4), avec la polarité des coups préservée dans chaque composante. Le *dual*  $A^*$  d'un jeu polarisé  $A = (G, \lambda)$  est le jeu  $A$  dans lequel les polarités ont été inversées :  $A^* = (G, -\lambda)$ . L'implication linéaire  $A \multimap B$  de deux jeux  $A$  et  $B$  est définie de la façon habituelle par

$$A \multimap B = (A \otimes B^*)^*$$

On peut remarquer que ce jeu est aussi égal au jeu  $A^* \otimes B$ , préfigurant le fait que la catégorie que nous allons construire est compacte fermée. Nous adoptons la même convention que précédemment pour noter les positions et écrivons parfois  $x_A \multimap x_B$  pour une position de  $A \multimap B$  constituée d'une position  $x_A$  du jeu  $A$  et d'une position  $x_B$  du jeu  $B$ .

La composée  $\tau \circ \sigma : A \multimap C$  de deux stratégies  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  est définie de la même façon que dans le cadre monochrome. Nous allons montrer que la composée de deux stratégies ingénues est ingénue. La preuve de cette propriété repose sur la propriété de confluence subtile énoncée ci-dessous.

**Propriété 2.37** (Témoin d'interaction maximal). *Supposons données deux stratégies ingénues  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  ainsi qu'une partie  $u : * \multimap x \multimap z$  dans leur composée  $\tau \circ \sigma$ . Supposons qu'il existe deux chemins*

$$s_1 : x_0 \multimap y_0 \multimap x \multimap y_1 \quad \text{et} \quad s_2 : x_0 \multimap y_0 \multimap x \multimap y_2$$

dans la stratégie  $\sigma$  et deux chemins

$$t_1 : y_0 \multimap z_0 \multimap y_1 \multimap z \quad \text{et} \quad t_2 : y_0 \multimap z_0 \multimap y_2 \multimap z$$

dans la stratégie  $\tau$  telles que

$$(s_1)_A = (s_2)_A, \quad (s_1)_B = (t_1)_B, \quad (s_2)_B = (t_2)_B, \quad (t_1)_C = (t_2)_C$$

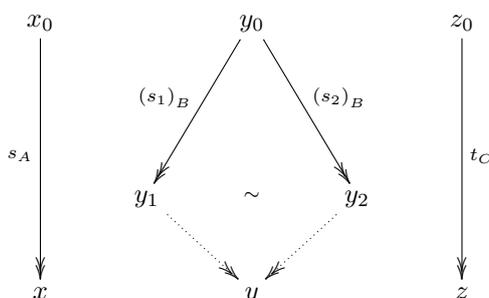
alors il existe une position  $y$  et deux chemins

$$s : x_0 \multimap y_0 \multimap x \multimap y \quad \text{et} \quad t : y_0 \multimap z_0 \multimap y \multimap z$$

respectivement dans  $\sigma$  et  $\tau$  telles que

$$s_A = (s_1)_A = (s_2)_A, \quad s_B = t_B, \quad t_C = (t_1)_C = (t_2)_C$$

et les chemins  $s_1$  et  $s_2$  (resp.  $t_1$  et  $t_2$ ) sont des préfixes du chemin  $s$  (resp.  $t$ ) modulo homotopie. Diagrammatiquement,



*Démonstration.* La preuve est faite par induction sur la longueur des chemins  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . Elle est immédiate lorsque l'un de ces chemins est vide (supposons que ce soit  $s_2$ ) puisque la position  $y = y_1$  convient alors.

Supposons que le chemin  $s_1$  commence par une transition de  $A$ , que nous notons  $m : x_0 \multimap y_0 \multimap x_1 \multimap y_0$  (le cas où  $s_2$  commence par une transition de  $A$  est similaire). Par hypothèse on a  $(s_1)_A = (s_2)_A$ . Le chemin  $s_2$  est donc de la forme  $s_2 = s'_2 \cdot m \cdot s''_2$ , où  $s'_2$  est un chemin ne contenant que des coups du jeu  $B$ . Par définition du jeu  $A \multimap B$ , la transition  $m$  est indépendante du chemin  $s'_2$ . Les positions  $x_1 \multimap y_0$  et  $x \multimap y_2$  sont donc compatibles et par suite le chemin  $m \cdot (s_2/m) : x_0 \multimap y_0 \multimap x \multimap y_2$  existe et est dans la stratégie  $\sigma$ . Quitte à remplacer le chemin  $s_2$  par le chemin  $m \cdot (s_2/m)$ , on peut donc supposer que les chemins  $s_1$  et  $s_2$  commencent par la même transition  $m$  de  $A$ . On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction aux chemins  $s_1/m : x_1 \multimap y_0 \multimap x \multimap y_1$ ,  $s_2/m : x_1 \multimap y_0 \multimap x \multimap y_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$  et en déduire l'existence de deux positions  $x$  et  $y$  et deux chemins  $s : x_1 \multimap y_0 \multimap x \multimap y$  et  $t : y_0 \multimap z_0 \multimap y \multimap z$  vérifiant les hypothèses de la propriété. Les chemins  $m \cdot s$  et  $t$  permettent alors de conclure. Le cas l'un des chemins  $t_1$  ou  $t_2$  commence par une transition de  $C$  est similaire.

Sinon, les chemins  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$  commencent tous les quatre par une transition de  $B$ . Notons  $m : y_0 \multimap y'_1$  le coup de  $B$  par lequel commencent les chemins  $s_1$  et  $t_1$  et  $n : y_0 \multimap y'_2$  le coup de  $B$  par lequel commencent les chemins  $s_2$  et  $t_2$ . Si les coups  $m$  et  $n$  sont les mêmes alors on peut conclure comme précédemment, en utilisant l'hypothèse d'induction. Dans le cas contraire, nous

allons montrer que l'on peut se ramener à ce cas. Supposons que  $m$  soit un coup Joueur de  $B$ . La stratégie  $\sigma$  étant déterministe, on sait par le Lemme 2.35 que les positions  $y'_1$  et  $y_2$  sont compatibles et que le chemin  $m \cdot (s_2/m)$  existe et est dans la stratégie  $\sigma$ . La compatibilité des positions nous assure que le chemin  $m \cdot (t_2/m)$  existe et est dans la stratégie  $\sigma$  par préservation de la compatibilité. Quitte à remplacer le chemin  $s_2$  par  $m \cdot (s_2/m)$  et le chemin  $t_2$  par  $m \cdot (t_2/m)$ , on peut donc se ramener au cas où les quatre chemins commencent par le même coup. Le cas où le coup  $n$  est Joueur est similaire. Si  $m$  et  $n$  sont tous les deux des coups Opposant de  $B$ , alors ce sont des coups Joueur de  $B \multimap C$  et les chemins  $t_1$  et  $t_2$  commencent tous les deux par des coups Joueur. On peut alors conclure de la même façon, en échangeant les rôles des stratégie  $\sigma$  et  $\tau$  dans ce qui précède.  $\square$

Cette propriété montre que, étant données deux interactions entre les stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  amenant à la même partie  $u$  dans la stratégie composée  $\tau \circ \sigma$ , leur union (par rapport à l'ordre préfixe modulo homotopie) peut être atteinte par interaction. Cette propriété de « témoin maximal » est fondamentale pour établir la préservation de l'ingénuité par composition.

**Propriété 2.38.** *Si  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  sont deux stratégies ingénues alors leur composée  $\tau \circ \sigma : A \multimap C$  est ingénue.*

*Démonstration.* Montrons par exemple que la composée  $\tau \circ \sigma$  est déterministe, la préservation des autres propriétés de l'ingénuité étant montrée de façon similaire. Supposons donné un chemin  $u : * \twoheadrightarrow x \multimap z$  et deux transitions cointiales  $m$  et  $n$ , ayant pour source la position  $x \multimap z$ , où  $m$  est une transition Joueur, telles que les parties  $u \cdot m$  et  $u \cdot n$  sont dans la clôture par préfixe de la composée  $\tau \circ \sigma$ . Supposons de plus que ces transitions sont toutes les deux dans le jeu  $C$  (le cas où elles sont toutes les deux dans le jeu  $A$  ou le cas où elles sont l'une dans le jeu  $A$  et l'autre dans le jeu  $C$  sont similaires); ces transitions sont donc de la forme  $m : x \multimap z \twoheadrightarrow x \multimap z_1$  et  $n : x \multimap z \twoheadrightarrow x \multimap z_2$ . La partie  $u \cdot m$  (resp.  $u \cdot n$ ) résulte de l'interaction de deux parties  $s_1 \in \sigma$  et  $t_1 \cdot m \in \tau$  (resp.  $s_2 \in \sigma$  et  $t_2 \cdot n \in \tau$ ). La Propriété 2.37 nous assure que l'on peut considérer que ces parties proviennent essentiellement de l'interaction de la même paire de parties :  $s \in \sigma$  et  $t \cdot m \in \tau$  pour  $u \cdot m$ ,  $s \in \sigma$  et  $t \cdot n \in \tau$  pour  $u \cdot n$ . La stratégie  $\tau$  étant déterministe, les transitions  $m$  et  $n$  induisent une tuile de la forme (2.11) et les parties  $t \cdot m \cdot p$  et  $t \cdot n \cdot q$  sont dans la clôture par préfixe de la stratégie  $\tau$ , ce qui nous permet de déduire que les chemins  $m \cdot p$  et  $n \cdot q$  sont dans la stratégie  $\tau \circ \sigma$ .  $\square$

Nous pouvons ainsi définir une catégorie  $\mathbf{Jeux}_2$  dont les objets sont les jeux polarisés et les morphismes d'un jeu  $A$  dans un jeu  $B$  sont les stratégies ingénues du jeu  $A \multimap B$ . La catégorie peut être munie d'une structure monoïdale symétrique et est compacte fermée. Le foncteur d'oubli de  $\mathbf{Jeux}_2$  dans la catégorie  $\mathbf{Jeux}_1$  est monoïdal strict et préserve la dualité.

## 2.3 Stratégies courtoises

Dans cette section, nous étudions une classe particulière de stratégies ingénues, qui satisfont une propriété supplémentaire de *courtoisie*. Ces stratégies sont remarquables, car elles sont complètement déterminées par leurs *positions d'arrêt*.

Par une position d'arrêt, nous entendons une position dans laquelle la stratégie n'a plus de coup à jouer et attend un coup de l'Opposant ou ne veut plus interagir.

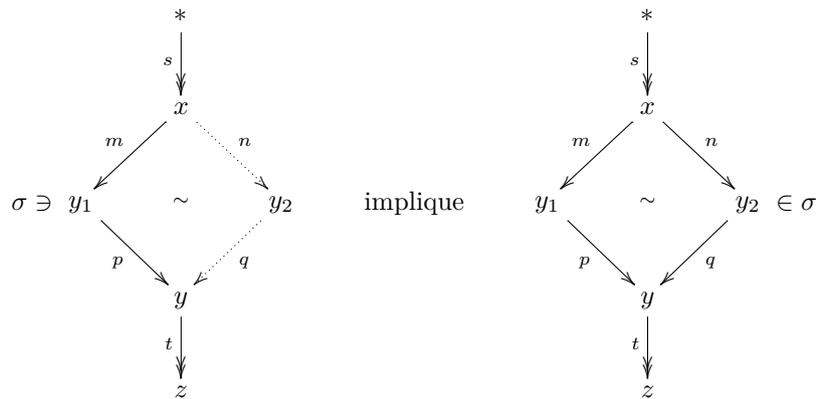
**Définition 2.39** (Position d'arrêt). Une *position d'arrêt* d'une stratégie positionnelle close par préfixe  $\sigma : A$  est une position  $x$  atteinte dans la stratégie par une partie  $s : * \rightarrow x$  telle qu'il n'existe pas de transition Joueur  $m : x \rightarrow y$  pour laquelle la partie  $s \cdot m$  est dans  $\sigma$ . Une position d'arrêt d'une stratégie positionnelle est une position d'arrêt de sa clôture par préfixe, dans le sens précédent.

Cette propriété nous permet ainsi de faire le lien entre les jeux asynchrones et les jeux concurrents introduits par Abramsky et Melliès [AM99]. Nous supposons dans cette section que les stratégies que nous considérons sont ingénues et ont leur positions d'arrêt comme positions acceptantes. La notation  $\sigma^\bullet$  dénotera donc l'ensemble des positions d'arrêt d'une stratégie  $\sigma$ . Dans ce cadre, une stratégie  $\sigma$  est entièrement déterminée par sa clôture par préfixe  $\text{prefix}(\sigma)$ , car elle peut être retrouvée par

$$\sigma = \{ s : * \rightarrow x \in \text{prefix}(\sigma) \mid x \in (\text{prefix}(\sigma))^\bullet \}$$

par positionalité de la stratégie. Dans la suite, nous travaillerons donc avec la clôture par préfixe des stratégies et noterons simplement  $\sigma : A$  pour la clôture par préfixe d'une stratégie sur  $A$ , vérifiant les conditions évoquées ci-dessus. Formellement, ceci revient à considérer le parties du graphe asynchrone induit par la stratégie et non seulement les parties de la stratégie elle-même.

**Définition 2.40** (Courtoisie). Une stratégie  $\sigma : A$  est *courtoise* lorsque pour tous chemins  $s : * \rightarrow x$  et  $t : y \rightarrow z$  et toute paire de transitions  $m : x \rightarrow y_1$  et  $p : y_1 \rightarrow z$  de  $A$ , où  $m$  est une transition Joueur, tels que la partie  $s \cdot m \cdot p$  soit dans  $\sigma$  et tels qu'il existe une paire de transitions  $n : x \rightarrow y_2$  et  $q : y_2 \rightarrow y$  de  $A$  induisant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$ , la partie  $s \cdot n \cdot q \cdot t$  est aussi dans  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



Cette propriété nous assure qu'une stratégie  $\sigma$  qui accepte un coup  $n$  après avoir joué un coup Joueur indépendant  $m$  est prête à retarder son action  $m$  en acceptant le coup  $n$  avant le coup  $m$ . Ainsi, l'ordre de causalité sur les coups induit par une telle stratégie raffine l'ordre de justification du jeu, en n'ajoutant

que des dépendances  $m \preceq n$ , où  $m$  est un coup Opposant. Ceci adapte au cadre non-alterné le fait que, dans les jeux alternés, l'ordre de causalité  $p \preceq q$  fourni par la vue d'une stratégie innocente coïncide avec l'ordre de justification lorsque  $p$  est un coup Joueur et  $q$  un coup Opposant. La courtoisie est une propriété typique de l'asynchronie et semble être une composante fondamentale des sémantiques de jeux concurrentes. Elle est en particulier utilisée par Ghica et Murawski pour définir une sémantique de jeux de *Idealized Algol* (un langage impératif avec références) étendu avec des constructions parallèles [GM04], ainsi que par Laird pour modéliser une variante asynchrone du  $\pi$ -calcul [Lai05].

**Propriété 2.41.** *Une stratégie positionnelle  $\sigma : A$  est courtoise lorsque pour toute transition Joueur  $m : x \longrightarrow y_1$  et toute transition  $p : y_1 \longrightarrow z$  de la stratégie  $\sigma$  telles qu'il existe des transitions  $n : x \longrightarrow y_2$  et  $q : y_2 \longrightarrow z$  dans le jeu  $A$  formant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$ , les transitions  $n$  et  $q$  sont aussi dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,*



La composée  $\tau \circ \sigma : A \rightarrow C$  de deux stratégies ingénues courtoises  $\sigma : A \rightarrow B$  et  $\tau : B \rightarrow C$  est elle-même une stratégie ingénue courtoise; ceci peut être montré en utilisant essentiellement le même argument que dans la preuve de la Propriété 2.38. Les stratégies ingénues courtoises forment ainsi une catégorie  $\mathbf{Jeux}_C$  qui n'est *pas* une sous-catégorie de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_2$  des jeux polarisés et stratégies ingénues car leurs identités diffèrent. En effet, la stratégie identité de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_C$  est définie de la façon suivante.

**Définition 2.42** (Stratégie tampon). Notons  $\sigma : A \multimap A$  la plus petite stratégie ingénue contenant la partie vide et telle que pour toute partie  $s : * \multimap x \multimap x$  de  $\sigma$ ,

- pour toute transition Opposant  $m : x \longrightarrow y$  de  $A$ , la partie

$$* \xrightarrow{s} x \multimap x \xrightarrow{m} x \multimap y \xrightarrow{m} y \multimap y$$

est dans  $\sigma$ ,

- pour toute transition Joueur  $m : x \longrightarrow y$  de  $A$ , la partie

$$* \xrightarrow{s} x \multimap x \xrightarrow{m} y \multimap x \xrightarrow{m} y \multimap y$$

est dans  $\sigma$ .

La *stratégie tampon*  $\text{buf}_A : A \multimap A$  sur un jeu  $A$  est la plus petite stratégie ingénue et courtoise contenant la stratégie  $\sigma$ .

Ces stratégies tampon permettent de caractériser les stratégies courtoises parmi les stratégies de  $\mathbf{Jeux}_2$ .

**Propriété 2.43.** *Une stratégie ingénue  $\sigma : A \rightarrow B$  est courtoise si et seulement si on a*

$$\sigma \circ \text{buf}_A = \sigma = \text{buf}_B \circ \sigma.$$

Ce résultat étend à notre cadre la notion d'agent asynchrone temporisé introduite par Selinger [Sel97] et montre que la catégorie  $\mathbf{Jeux}_C$  des stratégies ingénues courtoises peut être déduite de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_2$  des stratégies ingénues par une construction similaire à celle de l'enveloppe de Karoubi, en « remplaçant » tout morphisme  $\sigma : A \rightarrow B$  de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_2$  par le morphisme  $\text{buf}_B \circ \sigma \circ \text{buf}_A : A \rightarrow B$ .

Nous utiliserons parfois dans la suite la variante suivante de la propriété de courtoisie :

**Définition 2.44** (Stratégie fortement courtoise). Une stratégie est *fortement courtoise* lorsqu'elle est courtoise et vérifie la propriété obtenue en supposant dans la Définition 2.40 de la courtoisie que les transitions  $m$  et  $p$  sont Opposant.

### 2.3.1 Caractérisation des positions d'arrêt

À tout ensemble  $X$  de positions, on peut associer une stratégie de la façon suivante.

**Définition 2.45** (Stratégie associée à un ensemble de positions). Étant donné un ensemble  $X$  de positions d'un jeu  $A$ , nous définissons la stratégie  $X^\ddagger$  sur le jeu  $A$  comme le plus petit ensemble de parties de  $A$  tel que :

- $X^\ddagger$  contient la partie vide,
- pour toute partie  $s : * \twoheadrightarrow x$  dans  $X^\ddagger$ , si  $m : x \rightarrow y$  est une transition telle qu'il existe une position  $z \in X$  et un chemin  $t : y \twoheadrightarrow z$  ne contenant que des coups Joueur alors la partie  $s \cdot m : * \twoheadrightarrow y$  est dans la stratégie  $X^\ddagger$ .

Le Théorème 2.49 va donner une caractérisation des ensembles qui sont les ensembles de positions d'arrêt d'une stratégie courtoise. Il montre de plus qu'une stratégie courtoise est entièrement caractérisée par son ensemble de positions d'arrêt. En effet, étant donné l'ensemble  $X$  des positions d'arrêt d'une stratégie courtoise  $\sigma$ , la stratégie peut être retrouvée par l'opération que nous venons d'introduire :  $\sigma = X^\ddagger$ .

**Lemme 2.46.** *Soit  $x$  une position d'une stratégie positionnelle  $\sigma : A$  dominée par une position d'arrêt  $z$  de  $\sigma$  (et il existe toujours une telle position  $z$ ). Il existe une position d'arrêt  $y \subseteq z$  et un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$  dans  $\sigma$  ne contenant que des coups Joueur.*

*Démonstration.* La position  $x$  étant par hypothèse dans  $\sigma$ , il existe un chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$  ayant  $x$  pour but, qui est le préfixe d'une partie  $t : * \twoheadrightarrow z'$  de  $\sigma$ , où  $z'$  est une position acceptante de la stratégie. De même, la position  $z$  est le but d'un chemin  $t' : * \twoheadrightarrow z$  de la stratégie. Quitte à remplacer le chemin  $t$  par le chemin  $(t \wedge t') \cdot (t' / (t \wedge t'))$ , on peut toujours supposer  $z' = z$ . La position  $z$  est, par hypothèse, une position d'arrêt de  $\sigma$ . On peut construire par récurrence une suite de chemins  $s_i : x \twoheadrightarrow x_i$  de  $\sigma$ , ne contenant que des transitions Joueur, définie par  $s_0 = \varepsilon$  et  $s_{i+1} = s_i \cdot m_i$  où  $m_i : x_i \rightarrow x_{i+1}$  est une transition Joueur dans la stratégie  $\sigma$ .

Montrons par récurrence sur  $i$  que les positions  $x_i$  sont sous la position  $z$ , dans le sens où il existe un chemin  $s'_i : x_i \twoheadrightarrow z$ . Pour  $i = 0$ , on a  $x_0 = x$  et, le chemin  $s : * \twoheadrightarrow x$  étant un préfixe du chemin  $t : * \twoheadrightarrow z$ , il existe un chemin  $s'_0 : x_0 \twoheadrightarrow z$ . Sinon, le chemin  $s_{i+1}$  est de la forme  $s_i \cdot m_i$  et, par hypothèse de récurrence, il existe un chemin  $s'_i : x_i \twoheadrightarrow z$ . La stratégie  $\sigma$  étant déterministe et la transition  $m_i$  étant une transition Joueur, par le Lemme 2.35 les chemins  $m_i : x_i \twoheadrightarrow x_{i+1}$  et  $s'_i : x_i \twoheadrightarrow z$  sont compatibles, ce qui nous assure de l'existence d'une position  $z'$  et de chemins résiduels  $m/s'_i : z \twoheadrightarrow z'$  et  $s'_i/m : x_{i+1} \twoheadrightarrow z'$ , et ces résidus sont dans la stratégie  $\sigma$  par déterminisme. Par définition des résidus, le chemin  $m/s'_i$  est soit vide, soit réduit à une transition Joueur. Or, le second cas est impossible, car la position  $z$  est une position d'arrêt de la stratégie  $\sigma$ , on a donc  $z' = z$  et  $m/s'_i = \varepsilon : z \twoheadrightarrow z$ . Le chemin  $s'_i/m : x_{i+1} \twoheadrightarrow z$  montre ainsi que la position  $x_{i+1}$  est sous la position  $z$ .

Les positions  $x_i$  étant toutes sous la position  $z$ , la suite de chemins  $(s_i)$  est nécessairement finie. Supposons que cette suite soit maximale et notons  $n$  l'indice de son dernier élément. Par maximalité de la suite, la position  $y = x_n$  est nécessairement une position d'arrêt de la stratégie  $\sigma$  et le chemin  $s_n : x \twoheadrightarrow y$  nous permet de conclure, car il ne contient que des transitions Joueur.  $\square$

**Lemme 2.47.** *Si  $s : x \twoheadrightarrow y$  est un chemin d'une stratégie positionnelle courtoise  $\sigma : A$  ne contenant que des transitions Joueur et  $t : x \twoheadrightarrow y$  est un chemin du jeu  $A$  homotope à  $s$  alors  $t$  est aussi dans la stratégie  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur le nombre de pas d'homotopie entre les chemins  $s$  et  $t$  en utilisant la propriété de courtoisie de  $\sigma$ .  $\square$

**Théorème 2.48.** *Supposons que  $\sigma : A$  soit une stratégie ingénue et courtoise. Alors la stratégie  $\sigma$  est caractérisée par son ensemble de positions d'arrêt :*

$$\sigma = (\sigma^\bullet)^\ddagger \quad (2.12)$$

*Démonstration.* Nous montrons l'égalité par double inclusion.

$\sigma \subseteq (\sigma^\bullet)^\ddagger$ . Soit  $s : * \twoheadrightarrow y$  une partie dans la stratégie  $\sigma$ . Nous montrons que  $s$  est dans l'ensemble  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$  par induction sur la longueur de la partie  $s$ . Si  $s$  est la partie vide  $\varepsilon$  alors elle est dans l'ensemble  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$  par définition de cet ensemble. Sinon, la partie  $s$  est de la forme

$$* \xrightarrow{t} x \xrightarrow{m} y$$

où la partie  $t$  est dans  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$  par hypothèse d'induction et, d'après le Lemme 2.46, il existe une position d'arrêt  $z$  de  $\sigma$  et un chemin  $t' : y \twoheadrightarrow z$  ne contenant que des coups Joueur. Le chemin  $s \cdot m$  est donc dans la stratégie  $\sigma$ .

$\sigma \supseteq (\sigma^\bullet)^\ddagger$ . Soit  $s : * \twoheadrightarrow y$  une partie de  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$ . Montrons que  $s$  est dans la stratégie  $\sigma$  par induction sur la longueur de  $s$ . Si  $s$  est la partie vide alors elle est dans la stratégie  $\sigma$ , qui est close par préfixe et non vide, car sinon  $\sigma^\bullet$  serait vide et  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$  aussi. Sinon, la partie  $s$  est de la forme

$$* \xrightarrow{t} x \xrightarrow{m} y$$

où  $t$  est une partie de  $(\sigma^\bullet)^\ddagger$  et il existe un chemin  $t' : y \twoheadrightarrow z$  ne contenant que des transitions Joueur, ayant pour but une position d'arrêt  $z \in \sigma^\bullet$ . La position  $z$

étant une position d'arrêt de la stratégie  $\sigma$ , il existe une partie  $u : * \longrightarrow z$  dans  $\sigma$ . On peut alors appliquer la Propriété 2.29 aux parties  $u$  et  $t$  et en déduire que la partie  $t \cdot (u/t) : * \longrightarrow z$  est dans la stratégie  $\sigma$ . Finalement, par application du Lemme 2.47 aux chemins homotopes  $u/t$  et  $m \cdot t'$ , on en déduit que le chemin  $m \cdot t'$  est dans la stratégie  $\sigma$ . Le chemin  $s \cdot m$  est donc aussi dans  $\sigma$ .  $\square$

Réciproquement, il est possible de donner une caractérisation directe des ensembles de positions qui sont les ensembles  $\sigma^\bullet$  de positions d'arrêt d'une stratégie ingénue et courtoise  $\sigma$  :

**Théorème 2.49.** *Étant donné un jeu  $A$ , un ensemble  $X$  de positions de  $A$  est de la forme  $X = \sigma^\bullet$ , où  $\sigma$  est une stratégie ingénue courtoise, si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes.*

1. *L'ensemble  $X$  est clos par intersection :*

$$\forall x, y \in X, \quad x \wedge y \in X$$

2. *L'ensemble  $X$  préserve la compatibilité : deux positions compatibles dans le jeu  $A$  sont aussi compatibles dans  $X$ .*
3. *Pour toute position  $x$  de  $X$  dominée par une position  $z$  de  $X$  distincte de  $x$ , il existe une transition Opposant  $m : x \longrightarrow x_1$  ainsi qu'une suite de transitions Joueur  $n_1, \dots, n_k$  formant un chemin*

$$x \xrightarrow{m} x_1 \xrightarrow{m_1} x_2 \cdots x_k \xrightarrow{m_k} y$$

*où la position  $y$  est dominée par la position  $z$ .*

4. *Pour toutes paire de positions  $x, y$  et  $y'$  de  $X$  telles qu'il existe deux chemins*

$$x \xrightarrow{m} x_1 \xrightarrow{m_1} x_2 \cdots x_k \xrightarrow{m_k} y \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{m'} x'_1 \xrightarrow{m'_1} x'_2 \cdots x'_k \xrightarrow{m'_k} y'$$

*où  $m$  et  $m'$  sont deux coups Opposant compatibles et les  $m_i$  et les  $m'_i$  sont des coups Joueur, les positions  $y$  et  $y'$  sont compatibles dans  $A$ .*

5. *Si l'ensemble  $X$  est non vide, il existe une position  $x \in X$  et un chemin  $s : * \longrightarrow x$  ne contenant que des coups Joueur.*

*Démonstration.* Soit  $\sigma : A$  une stratégie ingénue courtoise dont les positions d'arrêt sont les éléments de l'ensemble  $X = \sigma^\bullet$ . La stratégie  $\sigma$  étant courtoise, elle est positionnelle et le sous-graphe du jeu  $A$  qu'elle induit vérifie la Propriété du Cube. Par la Propriété 1.67, l'ensemble de ses position est donc clos par intersection et union bornée. Montrons que  $X$  satisfait les quatre axiomes de la propriété.

1. Soient  $y$  et  $z$  deux éléments de  $X$ . Supposons que la position  $x = y \wedge z$  ne soit pas dans l'ensemble  $X$  des positions d'arrêt de  $\sigma$ . Il existe donc une transition Joueur  $m : x \longrightarrow x'$  dans  $\sigma$ . La position  $x$  étant incluse dans les positions  $y$  et  $z$ , il existe deux chemins  $s : x \longrightarrow y$  et  $t : x \longrightarrow z$ . Par déterminisme de la stratégie  $\sigma$ , la transition  $m$  étant une transition Joueur, les résidus  $m/s$  et  $m/t$  existent et sont dans la stratégie  $\sigma$ . De plus, l'un de

ces deux résidus est une transition Joueur, car si les deux étaient réduits au chemin vide la position  $x'$  serait incluse dans  $y$  et dans  $z$  contredisant le fait que la position  $x$  est l'intersection de  $y$  et  $z$ . Nous aboutissons ainsi à une contradiction : les positions  $y$  et  $z$  étant des positions d'arrêt de la stratégie  $\sigma$ , il n'existe pas de transition Joueur dans la stratégie ayant pour source l'une de ces deux positions. La position  $x$  est donc une position d'arrêt de la stratégie et appartient à  $X$ .

2. Soient  $x$  et  $y$  deux positions de  $X$  qui sont compatibles. Il existe donc deux chemins  $s : * \rightarrow x$  et  $t : * \rightarrow y$  dans  $\sigma$ . La stratégie étant close par union de chemins compatibles, le chemin  $s \cdot (t/s) : * \rightarrow x \vee y$  montre que la position  $x \vee y$  est dans la stratégie  $\sigma$ . Enfin, par le Lemme 2.46, il existe une position d'arrêt  $z \in X$  au dessus de  $x \vee y$ .
3. Soient  $x$  et  $z$  deux positions de  $X$  telles que la position  $z$  soit au dessus de la position  $x$ . Ces positions étant dans  $X$ , il existe deux chemins  $s : * \rightarrow x$  et  $t : * \rightarrow z$  dans  $\sigma$ . La stratégie étant close par union de chemins compatibles, le chemin  $t/s : x \rightarrow z$  est dans la stratégie  $\sigma$ . La position  $x$  étant une position d'arrêt de la stratégie, la première transition  $m : x \rightarrow x'$  de ce chemin est Opposant et finalement le Lemme 2.46 nous permet de conclure.
4. La propriété découle du déterminisme de la stratégie  $\sigma$ .
5. Pour toute position  $y \in X$ , la position initiale  $*$  est dominée par la position  $y$  et le Lemme 2.46 permet de conclure.

Réciproquement, soit  $X$  un ensemble de positions vérifiant les conditions de l'énoncé. Montrons que  $\sigma = X^\ddagger$  est alors une stratégie telle que  $\sigma^\bullet = X$ .

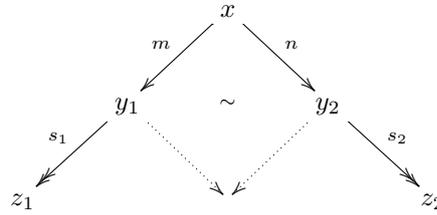
L'ensemble de chemins  $\sigma$  est positionnel et clos par préfixe par définition de  $X^\ddagger$ . On peut donc considérer des chemins  $s : x \rightarrow y$  de cet ensemble, dont la source n'est pas la position initiale. Remarquons notamment que si  $x$  est une position de  $X$  alors toute transition  $m : x \rightarrow y$ , ayant  $x$  pour source, est une transition Opposant. En effet, par définition de  $X^\ddagger$ , il existe une position  $z$  de  $X$  et un chemin  $m_1 \cdots m_k : y \rightarrow z$  ne contenant que des coups Joueurs. Par la troisième propriété, il existe de plus une position  $z'$  de  $X$  sous  $z$  et un chemin  $m'_1 \cdots m'_{k'} : x \rightarrow z'$  tel que  $m'_1$  soit un coup Opposant et les autres coups  $m'_i$  soient des coups Joueurs. La position  $z'$  étant sous  $z$ , les coups  $m'_i$  sont soit l'un des  $m_i$ , soit  $m$ . On en déduit que le coup Opposant  $m'_1$  est nécessairement le coup  $m$ . Réciproquement, si  $x$  est une position telle que toute transition  $m : x \rightarrow y$  ayant  $x$  pour source est un coup Opposant, on montre de même que  $x$  est nécessairement un élément de  $X$ . L'ensemble  $\sigma^\bullet$  des positions d'arrêt de la stratégie  $\sigma$  est donc l'ensemble  $X$ .

Il nous reste à vérifier que  $\sigma$  vérifie les propriétés requises pour être une stratégie courtoise.

- Positionnalité. Nous avons déjà montré que la stratégie  $\sigma$  est positionnelle.
- Atteignabilité. Montrons que toute position  $x$  de  $X^\ddagger$  est atteignable à partir de la position initiale  $*$  du jeu. Par la cinquième propriété que  $X$  vérifie par hypothèse, il existe une position  $y$  de  $X$  pour laquelle, il existe un chemin  $s : * \rightarrow y$  ne contenant que des coups Joueur. Par définition

de  $X^{\downarrow}$ , il est simple de vérifier que le chemin  $s$  est dans  $X^{\downarrow}$ . L'ensemble  $X$  des positions étant supposé clos par intersection, la position  $x \wedge y$  existe et est dans l'ensemble  $X$ . Les positions de  $X$  étant des positions d'arrêt de la stratégie et le chemin  $s$  ne contenant que des coups Joueur, la position  $x \wedge y$  est au dessus de la position  $y$  et les positions  $x$  et  $y$  sont compatibles. Par utilisation répétée de la troisième propriété, on peut donc construire un chemin  $t : y \twoheadrightarrow x$  dans  $X^{\downarrow}$ . Ainsi, la position  $x$  est atteignable par le chemin  $s \cdot t : * \twoheadrightarrow x$ .

- Préservation de la compatibilité en avant. Supposons que  $m : x \rightarrow y_1$  et  $n : x \rightarrow y_2$  soient deux transitions cointiales compatibles de  $\sigma$  et notons  $y$  la position  $y_1 \vee y_2$ . Par définition de  $X^{\downarrow}$ , il existe deux positions  $z_1$  et  $z_2$  de  $X$  et deux chemins  $s_1 : y_1 \twoheadrightarrow z_1$  et  $s_2 : y_2 \twoheadrightarrow z_2$  de  $X$  ne contenant que des coups Joueur.



Supposons que l'un des deux coups  $m$  ou  $n$  soit un coup Joueur,  $m$  par exemple. L'ensemble  $X$  est supposé clos par intersection, la position  $z_1 \wedge z_2$  est donc dans l'ensemble  $X$ . Le chemin  $m \cdot s_1$  ne contenant que des coups Joueur et les éléments de  $X$  étant des positions d'arrêt de  $\sigma$ , la position  $z_1 \wedge z_2$  est nécessairement au dessus de  $z_1$ , et on en déduit que la position  $z_1$  est au dessous de  $z_2$ . La position  $y$  est donc aussi sous la position  $z_2$ . Par le Lemme 2.46, il existe une position  $z'$  de  $X$  ainsi qu'un chemin  $s : y \twoheadrightarrow z'$  ne contenant que des coups Joueur. On en déduit alors par définition de  $X^{\downarrow}$  que les chemins  $m \cdot n : x \twoheadrightarrow y$  et  $n \cdot m : x \twoheadrightarrow y$  sont dans  $\sigma$ . Si les deux coups  $m$  et  $n$  sont des coups Opposant alors par la quatrième propriété de  $X$  les positions  $y_1$  et  $y_2$  de  $X$  sont compatibles. Par la deuxième propriété de  $X$  leur union est dominée par une position  $z$  de  $X$  et on peut conclure de façon similaire au cas précédent.

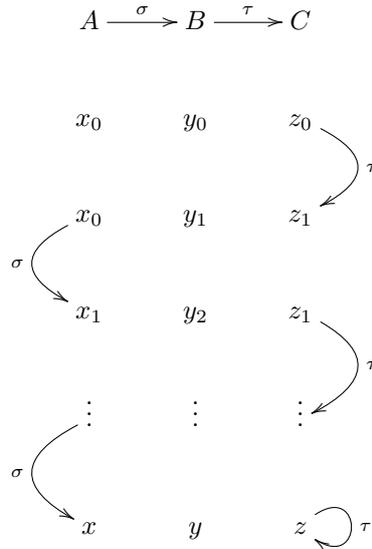
- Compatibilité en arrière. La compatibilité en arrière se déduit facilement de l'hypothèse de clôture par intersection de  $X$ .
- Déterminisme. La preuve du déterminisme de  $\sigma$  est similaire à celle de la préservation de la compatibilité en avant.
- Courtoisie. Soient  $m : x \rightarrow y_1$  et  $n : y_1 \rightarrow z$  deux transitions consécutives de  $\sigma$  telles que  $m$  soit un coup Joueur. Supposons de plus qu'il existe deux transitions consécutives  $n : x \rightarrow y_2$  et  $m : y_2 \rightarrow z$  dans le jeu, induisant une tuile  $m \cdot n \diamond n \cdot m$ . Par définition de  $X^{\downarrow}$ , il existe une position  $z'$  de  $X$  et un chemin  $s : z \twoheadrightarrow z'$  ne contenant que des coups Joueur. Le chemin  $m \cdot s : y_2 \twoheadrightarrow z'$  ne contenant que des coups Joueur, la transition  $n : x \rightarrow y_2$  est dans  $\sigma$  et de même, la transition  $m : y_2 \rightarrow z$  est dans  $\sigma$ , car la position  $z$  est dans  $\sigma$ .

Nous avons ainsi montré que  $X^{\ddagger}$  est une stratégie courtoise dont les positions d'arrêt sont précisément les éléments de  $X$ .  $\square$

Cette propriété étend au cadre non-alterné la caractérisation des stratégies innocentes par leurs positions d'arrêt donnée par Melliès dans [Mel04] où les stratégies  $\sigma$  qui vérifient l'égalité (2.12) sont qualifiées de *relationnelles*.

### 2.3.2 Stratégies concurrentes

Si une stratégie courtoise joue deux coups Joueur consécutifs  $m$  et  $n$  indépendants alors elle doit pouvoir les jouer en parallèle. On peut donc envisager entre deux telles stratégies  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  une façon d'interagir plus grossière, dans laquelle les deux stratégies jouent alternativement par « blocs » de coups, qui peut être informellement décrite de la façon suivante. Partant d'une position initiale  $x_0 \multimap y_0$  pour  $\sigma$  et  $y_0 \multimap z_0$  pour  $\tau$ , la stratégie  $\tau$  joue simultanément tous les coups Joueur qu'elle peut jouer à la position  $y_0 \multimap z_0$ , atteignant ainsi une position  $y_1 \multimap z_1$ , puis la stratégie  $\sigma$  joue tous les coups Joueur qu'elle peut jouer, atteignant ainsi une position  $x_1 \multimap y_2$ , puis la stratégie  $\tau$  joue simultanément tous les coups Joueur qu'elle peut jouer à la position  $y_2 \multimap z_1$ , atteignant ainsi une position  $y_3 \multimap z_2$ , etc. L'interaction s'arrête lorsque l'une des stratégies n'a plus de coups à jouer lorsque c'est à son tour de jouer.



Il est alors naturel de modéliser une stratégie  $\sigma$  comme une fonction sur les positions du jeu, qui à chaque position  $x$  associe la plus grande position qu'elle peut atteindre en ne jouant que des coups Joueur (i.e. la position qu'elle atteint en jouant tous ses coups Joueur en parallèle dans la description ci-dessus). De plus, cette fonction doit être un opérateur de clôture :

- elle est extensive, car elle ajoute des coups Joueur à la position courante,
- elle est croissante, car plus elle a d'information donnée par l'Opposant, plus elle a de coups à jouer,

- elle est idempotente, car une fois qu'elle a joué tous les coups Joueur qu'elle pouvait jouer elle n'a plus de coup à jouer.

En particulier, les points fixes de cet opérateur de clôture seront les positions d'arrêt de la stratégie. Ce modèle est précisément le modèle des *stratégies concurrentes* introduit par Abramsky et Melliès [AM99]. Dans cette section, nous établissons le lien entre les jeux asynchrones et les jeux concurrents.

**Définition 2.50** (Opérateur de clôture). Un *opérateur de clôture*  $\rho$  sur un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$  est une fonction  $\rho : E \rightarrow E$  qui est

1. *extensive* :

$$\forall x \in E, \quad x \leq \rho(x)$$

2. *croissante* :

$$\forall x, y \in E, \quad x \leq y \quad \text{implique} \quad \rho(x) \leq \rho(y)$$

3. *idempotente* :

$$\forall x \in E, \quad \rho(\rho(x)) = \rho(x)$$

Un *point fixe* d'un opérateur de clôture  $\rho$  est un élément  $x \in E$  tel que  $\rho(x) = x$ . En particulier, par idempotence de  $\rho$ , l'image  $\rho(x)$  de tout élément  $x \in E$  est un point fixe de  $\rho$ . Nous notons  $\text{fix}(\rho)$  l'ensemble des points fixes d'une fonction  $\rho$ .

On rappelle qu'un sup-semitreillis (resp. un inf-semitreillis)  $(E, \leq)$  est dit *complet* lorsque tout sous-ensemble  $A$  de  $E$  admet une borne supérieure  $\bigvee A$  (resp. une borne inférieure  $\bigwedge A$ ). Un treillis est dit complet lorsque c'est à la fois un sup-semitreillis complet et un inf-semitreillis complet. En particulier, un treillis complet admet nécessairement un élément minimal  $\perp = \bigvee \emptyset = \bigwedge E$  et un élément maximal  $\top = \bigwedge \emptyset = \bigvee E$ .

**Définition 2.51** (Famille de Moore). Un ensemble  $X$  d'éléments d'un treillis complet  $(E, \leq)$  est une *famille de Moore* lorsque  $X$  est clos par intersections quelconques :

$$\forall Y \subseteq X, \quad \bigwedge Y \in X.$$

En particulier, l'élément maximal  $\bigwedge \emptyset$  de  $E$  est dans  $X$ .

**Lemme 2.52.** *L'ensemble des points fixes d'un opérateur de clôture  $\rho$  sur un treillis complet  $(E, \leq)$  est une famille de Moore.*

*Démonstration.* Notons  $X$  l'ensemble des points fixes de  $\rho$ . Soit  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . Par extensivité de  $\rho$ , on a  $\bigwedge Y \leq \rho(\bigwedge Y)$ . Réciproquement, pour tout élément  $y \in Y$ , on a  $\bigwedge Y \leq y$  et donc  $\rho(\bigwedge Y) \leq \rho(y) = y$  par croissance de  $\rho$  et car  $y$  est un point fixe de  $\rho$ . On a donc  $\rho(\bigwedge Y) \leq \bigwedge Y$  et finalement  $\bigwedge Y$  est un point fixe de  $\rho$ , donc  $X$  est clos par intersections quelconques.  $\square$

**Lemme 2.53.** *Si  $X$  est une famille de Moore d'un treillis complet  $(E, \leq)$  alors la fonction définie pour tout élément  $x \in E$  par*

$$\rho(x) = \bigwedge \{ y \in X \mid x \leq y \}$$

*est un opérateur de clôture.*

*Démonstration.* Pour tout élément  $x$  de  $E$ , nous notons  $R(x)$  l'ensemble défini par  $R(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$ . Pour tout élément  $x$  de  $E$  et pour tout élément  $y \in R(x)$ , on a  $x \leq y$  donc  $x \leq \rho(x)$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $E$  tels que  $x \leq y$  alors pour tout  $z \in X$ ,  $y \leq z$  implique  $x \leq z$ , soit encore  $R(y) \subseteq R(x)$  et donc  $\rho(x) \leq \rho(y)$ . Enfin, pour tout  $x \in E$ , on a  $x \leq \rho(x)$  par extensivité de  $\rho$  et  $\rho(x) \leq \rho(\rho(x))$  par croissance de  $\rho$ . Réciproquement, par définition de  $\rho$ ,  $\rho(x)$  est un élément de  $X$ , car  $X$  est une famille de Moore. Donc  $\rho(x) \in R(\rho(x))$  et on en déduit que  $\rho(\rho(x)) \leq \rho(x)$ . La fonction  $\rho$  est donc idempotente et  $\rho$  est un opérateur de clôture.  $\square$

**Propriété 2.54.** Soit  $(E, \leq)$  un treillis complet. Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  suivantes définissent une bijection entre les opérateurs de clôtures de  $(E, \leq)$  et ses familles de Moore :

$$\begin{array}{ccc} \text{opérateurs de clôture} & & \text{familles de Moore} \\ \phi = \begin{array}{c} \rho \\ (x \mapsto \bigwedge \{y \in X \mid x \leq y\}) \end{array} & \begin{array}{c} \mapsto \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \{x \in E \mid \rho(x) = x\} \\ X \end{array} = \psi \end{array}$$

*Démonstration.* Nous avons vu aux Lemmes 2.52 et 2.53 que les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont bien définies dans le sens où l'image par  $\phi$  d'un opérateur de clôture est une famille de Moore et l'image par  $\psi$  d'une famille de Moore est un opérateur de clôture.

Montrons que pour toute famille de Moore  $X$ , on a  $\phi \circ \psi(X) = X$ . Notons  $\rho = \psi(X)$  et  $Y = \phi(\rho)$ . Par définition de  $\rho$ , pour tout élément  $x \in X$  on a  $\rho(x) = x$  et donc  $X \subseteq Y$ . Réciproquement, tout élément  $x \in Y$  est la borne inférieure d'un ensemble d'éléments de  $X$  et est donc dans  $X$ , car  $X$  est clos par intersections quelconques.

Réciproquement, montrons que pour tout opérateur de clôture  $\rho$ , on a l'égalité  $\psi \circ \phi(\rho) = \rho$ . Notons  $X = \phi(\rho)$  et  $\sigma = \psi(X)$ . Soit  $x$  un élément de  $E$ . L'image de  $x$  par  $\rho$  est un point fixe  $\rho(x) \in X$  de  $\rho$  qui est supérieur à  $x$  par idempotence et extensivité de  $\rho$ . Par définition de  $\sigma$ , on a donc  $\sigma(x) \leq \rho(x)$ . Réciproquement, pour tout élément  $y \in X$  tel que  $x \leq y$ , on a  $\rho(x) \leq \rho(y) = y$  par croissance de  $\rho$ . On en déduit que  $\rho(x) \leq \sigma(x)$  et finalement  $\rho(x) = \sigma(x)$ .  $\square$

La Propriété 2.54 établit une bijection entre les opérateurs de clôture définis sur un treillis complet et les familles de Moore. Le graphe asynchrone sous-jacent à tout jeu  $A$  est supposé vérifier la Propriété du Cube. Nous avons vu au à la Section 1.4.5 que ses positions formaient presque un treillis : cet ensemble est clos par intersection, et union de positions compatibles. On peut le transformer librement en un treillis complet par la construction suivante.

**Définition 2.55** (Complétion par élément maximal). La *complétion par élément maximal* d'un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$  est l'ordre partiel  $(E^\top, \leq^\top)$  défini par

- $P^\top = P \uplus \{\top\}$  où  $\top$  est un élément qui n'appartient pas à  $E$ ,
- pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $E$ ,  $x \leq^\top y$  si et seulement si
  - soit  $x \in E$ ,  $y \in E$  et  $x \leq y$ ,
  - soit  $y = \top$ .

Les propriétés suivantes permettent de montrer que la complétion par élément maximal de l'ensemble des positions d'un jeu est un treillis complet.

**Propriété 2.56.** *Si  $(E, \leq)$  est un treillis qui est un sup-semitreillis complet alors c'est un treillis complet.*

*Démonstration.* Montrons que le treillis  $(E, \leq)$  est un inf-semitreillis complet. Soit  $X$  un sous-ensemble de  $E$ . Notons  $Y$  l'ensemble des minorants de  $X$  ainsi que  $z = \bigvee Y$ . Pour tout élément  $x$  de  $X$  et tout élément  $y$  de  $Y$ , on a  $x \geq y$  donc  $x \geq \bigvee Y$  et  $\bigvee Y$  est un minorant de  $X$ . Réciproquement, pour tout minorant  $y \in Y$  de  $X$ , on a  $y \leq \bigvee Y$ . On en déduit que  $y$  est la borne inférieure de  $X$ , le treillis  $E$  est donc un inf-semitreillis complet.  $\square$

**Propriété 2.57.** *La complétion par élément maximal d'un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$ , dans lequel tout sous-ensemble borné admet une borne supérieure, est un sup-semitreillis complet.*

*Démonstration.* Soit  $X$  un sous-ensemble de  $E^\top$ . Si l'élément maximal  $\top$  de  $E^\top$  appartient à  $X$  alors  $\top$  est la borne supérieure de  $E$ . Supposons que  $\top$  n'appartienne pas à  $X$ . Si  $X$  est borné alors il admet une borne supérieure par hypothèse. Sinon, aucun élément  $x$  de  $E$  n'est un majorant de  $X$  et donc  $\top$  est la borne supérieure de  $X$ .  $\square$

**Corollaire 2.58.** *Pour tout jeu  $A$ , la complétion par élément maximal de l'ensemble des positions de  $A$  est un treillis complet.*

*Démonstration.* Nous avons vu à la Section 1.4.5 que l'ensemble  $(E, \leq)$  des positions de  $A$ , muni de l'ordre  $\leq$  défini sur toute paire  $x$  et  $y$  de positions par  $x \leq y$  si et seulement si il existe un chemin  $s : x \twoheadrightarrow y$ , est clos par intersection et union bornée. Montrons qu'il est clos par union bornée quelconque. Par la Propriété 2.57, nous en déduisons que  $(E, \leq)$  est un sup-semitreillis complet et donc un treillis complet par la Propriété 2.56.

Soit  $X$  un ensemble de positions de  $A$  borné par une position  $z$ . Si  $(X_i)$  est une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de  $X$  alors nécessairement la suite de positions  $(\bigvee X_i)$  qu'elle induit est stationnaire à partir d'un certain rang, car ces positions sont toutes bornées par  $z$ . En effet, lorsque  $\bigvee X_i < \bigvee X_j$ , il existe deux chemins  $s_i : \bigvee X_i \twoheadrightarrow y$  et  $s_j : \bigvee X_j \twoheadrightarrow y$  tels que le chemin  $s_j$  est de longueur strictement inférieure à celle du chemin  $s_i$ . On en déduit que pour toute suite  $(X_i)$  convergeant vers  $X$ , la suite  $(\bigvee X_i)$  converge vers une position  $y$ . Par construction, cette position  $y$  est supérieure à toute position  $x \in X$  et réciproquement si  $y'$  est un majorant de tous les éléments  $x \in X$  alors pour tout  $i$  on a  $y' \geq \bigvee X_i$ , soit encore  $y' \geq y$ . La position  $y$  est donc la borne supérieure de l'ensemble borné  $X$ .  $\square$

Si  $\sigma : A$  est une stratégie ingénue et courtoise, par le Théorème 2.49 l'ensemble de ses position d'arrêt  $\sigma^\bullet$  est clos par intersections. Comme toute suite strictement décroissante de positions de  $A$  est finie, cet ensemble est de plus clos par intersections non vides quelconques. L'ensemble  $\sigma^\bullet \uplus \{\top\}$  est donc une famille de Moore sur la complétion par élément maximal des positions de  $A$ . Par la Propriété 2.54, il existe donc un unique opérateur de clôture  $\rho_\sigma$  sur cet ensemble dont les points fixes sont exactement les éléments de  $\sigma^\bullet \uplus \{\top\}$  : la fonction qui à toute position  $x$  associe la plus petite position d'arrêt de  $\sigma$  au

dessus de  $x$ , ou  $\top$  s'il n'existe pas de telle position d'arrêt. De plus, le Théorème 2.49 donne une caractérisation des opérateurs de clôture ainsi générés, par leur ensemble de points fixes.

**Théorème 2.59.** *Si  $\sigma : A$  est une stratégie ingénue et courtoise, la fonction  $\rho_\sigma$  définie sur la complétion par élément maximal de l'ensemble des positions de  $A$  par*

$$\rho_\sigma = x \mapsto \bigwedge \{ y \in \sigma^\bullet \mid x \leq y \} \quad (2.13)$$

*est un opérateur de clôture vérifiant les conditions de la Propriété 2.49. Réciproquement, tout opérateur de clôture sur la complétion par élément maximal des positions de  $A$ , dont l'ensemble des points fixes vérifie les conditions de la Propriété 2.49, est l'image d'une stratégie ingénue et courtoise  $\sigma$  par la transformation (2.13). La correspondance ainsi établie est bijective.*

**Stratégies focalisantes.** Nous avons ainsi montré qu'une stratégie ingénue et courtoise peut toujours être réorganisée de sorte à jouer en une position donnée tous les coups qu'elle peut jouer, en un bloc. Cette propriété est similaire à la propriété de *focalisation* en logique linéaire découverte par Andreoli [And92] : considérée dans le sens de la recherche de preuve (du bas vers le haut en calcul des séquents), une preuve de logique linéaire peut être réorganisée en une preuve qui commence par décomposer tous les connecteurs négatifs du séquent, choisit une formule (positive) et en décompose tous les connecteurs, puis décompose tous les connecteurs négatifs des séquents à prouver, puis pour chacun des séquents produit choisit une formule (positive) et en décompose tous les connecteurs positifs, etc. La polarité des connecteurs en logique linéaire est rappelée à l'Annexe A. Cette propriété est fondamentalement liée au fait que les connecteurs négatifs sont *asynchrones* : les règles d'introduction des connecteurs négatifs peuvent toujours être « tirées vers le bas » dans les preuves en calcul des séquents, de façon similaire à la condition imposée par la courtoisie. En ce sens, les stratégies ingénues courtoises peuvent être considérées comme des stratégies *focalisantes*. Nous revenons plus en détails sur cette propriété de focalisation à la Section 2.5.8.

**Composition des stratégies concurrentes.** La composition de deux opérateurs de clôture peut être définie de la façon suivante. Étant données deux stratégies ingénues et courtoises  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$ , et une position  $x \multimap z$  de  $A \multimap C$ , on peut définir par induction trois suites  $(x_i)$ ,  $(y_i)$  et  $(z_i)$  d'éléments des complétions par élément maximal des jeux respectifs  $A$ ,  $B$  et  $C$ , par  $x_0 = x$ ,  $y_0 = *B$ ,  $z_0 = z$  et

$$x_{i+1} \multimap y_{2i+2} = \rho_\sigma(x_i \multimap y_{2i+1}) \quad \text{et} \quad y_{2i+1} \multimap z_{i+1} = \rho_\tau(y_{2i} \multimap z_i)$$

L'image  $(\rho_\tau \circ \rho_\sigma)(x \multimap z)$  de composée des opérateurs de clôture sur la position  $x \multimap z$  est alors définie par

$$(\rho_\tau \circ \rho_\sigma)(x \multimap z) = \begin{cases} \top \multimap \top & \text{si } \bigvee_i y_i = \top, \\ (\bigvee_i x_i) \multimap (\bigvee_i z_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

formalisant ainsi la composition décrite dans l'introduction de cette section. Le choix du premier opérateur de clôture à interagir importe peu. On montre en

effet aisément, en utilisant l'extensivité et de la croissance des fonctions  $\pi$  et  $\rho$ , que l'on aurait obtenu la même composée en définissant les suites de positions par

$$x_{i+1} \multimap y_{2i+1} = \rho_\sigma(x_i \multimap y_{2i}) \quad \text{et} \quad y_{2i+2} \multimap z_{i+1} = \rho_\tau(y_{2i+1} \multimap z_i).$$

La composition de deux opérateurs de clôture peut aussi être définie de la façon suivante, techniquement plus simple mais moins intuitive [AM99]. Si  $\pi$  et  $\rho$  sont deux opérateurs de clôture sur un même treillis complet  $X$ , commençons par définir leur *position d'interaction*  $\langle \pi | \rho \rangle$  par

$$\langle \pi | \rho \rangle = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (\rho \circ \pi)^k(\perp) = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (\pi \circ \rho)^k(\perp)$$

La composée des opérateurs de clôture correspondant à deux telles stratégies  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  est alors définie par

$$(\rho_\tau \circ \rho_\sigma)(x \multimap z) = (\pi_1 \circ \sigma(x \multimap y)) \multimap (\pi_2 \circ \sigma(y \multimap z))$$

où  $\pi_1$  et  $\pi_2$  désignent les deux projections et  $y$  est la position d'interaction à partir de la position  $x \multimap z$  définie par

$$y = \langle \pi_2 \circ \sigma(x \multimap -) | \pi_1 \circ \sigma(- \multimap z) \rangle$$

Cette composition est équivalente à celle que nous avons précédemment décrite.

Il est aisé de montrer que la composition de deux opérateurs de clôture  $\pi : A \multimap B$  et  $\rho : B \multimap C$  correspond à la composition relationnelle des ensembles de points fixes correspondant :

$$\text{fix}(\rho \circ \pi) = \text{fix}(\rho) \circ \text{fix}(\pi)$$

Une position de  $\pi$  étant une paire  $x \multimap y$  constituée d'une position  $x$  de  $A$  et d'une position  $y$  de  $B$ , l'ensemble  $\text{fix}(\pi)$  peut être considéré comme une relation des positions de  $A$  dans les positions de  $B$ . De même, l'ensemble  $\text{fix}(\rho)$  peut être considéré comme une relation des positions de  $B$  dans les positions de  $C$  et le membre droit de l'égalité ci-dessus désigne la composée relationnelle des deux ensembles de positions.

On pourrait s'attendre à ce que pour toute paire  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  de stratégies ingénues courtoises, la composition en tant que stratégies asynchrones corresponde elle aussi à la composition en tant que stratégies concurrentes, c'est-à-dire que l'on ait

$$\rho_\tau \circ \rho_\sigma = \rho_{\tau \circ \sigma}.$$

Nous expliquons à la Section 2.5 pourquoi cette égalité n'est pas toujours vérifiée et introduisons la notion de stratégie ordonnançable pour remédier à cette disparité.

## 2.4 Stratégies séquentiellement innocentes

Les stratégies ingénues et courtoises sont une extension non alternée des stratégies innocentes, telles que définies par Hyland et Ong [HO00] pour caractériser

les stratégies définissables dans leur modèle de jeux du langage PCF. Nous montrons en effet que les stratégies innocentes sont en bijection avec les stratégies ingénues et courtoises qui vérifient certaines conditions additionnelles, la principale étant une condition de séquentialité qui empêche une stratégie de lancer deux calculs en parallèle ou de se synchroniser sur deux résultats.

### 2.4.1 Stratégies alternées innocentes

Commençons par rappeler les définitions habituelles de sémantique des jeux asynchrones alternés en les adaptant à notre cadre. Une présentation plus détaillée des définitions introduites dans cette section ainsi que les preuves des propriétés énoncées peuvent être trouvées dans l'article de Mellès sur les jeux asynchrones alternés [Mel04].

**Définition 2.60** (Jeu alterné). Un jeu  $A$  est *alterné* lorsque pour toute paire de transitions consécutives  $m : x \longrightarrow y_1$  et  $p : y_1 \longrightarrow z$  de même polarité, il existe une paire de transitions  $n : x \longrightarrow y_2$  et  $q : y_2 \longrightarrow z$  dans  $A$  formant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$ .

**Définition 2.61** (Stratégie alternée). Une partie *alternée* est une partie de longueur paire  $m_1 \cdot m_2 \cdots m_{2k}$  telle que les coups  $m_{2i+1}$  sont Opposant et les coups  $m_{2i}$  sont Joueur (en particulier, notre définition implique que toute partie alternée commence par un coup Opposant). Une stratégie *alternée*  $\sigma$  sur un jeu alterné  $A$  est un ensemble non vide de parties alternées, clos par préfixe de longueur paire.

Une stratégie alternée  $\sigma$  est *déterministe* lorsque pour toute parties  $s \cdot m \cdot n_1$  et  $s \cdot m \cdot n_2$  on a  $n_1 = n_2$ .

La notion d'homotopie peut être adaptée au cadre alterné par la définition suivante de OP-homotopie, plus grossière que la notion d'homotopie : deux chemins sont OP-homotopes si l'on peut passer de l'un à l'autre en permutant non pas des transitions consécutives mais des paires de transitions consécutives formées d'un coup Opposant suivi d'un coup Joueur.

**Définition 2.62** (OP-homotopie). On définit la relation  $\overset{1}{\sim}_{\text{OP}}$  sur les chemins d'un jeu  $A$  comme la plus petite relation reliant deux chemins parallèles

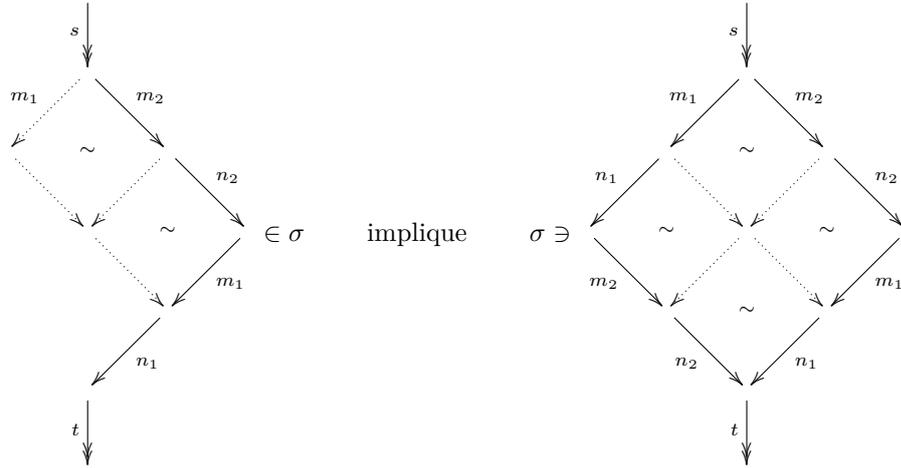
$$s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot t : x \longrightarrow y \quad \text{et} \quad s \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot t : x \longrightarrow y$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont des coups Opposant et  $n_1$  et  $n_2$  sont des coups Joueur, tels que les chemins  $m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2$  et  $m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1$  sont homotopes. La clôture réflexive et transitive de la relation  $\overset{1}{\sim}_{\text{OP}}$  est notée  $\sim_{\text{OP}}$  et appelée *OP-homotopie*.

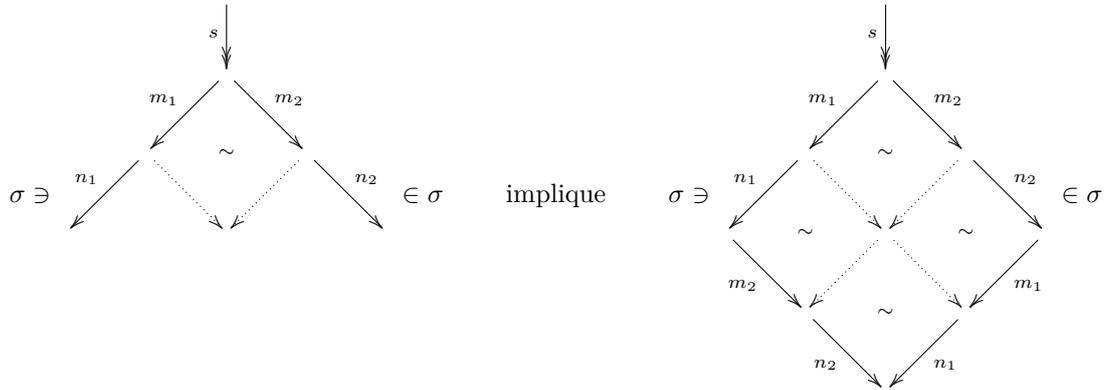
Les stratégies alternées innocentes au sens de Hyland et Ong, dont la définition est rappelée à l'Annexe B, sont précisément les stratégies alternées déterministes satisfaisant les deux conditions suivantes, qui peuvent être considérées comme une reformulation purement diagrammatique de la notion d'innocence. Ces conditions imposent aux stratégies dans un cadre asynchrone d'être *sans mémoire*, au sens de Abramsky et Jagadeesan [AJ94].

**Définition 2.63** (Stratégie cohérente). Une stratégie alternée  $\sigma : A$  est *cohérente* lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes.

- *Cohérence en arrière.* Pour toute partie  $s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot t$  de  $\sigma$ , où  $m_1$  et  $m_2$  sont des coups Opposant et  $n_1$  et  $n_2$  sont des coups Joueur, telle que le coup  $m_2$  est indépendant du chemin  $m_1 \cdot n_1$ , le coup  $n_2$  est aussi indépendant du chemin  $m_1 \cdot n_1$  et la partie  $s \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot t$  est dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



- *Cohérence en avant.* Si  $s \cdot m_1 \cdot n_1$  et  $t \cdot m_2 \cdot n_2$  sont des parties de  $\sigma$ , telles que le coup  $m_1$  est indépendant du coup  $m_2$  (en particulier les coups  $m_1$  et  $m_2$  sont distincts) alors le coup  $m_2$  est aussi indépendant du coup  $n_2$ , le coup  $n_1$  est indépendant du chemin  $m_2 \cdot n_2$  (en particulier les coups  $n_1$  et  $n_2$  sont distincts) et les parties  $s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2$  et  $s \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1$  sont dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



**Théorème 2.64** (Innocence asynchrone alternée). *Une stratégie alternée déterministe est innocente si et seulement si elle est cohérente.*

Les propriétés de cohérence permettent de montrer que les stratégies innocentes sont très régulières.

**Propriété 2.65.** *Une stratégie alternée cohérente est nécessairement positionnelle et close par intersection modulo OP-homotopie de deux parties et par union modulo OP-homotopie de deux parties compatibles.*

En particulier, la propriété de clôture par intersection découle de la propriété de cohérence en arrière et celle de clôture par unions compatibles découle de la propriété de cohérence en avant.

### 2.4.2 Stratégies séquentiellement innocentes

Dans la suite de cette section, nous supposons que les jeux que nous mentionnerons sont alternés. Nous allons considérer des stratégies qui satisfont les conditions suivantes.

**Définition 2.66** (Stratégie négative). Une stratégie  $\sigma$  sur un jeu  $A$  est *négative* lorsque toute partie non vide de  $\sigma$  commence par un coup Opposant (i.e. la position initiale  $*$  est une position d'arrêt lorsqu'elle appartient à la stratégie).

Ainsi, une stratégie est négative lorsqu'elle attend nécessairement une action de l'Opposant avant de pouvoir jouer.

**Définition 2.67** (Stratégie réceptive). Une stratégie positionnelle  $\sigma : A$  est *réceptive* lorsque pour toute position  $x$  atteignable par la stratégie, si il existe une transition Opposant  $m : x \rightarrow y$  dans  $A$  alors cette transition est dans  $\sigma$ .

Cette condition de réceptivité est aussi appelée *complétude par contingence* dans [HO00]. Elle implique en particulier la variante suivante de la propriété de courtoisie :

**Lemme 2.68.** Soit  $\sigma : A$  une stratégie positionnelle et réceptive. Pour toute paire de transitions Opposant  $m : x \rightarrow y_1$  et  $p : y_1 \rightarrow z$  de  $\sigma$  telles qu'il existe une paire de transitions  $n : x \rightarrow y_2$  et  $q : y_2 \rightarrow z$  dans  $A$  formant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$  dans  $A$ , les transitions  $n$  et  $q$  sont dans  $\sigma$ . Diagrammatiquement,

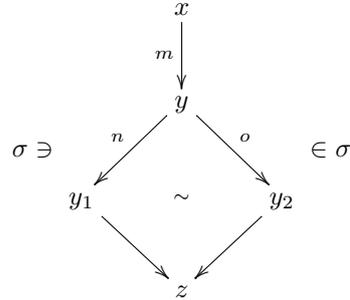


En particulier, une stratégie positionnelle, courtoise et réceptive est fortement courtoise.

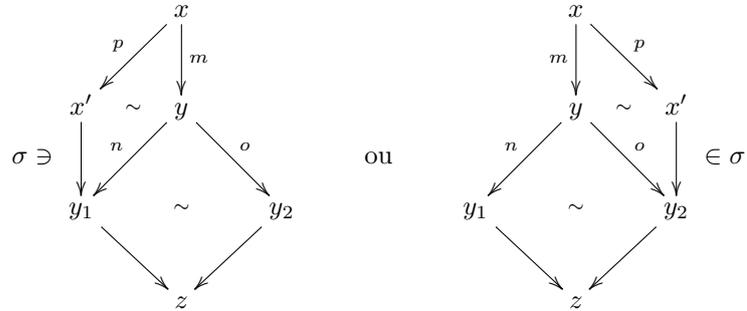
**Définition 2.69** (Stratégie séquentielle). Une stratégie positionnelle  $\sigma$  sur un jeu  $A$  est *séquentielle* lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes.

- *Séquentialité en arrière.* Pour toute transition Opposant  $m : x \rightarrow y$  et toute paire de transitions Joueur compatibles  $n : y \rightarrow y_1$  et  $o : y \rightarrow y_2$  de  $\sigma$ , l'une des transitions  $n$  ou  $o$  est le résidu d'une transition  $p : x \rightarrow x'$

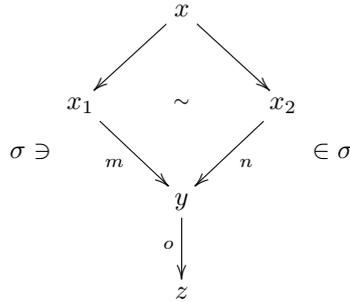
de  $\sigma$  après la transition  $m$ . Diagrammatiquement,



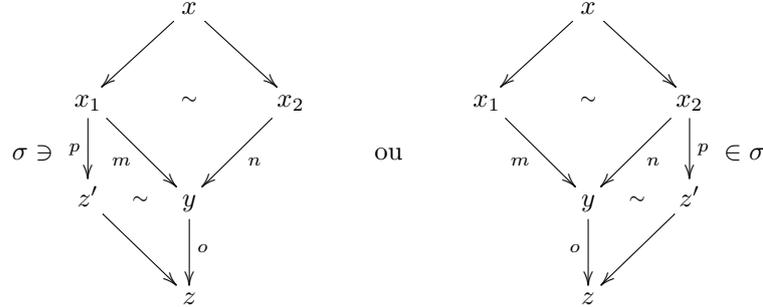
implique



- *Séquentialité en avant.* Dualement, pour toute paire de transitions Opposant compatibles en arrière  $m : x_1 \rightarrow y$  et  $n : x_2 \rightarrow y$ , et toute transition Joueur  $o : y \rightarrow z$  de  $\sigma$ , il existe une transition  $p : x_1 \rightarrow z'$  ou une transition  $p : x_2 \rightarrow z'$  de  $\sigma$  telle que  $o$  est le résidu de  $p$  après  $m$  (resp. après  $n$ ). Diagrammatiquement,



implique



Dans une stratégie séquentielle, deux coups Joueur ne peuvent pas dépendre d'un même coup Opposant et aucun coup Joueur ne dépend de deux coups Opposant.

**Définition 2.70** (Stratégie séquentiellement innocente). Une stratégie est *séquentiellement innocente* lorsqu'elle est

- non vide,
- close par préfixe,
- négative,
- ingénue,
- courtoise,
- réceptive,
- et séquentielle.

Nous commençons par établir quelques propriétés des stratégies séquentiellement innocentes.

**Lemme 2.71.** *Dans toute stratégie séquentiellement innocente  $\sigma$  sur un jeu  $A$ , pour toute partie alternée  $s : x \longrightarrow y$  de  $\sigma$ , si  $x$  est une position d'arrêt alors  $y$  est une position d'arrêt.*

*Démonstration.* Par induction sur la longueur de la partie alternée  $s$ . Si  $s$  est la partie vide  $\varepsilon$  alors il n'existe pas de transition Joueur  $m : x \longrightarrow z$  dans  $\sigma$ , car la position  $x$  est une position d'arrêt par hypothèse (la stratégie  $\sigma$  est négative). Sinon, le chemin  $s$  peut se décomposer en  $s = s' \cdot m \cdot n$ , où  $m$  est un coup Opposant et  $n$  est un coup Joueur. Supposons que la position  $y$  ne soit pas une position d'arrêt pour  $\sigma$ . Il existe alors un coup Joueur  $o$  tel que la partie  $s' \cdot m \cdot n \cdot o$  soit dans  $\sigma$ . Le jeu  $A$  étant alterné, la partie  $s' \cdot m \cdot o \cdot n$  existe dans le jeu et est aussi dans  $\sigma$  par courtoisie de  $\sigma$ . Par séquentialité en arrière de la stratégie  $\sigma$ , on en déduit que l'une des parties  $s' \cdot n \cdot m \cdot o$  ou  $s' \cdot o \cdot m \cdot n$  existe et est dans  $\sigma$ . Supposons que l'on soit dans le premier cas (l'autre cas est similaire). Par hypothèse d'induction, la position d'arrivée du chemin  $s'$  est une position d'arrêt et  $n$  est un coup Joueur. On a donc abouti à une contradiction et la position  $y$  est une position d'arrêt.  $\square$

*Remarque 2.72.* La position initiale d'une stratégie séquentiellement innocente  $\sigma : A$  étant une position d'arrêt de cette stratégie, ce lemme implique immédiatement qu'il n'existe pas de partie de la forme  $s \cdot m$  dans  $\sigma$ , où  $s$  est une partie alternée et  $m$  est un coup Joueur.

De façon similaire, on a aussi :

**Lemme 2.73.** *Dans une stratégie positionnelle, courtoise et séquentielle en avant  $\sigma$  sur un jeu alterné  $A$ , toute partie  $s = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k \cdot n : x \longrightarrow z$ , avec  $k > 0$ , où les coups  $m_i$  sont Opposant et  $n$  est un coup Joueur, admet un préfixe de la forme  $m_i \cdot n$  modulo homotopie.*

*Démonstration.* Par induction sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , la propriété est immédiatement satisfaite. Sinon la partie  $s$  est de la forme  $s = s' \cdot m_{k-1} \cdot m_k \cdot n$ . Le jeu  $A$  étant alterné, la partie  $s' \cdot m_k \cdot m_{k-1} \cdot n$  existe et est aussi dans  $\sigma$  par courtoisie de  $\sigma$ . La stratégie  $\sigma$  étant séquentielle en avant, l'une des parties  $s' \cdot m_{k-1} \cdot n \cdot m_k$  ou  $s' \cdot m_k \cdot n \cdot m_{k-1}$  existe et est dans  $\sigma$ . Supposons que l'on soit dans le premier cas (l'autre cas est similaire). On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction au chemin  $s' \cdot m_{k-1} \cdot n$ , ce qui nous permet de conclure immédiatement.  $\square$

On en déduit alors immédiatement :

**Lemme 2.74.** *Dans toute stratégie positionnelle, courtoise et séquentielle en avant  $\sigma$  sur un jeu alterné  $A$ , toute partie  $s : * \longrightarrow y$  de  $\sigma$  est homotope à une partie de la forme  $s_1 \cdot s_2$ , où  $s_1 : * \longrightarrow x$  est une partie alternée et  $s_2 : x \longrightarrow y$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant.*

*Démonstration.* Montrons que la partie  $s$  admet une telle factorisation par induction sur la longueur de  $s$ . Si  $s$  est la partie vide  $\varepsilon$  alors la propriété est immédiate. Sinon, par hypothèse d'induction,  $s$  admet une décomposition de la forme  $s = t \cdot m$ , où  $t$  admet une décomposition de la forme  $t_1 \cdot t_2$ , où  $t_1 : * \longrightarrow x$  est une partie alternée et  $t_2 : x \longrightarrow x'$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. Si  $m$  est un coup Opposant alors la factorisation  $s = t_1 \cdot (t_2 \cdot m)$  permet immédiatement de conclure. Supposons que  $m$  soit un coup Joueur. La stratégie  $\sigma$  étant négative, la position initiale  $*$  est une position d'arrêt de la stratégie. On en déduit par le Lemme 2.71 que la position  $x$  qui est le but du chemin alterné  $t_1$  est une aussi position d'arrêt. Le coup  $m$  étant un coup Joueur, le chemin  $t_2$  ne peut donc être vide. Ainsi, on peut appliquer le Lemme 2.73 et en déduire que le chemin  $t_2 \cdot m$  est homotope à un chemin de la forme  $n \cdot m \cdot t'_2$ , où  $n$  est un coup Opposant et  $t'_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. Finalement, la décomposition  $s = (t_1 \cdot n \cdot m) \cdot t'_2$  permet de conclure.  $\square$

*Remarque 2.75.* Il est aisé de vérifier que le chemin  $s_1 \cdot s_2$  construit par la preuve du lemme précédent se réécrit par courtoisie en le chemin  $s$ .

Par réécriture par courtoisie, on entend ici :

**Définition 2.76** (Réécriture par courtoisie). Si  $s \cdot m \cdot n \cdot t$  est un chemin d'un jeu  $A$  homotope à un chemin  $s \cdot n \cdot m \cdot t$ , où  $m$  est un coup Joueur et  $n$  est un coup Opposant, on dira que le premier chemin se réécrit en le second *par courtoisie*, ce que nous noterons

$$s \cdot m \cdot n \cdot t \implies s \cdot n \cdot m \cdot t$$

Nous noterons  $\implies^*$  la clôture réflexive et transitive de la relation  $\implies$ .

*Remarque 2.77.* Les stratégies séquentiellement innocentes  $\sigma : A$  sont closes par réécriture par courtoisie. En effet, si  $s \cdot m \cdot n \cdot t$  est une partie de  $\sigma$  telle qu'il existe un chemin  $s \cdot n \cdot m \cdot t$  alors, si  $n$  est un coup Joueur, le chemin est aussi dans  $\sigma$  par courtoisie de la stratégie et, si  $m$  et  $n$  sont des coups Opposant, le chemin est aussi dans  $\sigma$  par réceptivité de la stratégie (Lemme 2.68).

De même qu'à la Propriété 1.38, on peut montrer que la réécriture par courtoisie est compatible avec la résiduation.

**Propriété 2.78.** *Si  $s : x \twoheadrightarrow y$  et  $t : y \twoheadrightarrow x$  sont deux chemins qui se réécrivent par courtoisie respectivement en  $s' : x \twoheadrightarrow y$  et  $t' : y \twoheadrightarrow z$ , alors  $t/s : x \twoheadrightarrow z$  se réécrit par courtoisie en  $t'/s' : x \twoheadrightarrow z$ .*

À toute stratégie  $\sigma$  close par préfixe, on peut associer une stratégie alternée  $\text{alt}(\sigma)$  en ne gardant que les parties alternées de  $\sigma$ . Réciproquement, à toute stratégie alternée  $\sigma$ , on peut associer une stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  définie comme la plus petite stratégie courtoise et réceptive contenant  $\sigma$ . Nous allons montrer que les stratégies séquentiellement innocentes sont en bijection avec les stratégies innocentes au sens habituel, que nous appellerons *stratégies alternées innocentes*, et que cette bijection est donnée par les fonctions  $\text{alt}$  et  $\text{desalt}$ .

En utilisant la définition de  $\text{desalt}$ , il est aisé de montrer que

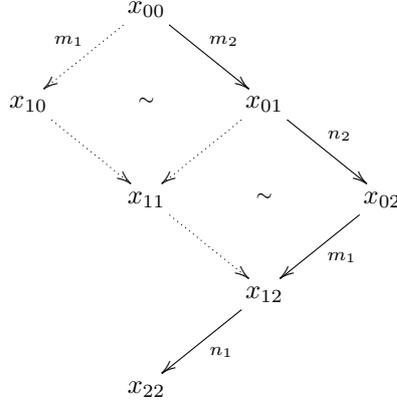
**Lemme 2.79.** *Pour toute stratégie  $\sigma$ , une partie  $s : * \twoheadrightarrow y$  est dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  si et seulement si il existe une partie  $t_1 : * \twoheadrightarrow x$  de  $\sigma$  et un chemin  $t_2 : x \twoheadrightarrow y$  ne contenant que des coups Opposant tels que  $t_1 \cdot t_2$  se réécrit par courtoisie en  $s$ .*

**Propriété 2.80.** *La catégorie des stratégies séquentiellement innocentes se plonge dans la catégorie des stratégies alternées cohérentes déterministes. Plus explicitement, pour toute stratégie séquentiellement innocente  $\sigma : A$ ,  $\text{alt}(\sigma)$  est une stratégie alternée déterministe cohérente et on a  $\text{desalt}(\text{alt}(\sigma)) = \sigma$ .*

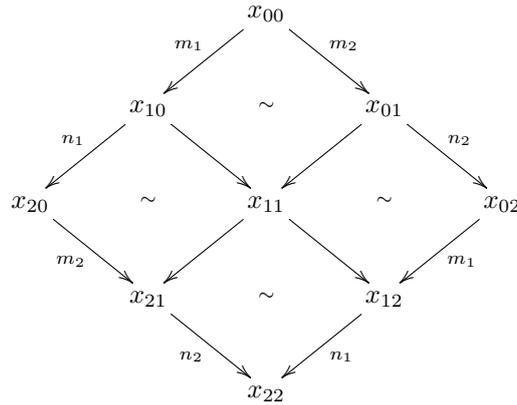
*Démonstration.* Commençons par montrer l'égalité  $\text{desalt}(\text{alt}(\sigma)) = \sigma$ . L'ensemble  $\text{alt}(\sigma)$  étant inclus dans la stratégie  $\sigma$  et la stratégie  $\sigma$  étant courtoise et réceptive, on a l'inclusion  $\text{desalt}(\text{alt}(\sigma)) \subseteq \sigma$ . Réciproquement, la Remarque 2.75 nous assure que l'on a l'inclusion inverse.

Montrons que  $\text{alt}(\sigma)$  est une stratégie alternée déterministe cohérente. La stratégie  $\sigma$  étant non vide, l'ensemble  $\text{alt}(\sigma)$  est non vide (il contient la partie vide  $\varepsilon$ ). De plus la stratégie  $\sigma$  étant close par préfixe, l'ensemble  $\text{alt}(\sigma)$  est clos par préfixe de longueur paire. Ainsi,  $\text{alt}(\sigma)$  est une stratégie alternée. Supposons que  $s \cdot m \cdot n_1$  et  $s \cdot m \cdot n_2$  soient deux parties de  $\text{alt}(\sigma) \subseteq \sigma$ . Par déterminisme de  $\sigma$ , si les coups  $n_1$  et  $n_2$  étaient distincts alors la partie  $s \cdot m \cdot n_1 \cdot n_2$  serait aussi dans  $\sigma$ , ce qui est impossible par le Lemme 2.71, la partie  $s \cdot m \cdot n_1$  étant alternée. Les coups  $n_1$  et  $n_2$  sont donc égaux et la stratégie alternée  $\text{alt}(\sigma)$  est déterministe. Pour montrer que la stratégie alternée  $\text{alt}(\sigma)$  est cohérente en

arrière, supposons que la stratégie  $\sigma$  contienne une partie de la forme



où la position  $x_{00}$  est atteignable par une partie alternée  $s : * \rightarrow x_{00}$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont des coups Opposant et  $n_1$  et  $n_2$  sont des coups Joueur. Par réceptivité de la stratégie, la transition  $m_1 : x_{00} \rightarrow x_{10}$  est dans  $\sigma$  et par préservation de la compatibilité, les transitions  $m_1 : x_{01} \rightarrow x_{11}$ ,  $m_2 : x_{10} \rightarrow x_{11}$  et  $n_2 : x_{11} \rightarrow x_{12}$  sont aussi dans la stratégie. Le jeu étant alterné et les coups  $n_1$  et  $n_2$  étant tous deux des coups Joueur, il existe une tuile  $x_{11} \xrightarrow{n_1} x_{21} \xrightarrow{n_2} x_{22} \diamond x_{11} \xrightarrow{n_2} x_{12} \xrightarrow{n_1} x_{22}$  dans le jeu et par courtoisie de la stratégie, les transitions  $n_1 : x_{11} \rightarrow x_{21}$  et  $n_2 : x_{21} \rightarrow x_{22}$  sont aussi dans la stratégie. Les transitions  $m_2 : x_{10} \rightarrow x_{11}$  et  $m_1 : x_{01} \rightarrow x_{11}$  étant Opposant, par séquentialité en arrière de la stratégie, la transition  $n_1 : x_{11} \rightarrow x_{21}$  est le résidu d'une transition  $n_1 : x_{01} \rightarrow x'_{01}$  ou d'une transition  $n_1 : x_{10} \rightarrow x_{20}$  de  $\sigma$ . Le premier cas est impossible par le Lemme 2.71, car la partie  $s \cdot m_2 \cdot n_2$  serait dans la stratégie  $\sigma$  et  $s$  est une partie alternée et  $m_2$  et  $n_2$  sont des coups Joueur. Enfin, on peut montrer que la transition  $m_2 : x_{20} \rightarrow x_{21}$  est dans  $\sigma$  par préservation de la compatibilité de la stratégie : le diagramme



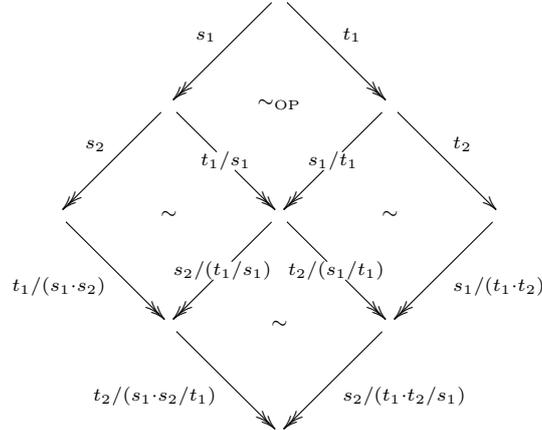
est dans la stratégie  $\sigma$ , montrant ainsi que la stratégie  $\text{alt}(\sigma)$  est cohérente en arrière. On peut montrer de façon similaire que la stratégie  $\text{alt}(\sigma)$  est cohérente en avant en utilisant le déterminisme et la préservation de la compatibilité en avant de la stratégie  $\sigma$ .  $\square$

Réciproquement, on a aussi

**Propriété 2.81.** *La catégorie des stratégies alternées cohérentes déterministes se plonge dans la catégorie des stratégies séquentiellement innocentes. Plus explicitement, pour toute stratégie alternée cohérente déterministe  $\sigma : A$ ,  $\text{desalt}(\sigma)$  est une stratégie séquentiellement innocente et on a  $\text{alt}(\text{desalt}(\sigma)) = \sigma$ .*

*Démonstration.* Montrons l'égalité  $\text{alt}(\text{desalt}(\sigma)) = \sigma$ . La stratégie  $\sigma$  étant incluse dans l'ensemble  $\text{desalt}(\sigma)$ , on a immédiatement  $\sigma \subseteq \text{alt}(\text{desalt}(\sigma))$ . Réciproquement, soit  $s$  une partie de  $\text{alt}(\text{desalt}(\sigma))$ . Cette partie est une partie de  $\text{desalt}(\sigma)$ . Par le Lemme 2.79, cette partie est homotope à une partie de la forme  $s_1 \cdot s_2$ , où  $s_1$  est une partie alternée de  $\sigma$  et  $s_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. La partie  $s$  étant alternée et l'homotopie préservant les coups, le chemin  $s_2$  est le chemin vide (sinon  $s_1 \cdot s_2$  aurait plus de coups Opposant que de coups Joueur). Il est alors facile de montrer qu'une partie alternée ne se réécrit par courtoisie en aucune partie alternée, excepté elle-même. On a donc  $s_1 = s$  et la partie  $s$  est dans  $\sigma$ , montrant ainsi l'inclusion inverse  $\text{alt}(\text{desalt}(\sigma)) \subseteq \sigma$ .

Montrons que la stratégie est close par union modulo homotopie de deux chemins compatibles. Soient  $s : * \rightarrow x$  et  $t : * \rightarrow y$  de chemins compatibles de la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ . Par le Lemme 2.79, ces parties peuvent être obtenues en réécrivant par courtoisie des parties respectives  $s_1 \cdot s_2$  et  $t_1 \cdot t_2$ , où  $s_1$  et  $t_1$  sont des parties alternées de  $\sigma$  et  $s_2$  et  $t_2$  sont des chemins ne contenant que des coups Opposant. Par la Propriété 2.65, les chemins  $s_1 \cdot (t_1/s_1)$  et  $t_1 \cdot (s_1/t_1)$  existent et sont dans la stratégie  $\sigma$  donc dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ . Les chemins  $s_2$  et  $t_2$  ne contenant que des coups Opposant, il est alors facile de montrer que les parties  $s_1 \cdot s_2 \cdot ((t_1 \cdot t_2)/(s_1 \cdot s_2))$  et  $t_1 \cdot t_2 \cdot ((s_1 \cdot s_2)/(t_1 \cdot t_2))$  sont aussi dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ . Diagrammatiquement, la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  contient les chemins suivants :



Enfin, par la Propriété 2.78, les parties  $s \cdot (t/s)$  et  $t \cdot (s/t)$  peuvent être obtenues par réécriture par courtoisie des parties  $s_1 \cdot s_2 \cdot ((t_1 \cdot t_2)/(s_1 \cdot s_2))$  et  $t_1 \cdot t_2 \cdot ((s_1 \cdot s_2)/(t_1 \cdot t_2))$  de  $\text{desalt}(\sigma)$ , elles sont donc aussi dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ . On en déduit que  $\text{desalt}(\sigma)$  est close par union de parties compatibles. On montre de façon similaire que la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est close par intersection de parties.

Montrons que  $\text{desalt}(\sigma)$  est une stratégie séquentiellement innocente.

- La stratégie  $\sigma$  étant non vide, elle contient la partie vide  $\varepsilon$ . La stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  contient donc aussi cette partie et est toujours non vide.
- Montrons que la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est positionnelle. Si  $s \cdot u$  est une partie de  $\text{desalt}(\sigma)$  où  $s$  est une partie homotope à une partie  $t$  de  $\text{desalt}(\sigma)$  alors par clôture par unions compatibles de  $\text{desalt}(\sigma)$  la partie  $t \cdot (s \cdot u)/t = t \cdot u$  est aussi dans  $\text{desalt}(\sigma)$ . La stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est donc positionnelle. Par clôture par unions compatibles de  $\text{desalt}(\sigma)$ , la stratégie préserve la compatibilité en avant et, par clôture par intersections, elle préserve la compatibilité en arrière.
- Par le Lemme 2.79, toute partie  $s$  de  $\text{desalt}(\sigma)$  peut être obtenue par réécriture par courtoisie d'une partie  $s_1 \cdot s_2$ , où  $s_1$  est une partie de  $\sigma$  et  $s_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. En raisonnant par induction sur le nombre de pas de réécriture, on peut montrer que pour toute décomposition  $s = t_1 \cdot m \cdot n \cdot o \cdot t_2$  du chemin  $s$ , où  $m$  est un coup Joueur et  $n$  et  $o$  sont des coups Opposant, l'un des chemins  $t_1 \cdot n \cdot m \cdot o \cdot t_2$  ou  $t_1 \cdot o \cdot m \cdot n \cdot t_2$  existe et est une partie de  $\text{desalt}(\sigma)$  homotope à  $s$  et que pour toute décomposition  $s = t_1 \cdot m \cdot n \cdot o \cdot t_2$  du chemin  $s$ , où  $m$  et  $n$  sont des coups Joueur et  $o$  est un coup Opposant, l'un de chemins  $t_1 \cdot m \cdot o \cdot n \cdot t_2$  ou  $t_1 \cdot n \cdot o \cdot m \cdot t_2$  existe et est une partie de  $\text{desalt}(\sigma)$  homotope à  $s$ , montrant ainsi que la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est séquentielle en avant et en arrière.
- La stratégie  $\sigma$  est négative, courtoise et réceptive par définition de  $\text{desalt}$ .
- Montrons que la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est close par préfixe. Soit  $s \cdot m$  une partie de  $\sigma$ . Par le Lemme 2.79, la partie  $s \cdot m$  est obtenue par réécriture par courtoisie d'un chemin  $s_1 \cdot s_2$  où  $s_1$  est une partie alternée de  $\sigma$  et  $s_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. Nous allons montrer que le chemin  $s_1 \cdot s_2$  est homotope à un chemin  $s'_1 \cdot s'_2 \cdot m$ , où  $s'_1$  est une partie alternée de  $\sigma$  et  $s'_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant et en déduire que la partie  $s$  est dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ . On distingue alors deux cas suivant la polarité de  $m$ .
  - Supposons que  $m$  soit un coup Opposant. Le coup  $m$  ne peut être un coup de  $s_1$ , car on ne pourrait aboutir au chemin  $s \cdot m$  par réécriture par courtoisie (par réécriture par courtoisie, le coup  $m$  ne peut pas « passer après » le coup Joueur qui lui succède immédiatement dans  $s_1$ ). Le coup  $m$  est donc un coup de  $s_2$ , et le chemin  $s_1 \cdot s_2$  est homotope à un chemin de la forme  $s_1 \cdot s'_2 \cdot m$ , car  $s_1 \cdot s_2$  est homotope au chemin  $s \cdot m$ . Comme le chemin  $s_1 \cdot s_2$  se réécrit par courtoisie en  $s \cdot m$ , on peut alors montrer que le chemin  $s_1 \cdot s'_2$  se réécrit par courtoisie en  $s$  (informellement, la dérivation  $s_1 \cdot s'_2 \Longrightarrow^* s$  se fait par la suite de permutations  $s_1 \cdot s_2 \Longrightarrow^* s \cdot m$  à laquelle on a enlevé les permutations faisant intervenir le coup  $m$ ).
  - Supposons que  $m$  soit un coup Joueur. La partie  $s_1 \cdot s_2$  de  $\text{desalt}(\sigma)$  se réécrit alors par courtoisie en la partie  $s'_1 \cdot s_2 \cdot m$  de  $\text{desalt}(\sigma)$ , où  $s'_1$  est la partie obtenue à partir de  $s_1$  en enlevant le coup  $m$ . La stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  étant positionnelle, courtoise et séquentielle en avant, le Lemme 2.74 montre que le chemin  $s'_1$  est homotope à un

chemin  $s_1'' \cdot s_1'''$ , où  $s_1''$  est une partie alternée de  $\sigma$  et  $s_1'''$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. Le chemin  $s_1'' \cdot (s_1''' \cdot s_2) \cdot m$  est alors bien de la forme voulue. Le chemin  $s_1'' \cdot (s_1''' \cdot s_2)$  se réécrit par courtoisie en le chemin  $s_1 \cdot s_2$  qui lui-même se réécrit en le chemin  $s$  pour les mêmes raisons que dans le cas précédent.

Dans les deux cas, nous avons montré que la partie  $s$  est dans la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$ , qui est donc close par préfixe.

- Montrons que la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  est déterministe. Soient  $s \cdot n_1$  et  $s \cdot n_2$  deux parties de  $\sigma$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont deux coups Joueur. La stratégie étant close par préfixe, le chemin  $s$  lui appartient donc. Par le Lemme 2.79, ce chemin est obtenu par réécriture par courtoisie d'un chemin  $s_1 \cdot s_2$ , où  $s_1$  est une partie alternée de  $\sigma$  et  $s_2$  est un chemin ne contenant que des coups Opposant. Les chemins  $s_1 \cdot s_2 \cdot n_1$  et  $s_1 \cdot s_2 \cdot n_2$  étant dans la stratégie, par le Lemme 2.71 le chemin  $s_2$  est non vide. Par utilisation répétée de la propriété de séquentialité en arrière de  $\text{desalt}(\sigma)$ , on peut montrer que soit il existe un coup Opposant  $m$  de  $s_2$  tel que les parties  $s_1 \cdot m \cdot n_1$  et  $s_1 \cdot m \cdot n_2$  soient dans  $\text{desalt}(\sigma)$  (donc dans  $\sigma$  car ces parties sont alternées), soit il existe deux coups Opposant compatibles distincts  $m_1$  et  $m_2$  de  $s_2$  tels que les parties  $s_1 \cdot m_1 \cdot n_1$  et  $s_1 \cdot m_2 \cdot n_2$  soient dans  $\text{desalt}(\sigma)$  (donc dans  $\sigma$  car ces parties sont alternées). Dans le premier cas, on conclut que  $n_1 = n_2$  par déterminisme de  $\sigma$ . Dans le second cas, par cohérence en avant de la stratégie  $\sigma$ , les coups  $n_1$  et  $n_2$  sont distincts mais compatibles et on en déduit que les parties  $s \cdot n_1 \cdot n_2$  et  $s \cdot n_2 \cdot n_2$  sont dans  $\text{desalt}(\sigma)$ , car cette stratégie préserve la compatibilité en avant.  $\square$

*Remarque 2.82.* Nous avons omis la preuve de la functorialité des fonctions  $\text{alt}$  et  $\text{desalt}$  qui n'est pas dure à montrer par ce qui précède. Ces functorialités rendent essentiellement compte du fait que toute interaction asynchrone entre deux stratégies séquentiellement innocentes peut être réorganisée en une interaction alternée amenant à la même partie dans la composée.

Finalement, on a donc

**Théorème 2.83.** *La catégorie des stratégies alternées innocentes déterministes est isomorphe à la catégorie des stratégies séquentiellement innocentes.*

*Remarque 2.84.* Une caractérisation des positions d'arrêt des stratégies alternées, cohérentes et déterministes est donnée par Mellès dans [Mel04]. On pouvait comparer cette caractérisation à celle donnée par le Théorème 2.49 pour en déduire de façon indirecte la correspondance bijective entre les stratégies alternées cohérentes déterministes et les stratégies séquentiellement innocentes.

*Remarque 2.85.* Dans la définition des stratégies séquentiellement innocentes, on pouvait remplacer la condition de réceptivité par

- la propriété de forte courtoisie (Définition 2.44),
- et une condition de totalité imposant à toute position  $y$ , qui est le but d'une transition Opposant  $m : x \rightarrow y$ , de ne pas être une position d'arrêt de la stratégie,

la stratégie  $\text{desalt}(\sigma)$  étant alors définie comme la plus petite stratégie courtoise et close par préfixe contenant une stratégie alternée  $\sigma$ . Les stratégies acceptant tous les coups Opposant que le jeu permet sont en effet en bijection avec les stratégies n'acceptant aucun coup Opposant auquel elles ne peuvent pas répondre.

### 2.4.3 Modélisation d'un $\lambda$ -calcul affine parallèle

La condition d'innocence a été introduite par Hyland et Ong [HO00] pour caractériser les stratégies définissables du modèle de PCF. En particulier, les stratégies innocentes correspondent précisément aux arbres de Böhm du  $\lambda$ -calcul simplement typé sur un unique type de base  $\alpha$  [DHR96, Cur98]. Ce résultat peut être compris de la façon suivante dans notre cadre. La formulation donnée ici est inspirée de [Mel04]. Nous reviendrons sur les liens entre ce résultat et la logique linéaire à la Section 2.5.7.

Les termes du  $\lambda$ -calcul sont définis par la grammaire suivante :

$$M ::= x \mid MM \mid \lambda x.M$$

où  $x$  est un élément d'un ensemble  $x$  des variables. Ces termes sont considérés modulo la relation d' $\alpha$ -conversion habituelle. La règle de  $\beta$ -réduction est définie par

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_{\beta} M[N/x]$$

où  $M[N/x]$  désigne le terme  $M$  dans lequel toutes les occurrences de la variable  $x$  ont été remplacées par le terme  $N$ . Les  $\lambda$ -termes peuvent être typés par les types simples du  $\lambda$ -calcul sur un unique type de base  $\alpha$  : ces types sont soit le type de base  $\alpha$ , soit de la forme  $A \Rightarrow B$ , où  $A$  et  $B$  sont des types. Les règles de typage du  $\lambda$ -calcul affine sont les suivantes.

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} (\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash N : A}{\Gamma, \Delta \vdash MN : B} (\text{App})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \Rightarrow B} (\text{Abs})$$

Les termes typables sont tous affines dans le sens où une variable apparaît au plus une fois libre dans tout sous-terme. Les *arbres de Böhm  $\eta$ -longs* sur un type simple  $A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow \alpha$  sont de l'une des trois formes suivantes :

1.  $\lambda x_1 \dots \lambda x_n. y M_1 \dots M_m$  où
  - les variables  $x_i$  sont de type  $A_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ ,
  - la variable  $y$  est de type  $B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_m \Rightarrow \alpha$ , pour certains types  $B_i$ ,
  - les  $M_i$  sont des arbres de Böhm  $\eta$ -longs de type  $B_i$ , pour  $1 \leq i \leq m$ ,
2. ou  $\Omega_A$ , où  $\Omega_A$  est une constante de type  $A$ ,
3. ou  $\lambda x_1 \dots \lambda x_n. \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{U}$  est une constante donnée du type de base  $\alpha$  et les variables  $x_i$  sont de types  $A_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ .

On impose de plus aux arbres de Böhm d'être affines.

Tout type simple  $A$  peut être interprété en un jeu  $\llbracket A \rrbracket$  défini par induction de la façon suivante. L'interprétation du type de base  $\alpha$  est le jeu  $\llbracket \alpha \rrbracket$  défini comme

le jeu n'ayant qu'une unique transition Opposant  $q : * \longrightarrow x$  et l'interprétation d'un type simple  $A \Rightarrow B$  est le jeu  $\llbracket A \Rightarrow B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \multimap \llbracket B \rrbracket$ . Tout arbre de Böhm  $\eta$ -long  $M : A$  peut quant à lui être interprété comme une stratégie sur le jeu associé au type simple  $A$ . Cette stratégie correspond à une sémantique de traces sur les arbres de Böhm, chaque trace étant une exploration particulière de l'arbre de Böhm. Ainsi, les transition Opposant sont générées par la règle

$$\Omega_A \longrightarrow \lambda x_1 \dots \lambda x_n. \bar{U}$$

où  $A = A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow \alpha$  et les variables  $x_i$  sont de type  $A_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . Les transitions Joueur sont générées par la règle

$$\bar{U} \longrightarrow x \Omega_{A_1} \cdots \Omega_{A_n}$$

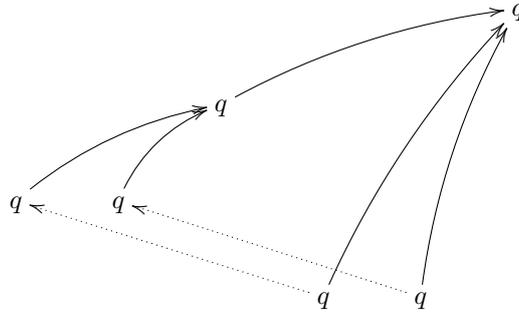
où  $x$  est une variable de type  $A = A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow \alpha$ . Tout arbre de Böhm  $M : A$  induit alors une stratégie  $\sigma$  définie comme la clôture par préfixe de l'ensemble des traces  $s : \Omega_A \twoheadrightarrow M$ . Cette opération induit une bijection entre les arbres de Böhm ne contenant pas de constantes  $\Omega_A$  et les stratégies séquentiellement innocentes (les stratégies correspondant aux arbres de Böhm contenant des constantes  $\Omega_A$  ne sont pas réceptives).

*Exemple 2.86.* Considérons le terme

$$\lambda f. \lambda x. \lambda y. fxy \quad : \quad (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \quad (2.14)$$

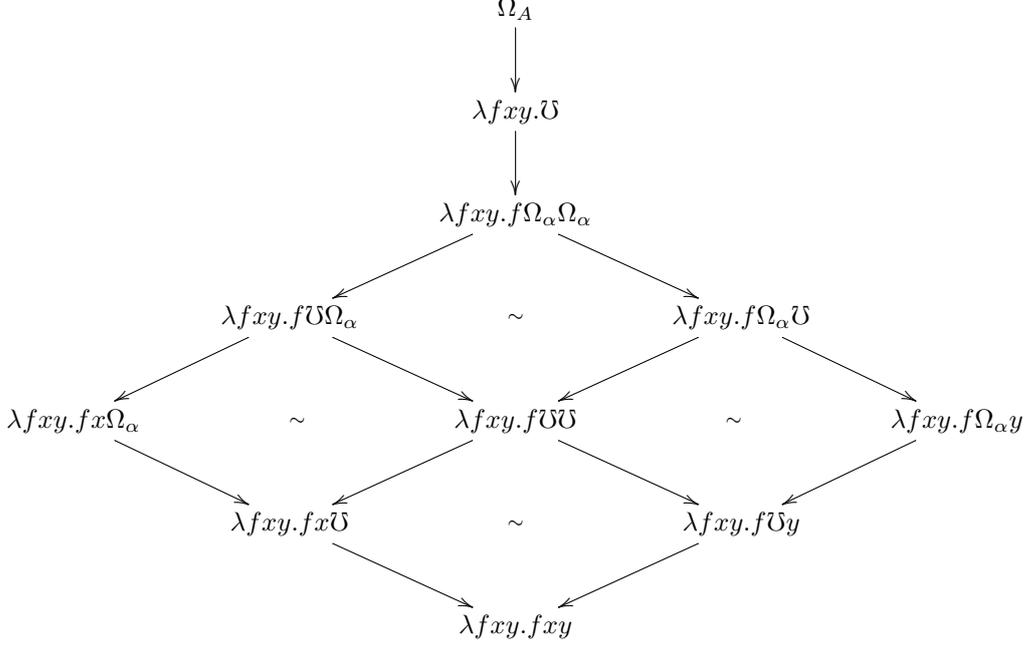
La stratégie associée à ce terme correspond à l'ordre partiel suivant sur les coups du jeu :

$$(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$



Lorsque l'on demande son résultat à cette stratégie (le premier coup), elle interroge son argument  $f$  pour connaître sa valeur (le deuxième coup). Si, lors de son calcul,  $f$  demande la valeur de l'un de ses arguments, la stratégie demande la valeur de son argument correspondant. Les dépendances en trait plein figurent les dépendances imposées par le jeu (ce que l'on appelle parfois les pointeurs de justification) et les dépendances en pointillés figurent les dépendances imposées par la stratégie. Cet ordre partiel génère un graphe asynchrone qui est isomorphe au graphe asynchrone généré par l'ensemble des traces menant de  $\Omega_A$

au terme (2.14), où  $A$  est son type :



Les stratégies asynchrones ayant été introduites pour modéliser des interactions concurrentes, il est naturel de s'intéresser aux stratégies qui vérifient toutes les conditions des stratégies séquentiellement innocentes, excepté les conditions de séquentialité, car ces conditions empêchent certains coups Joueur d'être joués en parallèle ou de se synchroniser sur des coups Opposant joués en parallèle. Ces stratégies permettent de modéliser un calcul obtenu en enrichissant la syntaxe du  $\lambda$ -calcul par une construction  $M|N$ , similaire à celle du  $\pi$ -calcul, permettant d'exécuter deux  $\lambda$ -termes en parallèle. Nous obtenons ainsi une variante du calcul étudié par Boudol [Bou94]. Les termes sont considérés modulo la congruence structurelle  $\equiv$  définie comme la plus petite relation telle que

$$(M|N)|P \equiv M|(N|P) \quad M|N \equiv N|M \quad (\lambda x.M|\lambda x.N) \equiv \lambda x.(M|N)$$

et

$$(M_1|M_2)N \equiv (M_1N|M_2N)$$

La règle de typage permettant de typer cette nouvelle construction est

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Delta \vdash N : A}{\Gamma, \Delta \vdash M|N : A} (\text{Par})$$

et les arbres de Böhm  $\eta$ -longs sont maintenant de la forme

1.  $\lambda x_1 \dots x_n.(y^1 M_1^1 \dots M_{m_1}^1 \mid \dots \mid y^k M_1^k \dots M_{m_k}^k)$ ,
2. ou  $\Omega_A$ ,
3. ou  $\lambda x_1 \dots x_n.(\bar{U} \mid \dots \mid \bar{U})$ ,

satisfaisant diverses contraintes de typage similaires à celles des arbres de Böhm correspondant au  $\lambda$ -calcul introduits précédemment. On impose de plus aux nouveaux arbres de Böhm d'être affines dans le sens où ils doivent avoir un représentant modulo la congruence structurelle  $\equiv$  qui soit affine. Les transitions Opposant sont maintenant générées par la règle

$$\Omega_A \longrightarrow \lambda x_1 \dots \lambda x_n. (\bar{U} \mid \dots \mid \bar{U})$$

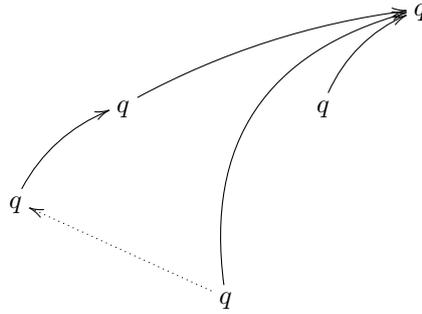
et les transitions Joueur sont générées par la même règle que précédemment.

*Exemple 2.87.* La stratégie associée au terme

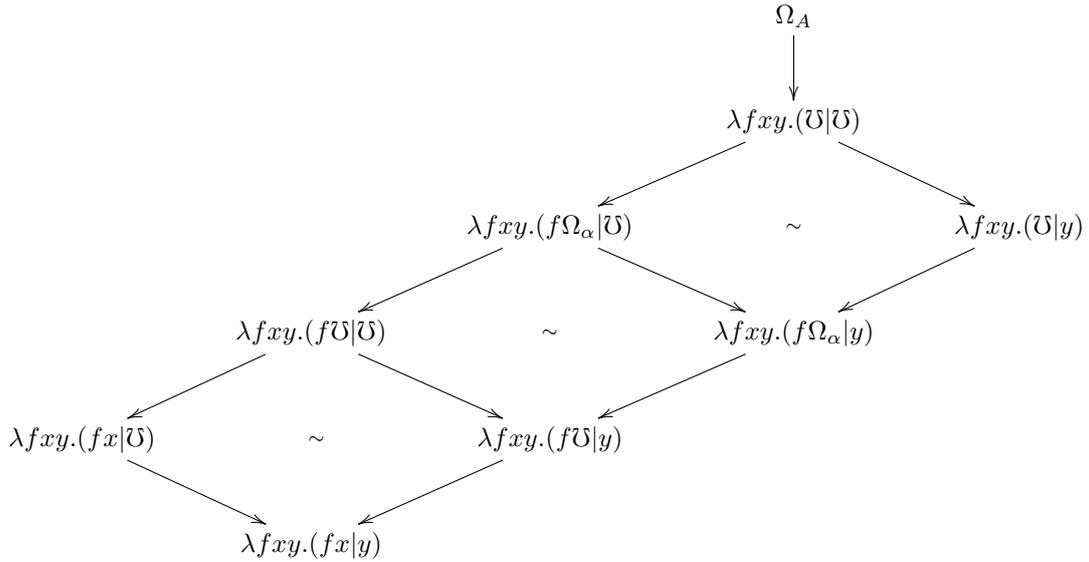
$$\lambda f. \lambda x. \lambda y. (fx \mid y) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

peut être décrite par l'ordre partiel

$$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$



Le graphe asynchrone généré par cette stratégie est isomorphe au graphe asynchrone suivant :



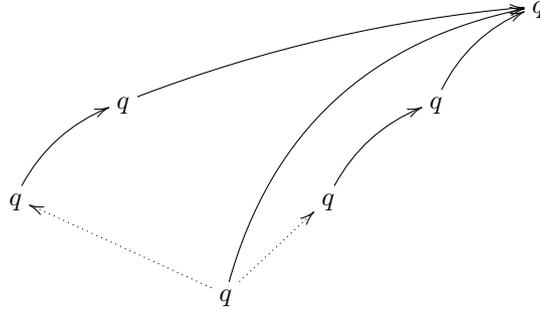
*Exemple 2.88.* La stratégie associée au terme  $\lambda x.\lambda y.(x|y)$  a un comportement similaire à celui de l'implémentation parallèle de la conjonction décrite en introduction de ce chapitre : elle interroge ses deux arguments en parallèle.

*Remarque 2.89.* Si les termes restent « affines », certains calculs peuvent être partagés. Par exemple, dans le  $\lambda$ -terme

$$\lambda f.\lambda x.\lambda g.(f|g)x \quad : \quad (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

la variable  $x$  est partagée en tant qu'argument des deux fonctions comme le montre la stratégie correspondante :

$$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$



Ces partages rendent la définition précise des transitions générées par un arbre de Böhm  $\eta$ -long plus subtile que dans le cadre du  $\lambda$ -calcul : si un terme  $N$  se réduit en un terme  $N'$  en un coup alors le terme  $(M_1N|M_2N)$  se réduit en le terme  $(M_1N'|M_2N')$  en un coup. Par exemple, le graphe asynchrone correspondant à la stratégie décrite ci-dessus contient la transition

$$\lambda fxg.(f\bar{U}|g\bar{U}) \quad \longrightarrow \quad \lambda fxg.(fx|gx)$$

Les stratégies considérées ne sont pas toutes définissables dans ce langage, car la discipline imposée par le tenseur n'est pas nécessairement respectée. Nous expliquons à la section suivante comment ceci peut être pris en compte en raffinant la notion de stratégie que nous avons introduite.

## 2.5 Stratégies ordonnancées

Nous renforçons maintenant notre notion de stratégie ingénue en imposant un *critère d'ordonnancement* qui rend distincts le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux jeux  $A$  et  $B$  du produit par le connecteur dual  $A\wp B$ . Ce critère joue le rôle, dans notre cadre non-alterné, des *conditions d'aiguillage* introduites par Abramsky et Jagadeesan [AJ94] pour les jeux alternés. Comme nous le verrons, ce critère permet de s'assurer que les stratégies ne vont pas se trouver en situation d'interblocage durant la composition et donc que les ensembles de positions acceptantes reflètent correctement la façon dont les stratégies composent – rendant ainsi strict le foncteur lâche de la Section 2.5.1 des stratégies asynchrones vers les relations.

### 2.5.1 Vers le modèle relationnel

Nous avons vu à la Définition 2.20 qu'une stratégie  $\sigma : A \rightarrow B$  de la catégorie **Jeux**<sub>2</sub> induit un ensemble  $\sigma^\bullet$  de positions du jeu  $A \multimap B$  défini comme l'ensemble des positions atteignables par une partie de la stratégie  $\sigma$ . Toute telle position étant un couple  $(x_A, x_B)$ , encore souvent noté  $x_A \multimap x_B$ , formé d'une position  $x_A$  du jeu  $A$  et d'une position  $x_B$  du jeu  $B$ , l'ensemble  $\sigma^\bullet$  peut être considéré comme une relation entre les positions de  $A$  et celles de  $B$ . On peut ainsi associer une relation à toute stratégie, passant ainsi d'une représentation dynamique à une représentation statique de la stratégie. Cette traduction n'est cependant pas fonctorielle, à cause d'une disparité subtile entre la composition des stratégies et celle de relations. Ainsi, si  $\sigma : A \rightarrow B$  et  $\tau : B \rightarrow C$  sont deux stratégies, l'égalité

$$\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet = (\tau \circ \sigma)^\bullet$$

entre la composée relationnelle  $\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet$  des ensembles de positions d'arrêt et les positions d'arrêt  $(\tau \circ \sigma)^\bullet$  de la stratégie composée, ne sera pas nécessairement vérifiée.

**De la composition dynamique à la composition statique.** L'inclusion

$$\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet \supseteq (\tau \circ \sigma)^\bullet$$

est toujours vérifiée, ce que l'on peut justifier de la façon suivante. Par définition, toute position  $x \multimap z$  de  $(\tau \circ \sigma)^\bullet$  est atteinte par une partie  $u : * \multimap x \multimap z$  dans la stratégie composée  $\tau \circ \sigma$ . Toujours par définition, cette partie provient de l'interaction d'une partie  $s : * \multimap x \multimap y$  de la stratégie  $\sigma$  et d'une partie  $t : * \multimap y \multimap z$  de la stratégie  $\tau$ . La position  $x \multimap z$  appartient donc à  $\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet$  car la position  $x \multimap y$  est dans  $\sigma^\bullet$  et la position  $y \multimap z$  est dans  $\tau^\bullet$ . Reformulée catégoriquement, cette propriété permet de munir l'opération  $(-)^\bullet$  d'une structure de foncteur lâche de la catégorie **Jeux**<sub>2</sub>, vue comme une 2-catégorie dont les seules 2-cellules sont les identités, dans la 2-catégorie **Rel**<sub>2</sub> des relations, dont la catégorie sous-jacente est la catégorie **Rel**, et qui admet une 2-cellule

$$\begin{array}{ccc} & r_1 & \\ & \curvearrowright & \\ X & & Y \\ & \curvearrowleft & \\ & r_2 & \\ & \Downarrow & \end{array}$$

entre deux relations  $r_1 : X \rightarrow Y$  et  $r_2 : X \rightarrow Y$  si et seulement si la relation  $r_2$  est incluse dans la relation  $r_1$ .

**De la composition statique à la composition dynamique.** Cependant, l'inclusion inverse

$$\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet \subseteq (\tau \circ \sigma)^\bullet$$

n'est pas toujours vérifiée. Par exemple, considérons la stratégie  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ , décrite en introduction de ce Chapitre 2 et représentée en (2.8), qui implémente la paire **(tt, ff)** qui ne veut pas donner la valeur de sa composante de droite

avant d'avoir été interrogée sur sa composante de droite. Composée avec la stratégie  $\tau : \mathbb{B} \otimes \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  qui est l'implémentation droite de la conjonction, représentée à droite de (2.6), qui commence par demander la valeur de son argument de droite, puis celle de son argument de gauche avant de calculer sa réponse. Les positions acceptées par la stratégie  $\sigma$  sont

$$\sigma^\bullet = \{ * \otimes *, * \otimes q, T \otimes F \}$$

et l'ensemble  $\tau^\bullet$  des positions acceptées par  $\tau$  contient les positions

$$\{ (* \otimes *) \multimap *, (* \otimes q) \multimap q, (q \otimes F) \multimap q, (T \otimes F) \multimap F \}$$

La composée relationnelle  $\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet$  contient donc la position  $F$ , bien que cette position ne soit pas un élément de  $(\tau^\bullet \circ \sigma)$ . Ceci détecte un interblocage durant l'interaction des deux stratégies, empêchant la position d'être effectivement atteinte : à la position  $* \otimes q$  de  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ , la stratégie  $\sigma$  attend d'être interrogée sur sa composante de gauche tandis que la stratégie  $\tau$  attend la valeur de la composante de droite. De façon plus conceptuelle, ce phénomène provient du fait que les catégories de jeux sont compactes fermées : le produit tensoriel  $\otimes$  est identifié avec son dual  $\multimap$ . Afin d'empêcher ce type de situations, nous imposons un critère supplémentaire à nos stratégies.

### 2.5.2 Jeux avec tests d'ordonnement

Notre critère d'ordonnement est fondé sur l'idée selon laquelle une stratégie d'un type  $A$  donné doit être capable de réorganiser son comportement interactif suivant l'ordonnement choisi par l'Opposant. Un tel ordonnement sera décrit pas une sorte particulière de *contre-stratégie* ingénue du jeu original  $A$ , c'est-à-dire une stratégie du jeu dual  $A^*$ .

**Définition 2.90** (Ordonnement). Un ordonnement  $\mathcal{S}$  est une stratégie ingénue dans laquelle deux parties  $s$  et  $t$  sont soit homotopes, soit incomparables par rapport à l'ordre préfixe modulo homotopie.

En d'autres termes, toute position acceptante d'un ordonnement  $\mathcal{S}$  est maximale dans le graphe asynchrone associé à l'ordonnement.

Informellement, une stratégie  $\sigma$  peut s'adapter à un ordonnement  $\mathcal{S}$  de l'Opposant lorsque, pour toute partie  $s \in \sigma$  homotope à une partie  $t \in \mathcal{S}$ , il existe une partie  $u$  homotope à la fois à  $s$  et à  $t$ , qui appartienne aux deux stratégies :  $u \in \sigma$  et  $u \in \mathcal{S}$ . La difficulté principale consiste à comprendre quels ordonnements doivent être autorisés pour tester une stratégie d'un type  $A$  donné. Bien sûr, toute contre-stratégie peut être vue comme une sorte d'ordonnement particulièrement rusé. Notre tâche consiste donc à établir une classe de contre-stratégies basiques, que nous appelons *tests d'ordonnement*, qui génère en un sens approprié la classe de toutes les contre-stratégies possibles de type  $A$ .

Il apparaît que la solution est bien plus simple que ce à quoi on aurait pu s'attendre. En effet, nous allons montrer que, pour tester une stratégie de type  $A$ , il suffit de « commuter » tous les produits tensoriels  $\otimes$  de la formule soit en un ordonnement de gauche à droite, soit en un ordonnement de droite à gauche, que nous notons respectivement  $\otimes_L$  et  $\otimes_R$ . Sémantiquement, chacun de ces ordonnements est interprété comme le connecteur correspondant sur les ordonnements.

**Définition 2.91.** Soit  $\mathcal{S}$  un ordonnancement d'un jeu asynchrone  $A$  et  $\mathcal{T}$  un ordonnancement d'un jeu asynchrone  $B$ . L'ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  est la stratégie ingénue de  $A \otimes B$  contenant les parties  $s$  dont

- la projection  $s_A$  sur la composante  $A$  est une partie de  $\mathcal{S}$ ,
- la projection  $s_B$  sur la composante  $B$  est une partie de  $\mathcal{T}$ .

L'ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ , appelé  $\mathcal{S}$  avant  $\mathcal{T}$ , est la stratégie ingénue de  $A \otimes B$  contenant les parties  $s$  de  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  qui sont de plus telles que

- aucun coup dans la composante  $B$  n'est joué avant un coup dans la composante  $A$ ,
- si la partie  $s$  contient un coup dans la composante  $B$ , sa projection  $s_A$  sur la composante  $A$  est une partie de l'ordonnancement  $\mathcal{S}$  (qui est nécessairement maximale).

De même, l'ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ , appelé  $\mathcal{S}$  après  $\mathcal{T}$ , est la stratégie ingénue de  $A \otimes B$  contenant les parties  $s$  de l'ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  dont la projection  $s_B$  sur la composante  $B$  est une partie (nécessairement maximale) de l'ordonnancement  $\mathcal{T}$  lorsque la projection  $s_A$  sur la composante  $A$  est non vide.

Remarquons qu'un ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  d'un jeu  $A \otimes B$  est la même chose qu'un ordonnancement  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  du jeu  $B \otimes A$ , après permutation de  $A$  et  $B$ . Par exemple, si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont des ordonnancements qui jouent chacun exactement une transition, respectivement  $m : * \rightarrow x$  dans  $A$  et  $n : * \rightarrow y$  dans  $B$ , les ordonnancements  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  et  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  sont respectivement les stratégies



sur le jeu  $A \otimes B$ . Dans l'exemple ci-dessus, les positions  $x$  et  $y$  ne sont pas nécessairement maximales dans  $A$  et  $B$ , bien qu'elles le soient dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ .

Dorénavant, nous équipons nos jeux de deux classes d'ordonnements correspondant à des tests du Joueur et de l'Opposant.

**Définition 2.92 (Jeu).** Un jeu avec tests d'ordonnement  $A = (A, A_P, A_O)$  est un jeu  $A$  muni de deux ensembles non vides d'ordonnements du jeu  $A$ , appelés respectivement les ensembles de tests d'ordonnement Joueur et Opposant.

Les produits sur les jeux s'étendent de façon naturelle sur les ensembles de tests d'ordonnement. Ainsi, si  $U$  et  $V$  sont deux tels ensembles, leur produit  $U \otimes V$  est défini par

$$U \otimes V = \{ \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \mid \mathcal{S} \in U \text{ et } \mathcal{T} \in V \}$$

Les produits  $U \otimes V$  et  $U \otimes V$  sont définis de façon similaire. Ceci nous permet de définir le produit tensoriel de deux jeux avec tests d'ordonnement.

**Définition 2.93** (Produit tensoriel). Si  $A = (A, A_P, A_O)$  et  $B = (B, B_P, B_O)$  sont deux jeux avec tests d'ordonnancement, leur *produit tensoriel*

$$A \otimes B = (A \otimes B, (A \otimes B)_P, (A \otimes B)_O)$$

est le jeu dont les tests d'ordonnancement sont définis par

$$(A \otimes B)_P = A_P \otimes B_P \quad \text{et} \quad (A \otimes B)_O = A_O \otimes B_O \cup A_O \otimes B_O.$$

Ceci signifie qu'une stratégie de type  $A \otimes B$  doit être assez flexible pour s'adapter aussi bien à un ordonnancement de gauche à droite qu'à un ordonnancement de droite à gauche des composantes  $A$  et  $B$ . D'un autre côté, une contre-stratégie de type  $A \otimes B$  a pour seule contrainte d'interagir correctement avec un ordonnancement de  $A$  et un ordonnancement de  $B$ , les composantes  $A$  et  $B$  étant entrelacées de façon arbitraire.

**Définition 2.94** (Négation). La négation d'un jeu  $A = (A, A_P, A_O)$  est le jeu  $A^* = (A^*, (A^*)_P, (A^*)_O)$  dont les tests d'ordonnancement sont obtenus en échangeant les rôles du Joueur et de l'Opposant :

$$(A^*)_P = A_O \quad \text{et} \quad (A^*)_O = A_P.$$

Le par et l'implication linéaire de deux jeux sont alors définis par la loi usuelle de de Morgan

$$A \wp B = (A^* \otimes B^*)^* \quad \text{et} \quad A \multimap B = (A \otimes B^*)^*$$

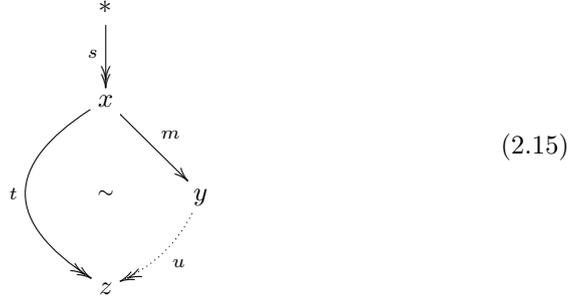
Une stratégie sur le jeu  $A \multimap B$  doit donc correctement réagir aux tests d'ordonnancement de  $(A \multimap B)_O = A_P \otimes B_O$ . On peut de plus constater que le jeu  $A \wp B$  n'est en général pas isomorphe au jeu  $A \otimes B$ .

### 2.5.3 Stratégies avec positions d'interaction

Nous équipons aussi les stratégie ingénues  $\sigma : A$  d'un ensemble de positions distinguées de la stratégie. Nous supposons dans la suite que les stratégies ingénues que nous considérerons sont *sans conflit*, c'est-à-dire par définition que toute position acceptante est une position d'arrêt de la stratégie.

Avec l'ingénuité, la propriété pour une stratégie d'être sans conflit est équivalente à la notion d'*absence de conflit* (ou *conflict-freeness* en anglais) introduite de façon indépendante par Hyland et Schalk [HS02] et par Melliès [Mel05d]. Cette condition est une sorte de propriété de confluence que l'on peut formuler de la façon suivante. Une stratégie  $\sigma$  est *sans conflit* lorsque pour toute partie  $s : * \multimap x$ , préfixe d'une partie  $s \cdot t : * \multimap z$  de la stratégie  $\sigma$ , et pour toute transition joueur  $m : x \multimap y$  telle que la partie  $s \cdot m$  est aussi le préfixe d'une partie dans  $\sigma$ , il existe un chemin  $u : y \multimap z$  telle que  $t \sim m \cdot u$  et la partie

$s \cdot m \cdot u$  est dans la stratégie  $\sigma$ . Diagrammatiquement,



L'idée formalisée par cette propriété est que lorsqu'une stratégie sans conflit est prête à accepter une position  $z$  dans le futur, elle doit jouer de sorte à garder la possibilité d'atteindre cette position  $z$ ; seul l'Opposant peut la dévier définitivement de la route de  $z$ .

**Définition 2.95** (Stratégie avec positions d'interaction). Une *stratégie*  $\sigma : A$  est un couple  $(\sigma, X)$  où  $\sigma$  est une stratégie ingénue  $X$  est un ensemble de positions de  $A$ , appelées *positions d'interaction* de la stratégie, tel que

1. toute position acceptante de  $\sigma$  est une position d'interaction :  $\sigma^\bullet \subseteq X$ ,
2. les positions d'interaction sont *respectées* par  $\sigma$  dans le sens où pour tout préfixe  $s \cdot m$  d'une partie de la stratégie  $\sigma$ , où  $m$  est un coup Joueur, si la partie  $s$  peut être étendue en une partie  $s \cdot t$  qui atteint une position  $z$  du jeu alors la partie  $s \cdot m$  peut aussi être étendue en une partie  $s \cdot m \cdot u$  qui atteint la position  $x$ . Ceci peut être représenté diagrammatiquement par (2.15).

Notons que toute position acceptante est une position d'arrêt et est donc respectée par la stratégie ingénue  $\sigma$ .

La catégorie  $\mathbf{Jeux}_I$  a les jeux polarisés pour objets et les stratégies avec positions d'interaction  $(\sigma, X)$  comme morphisme entre deux objets  $A$  et  $B$ , où  $\sigma$  est une stratégie de  $A$  dans  $B$  et  $X$  un ensemble de positions d'interaction de la stratégie  $\sigma$ . La composée  $(\tau, Y) \bullet (\sigma, X) : A \rightarrow C$  de deux morphismes  $(\sigma, X) : A \rightarrow B$  et  $(\tau, Y) : B \rightarrow C$  est définie par

$$(\tau, Y) \bullet (\sigma, X) = (\tau \circ \sigma, Y \circ X)$$

où la première composante est composée dans la catégorie  $\mathbf{Jeux}_1$  et la seconde composante dans la catégorie  $\mathbf{Rel}$  des ensembles et relations. De même, la catégorie  $\mathbf{Jeux}_I$  est monoïdale si on la munit du produit tensoriel  $\otimes$  défini sur deux stratégies  $(\sigma, X)$  et  $(\tau, Y)$  par

$$(\sigma, X) \otimes (\tau, Y) = (\sigma \otimes \tau, X \otimes Y).$$

On notera souvent simplement  $\mathcal{S}$  pour la paire  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\bullet)$  induite par un test d'ordonnancement  $\mathcal{S}$ .

### 2.5.4 Orthogonalité

L'idée de tester une stratégie  $\sigma$  face à un ordonnancement est élégamment capturée (et généralisée) par la notion suivante d'*orthogonalité* entre une stratégie  $(\sigma, X)$  et une contre-stratégie  $(\tau, Y)$  du jeu  $A$ .

**Définition 2.96** (Orthogonalité). Deux stratégies  $(\sigma, X) : A$  et  $(\tau, Y) : A^*$  sont *orthogonales*, ce que nous notons  $(\sigma, X) \perp (\tau, Y)$ , lorsque

$$X \cap Y = (\sigma \cap \tau)^\bullet$$

L'intersection  $\sigma \cap \tau$  est la stratégie obtenue comme l'intersection de stratégies  $\sigma$  et  $\tau$ , vues comme des ensembles de parties. Ainsi, deux stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  sont orthogonales lorsque pour toute position  $x \in X \cap Y$ , il existe une partie  $s : * \rightarrow x$  atteignant la position  $x$  appartenant à la fois à la stratégie  $\sigma$  et à la stratégie  $\tau$ .

**Lemme 2.97.** *Si  $(\sigma, X)$  est une stratégie d'un jeu  $A$  et  $(\tau, Y)$  est une contre-stratégie du jeu  $A$  alors*

$$(\sigma, X) \perp (\tau, Y) \quad \text{implique} \quad (\sigma \cap \tau)^\bullet \text{ est vide ou réduit à un élément.}$$

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux positions de  $(\sigma \cap \tau)^\bullet$ . Il existe deux parties  $s : * \rightarrow x$  et  $t : * \rightarrow y$  appartenant chacune à la fois à  $\sigma$  et à  $\tau$ . Notons  $u : * \rightarrow z$  le plus long préfixe commun des parties  $s$  et  $t$  modulo homotopie. Si les positions  $x$  et  $y$  sont distinctes alors  $u$  est différent de  $s$  ou de  $t$ . Supposons que  $u$  soit différent de  $t$  (l'autre cas est similaire), le chemin  $t$  admet donc une décomposition de la forme  $t = u \cdot m \cdot t'$ . Si  $m$  est un coup Opposant dans  $A$  alors c'est un coup Joueur dans  $A^*$ . Quitte à échanger les rôles des jeux  $A$  et  $A^*$ , on peut donc supposer que  $m$  est un coup Joueur de  $A$ . Notons  $s'$  le chemin  $s/u$ , de sorte que l'on ait  $s = u \cdot s'$ . Par la propriété d'absence de conflit, le chemin  $s'$  est compatible avec la transition  $m$  et le résidu  $m/s'$  est le chemin vide. Les stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  étant ingénues, la partie  $u \cdot m \cdot (s'/m)$ , qui est homotope à  $s$ , est dans les deux stratégies. On en déduit que  $u \cdot m$  est préfixe des parties  $s$  et  $t$  modulo homotopie, contredisant la maximalité du préfixe  $u$ . Les positions  $x$  et  $y$  sont donc égales, ce qui nous permet de conclure.  $\square$

**Lemme 2.98.** *Étant donnée une contre-stratégie  $\tau = (\tau, Y)$  de  $A \otimes B$  et deux stratégies  $\sigma_A = (\sigma_A, X_A)$  de  $A$  et  $\sigma_B = (\sigma_B, X_B)$  de  $B$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\sigma_A \otimes \sigma_B \perp \tau$ ,
- (ii)  $\sigma_A \perp \sigma_B \bullet \tau$  et  $\sigma_B \perp \tau \bullet \sigma_A$ .

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons que  $\sigma_A \otimes \sigma_B \perp \tau$  et que  $x_A$  soit une position de l'ensemble  $X_A \cap (X_B \otimes Y)$ . La position  $x_A$  étant dans  $X_B \otimes Y$ , il existe une position  $x_B$  de  $X_B$  telle que la position  $x_A \otimes x_B$  soit dans  $Y$ . De plus, cette position  $x_A \otimes x_B$  est un élément de  $X_A \otimes X_B$ . De l'hypothèse (i), on déduit l'existence d'une partie  $s : * \rightarrow x_A \otimes x_B$  commune aux stratégies  $\sigma_A \otimes \sigma_B$  et  $\tau$ . Par projection, la partie  $s_A : * \rightarrow x_A$  est dans la stratégie  $\sigma_A$  et la partie  $s_B : * \rightarrow x_B$  est dans la stratégie  $\sigma_B$ . La partie  $s_B : * \rightarrow x_B$  résulte de l'interaction des parties  $s$  et  $s_A$  et est donc dans la stratégie composée  $\tau \otimes \sigma_A$  : la position  $x_A$  est atteinte par la partie  $s_A$ , commune aux stratégies  $\sigma_A$

et  $\sigma_B \otimes \tau$ . On peut finalement conclure que  $\sigma_A \perp \sigma_B \bullet \tau$  et, de façon similaire, que  $\sigma_B \perp \tau \bullet \sigma_A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Supposons qu'on ait à la fois  $\sigma_A \perp \sigma_B \bullet \tau$  et  $\sigma_B \perp \tau \bullet \sigma_A$  et que  $x$  soit une position acceptante commune à  $\sigma_A \otimes \sigma_B$  et à  $\tau$ . La position  $x$  peut être décomposée en  $x = x_A \otimes x_B$  où  $x_A$  est une position acceptante de  $\sigma_A$  et  $x_B$  est une position acceptante de  $\sigma_B$ . La position  $x_A$  étant à la fois dans  $X_A$  et dans  $X_B \otimes Y$ , il existe, par notre première hypothèse, une partie  $s_A : * \twoheadrightarrow x_A$  qui est à la fois dans les stratégies  $\sigma_A$  et  $\sigma_B \circ \tau$ . Cette partie est obtenue en faisant interagir les stratégies  $\tau$  et  $\sigma_B$ , ce qui signifie qu'il existe une partie  $s : * \twoheadrightarrow x_A \otimes x_B$  dans la stratégie  $\tau$  dont la projection sur le jeu  $A$  est la partie  $s_A$  et dont la projection  $s_B : * \twoheadrightarrow x_B$  sur le jeu  $B$  est dans la stratégie  $\sigma_B$ . Les positions  $x_B$  et  $y_B$  étant à la fois dans  $X_B$  et dans  $X_A \otimes Y$ , on en déduit, en utilisant notre première hypothèse et le Lemme 2.97, que ces positions sont égales :  $x_B = y_B$ . Finalement, le chemin  $s : * \twoheadrightarrow x_A \otimes x_B$  est à la fois dans les stratégies  $\sigma_A \otimes \sigma_B$  et  $\tau$ , ce qui nous permet de conclure.  $\square$

**Lemme 2.99.** *Étant donnée une contre-stratégie  $\tau = (\tau, Y)$  de  $A \otimes B$ , une stratégie  $\sigma_A = (\sigma_A, X_A)$  de  $A$  et un test d'ordonnancement  $\mathcal{S}_B$  de  $B$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \quad \sigma_A \otimes \mathcal{S}_B \perp \tau,$$

$$(ii) \quad \sigma_A \perp \mathcal{S}_B \bullet \tau.$$

*Démonstration.* La direction (i)  $\Rightarrow$  (ii) peut être montrée comme dans le lemme précédent. Réciproquement, en ce qui concerne la direction (ii)  $\Rightarrow$  (i), la preuve du lemme précédent nécessite d'être un peu adaptée. Supposons que  $\sigma_A \perp \mathcal{S}_B \bullet \tau$  et que  $x_A \otimes x_B$  est une position acceptante des stratégies  $\sigma_A \otimes \mathcal{S}_B$  et  $\tau$ . De même que dans la preuve précédente, on peut montrer l'existence d'une position  $y_B$  de  $B$  et d'une partie  $s : * \twoheadrightarrow x_A \otimes x_B$  dans la stratégie  $\tau$  telle que la partie  $s_B : * \twoheadrightarrow x_B$  soit dans la stratégie  $\mathcal{S}_B$ . De plus, l'hypothèse que toutes les positions d'interaction de  $\mathcal{S}_B \bullet \tau$  et de  $\mathcal{S}_B$  sont respectivement respectées par les stratégies  $\mathcal{S}_B \otimes \tau$  et  $\tau$  implique l'existence d'un chemin  $t : y_B \twoheadrightarrow x_B$  dans le jeu  $B$ . Or, par définition d'un test d'ordonnancement, toute partie de  $\mathcal{S}_B$  est maximale dans  $\mathcal{S}_B$  par rapport à l'ordre préfixe modulo homotopie et, de plus, les deux positions  $x_B$  et  $y_B$  sont des positions acceptantes du test d'ordonnancement  $\mathcal{S}_B$ . On en déduit que les positions  $x_B$  et  $y_B$  sont égales, ce qui nous permet de conclure de façon similaire à la preuve du lemme précédent.  $\square$

### 2.5.5 Jeu ordonnancés

Dans la suite, étant donné un ensemble  $U$  de contre-stratégies de  $A$ , nous écrivons  $\sigma \perp U$  pour exprimer le fait que la stratégie  $\sigma$  est orthogonale à toute stratégie  $\tau$  de  $U$ . De même, si  $U$  est un ensemble de stratégies de  $A$ , nous écrivons  $U \perp \tau$  pour exprimer le fait que toute stratégie  $\sigma$  de  $U$  est orthogonale à  $\tau$ .

Nous introduisons maintenant la notion de jeu ordonnancé qui est un jeu dont les stratégies respectent les tests d'ordonnancement. La principale difficulté de cette section consistera à établir que cette notion de jeu est close par produit tensoriel.

**Définition 2.100** (Jeu ordonnancé). Un jeu  $(A, A_P, A_O)$  est *ordonnancé* lorsque

1. toute stratégie ingénue  $\sigma = (\sigma, X)$  et tout contre-stratégie  $\tau = (\tau, Y)$  du jeu satisfont :

$$\sigma \perp A_O \quad \text{et} \quad A_P \perp \tau \quad \text{implique} \quad \sigma \perp \tau$$

2. un test d'ordonnancement  $\mathcal{S}$  de  $A_P$  et un test d'ordonnancement  $\mathcal{T}$  de  $A_O$  sont orthogonaux :  $\mathcal{S} \perp \mathcal{T}$ ,
3. pour toute position  $x$  du jeu, il existe un ordonnancement Joueur  $\mathcal{S} \in A_P$  et un ordonnancement Opposant  $\mathcal{T} \in A_O$  tels que  $x$  est une position acceptante pour  $\mathcal{S}$  et pour  $\mathcal{T}$ .

Ainsi, dans jeu ordonnancé, toute stratégie  $\sigma$  interagit convenablement avec tout contre-stratégie  $\tau$  (dans le sens où elle sont orthogonales) lorsqu'elle réagit convenablement aux tests d'ordonnancement.

**Propriété 2.101.** *Le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux jeux ordonnancés  $(A, A_P, A_O)$  et  $(B, B_P, B_O)$  est aussi ordonnancé.*

*Démonstration.* Supposons qu'une stratégie  $\sigma = (\sigma, X)$  et qu'une contre-stratégie  $\tau = (\tau, Y)$  du jeu  $A \otimes B$  satisfassent

$$\sigma \perp (A \otimes B)_O \quad \text{et} \quad (A \otimes B)_P \perp \tau.$$

Par définition de  $(A \otimes B)_O$ , la première assertion est équivalente à

$$\sigma \perp A_O \otimes B_O \quad \text{et} \quad \sigma \perp A_O \otimes B_O. \quad (2.16)$$

Toute partie  $s \in \sigma$  atteint une position  $x$  qui peut être décomposée en  $x = x_A \otimes x_B$ . Par hypothèse sur les jeux  $A$  et  $B$ , il existe un ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_A \in A_O$  acceptant la position  $x_A$  et un ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_B \in B_O$  acceptant la position  $x_B$ . Il découle de (2.16) que la stratégie  $\sigma$  est orthogonale au deux tests d'ordonnancement  $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$  et  $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$ . La position  $x = x_A \otimes x_B$  est acceptée à la fois par la stratégie  $\sigma$  et par la stratégie  $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$ . L'orthogonalité de ces deux stratégies implique qu'il existe une partie  $t$  homotope à  $s$  dans laquelle aucun coup de  $B$  n'est joué avant un coup de  $A$ , ce qui reflète le fait que, dans la stratégie  $\sigma$ , aucun coup de  $A$  n'est causalement dépendent d'un coup de  $B$  dans la partie  $s$ . De façon symétrique, aucun coup de  $B$  n'est dépendent d'un coup de  $A$  dans la partie  $s$ .

Rappelons que les parties  $s_A$  et  $s_B$  sont les projections de la partie  $s$  respectivement sur les composantes  $A$  et  $B$ . L'indépendance causale que nous avons évoqué ci-dessus indique que tout entrelacement  $t$  de  $s_A$  et  $s_B$  est dans la stratégie. En d'autres termes, la stratégie  $\sigma$  contient toute partie  $t$  telle que  $t_A = s_A$  et  $t_B = s_B$ , ou, de façon plus concise, la stratégie  $s_A \otimes s_B$  est incluse dans la stratégie  $\sigma$ .

Bien sûr, toute autre partie  $t \in \sigma$  induit une stratégie  $t_A \otimes t_B$  incluse dans la stratégie  $\sigma$ . Il n'est cependant pas évident que les stratégies « mixtes »  $s_A \otimes t_B$  et  $t_A \otimes s_B$  sont aussi dans la stratégie  $\sigma$  : la stratégie  $\sigma = (\sigma, X)$  est incluse dans la stratégie  $\sigma_A \otimes \sigma_B$ , où

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \{ s_A \mid s \in \sigma \} & \text{et} & & X_A &= \{ x_A \mid \exists x_B, x_A \otimes x_B \in X \} \\ \sigma_B &= \{ s_B \mid s \in \sigma \} & \text{et} & & X_B &= \{ x_B \mid \exists x_A, x_A \otimes x_B \in X \} \end{aligned}$$

mais on n'a pas en général l'égalité  $\sigma = \sigma_A \otimes \sigma_B$ . Nous allons cependant montrer que la stratégie  $t_1 \otimes t_2$  est incluse dans  $\sigma$  pour toute partie  $t_A$  dans  $\sigma_A$  atteignant  $x_A$  et toute partie  $t_2$  dans  $\sigma_B$  atteignant  $x_B$ . En effet, par définition,  $t_1 = u_A$  et  $t_2 = v_B$  pour des parties  $u$  et  $v$  de  $\sigma$ . On en déduit que toute partie de la stratégie  $t_1 \otimes t_2$  est contenue dans la clôture par préfixe  $\text{prefix}(\sigma)$  de la stratégie  $\sigma$ . Cette propriété peut être établie par induction sur la longueur des chemins en utilisant le fait que la stratégie  $\sigma$  est supposée préserver la compatibilité en avant. Or la stratégie  $\sigma$  est positionnelle et admet la position  $x_A \otimes x_B$  comme position acceptante. Toute partie de  $t_1 \otimes t_2$  est donc dans la stratégie  $\sigma$ .

Supposons que  $x = x_A \otimes x_B$  soit une position acceptante de la stratégie  $\sigma$ . Nous venons de voir que toute partie  $s$  résultant de l'entrelacement d'une partie  $s_A$  atteignant  $x_A$  dans  $\sigma_A$  et d'une partie  $s_B$  atteignant  $x_B$  dans  $\sigma_B$  est un élément de la stratégie  $\sigma$ . En outre, il n'est pas difficile de montrer que les stratégies  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  sont ingénues et de déduire de (2.16) qu'elle satisfait

$$\sigma_A \perp A_O \quad \text{et} \quad \sigma_B \perp B_O$$

Nous pouvons maintenant commencer la seconde partie de la preuve et montrer que

$$\sigma \perp \tau$$

ce qui nous permettra de déduire que

$$\sigma_A \otimes \sigma_B \perp \tau \tag{2.17}$$

Supposons en effet que la relation (2.17) soit vérifiée et que  $x_A \otimes x_B \in X \cap Y$  soit une position d'interaction partagée par les deux stratégies  $\sigma = (\sigma, X)$  et  $\tau = (\tau, Y)$ . Par définition des stratégies  $\sigma_A = (\sigma_A, X_A)$  et  $\sigma_B = (\sigma_B, X_B)$ , la position  $x_A \otimes x_B$  est une position d'interaction de  $\sigma_A \otimes \sigma_B$ . Nous pouvons déduire de l'hypothèse (2.17) l'existence d'une partie  $s : * \twoheadrightarrow x_A \otimes x_B$  commune aux stratégies  $\sigma_A \otimes \sigma_B$  et  $\tau$ . La position  $x_A \otimes x_B$  étant dans la stratégie  $\sigma$ , nous pouvons déduire de la première partie de la preuve que  $s$  est aussi dans la stratégie  $\sigma$ , ce qui conclut la preuve que la relation (2.17) implique que les stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  sont orthogonales.

Nous montrons maintenant la relation d'orthogonalité (2.17), par une série de manipulations purement algébriques. Par définition de l'ensemble de tests Joueur  $(A \otimes B)_P$ , la stratégie  $\tau$  est une contre-stratégie du jeu  $A \otimes B$  lorsque

$$A_P \otimes B_P \perp \tau.$$

Nous savons donc que pour toute paire d'ordonnements Joueur  $\mathcal{S}_A \in A_P$  et  $\mathcal{S}_B \in B_P$ , la relation d'orthogonalité

$$\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B \perp \tau$$

est vérifiée. Cette relation est équivalente à

$$\mathcal{S}_A \perp \mathcal{S}_B \bullet \tau$$

par le Lemme 2.99, et ceci est vérifié pour tout ordonnancement Opposant du jeu  $A$ . Le jeu  $A$  étant ordonnancé, on a aussi

$$\sigma_A \perp \mathcal{S}_B \bullet \tau$$

ce qui, toujours par application du Lemme 2.99, est équivalent à

$$\sigma_A \otimes \mathcal{S}_B \perp \tau.$$

La relation d'orthogonalité ci-dessus implique

$$\mathcal{S}_B \perp \tau \bullet \sigma_A$$

par le Lemme 2.98, et ceci est vérifié pour tout ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_B$  du jeu  $B$ . Le jeu  $B$  étant ordonnancé, on a aussi

$$\sigma_B \perp \tau \bullet \sigma_A.$$

Et la relation d'orthogonalité symétrique

$$\sigma_A \perp \sigma_B \bullet \tau$$

est établie de façon similaire. Par le Lemme 2.98, la conjonction des deux dernières relations d'orthogonalité est équivalente à

$$\sigma_A \otimes \sigma_B \perp \tau.$$

Ceci conclut notre preuve du fait que le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux jeu ordonnancés satisfait la première (et principale) condition requise par la définition des jeux ordonnancés. Les deux autres propriétés peuvent être aisément vérifiées sur le jeu  $A \otimes B$ .  $\square$

### 2.5.6 Stratégies ordonnancées

Nous nous intéresserons dans la suite aux stratégies qui passent les tests imposés par le jeu.

**Définition 2.102** (Stratégie ordonnancée). Une stratégie ingénue  $\sigma$  est *ordonnancée* dans un jeu  $(A, A_P, A_O)$  lorsqu'elle est orthogonale à tout ordonnancement Opposant du jeu, dans le sens où  $\sigma \perp A_O$ .

Remarquons en particulier que tout ordonnancement Joueur  $\mathcal{S}$  d'un jeu ordonnancé  $A$  est ordonnancé. Il est intéressant d'observer que les positions d'interaction d'une stratégie ordonnancée  $(\sigma, X)$  coïncident avec ses positions acceptantes.

**Propriété 2.103.** *Dans toute stratégie ordonnancée  $(\sigma, X)$ , on a  $X = \sigma^\bullet$ .*

Ceci montre que la notion de position d'interaction n'est qu'un outil technique requis pour montrer que les jeux ordonnancés sont clos par produit tensoriel. A posteriori, la notion peut être enlevée de la définition de jeux ordonnancés et des stratégies ordonnancées. Nous ne la mentionnerons donc plus dans la suite.

Le critère d'orthogonalité dans la définition des stratégies ordonnancées impose à une stratégie  $\sigma : A$  d'interagir correctement (sans interblocage) avec tous les tests d'ordonnancement Opposant du jeu  $A$ . La propriété fondamentale de cette classe de tests d'ordonnancement est qu'il sont suffisants pour assurer qu'une stratégie ordonnancée  $\sigma$  interagira correctement avec *toutes* les contre-stratégies du jeu  $A$ . Ceci est résumé par la propriété suivante qui découle immédiatement de la définition d'un jeu ordonnancé :

**Propriété 2.104.** *Soit  $\sigma : A$  une stratégie ordonnancable. Pour toute contre-stratégie  $\tau$  du jeu  $A$ , les stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  sont orthogonales.*

Ceci nous permet de définir la catégorie  $\mathbf{Jeux}_S$  dont les objets sont les jeux ordonnancés et les morphismes sont les stratégies ordonnancables  $\sigma$  du jeu  $A \multimap B$  comme morphismes de  $(A, A_P, A_O)$  dans  $(B, B_P, B_O)$ . L'identité sur un jeu ordonnancé  $A$  est l'identité de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_2$ . La deuxième condition constitutive des jeux ordonnancés nous assure qu'elle induit une stratégie ordonnancable. Nous montrons ci-dessous que la composée de deux stratégies ordonnancables est elle-même ordonnancable. Cette propriété nous assure que  $\mathbf{Jeux}_S$  est une catégorie.

**Propriété 2.105.** *Si  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  sont deux stratégies ordonnancables alors la stratégie composée  $\tau \circ \sigma : A \multimap C$  est aussi ordonnancable.*

*Démonstration.* La stratégie  $\sigma$  est ordonnancable. La Propriété 2.104 nous assure que  $\sigma \perp \mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$  pour tout test d'ordonnancement Joueur  $\mathcal{S}_A$  de  $A$  et test d'ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_B$  de  $B$ . On en déduit par le Lemme 2.99 que  $\sigma \circ \mathcal{S}_A \perp \mathcal{S}_B$ ; la stratégie  $\sigma \circ \mathcal{S}_A : B$  est donc innocente. De façon symétrique, la stratégie  $\mathcal{S}_C \circ \tau : B^*$  est ordonnancable pour tout test d'ordonnancement  $\mathcal{S}_C$  de  $C$ . De tout ceci et de la Propriété 2.104, on déduit que

$$\sigma \circ \mathcal{S}_A \perp \mathcal{S}_C \circ \tau$$

Par le Lemme 2.99, on en déduit que  $(\sigma \circ \mathcal{S}_A) \otimes \mathcal{S}_C \perp \tau$  et par le Lemme 2.98 que

$$\tau \circ \sigma \circ \mathcal{S}_A \perp \mathcal{S}_C.$$

On établit de même que  $\mathcal{S}_A \perp \mathcal{S}_C \circ \tau \circ \sigma$ . Par le Lemme 2.98, la conjonction des deux relations d'orthogonalité implique la relation

$$\tau \circ \sigma \perp \mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_C$$

et cette relation est vérifiée pour tout test d'ordonnancement Joueur  $\mathcal{S}_A$  de  $A$  et tout test d'ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_C$  de  $C$ . Ceci montre que la stratégie composée  $\tau \circ \sigma : A \multimap C$  est orthogonale à tout test d'ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_C$  de  $A \multimap C$  et est donc ordonnancable.  $\square$

L'opération  $(-)^{\bullet}$  de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_S$  dans la catégorie  $\mathbf{Rel}$  des relations, qui à tout jeu associe l'ensemble de ses positions et à toute stratégie  $\sigma$  associe son ensemble  $\sigma^{\bullet}$  de positions acceptantes, définit un foncteur, rectifiant ainsi le foncteur lâche de la Section 2.5.1. Cette propriété de functorialité étend le programme des *jeux intemporels* (timeless games) [BDER97b].

**Théorème 2.106.** *Pour toute paire de stratégies ordonnancables  $\sigma : A \rightarrow B$  et  $\tau : B \rightarrow C$  dans la catégorie  $\mathbf{Jeux}_S$ , on a*

$$\tau^{\bullet} \circ \sigma^{\bullet} = (\tau \circ \sigma)^{\bullet}.$$

*Démonstration.* Ce foncteur est lâche pour les mêmes raisons que dans la Section 2.5.1 :  $\tau^{\bullet} \circ \sigma^{\bullet} \supseteq (\tau \circ \sigma)^{\bullet}$ . Nous montrons maintenant l'inclusion inverse

$$\tau^{\bullet} \circ \sigma^{\bullet} \subseteq (\tau \circ \sigma)^{\bullet}$$

Supposons que  $x \multimap z$  soit une position de  $\tau^\bullet \circ \sigma^\bullet$ . Par définition de la composition des relations, il existe une position  $y$  telle que  $x \multimap y$  est une position acceptante de  $\sigma$  et  $y \multimap z$  est une position acceptante de  $\tau$ . Par la troisième de conditions définissant les jeux ordonnancés, il existe un test d'ordonnancement Joueur  $\mathcal{S}_A$  de  $A$  acceptant la position  $x$  et un test d'ordonnancement Opposant  $\mathcal{S}_C$  de  $C$  acceptant la position  $z$ . Les tests d'ordonnancement étant des stratégies ordonnancées, la stratégie  $\sigma \circ \mathcal{S}_A$  de  $B$  et la contre-stratégie  $\mathcal{S}_C \circ \tau$  de  $B$  sont des stratégies ordonnancées et, par la Propriété 2.104, elles sont orthogonales. De plus, ces stratégies admettent  $y$  comme position acceptante commune. On en déduit l'existence d'une partie  $u : * \multimap y$  qui est dans ces deux stratégies. Par le Lemme 2.97, les stratégies  $\mathcal{S}_A$  et  $\mathcal{S}_C \circ \tau \circ \sigma$  admettent  $x$  comme seule position acceptante et, de façon similaire, les stratégies  $\tau \circ \sigma \circ \mathcal{S}_A$  et  $\mathcal{S}_C$  admettent  $z$  comme seule position acceptante commune. On peut finalement en conclure l'existence d'une partie  $s : * \multimap x \multimap y$  de  $\sigma$  et d'une partie  $t : * \multimap y \multimap z$  de  $\tau$  telles que  $s_B = u = t_B$ , dont l'interaction témoigne du fait que la position  $x \multimap z$  est acceptante pour la stratégie  $\tau \circ \sigma$ .  $\square$

*Remarque 2.107.* La construction que nous avons présentée est conceptuellement proche de la construction abstraite de modèles de logique linéaire par *double recollement* décrite par Hyland et Schalk [HS03]. La mesure précise dans laquelle la catégorie des stratégies ordonnancées rentre dans ce cadre reste encore à être établie.

### 2.5.7 Interprétation de la logique linéaire

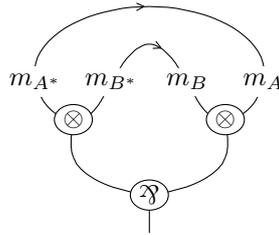
La catégorie  $\mathbf{Jeux}_S$  est monoïdale fermée et  $*$ -autonome. Elle fournit donc un modèle du fragment multiplicatif de la logique linéaire. Le critère d'ordonnancement confère une certaine finesse à ce modèle, les connecteurs  $\otimes$  et  $\wp$  y étant interprétés de façons distinctes (la catégorie n'est pas compacte fermée). Ce modèle fournit un cadre général pour les sémantiques interactives de la logique linéaire. On peut en particulier caractériser, à l'intérieur de la catégorie  $\mathbf{Jeux}_S$ , les sémantiques de type [AJ94] dans lesquelles les formules décrivent comment combiner les jeux correspondant aux variables, et les sémantiques de type [HO00] dont les coups correspondent à des changements de polarité dans les formules.

Rappelons le modèle pleinement complet du fragment multiplicatif de la logique linéaire sans unités avec la règle de mélange (voir l'Annexe A) d'Abramsky et Jagadeesan [AJ94]. Dans ce modèle, un jeu  $A \otimes B$  est interprété par le tenseur des interprétations de  $A$  et de  $B$  et  $A^*$  est interprété comme l'interprétation de  $A$  dans laquelle les polarités sont inversées. Les stratégies sont des ensembles de parties alternées, débutant par un coup Opposant, closes par préfixe, déterministes et réceptives, qui satisfont les deux conditions additionnelles suivantes.

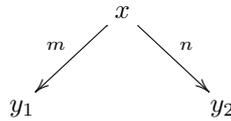
- *Absence de mémoire.* Si  $s \cdot m \cdot n$  et  $t \cdot m$  sont deux parties d'une stratégie  $\sigma$ , où  $m$  est un coup Opposant et  $n$  un coup Joueur, alors  $t \cdot m \cdot n$  est une partie de la stratégie  $\sigma$ .
- *Indépendance tensorielle.* Si  $\sigma : A \otimes B$  est une stratégie alors ses projections  $\sigma_A : A$  et  $\sigma_B : B$  sont des stratégies, et de plus, si la stratégie contient une partie  $s \cdot m \cdot n$ , où  $m$  est un coup Opposant de  $A$  (resp. de  $B$ ), alors  $n$  est un coup Joueur de  $A$  (resp. de  $B$ ).

Une condition de gain est aussi imposée sur les parties infinies dans ce modèle, mais par souci de simplicité nous nous restreindrons ici aux jeux finis. Les stratégies sans mémoire peuvent être retrouvées dans notre modèle comme les stratégies séquentiellement innocentes de la Section 2.4. Il apparaît en effet que dans ce cadre séquentiel, les conditions de cohérence de la Définition 2.63 offrent une reformulation asynchrone de la condition d'absence de mémoire. De plus, le critère d'ordonnancement impose aux stratégies de vérifier la condition de changement de composante : par la condition de forte courtoisie, les seules dépendances que la stratégie peut imposer sont des dépendances d'un coup Joueur sur un coup Opposant et la condition d'indépendance tensorielle revient alors à empêcher toute dépendance entre les deux composantes  $A$  et  $B$  d'un produit tensoriel  $A \otimes B$ . Réciproquement, l'indépendance tensorielle suffit à assurer que les stratégies sont ordonnancées.

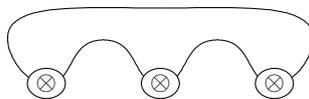
*Remarque 2.108.* Le critère d'ordonnancement est a priori plus faible que le critère de correction de la logique linéaire, car il ne détecte que les cycles *orientés*. Considérons par exemple la formule  $(A^* \otimes B^*) \wp(B \otimes A)$  qui n'est pas prouvable en logique linéaire. Si l'on interprète les formules  $A$  et  $B$  par le jeu ne contenant qu'une transition Joueur  $m$ , la stratégie  $\sigma = (m_{A^*} \cdot m_A) \otimes (m_{B^*} \cdot m_B)$  sur ce jeu correspond à la structure de preuve



qui n'est pas un réseau de preuve (elle ne vérifie pas le critère d'acyclicité). Cependant, il est simple de vérifier que la stratégie  $\sigma$  est ordonnancée, car le cycle qu'elle contient n'est pas orienté : on ne peut pas construire de cycle en suivant les liens axiome dans le sens indiqué par les flèches. En revanche, il n'existe pas de famille *uniforme* de stratégies  $(\sigma_{A,B})$  qui à tous jeux interprétant les variables  $A$  et  $B$  associe une stratégie sur le jeu associé à  $(A^* \otimes B^*) \wp(B \otimes A)$ , ce qui est requis dans la preuve de pleine complétude [AJ94]. Il n'existe pas en particulier de stratégie lorsque les jeux  $A$  et  $B$  sont interprétés par le jeu



où  $m$  est un coup Opposant et  $n$  est un coup Joueur : notre critère d'acyclicité orientée est équivalent au critère d'acyclicité habituel lorsque les liens axiomes sont « bidirectionnels ». Le fait que le critère de correction habituel implique notre critère peut être montré simplement en remarquant que tout cycle dans une structure de preuve peut être transformé en un cycle de la forme



qui passe au plus une fois par un connecteur et « rebondit » sur des tenseurs [AM99].

Le modèle de jeux d'arènes de PCF de Hyland et Ong [HO00] décrit un modèle de continuations [Sel01, MT07] plutôt que de la logique linéaire elle-même. Il peut aussi être compris comme un modèle d'un fragment polarisé de la logique linéaire multiplicative (voir aussi la Section 2.5.8), dont les formules sont générées par la grammaire

$$\begin{array}{l} N ::= X^* \quad | \quad N \wp N \quad | \quad \uparrow P \\ P ::= X \quad | \quad P \otimes P \quad | \quad \downarrow N \end{array}$$

si l'on se restreint aux stratégies interprétant les  $\lambda$ -termes linéaires décrits à la Section 2.4.3 (dans ces  $\lambda$ -termes, toute variable liée est utilisée exactement une fois). Les formules  $P$  sont *positives* et les formules  $N$  sont *négatives*. L'arène correspondant à une formule est alors donnée par le graphe dont les sommets correspondent aux groupes maximaux de même polarité et les arêtes aux changements de polarités induits par les connecteurs  $\uparrow$  et  $\downarrow$ .

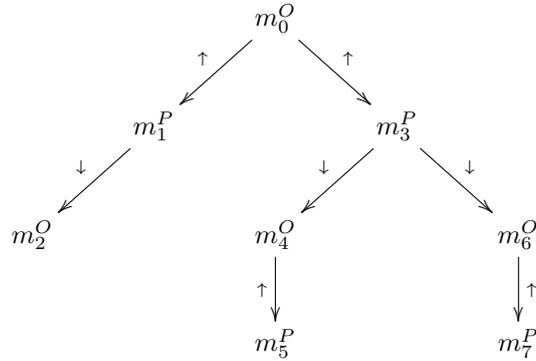
Par exemple, considérons le  $\lambda$ -terme linéaire

$$\lambda xy.y(\lambda z.x(\lambda.z))(\lambda t.t) \quad : \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow D \quad (2.18)$$

sous forme normale de tête  $\eta$ -longue. Le type de ce terme peut être vu comme une formule de logique linéaire en utilisant la traduction  $A \Rightarrow B = \uparrow A^* \wp B$  [Gir01, FH02, Lau04]. Ainsi, la formule linéaire correspondant au type est

$$\uparrow(\downarrow A \otimes B^*) \wp \uparrow(\downarrow(\uparrow A^* \wp B) \otimes \downarrow(\uparrow C^* \wp C) \otimes D^*) \wp D$$

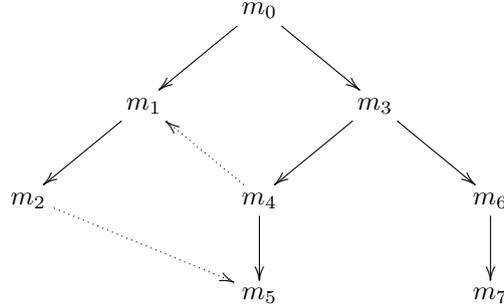
On en déduit alors l'arène



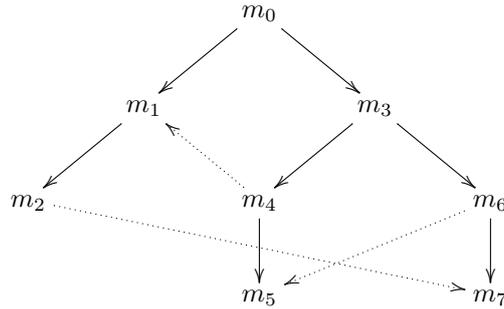
qui est précisément l'arène obtenue dans la sémantique HO en interprétant toutes les variables de types  $(A, B, \dots)$  par l'arène contenant un unique coup Opposant. Nous avons indiqué les polarités en exposant des coups ( $O$  pour Opposant et  $P$  pour Joueur). Les coups Opposant correspondent aux abstractions des  $\lambda$ -termes (dans le terme (2.18), le coup  $m_0$  correspond à l'abstraction  $\lambda xy$ ,  $m_4$  à  $\lambda z$ ,  $m_6$  à  $\lambda t$  et  $m_2$  à l'abstraction 0-aire), les coups Joueur correspondent aux variables liées (dans le terme (2.18),  $m_1$  correspond à  $x$ ,  $m_3$  à  $y$ ,  $m_5$  à  $z$  et  $m_7$  à  $t$ ).

La stratégie  $\sigma$  correspondant au  $\lambda$ -terme présenté est l'ensemble des parties alternées générées par l'ordre partiel obtenu à partir de l'ordre partiel du jeu en

ajoutant les dépendances figurées en pointillés



Ainsi, la stratégie  $\sigma$  est la plus petite stratégie close par préfixe contenant les parties  $m_0 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_5 \cdot m_6 \cdot m_7$ ,  $m_0 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_1 \cdot m_6 \cdot m_7 \cdot m_2 \cdot m_5$  et  $m_0 \cdot m_3 \cdot m_6 \cdot m_7 \cdot m_4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_5$ . Deux coups sont reliés par un connecteur  $\mathcal{A}$  si leur ancêtre commun le plus bas dans l'arbre est un coup Opposant ( $m_1$  et  $m_3$  par exemple) et par un connecteur  $\otimes$  si leur ancêtre est un coup Joueur ( $m_4$  et  $m_6$  par exemple). Les conditions d'innocence imposent alors aux stratégies de ne pas faire dépendre l'un de l'autre deux coups connectés par un tenseur. Par exemple, le coup  $m_7$  ne peut dépendre du coup  $m_4$  : un terme correspondant à la stratégie



ressemblerait en effet au terme

$$\lambda xy.y(\lambda z.x(\lambda.t))(\lambda t.z)$$

dans lequel la portée des variables  $z$  et  $t$  n'est pas respectée !

L'interprétation donnée peut être étendue à des fragments plus riches de la logique linéaire que le fragment multiplicatif. La catégorie n'a pas les produits finis pour les mêmes raisons que dans les jeux de Conway – une explication détaillée de la situation dans ces jeux peut être trouvée dans [Mel05a]. La sous-catégorie pleine dont les objets sont les jeux négatifs (dans lesquels toute partie commence par un coup Opposant) est monoïdale close et a les produits finis. Elle constitue donc un modèle du fragment intuitionniste de MALL mais pas de MALL entier, car cette catégorie n'est pas  $*$ -autonome.

La sous-catégorie dont les stratégies sont négatives (dans lesquelles toute partie commence par un coup Opposant) est monoïdale close et  $*$ -autonome. L'exponentielle  $!A$  d'un jeu  $A$  peut être décrite comme un tenseur infini  $A \otimes A \otimes \dots$  de copies du jeu  $A$ . Il faut alors imposer aux stratégies de jouer *uniformément* sur ces copies, en leur imposant de respecter une relation d'équivalence comme

dans les jeux [AJM00], ce qui peut être reformulé comme une invariance par actions de groupe sur les coups [Mel03]. L'exponentielle libre peut être directement calculée, de la même façon que dans les jeux de Conway, en utilisant le calcul du comonoïde commutatif libre  $!A$  sur un jeu  $A$  donné par Tabareau [Tab08], permettant ainsi de donner une interprétation du fragment MELL de la logique linéaire.

### 2.5.8 Jeux asynchrones et L-réseaux

La *ludique* est une sémantique interactive, proche des sémantiques de jeux, introduite par Girard [Gir01]. Elle n'est pas définie comme un modèle externe de la logique linéaire, mais extraite de la logique linéaire : les stratégies, appelées *desseins*, sont construites à partir de preuves focalisées, en ne gardant dans les séquents que les positions relatives des sous-formules utilisées. Les jeux sont reconstruits a posteriori en utilisant une notion d'orthogonalité entre les stratégies et les contre-stratégies. Récemment, la notion de dessein a été relâchée par Curien, Faggian et Maurel [FM05, CF05] afin de fournir un modèle plus concurrent, les *L-réseaux*. Nous indiquons dans cette section les rapports qu'ils entretiennent avec les jeux que nous avons développés.

#### Ludique

La propriété de focalisation en logique linéaire [And92] nous apprend que l'on peut considérer des blocs de connecteurs de même polarité comme un unique connecteur, appelé *connecteur synthétique*, et donner des règles d'introductions pour ces connecteurs. Ainsi, la règle correspondant au connecteur synthétique ( $-&-$ )  $\wp$  est

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, C \quad \Gamma \vdash \Delta, B, C}{\Gamma \vdash \Delta, (A \& B) \wp C}$$

De plus, une preuve de logique linéaire peut être réorganisée de sorte à considérer les groupes maximaux de connecteurs de même polarité comme des connecteurs synthétiques, et à utiliser les règles généralisées pour ces connecteurs, introduisant alternativement des connecteurs synthétiques négatifs et positifs. En utilisant les distributivités des connecteurs, on montre ainsi que l'on peut se restreindre à considérer les formules construites par la grammaire

$$P ::= \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \bigotimes_{1 \leq j \leq k_i} N_i^j \quad \text{et} \quad N ::= \big\& \big\wp_{1 \leq i \leq n} \big\wp_{1 \leq j \leq k_i} P_i^j$$

et les preuves engendrées par les règles suivantes.

- Règles positives :

$$\frac{(N_i^1)^* \vdash \Gamma_1 \quad \dots \quad (N_i^{k_i})^* \vdash \Gamma_{k_i}}{\vdash \Gamma, \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \bigotimes_{1 \leq j \leq k_i} N_i^j}$$

où les  $\Gamma_i$  forment une partition de  $\Gamma$ .

- Règles négatives :

$$\frac{\vdash \Gamma, P_1^1, \dots, P_1^{k_1} \quad \dots \quad \vdash \Gamma, P_n^1, \dots, P_n^{k_n}}{(\big\&_{1 \leq i \leq n} \big\wp_{1 \leq j \leq k_i} P_i^j)^* \vdash \Gamma}$$

L'un des principes de base de la ludique est de ne garder des formules que les « localités relatives ». Ainsi, on va assigner à toute formule une *adresse* (ou *locus*), représentée par une liste d'entiers. Si  $\xi$  est une adresse représentant une formule  $A$ , la concaténation  $\xi i$  de la liste  $\xi$  avec un entier  $i$ , appelé un *biais*, représentera une sous-formule immédiate de  $A$ . Par exemple, si  $\xi$  est l'adresse d'une formule  $(A \otimes B) \oplus C$ , on peut assigner les adresses  $\xi 1$ ,  $\xi 2$ ,  $\xi 11$  et  $\xi 12$  aux sous-formules respectives  $A \otimes B$ ,  $C$ ,  $A$  et  $B$ . Deux adresses sont *disjointes* si elles n'ont pas de préfixe commun non vide. La notion de séquent est alors remplacée par celle d'*interface* (ou *fourche*) qui est une paire  $\Xi \vdash \Lambda$  où  $\Xi$  et  $\Lambda$  sont des ensembles finis d'adresses deux à deux disjointes, tels que  $\Xi$  ait au plus un élément ; les adresses de  $\Xi$  sont *négatives* et celles de  $\Lambda$  sont *positives*. Les règles seront étiquetées par des *actions* qui sont soit le symbole  $\boxtimes$  (appelé *daimon*), soit un triplet  $(\epsilon, \xi, I)$ , où  $\epsilon$  est une polarité  $+$  (positive) ou  $-$  (négative),  $\xi$  est une adresse, et  $I$  est une *ramification*, c'est-à-dire un ensemble fini de biais. Le daimon est considéré comme une action de polarité positive. Les *dessins* sont des arbres dont les arêtes sont des interfaces et les sommets sont des actions, formés par les règles suivantes qui reflètent les règles précédemment décrites.

- Règles positives :

$$\frac{\dots \quad \xi i \vdash \Lambda_i \quad \dots}{\vdash \xi, \Lambda} (+, \xi, I)$$

où  $I$  est une ramification, il y a une prémisses pour tout  $i \in I$ , et les  $\Lambda_i$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $\Lambda$ .

- Règles négatives :

$$\frac{\dots \quad \vdash \xi I_i, \Lambda_i \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda} \{(-, \xi, I_1), (-, \xi, I_2), \dots\}$$

il y a une prémisses pour chacune des ramifications  $I_i$  qui peuvent être en nombre infini dénombrable, et les  $\Lambda_i$  sont inclus dans  $\Lambda$ . La notation  $\xi I$  désigne l'ensemble des  $\xi i$  pour  $i \in I$ .

- Règle du daimon :

$$\frac{}{\vdash \Lambda} \boxtimes$$

La dernière règle n'a pas de contrepartie dans les preuves. Elle correspond aux observations que peuvent faire des contre-preuves. Les *desseins* sont obtenus par un léger quotient des dessins motivé par des raisons techniques.

### L-réseaux

Les *L-réseaux corrects* étendent la notion de dessin en généralisant leur structure d'arbre à des graphes asynchrones dirigés. Leur définition se fait en deux temps. Les L-réseaux sont d'abord définis, ils sont l'équivalent des structures de preuves pour les réseaux. Les L-réseaux corrects sont ensuite obtenus en imposant un critère d'acyclicité aux L-réseaux. Dans la suite, nous dirons qu'une action  $(\epsilon, \xi, I)$  *génère* une action  $(\epsilon', \xi', I')$  lorsque  $\xi'$  est une sous-adresse *immédiate* de  $\xi$ , c'est-à-dire qu'il existe un biais  $i$  tel que  $\xi' = \xi i$ .

**Définition 2.109** (L-réseau). Un *L-réseau*  $\mathfrak{D}$  sur une interface  $\Xi \vdash \Lambda$  est la donnée d'un graphe acyclique orienté bipartite sur un ensemble  $M$  de sommets, étiquetés par des actions dont les adresses sont des sous-adresses de l'une des adresses de l'interface, satisfaisant les conditions suivantes.

1. *Vues*. Pour tout sommet  $m$ , les adresses apparaissant dans sa clôture vers le bas  $m \downarrow$  sont deux à deux distinctes.
2. *Parents*. Pour tout sommet étiqueté par une action  $m = (\epsilon, \xi, I)$ , soit l'adresse  $\xi$  appartient à l'interface et sa polarité est celle indiquée par l'interface, soit l'action a été générée par l'action d'un sommet qui est son prédécesseur  $n \twoheadrightarrow m$  de polarité opposée. De plus, si l'action  $m$  est négative alors ce sommet  $n$  est l'unique prédécesseur immédiat de  $m$  (i.e. il existe une arête  $n \rightarrow m$ ).
3. *Positivité*. Si une action est maximale alors elle est positive.
4. *Fratrerie*. Deux sommets frères négatifs  $m_1 = (-, \xi, I_1)$  et  $m_2 = (-, \xi, I_2)$  partageant la même adresse  $\xi$  sont distincts (i.e.  $I_1 \neq I_2$ ).
5. *Additifs*. Étant donnés deux sommets positifs  $m_1 = (+, \xi, I_1)$  et  $m_2 = (+, \xi, I_2)$  partageant la même adresse  $\xi$ , il existe une paire de sommets négatifs frères  $n_1$  et  $n_2$ , partageant la même adresse, tels que  $n_1 \leq m_1$  et  $n_2 \leq m_2$ .

Ci-dessus, deux sommets d'un tel réseau sont *frères* lorsqu'ils ont le même prédécesseur ou sont tous deux initiaux.

Les adresses permettent de reconstruire une notion de règle :

**Définition 2.110** (Règle). Une *règle positive* d'un L-réseau est un ensemble réduit à un sommet positif de ce réseau, une *règle négative* est un ensemble maximal de sommets partageant la même adresse.

Le critère de correction des L-réseaux est une adaptation du critère d'acyclicité [DR89] caractérisant les structures de preuves séquentialisables. Une arête *aiguillée* d'une règle  $R$  est une arête ayant l'une des actions de  $R$  pour source. Un *chemin* dans un L-réseau est une suite  $m_1, \dots, m_k$  de sommets tels que pour tout indice  $i$  il existe une arête  $m_i \rightarrow m_{i+1}$  ou  $m_i \leftarrow m_{i+1}$ . Un tel chemin est dit *aiguillé* s'il passe par au plus une arête aiguillée pour chaque règle négative  $R$ .

**Définition 2.111** (L-réseau correct). Un L-réseau  $\mathfrak{D}$  est *correct* [CF06] lorsque pour toute union non vide  $C$  de cycles aiguillés, il existe une règle négative  $R$  qui n'intersecte pas  $C$ , deux sommets distincts  $m_1$  et  $m_2$  de  $R$ , et deux sommets distincts  $n_1$  et  $n_2$  de  $C$ , tels qu'il existe des chemins  $m_1 \twoheadrightarrow n_1$  et  $m_2 \twoheadrightarrow n_2$ .

## Stratégies

Afin de comparer les L-réseaux et les stratégies que nous avons introduites, il nous faut « traduire » les L-réseaux en sémantique des jeux. Une comparaison entre les deux formalismes peut par exemple être trouvée dans [FH02].

Une interface  $A = \Xi \vdash \Lambda$  génère une arène  $(M_A, \vdash_A)$ , appelée *arène universelle*, de la façon suivante. La polarité d'une adresse  $\xi$  de la base est celle

donnée par la base (négative si  $\xi \in \Xi$  et positive si  $\xi \in \Lambda$ ) et la polarité d'une adresse  $\xi i$  est l'opposé de la polarité de l'adresse  $\xi$ . Les coups  $m \in M_A$  sont les actions  $(\epsilon, \xi, I)$ , où  $\xi$  est une sous-adresse d'une adresse de la base,  $\epsilon$  est la polarité de l'adresse  $\xi$ , et  $I$  est une ramification quelconque. Les coups justifiés par un coup  $m = (\epsilon, \xi, I)$  sont les coups de la forme  $n = (\bar{\epsilon}, \xi i, J)$ , ce que l'on note  $m \vdash_A n$ , où  $\bar{\epsilon}$  est la polarité opposée à  $\epsilon$ , le biais  $i$  est un élément de  $I$ , et  $J$  est une ramification quelconque. Notons  $\leq_A$  l'ordre partiel sur  $M_A$  défini comme la clôture réflexive et transitive de la relation  $\vdash_A$ . Notons de plus  $\simeq_A$  la relation d'incompatibilité sur les éléments de  $M_A$  telle que deux coups distincts  $m$  et  $n$  sont incompatibles si leurs adresses ne sont pas disjointes. Le jeu *universel* associé à l'interface  $A$  est le graphe de transitions associé à la structure d'événements  $(M_A, \leq_A, \simeq_A)$  avec la position vide comme position initiale.

Un L-réseau  $\mathfrak{D}$  sur l'interface  $A = \Xi \vdash \Lambda$  induit quant à lui une stratégie sur le jeu associé à  $A$  dont les parties sont les chemins

$$* \xrightarrow{m_1} x_1 \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} x_{k-1} \xrightarrow{m_k} x_k$$

qui respectent les dépendances imposées par le L-réseau  $\mathfrak{D}$ . Réciproquement, le Théorème 1.68 fournit un moyen de reconstruire un L-réseau à partir de la stratégie associée. Les stratégies provenant de L-réseaux peuvent être caractérisées par la propriété suivante.

**Propriété 2.112.** *Soit  $A = \Xi \vdash \Lambda$  une interface. Une stratégie  $\sigma$  sur le jeu associé à  $A$  est l'image d'un L-réseau si et seulement si elle est*

- *non vide,*
- *close par préfixe,*
- *ingénue,*
- *et fortement courtoise.*

Ainsi, ces stratégies sont les stratégies séquentiellement innocentes que nous avons introduites à la Section 2.4, sans la condition de séquentialité, dans la variante donnée à la Remarque 2.85. Le lien entre les stratégies innocentes et les L-réseaux a aussi été étudié d'un point de vue ludique dans [CF06]. Comme nous l'avons expliqué à l'Exemple 2.108, le critère d'ordonnancement des stratégies est plus faible que le critère de correction des L-réseaux multiplicatifs de la Définition 2.111, car il ne détecte que les cycles orientés.

Le rapprochement entre les L-réseaux et les jeux asynchrones semble être intéressant et prometteur. En particulier, Faggian et Piccolo ont récemment montré que les L-réseaux sont un modèle du fragment finitaire et déterministe des processus du  $\pi$ -calcul asynchrone linéaire, typés par un système proche du fragment focalisé de la logique linéaire multiplicative et additive [FP07], en se fondant sur les travaux de Berger, Honda et Yoshida qui proposent un système de type caractérisant les processus se comportant comme des termes PCF [BHY01]. La reformulation de leur résultat dans le cadre des jeux asynchrones permet d'envisager diverses reformulations et généralisations de leur résultat.

Deuxième partie

Causalité dans les  
diagrammes de corde

## Chapitre 3

# Présentations de catégories monoïdales

---

Pour comprendre plus précisément la notion de présentation d'une catégorie monoïdale que nous allons développer ici, commençons par rappeler le cas moins général mais plus classique des présentations de monoïdes. Une *présentation*

$$\langle E_0 \mid E_1 \rangle \quad (3.1)$$

d'un monoïde est la donnée d'un ensemble  $E_0$ , dont les éléments sont appelés *générateurs*, et d'un ensemble  $E_1$  de couples de mots du monoïde libre  $E_0^*$  sur  $E_0$ , voir l'Exemple 0.21 pour une description du monoïde libre. Les éléments  $(u, v)$  de  $E_1$  sont appelés *relations* et souvent notés  $u = v$ . Une présentation (3.1) est dite *finie* lorsque les ensembles  $E_0$  et  $E_1$  sont finis. Un monoïde  $M$  est dit *présenté* par une présentation (3.1) lorsqu'il est isomorphe au quotient  $E_0^*/\equiv$  du monoïde libre  $E_0^*$  par la relation  $\equiv$ , ce que l'on note

$$M \cong \langle E_0 \mid E_1 \rangle$$

où la relation  $\equiv$  est définie comme la plus petite relation sur  $E_0$ , telle que  $u \equiv v$  pour tout couple  $(u, v) \in E_1$ , qui soit une congruence, c'est-à-dire telle que pour tous mots  $u_1, u, u_2, v \in E_0^*$ ,  $u \equiv v$  implique  $u_1 \cdot u \cdot u_2 \equiv u_1 \cdot v \cdot u_2$ .

Par exemple, le monoïde additif  $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$  (où  $\mathbb{N}_2$  désigne le monoïde  $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$ ) admet la présentation finie

$$\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N} \cong \langle a, b \mid ab = ba, a^2 = 1 \rangle \quad (3.2)$$

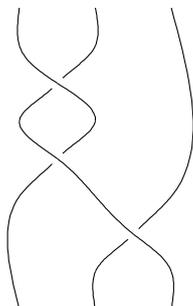
Ci-dessus, l'élément 1 représente l'unité du monoïde  $\{a, b\}^*$ . Bien évidemment, il n'y a pas unicité de la présentation, par exemple

$$\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N} \cong \langle a, b, c \mid ab = ba, a^2 = 1, c = 1 \rangle \quad (3.3)$$

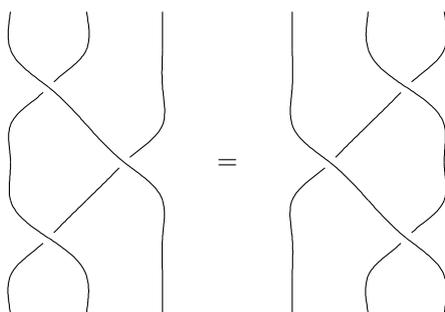
est une autre présentation du même monoïde. Les présentations finies sont particulièrement intéressantes, car elles permettent d'étudier et de manipuler des objets potentiellement infinis, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus. De plus, la présentation est un objet purement algébrique tandis que le monoïde peut être d'une autre nature. C'est par exemple le cas pour le monoïde  $B_3$  des tresses positives à 3 brins : ce monoïde est présenté par

$$B_3 \cong \langle a, b \mid aba = bab \rangle \quad (3.4)$$

mais une description directe des éléments du monoïde peut être donnée de façon géométrique comme des diagrammes de la forme



représentant la projection sur le plan de fils dans l'espace, considérés modulo certaines déformations continues (ou *isotopies*). Le générateur  $a$  (resp.  $b$ ) peut être vu comme l'échange des deux premiers (resp. derniers) brins de la tresse et la multiplication de deux diagrammes consiste à les mettre verticalement bout à bout en reliant les trois fils pendants des deux diagrammes. Ainsi, la relation de la présentation (3.4) peut être représentée par



On reconnaît alors bien sûr l'égalité de Yang-Baxter.

Il n'est souvent pas immédiat de montrer qu'un couple  $\langle E_0 \mid E_1 \rangle$  présente un monoïde. La réécriture peut ici nous fournir des outils très efficaces pour mener à bien ce genre de preuves. Par exemple, l'isomorphisme (3.2) peut être montré en orientant les relations de la présentation

$$ba \rightarrow ab \quad a^2 \rightarrow 1$$

définissant ainsi un système de réécriture sur les mots de  $\{a, b\}^*$ . De plus, il est facile de montrer qu'il est terminant et confluent, et que les formes normales sont de la forme  $a^i b^j$  où  $i \in \{0, 1\}$  et  $j \in \mathbb{N}$ . Ces formes normales sont donc en bijection avec  $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$ . De plus, par définition, le système de réécriture est tel que deux mots  $u$  et  $v$  sont tels que  $u \equiv v$ , où  $\equiv$  est la congruence associée à la présentation, si et seulement si  $u \leftrightarrow^* v$ , où  $\leftrightarrow^*$  est la plus petite relation d'équivalence contenant la relation de réécriture  $\rightarrow$ . Par la propriété du Church-Rosser [BN99], on en déduit que les termes  $u$  et  $v$  sont équivalents modulo  $\equiv$  si et seulement si ils ont la même forme normale. On a ainsi montré que les ensembles  $\{a, b\}^*/\equiv$  et  $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$  sont isomorphes. Pour montrer l'isomorphisme (3.2), il ne nous reste qu'à vérifier que les produits et les unités des deux

monoïdes sont compatibles avec l'isomorphisme. C'est immédiat pour les unités. En ce qui concerne le produit, par confluence il nous suffit de vérifier qu'un mot de la forme  $a^i b^j a^k b^l$  se réécrit en  $a^{(i+k \bmod 2)} b^{j+l}$ .

Cette méthode n'est pas toujours applicable, car les relations d'une présentation ne sont pas toujours orientables de sorte à obtenir un système de réécriture convergent (c'est-à-dire terminant et confluent); c'est par exemple le cas de la présentation (3.4) qui ne peut pas être orientée de façon confluyente. Les présentations n'étant pas uniques, on aurait cependant pu espérer que tout monoïde finiment présentable admette une présentation finie dont les relations orientées forment un système de réécriture convergent. Ceci s'avère être impossible dans le cas général, un contre-exemple ayant été exhibé par Squier [Squ87, LP91] en étudiant une homologie des monoïdes. Il n'est cependant pas nécessaire d'avoir un système de réécriture convergent. En effet, pour prouver l'isomorphisme (3.2), il suffit de montrer que tout mot de  $\{a, b\}^*$  est équivalent, modulo  $\equiv$ , à un mot de la forme  $a^i b^j$  avec  $i \in \{0, 1\}$  et  $j \in \mathbb{N}$ , ce que nous appellerons une *forme canonique*, et que cette forme canonique des mots est compatible avec le produit et l'unité. Les mots  $u$  de  $\{a, b\}^*$  pouvant être engendrés par la grammaire

$$u ::= \varepsilon \mid ua \mid ub$$

(où  $\varepsilon$  représente le mot vide), on peut finalement se contenter de raisonner par induction sur  $u$  pour montrer la compatibilité avec le produit, ce qui revient à constater les égalités

$$\varepsilon \equiv a^0 b^0, \quad a^i b^j a \equiv a^{(i+1 \bmod 2)} b^j \quad \text{et} \quad a^i b^j b \equiv a^i b^{j+1}.$$

Les formes canoniques étant clairement en bijection avec les éléments de  $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}$ , cela suffit à montrer l'isomorphisme de monoïdes (3.2). C'est essentiellement cette méthode que nous utiliserons dans cette thèse pour définir des présentations de catégories.

Le cas que nous traitons dans cette partie est plus complexe, car il s'agit de donner une présentation finie d'une catégorie **Jeux** de jeux et stratégies que nous allons définir, et non d'un monoïde. Plus explicitement, nous allons donner un ensemble fini de stratégies, les générateurs, qui est tel que l'on peut obtenir toute stratégie par composition et produit tensoriel de générateurs (de façon plus abstraite, on a un foncteur plein de la catégorie monoïdale générée librement par nos générateurs vers la catégorie **Jeux**). De plus, nous axiomatiserons de façon finie l'équivalence  $\equiv$ , entre les composées et produits tensoriels formels de générateurs, telle que deux morphismes sont équivalents si et seulement si ils représentent exactement la même stratégie.

### 3.1 La catégorie simpliciale

Il est plus aisé de définir une bonne notion de monoïde libre sur un ensemble de générateurs que de définir une bonne notion de « catégorie monoïdale libre sur un ensemble de générateurs ». Avant d'introduire à la section suivante les polygraphes qui permettent de réaliser cette tâche, nous commençons par donner une idée de la situation en décrivant une façon de présenter la catégorie simpliciale.

Cette catégorie est d'une importance capitale à la fois en géométrie, où elle permet en particulier de définir la notion d'objet simplicial augmenté [Hat02], et en algèbre, où, comme nous le verrons, elle est étroitement liée à la notion de monoïde.

**Définition 3.1** (Catégorie simpliciale). La *catégorie simpliciale*  $\Delta$  a pour objets les entiers naturels  $\underline{n}$ . Par un « entier naturel »  $\underline{n}$  on entend ici l'ensemble fini

$$\underline{n} = \{ 0, 1, \dots, (n - 1) \}.$$

Les morphismes  $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  sont les fonctions faiblement croissantes et la composition et les identités sont celles habituelles.

Cette catégorie est strictement monoïdale lorsqu'on la munit du produit tensoriel  $\otimes$  induit par l'addition sur les objets ( $\underline{m} \otimes \underline{n} = \underline{m + n}$ ) et défini sur deux morphismes  $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  et  $g : \underline{o} \rightarrow \underline{p}$  par la fonction

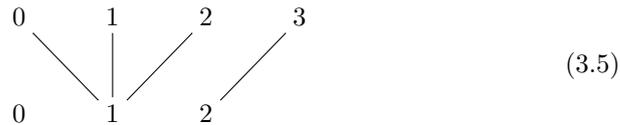
$$(f \otimes g)(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i < o \\ n + g(i - o) & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire la fonction obtenue en « superposant l'une au dessus de l'autre » les fonctions  $f$  et  $g$ . Dans la suite, nous omettrons parfois de souligner les objets et noterons simplement  $n$  pour l'ensemble  $\underline{n}$ .

On sait depuis longtemps que la catégorie simpliciale peut être présentée par générateurs et relations de la façon suivante [Mac71]. L'objet 1 étant terminal dans la catégorie  $\Delta$ , notons  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et  $\eta : 0 \rightarrow 1$  les fonctions ainsi définies de façon unique. Nous définissons aussi des notations pour les morphismes

$$\delta_i^n = i \otimes \eta \otimes (n - i) : n \rightarrow n + 1 \quad \text{et} \quad \sigma_i^{n+1} = i \otimes \mu \otimes (n - i) : n + 2 \rightarrow n + 1$$

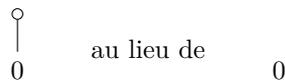
pour tout entier  $n$  et tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n$ . Graphiquement, on peut représenter une fonction  $f : m \rightarrow n$  par son graphe, en reliant les éléments de  $m$  aux éléments de  $n$ . Par exemple, la fonction  $f : 3 \rightarrow 3$  qui est telle que  $f(0) = f(1) = f(2) = 1$  et  $f(3) = 2$  peut être représentée par



les entiers du haut étant les éléments de  $m$  et ceux du bas les éléments de  $n$ . Dans la suite, nous utiliserons une notation légèrement différente et noterons



pour  $\mu$  et



pour  $\eta$ ; de plus, on omettra souvent les entiers de la source et du but. Ainsi, le morphisme (3.5) pourra être représenté par



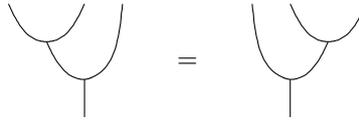
Nous verrons par la suite que ces diagrammes correspondent précisément à des diagrammes de corde. Il est aisé de constater que les morphismes  $\mu$  et  $\eta$  vérifient les identités

$$\mu \circ (\mu \otimes 1) = \mu \circ (1 \otimes \mu) \tag{3.6}$$

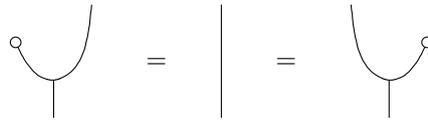
$$\mu \circ (\eta \otimes 1) = 1 \tag{3.7}$$

$$\mu \circ (1 \otimes \eta) = 1 \tag{3.8}$$

que l'on peut représenter graphiquement par



et



Ces égalités montrent que l'objet  $(1, \mu, \eta)$  est un monoïde dans la catégorie monoidale stricte  $\Delta$  : l'égalité (3.6) impose à la multiplication  $\mu$  d'être associative et les égalités (3.7) et (3.8) imposent à l'unité  $\eta$  d'être un élément neutre à gauche et à droite de la multiplication. De plus, les morphismes  $\delta_i^n$  et  $\sigma_i^n$  vérifient les identités suivantes pour tout entier  $n$  :

$$\delta_i^{n+1} \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \delta_i^n \quad \text{pour } i \leq j, \tag{3.9}$$

$$\sigma_j^{n+1} \sigma_i^{n+2} = \sigma_i^{n+1} \sigma_{j+1}^{n+2} \quad \text{pour } i \leq j, \tag{3.10}$$

$$\sigma_j^{n+1} \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \sigma_{j-1}^n & \text{pour } i < j, \\ n + 1 & \text{pour } i = j \text{ ou } i = j + 1, \\ \delta_{i-1}^n \sigma_j^n & \text{pour } i > j + 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

où les indices  $i$  et  $j$  sont tels que les morphismes soient définis. Les morphismes  $\delta_i^n$  et  $\sigma_i^n$  et les égalités ci-dessus « axiomatisent » la catégorie  $\Delta$  dans le sens où tout morphisme de  $\Delta$  peut être exprimé comme une composée de ces morphismes (éventuellement par une composée 0-aire, c'est-à-dire l'identité) et deux composée formelles de ces morphismes représentent le même morphisme de  $\Delta$  si et seulement si on peut montrer qu'elles sont égales en utilisant les égalités ci-dessus.

**Propriété 3.2.** Notons  $D$  le graphe  $D = (V, E, \partial_0, \partial_1)$  dont

- les sommets sont les entiers ( $V = \mathbb{N}$ ),
- les arrêtes sont soit de la forme  $\delta_i^n$ , soit de la forme  $\sigma_i^{n+1}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq i \leq n$ , avec pour sources et buts

$$\partial_0(\delta_i^n) = i, \quad \partial_1(\delta_i^n) = i+1, \quad \partial_0(\sigma_i^{n+1}) = i+1 \quad \text{et} \quad \partial_1(\sigma_i^{n+1}) = i+2$$

et  $D^*$  la catégorie libre sur ce graphe (voir l'Exemple 0.21). Notons de plus  $\equiv$  la plus petite congruence – par rapport à la composition – contenant les égalités (3.9), (3.10) et (3.11), c'est-à-dire la plus petite relation d'équivalence contenant ces égalités vues comme des relations entre chemins du graphe  $D$  (ou encore entre morphismes de  $D^*$ ), par exemple

$$n \xrightarrow{\delta_j^n} n+1 \xrightarrow{\delta_i^{n+1}} n+2 \quad \equiv \quad n \xrightarrow{\delta_i^n} n+1 \xrightarrow{\delta_{j+1}^{n+1}} n+2$$

pour (3.9), et telle que pour tous morphismes  $f, f' : m \rightarrow n$  et  $g, g' : n \rightarrow o$ , si  $f \equiv f'$  et  $g \equiv g'$  alors  $g \circ f \equiv g' \circ f'$ . Alors, la catégorie  $\Delta$  est isomorphe à la catégorie  $D^*/\equiv$  obtenue à partir de  $D^*$  en quotientant les morphismes par  $\equiv$ .

On pourrait donc considérer que nous avons ainsi introduit une notion satisfaisante de présentation de la catégorie simpliciale. Cependant, cette dernière souffre de certaines lacunes. En particulier, la présentation n'est pas finie, car il n'y a ni un nombre fini de générateurs, ni un nombre fini de relations, ceux-ci étant indexés sur un entier  $n$ . Pour améliorer ce point, remarquons que la construction de la catégorie à partir de la présentation ne fait à aucun moment intervenir la structure monoïdale de la catégorie. Or, les seuls morphismes  $\mu$  et  $\eta$  permettent de générer les morphismes  $\delta_i^n$  et  $\sigma_i^n$  dans le sens où ces derniers peuvent être obtenus par composition et produit tensoriels de  $\mu$  et  $\eta$ . Pour générer les morphismes de la catégorie à partir d'un nombre fini de générateurs, il suffit donc de générer directement la « catégorie monoïdale stricte libre contenant les générateurs  $\mu$  et  $\eta$  », les morphismes de cette catégorie étant obtenus par des composées et des produits tensoriels formels de ces morphismes, quotientés par la relation « minimale » qui transforme cette construction en catégorie monoïdale (par exemple l'associativité de la composition et du tenseur, ou encore la loi d'échange définie à la Propriété 0.29). De plus, les relations (3.6), (3.7) et (3.8), ainsi que les égalités vérifiées par toute catégorie monoïdale stricte, permettent de déduire les égalités (3.9), (3.10) et (3.11). Par exemple, l'égalité (3.10) peut être montrée de la façon suivante en distinguant deux cas.

- Si  $i = j$  alors

$$\begin{aligned} & \sigma_i^{n+1} \sigma_i^{n+2} \\ &= (i \otimes \mu \otimes (n-i)) \circ (i \otimes \mu \otimes (n+1-i)) \\ &= i \otimes (\mu \circ (\mu \otimes 1)) \otimes (n-i) && \text{par la loi d'échange} \\ &= i \otimes (\mu \otimes (1 \otimes \mu)) \otimes (n-i) && \text{par (3.6)} \\ &= (i \otimes \mu \otimes (n-i)) \circ ((i+1) \otimes \mu \otimes (n-i)) && \text{par la loi d'échange} \\ &= \sigma_i^{n+1} \sigma_{i+1}^{n+2} \end{aligned}$$

- Si  $i < j$  alors

$$\begin{aligned}
& \sigma_j^{n+1} \sigma_i^{n+2} \\
&= (j \otimes \mu \otimes (n-j)) \circ (i \otimes \mu \otimes (n+1-i)) \\
&= i \otimes \mu \otimes (j-i-1) \otimes \mu \otimes (n-j) && \text{par la loi d'échange} \\
&= (i \otimes \mu \otimes (n-i)) \circ (j+1 \otimes \mu \otimes (n-j)) && \text{par la loi d'échange} \\
&= \sigma_i^{n+1} \sigma_{j+1}^{n+2}
\end{aligned}$$

(les identités peuvent être calculées en utilisant la loi  $\mu \circ 2 = 1 \circ \mu$ ).

Les relations (3.6), (3.7) et (3.8) suffisent donc à engendrer toutes les égalités entre morphismes de la catégorie simpliciale si l'on prend en compte le caractère monoïdal de la catégorie lors de la génération de la catégorie libre, c'est-à-dire si l'on génère une catégorie monoïdale stricte libre au lieu d'une catégorie libre. Les polygraphes vont précisément nous permettre de réaliser cette opération de façon formelle.

## 3.2 Polygraphes

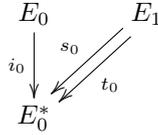
Les polygraphes ont été définis par Street [Str76] dans leur version 2-dimensionnelle sous le nom de *computads* – que l'on pourrait traduire de façon peu élégante par *calculades* – puis généralisés en dimension quelconque par Power [Pow90] et réintroduits de façon indépendante par Burroni [Bur93] sous le nom de *polygraphes*. Ces structures algébriques permettent de générer des  $n$ -catégories (strictes) libres à partir d'ensembles  $E_0, \dots, E_n$  de générateurs typés des  $i$ -cellules pour  $0 \leq i \leq n$ . En particulier, un 2-polygraphe dont l'ensemble  $E_0$  des 0-cellules est réduit à un objet va générer une 2-catégorie à une 0-cellule, c'est-à-dire une catégorie monoïdale en vertu de la Propriété 0.33. Ainsi, une présentation de la catégorie simpliciale va pouvoir être donnée à partir d'un ensemble  $E_0$  réduit à un élément, d'un ensemble  $E_1 = \{1\}$  réduit lui aussi à un élément, l'objet à partir duquel seront générés tous les objets de  $\Delta$  par produit tensoriel, d'un ensemble  $E_2 = \{\mu, \eta\}$ , l'ensemble des générateurs de morphismes de  $\Delta$ , ainsi que les types de ces générateurs  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et  $\eta : 0 \rightarrow 1$ . Nous décrivons à présent les 2-polygraphes et incitons fortement le lecteur à lire la définition générale donnée dans [Bur93].

Soit  $E_0$  un ensemble dont les éléments sont appelés 0-générateurs. Notons de plus  $E_0^*$  la 0-catégorie libre sur l'ensemble  $E_0^*$ , ainsi que  $i_0 : E_0 \rightarrow E_0^*$  l'injection correspondante

$$\begin{array}{c}
E_0 \\
\downarrow i_0 \\
E_0^*
\end{array}$$

Une 0-catégorie n'étant autre qu'un ensemble, on a bien sûr l'égalité  $E_0^* = E_0$  et  $i_0$  est l'identité sur  $E_0$ . Supposons maintenant de plus la donnée d'un ensemble  $E_1$ , dont les éléments sont appelés 1-générateurs, ainsi que de deux mor-

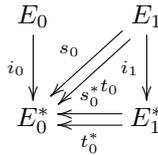
phismes  $s_0 : E_1 \rightarrow E_0^*$  et  $t_0 : E_1 \rightarrow E_0^*$  formant un diagramme



dans la catégorie **Set**. Un tel diagramme est appelé *0-polygraphe*. On peut générer la catégorie libre sur le graphe

$$E_0^* \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{t_0} \end{array} E_1$$

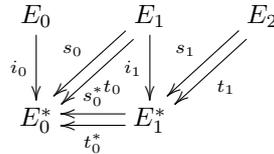
ainsi qu'expliqué dans l'Exemple 0.21. Notons  $E_1^*$  l'ensemble des morphismes de cette catégorie (c'est-à-dire les chemins du graphe), notons  $s_1 : E_1^* \rightarrow E_0^*$  et  $t_1 : E_1^* \rightarrow E_0^*$  les fonctions qui à tout morphisme de cette catégorie associent sa source et son but, et notons  $i_1 : E_1 \rightarrow E_1^*$  la fonction injectant les générateurs des morphismes dans les morphismes (la fonction associant, à toute arête du graphe, le chemin de longueur un correspondant). On obtient ainsi un diagramme



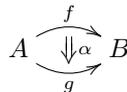
dans la catégorie **Set** qui « commute » dans le sens où  $s_0 = s_0^* \circ i_1$  et  $t_0 = t_0^* \circ i_1$ . On peut alors voir apparaître la construction par induction des polygraphes. Supposons qu'on se donne maintenant un ensemble  $E_2$  de 2-générateurs ainsi que deux morphismes  $s_1 : E_2 \rightarrow E_1^*$  et  $t_1 : E_2 \rightarrow E_1^*$  donnant les sources et buts de ces générateurs, vérifiant les égalités

$$s_0^* \circ s_1 = s_0^* \circ t_1 \quad \text{et} \quad t_0^* \circ s_1 = t_0^* \circ t_1 \tag{3.12}$$

formant ainsi un diagramme



dans la catégorie **Set**. Ce diagramme, ainsi que la structure de catégorie obtenue par la construction libre est appelé un *1-polygraphe*. Les éléments  $\alpha$  de  $E_2$  doivent être vus comme des 2-cellules



où  $f = s_1(\alpha)$  et  $g = t_1(\alpha)$ . Les deux égalités (3.12) expriment le fait que les 1-cellules source et but de  $\alpha$  doivent être parallèles : les 1-cellules  $f$  et  $g$  ont

même source  $A$  et même but  $B$ . On peut construire la 2-catégorie libre dont la catégorie sous-jacente est donnée par le diagramme

$$E_0^* \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{t_0} \end{array} E_1^*$$

ainsi que par les lois de composition et les identités obtenues par la construction libre précédente, et qui contient les éléments de  $E_2$  comme 2-cellules. On obtient ainsi un ensemble  $E_2^*$  de 2-cellules ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E_0 & & E_1 & & E_2 \\ i_0 \downarrow & \swarrow s_0 & \downarrow i_1 & \swarrow s_1 & \downarrow i_2 \\ E_0^* & \xleftarrow{s_0^* t_0} & E_1^* & \xleftarrow{s_1^* t_1} & E_2^* \\ & \xleftarrow{t_0^*} & & \xleftarrow{t_1^*} & \end{array} \quad (3.13)$$

dans la catégorie **Set**, où le morphisme  $i_2$  est l'injection obtenue par la construction libre et les morphismes  $s_1^*$  et  $t_1^*$  sont les sources et buts de la 2-catégorie.

**Définition 3.3** (2-polygraphe). Un 2-polygraphe est la donnée d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & & E_1 & & E_2 & & E_3 \\ i_0 \downarrow & \swarrow s_0 & \downarrow i_1 & \swarrow s_1 & \downarrow i_2 & \swarrow s_2 & \downarrow i_3 \\ E_0^* & \xleftarrow{s_0^* t_0} & E_1^* & \xleftarrow{s_1^* t_1} & E_2^* & \xleftarrow{s_2^* t_2} & E_3^* \\ & \xleftarrow{t_0^*} & & \xleftarrow{t_1^*} & & \xleftarrow{t_2^*} & \end{array} \quad (3.14)$$

dans la catégorie **Set**, dont les ensembles  $E_k^*$  et les morphismes  $i_k$ ,  $s_k^*$  et  $t_k^*$  sont obtenus librement de la façon décrite précédemment, ainsi que la donnée de la structure de 2-catégorie sur le diagramme

$$E_0^* \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0^*} \\ \xrightarrow{t_0^*} \end{array} E_1^* \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1^*} \\ \xrightarrow{t_1^*} \end{array} E_2^*$$

induite par la série de constructions libres. De plus, les égalités

$$s_0^* \circ s_1 = s_0^* \circ t_1, \quad t_0^* \circ s_1 = t_0^* \circ t_1, \quad s_1^* \circ s_2 = s_1^* \circ t_2 \quad \text{et} \quad t_1^* \circ s_2 = t_1^* \circ t_2$$

doivent être vérifiées.

Cette construction peut être poursuivie par induction dans les dimensions supérieures. Ainsi, un 2-polygraphe (3.14) engendre une 3-catégorie, induisant ainsi un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & & E_1 & & E_2 & & E_3 \\ i_0 \downarrow & \swarrow s_0 & \downarrow i_1 & \swarrow s_1 & \downarrow i_2 & \swarrow s_2 & \downarrow i_3 \\ E_0^* & \xleftarrow{s_0^* t_0} & E_1^* & \xleftarrow{s_1^* t_1} & E_2^* & \xleftarrow{s_2^* t_2} & E_3^* \\ & \xleftarrow{t_0^*} & & \xleftarrow{t_1^*} & & \xleftarrow{t_2^*} & \end{array} \quad (3.15)$$

et ainsi de suite. Dans la suite, nous nous intéresserons principalement aux  $n$ -polygraphes dont la dimension est basse (typiquement  $n = 2$  ou  $n = 3$ ), et dont l'ensemble de générateurs en dimension 0 est réduit à un élément.

**Définition 3.4** (Signature monoïdale). Une *signature monoïdale* est la donnée d'un 1-polygraphe ayant un unique 0-générateur. De façon équivalente, une signature monoïdale

$$(E_1, s_1, t_1, E_2)$$

est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & E_2 \\ \downarrow i_1 & \swarrow s_1 & \searrow t_1 \\ E_1^* & & \end{array}$$

dans la catégorie **Set** où  $E_1^*$  est le monoïde libre sur l'ensemble  $E_1$  et  $i_1$  l'injection correspondante. Les éléments de  $E_1$  sont les *1-générateurs*, ou *générateurs des objets*, et les éléments de  $E_2$  sont les *2-générateurs*, ou *générateurs des morphismes*. On notera souvent  $f : A \rightarrow B$  pour dénoter un élément  $f$  de  $E_2$  tel que  $s_1(f) = A$  et  $t_1(f) = B$ .

Nous avons vu que la construction (3.13) permet de générer librement une 2-catégorie à partir d'un 1-polygraphe. Dans le cas d'une signature, la 2-catégorie générée n'aura qu'un seul objet et peut donc être considérée comme une catégorie monoïdale en vertu de la Propriété 0.33. Une description directe et explicite de cette catégorie peut aussi être donnée comme le quotient d'une catégorie de composées et produits tensoriels formels de morphismes.

**Définition 3.5** (Catégorie monoïdale générée par une signature). La catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{E}, \otimes, I)$  générée par une signature  $(E_1, s_1, t_1, E_2)$  a les éléments du monoïde libre  $(E_1^*, \otimes, I)$  sur l'ensemble  $E_1$  comme objets. Son ensemble  $E_2^*$  de morphismes est le plus petit ensemble tel que

- il y a un morphisme  $f : A \rightarrow B$  dans  $E_2^*$  pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $E_2$ ,
- il y a un morphisme  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  dans  $E_2^*$  pour tout élément  $A$  de  $E_1^*$ ,
- pour toute paire de morphismes composables  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de  $E_2^*$ , il y a un morphisme  $g \circ f : A \rightarrow C$  dans  $E_2^*$ ,
- pour toute paire de morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$ , il y a un morphisme  $f \otimes g : A \otimes C \rightarrow B \otimes D$  dans  $E_2^*$ ,

quotienté par la plus petite relation sur les morphismes imposant que

- la composition soit associative et admette les identités comme éléments neutres,
- le produit tensoriel soit associatif et admette  $\text{id}_I$  comme élément neutre,
- la loi d'échange soit satisfaite : pour tous morphismes deux à deux composables  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : D \rightarrow E$  et  $i : E \rightarrow F$ ,

$$(g \circ f) \otimes (i \circ h) = (g \otimes i) \circ (f \otimes h)$$

- les identités soient des transformations naturelles monoïdales : pour tous objets  $A$  et  $B$ ,  $\text{id}_{A \otimes B} = \text{id}_A \otimes \text{id}_B$ .

La catégorie ainsi définie étant librement générée par la signature nous pourrions raisonner par induction sur la taille des morphismes, qui est le nombre de générateurs utilisés pour construire un morphisme.

**Définition 3.6** (Taille). Soit  $(\mathcal{E}, \otimes, I)$  la catégorie monoïdale stricte générée par une signature monoïdale  $(E_1, s_1, t_1, E_2)$ . La *taille*  $|A|$  d'un objet  $A$  est son nombre de lettres en tant que mot du monoïde libre  $(E_1^*, \otimes, I)$  :

$$|I| = 0 \quad \text{et} \quad |X \otimes A'| = 1 + |A'|$$

où  $X$  est un élément de  $E_1$ . La *taille*  $|f|$  d'un morphisme  $f : A \rightarrow B$  est l'entier défini par induction par

- pour tout objet  $A$ ,

$$|\text{id}_A| = 0$$

- pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $E_2$

$$|f| = 1$$

- pour tous morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ ,

$$|g \circ f| = |g| + |f|$$

- pour tous morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$ ,

$$|f \otimes g| = |g| + |f|.$$

En particulier, les identités sont les seuls morphismes dont la taille est nulle. Il est aisé de vérifier que la taille est bien définie dans le sens où deux morphismes égaux par les égalités de la Définition 3.5 ont la même taille : plus précisément, la taille définit un foncteur monoïdal strict de  $(\mathcal{E}, \otimes, I)$  dans la catégorie monoïdale discrète à un objet  $(\mathbb{N}, +, 0)$  dont les morphismes sont les entiers naturels et la composition et le produit tensoriel sont donnés par l'addition. Nous définissons ensuite la notion de théorie équationnelle monoïdale qui est la généralisation de la notion de théorie équationnelle aux signatures monoïdales.

**Définition 3.7** (Théorie équationnelle monoïdale). Une *théorie équationnelle monoïdale* est un 2-polygraphe avec un unique 0-générateur. De façon équivalente, une théorie équationnelle monoïdale

$$\mathfrak{E} = (E_1, s_1, t_1, E_2, s_2, t_2, E_3) \quad (3.16)$$

est la donnée d'une signature monoïdale  $(E_1, s_1, t_1, E_2)$ , dont on note  $(\mathcal{E}, \otimes, I)$  la catégorie monoïdale stricte associée, et d'un ensemble  $E_3$  de *relations*. Le *membre gauche* d'une relation  $r \in E_3$  est le morphisme  $s_2(r)$  de  $\mathcal{E}$  et son *membre droit* est le morphisme  $t_2(r)$  de  $\mathcal{E}$ . On impose de plus à ces morphismes d'être parallèles, c'est-à-dire d'avoir même source et même but. On notera souvent

$$f \stackrel{r}{\equiv} g$$

pour dénoter une relation  $r$  telle que  $s_2(r) = f$  et  $t_2(r) = g$ .

Notons  $\equiv$  la plus petite congruence (par rapport à la composition et au produit tensoriel) telle que  $f \equiv g$  pour tous morphismes parallèles  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{E}$  pour lesquels il existe une relation  $f \stackrel{r}{\equiv} g$  dans  $E_3$ . La catégorie *générée* par une théorie équationnelle monoïdale est la catégorie  $\mathbb{E} = \mathcal{E}/\equiv$ , c'est-à-dire est la catégorie  $\mathcal{E}$  dont les morphismes sont quotientés par la relation  $\equiv$ . La notion de congruence monoïdale peut être formalisée à l'aide la notion de contexte de la façon suivante.

**Définition 3.8** (Contexte monoïdal). Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  une catégorie monoïdale. Un *contexte monoïdal*

$$K : (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)$$

dans cette catégorie est une fonction  $K : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(C, D)$  appartenant à l'ensemble défini par induction de la façon suivante : l'identité  $\text{id}_{\text{Hom}(A, B)} : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$  est un contexte monoïdal et si  $K : (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)$  est un contexte monoïdal alors

- pour tout morphisme  $f : C' \rightarrow C$ , la fonction

$$K \circ f = g \mapsto K(g) \circ f : (A \rightarrow B) \Rightarrow (C' \rightarrow D)$$

est un contexte monoïdal,

- pour tout morphisme  $f : D \rightarrow D'$ , la fonction

$$f \circ K = g \mapsto f \circ K(g) : (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D')$$

est un contexte monoïdal,

- pour tout morphisme  $f : C' \rightarrow D'$ , les fonctions

$$f \otimes K = g \mapsto f \otimes K(g) : (A \rightarrow B) \Rightarrow ((C' \otimes C) \rightarrow (D' \otimes D))$$

et

$$K \otimes f = g \mapsto K(g) \otimes f : (A \rightarrow B) \Rightarrow ((C \otimes C') \rightarrow (D \otimes D'))$$

sont des contextes monoïdaux.

On note  $\mathcal{K}(\mathcal{C})$  la *catégorie des contextes monoïdaux* de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les paires d'objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , notées  $A \rightarrow B$ , et les morphismes entre deux objets  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow D$  sont les contextes monoïdaux  $K : A \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow D$ .

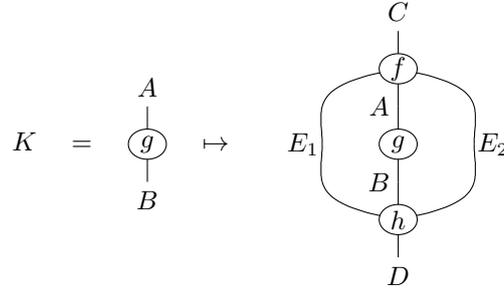
**Propriété 3.9.** *Dans une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ , une fonction donnée  $K : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(C, D)$  est un contexte monoïdal si et seulement si il existe deux objets  $E_1$  et  $E_2$  et deux morphismes*

$$f : C \rightarrow E_1 \otimes A \otimes E_2 \quad \text{et} \quad h : E_1 \otimes B \otimes E_2 \rightarrow D$$

tels que

$$K = g \mapsto h \circ (E_1 \otimes g \otimes E_2) \circ f$$

Graphiquement,



**Définition 3.10** (Congruence monoïdale). Une relation  $\equiv$  sur les morphismes d'une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est une *congruence monoïdale* lorsque :

- si  $f \equiv g$  alors  $f$  et  $g$  ont même source  $A$  et même but  $B$ , ce que l'on note parfois

$$f \equiv g : A \rightarrow B,$$

- si  $f \equiv g : A \rightarrow B$  alors pour tout contexte  $K : A \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow D$ ,

$$K(f) \equiv K(g) : C \rightarrow D.$$

**Définition 3.11** (Présentation de catégorie monoïdale). Une catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est (*strictement*) *présentée* par une théorie équationnelle  $\mathfrak{E}$  lorsque  $\mathcal{C}$  est isomorphe à la catégorie  $\mathbb{E}$  générée par  $\mathfrak{E}$  via un foncteur monoïdal strict. Elle est *fortement présentée* par  $\mathfrak{E}$  lorsque les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathbb{E}$  sont équivalentes via un foncteur monoïdal fort.

Bien sûr, de même que dans le cas des monoïdes il n'y a pas unicité de la présentation dans le sens où deux théories équationnelles monoïdales distinctes peuvent présenter la même catégorie. En particulier, certains générateurs peuvent être superflus – comme le générateur  $c$  dans l'Exemple 3.3 – ainsi que certaines équations.

**Définition 3.12** (Générateur superflu, équation superflue, présentation minimale). Un générateur  $f$  d'une théorie équationnelle monoïdale  $\mathfrak{E}$  est *superflu* lorsque la théorie équationnelle monoïdale  $\mathfrak{E}'$ , obtenue à partir de  $\mathfrak{E}$  en enlevant  $f$  et toutes les relations faisant intervenir  $f$ , et  $\mathfrak{E}$  engendrent des catégories isomorphes.

Une relation  $r$  d'une théorie équationnelle  $\mathfrak{E}$  est *superflue* lorsque la théorie équationnelle  $\mathfrak{E}'$ , obtenue à partir de  $\mathfrak{E}$  en enlevant la relation  $r$ , et  $\mathfrak{E}$  engendrent des catégories isomorphes.

Une présentation monoïdale est *minimale* lorsqu'elle ne contient aucun générateur superflu, ni aucune équation superflue.

De même que pour les catégories, on peut définir une notion de dual d'une théorie équationnelle monoïdale.

**Propriété 3.13.** Si  $(E_1, s_1, t_1, E_2)$  est une signature monoïdale générant une catégorie  $\mathcal{E}$ , la signature  $(E_1, t_1, s_1, E_2)$  génère une catégorie isomorphe à  $\mathcal{E}^{\text{op}}$ .

**Définition 3.14** (Théorie équationnelle monoïdale duale). Soit

$$\mathfrak{E} = (E_1, s_1, t_1, E_2, s_2, t_2, E_3)$$

une théorie équationnelle. La théorie équationnelle monoïdale *duale* de  $\mathfrak{E}$  est la théorie équationnelle monoïdale

$$\mathfrak{E}^{\text{op}} = (E_1, t_1, s_1, E_2, s_2^{\text{op}}, t_2^{\text{op}}, E_3)$$

où  $s_2^{\text{op}}$  et  $t_2^{\text{op}}$  sont les fonctions qui à un élément  $r$  de  $E_3$  associe les morphisme  $(s_2(r))^{\text{op}}$  et  $(t_2(r))^{\text{op}}$ .

**Propriété 3.15.** *Si  $\mathfrak{E}$  est une théorie équationnelle monoïdale générant une catégorie  $\mathbb{E}$ , la théorie  $\mathfrak{E}^{\text{op}}$  génère une catégorie isomorphe à  $\mathbb{E}^{\text{op}}$ .*

### 3.3 Une présentation de la catégorie simpliciale

Nous pouvons maintenant reformuler la présentation de la catégorie simpliciale dans le cadre des théories monoïdales et ainsi obtenir une présentation finie de cette catégorie. La preuve du théorème suivant est essentiellement donnée dans [Mac71] et est formulée dans le cadre des polygraphes dans [Bur93, Laf03].

**Théorème 3.16** (Présentation de la catégorie simpliciale). *La catégorie simpliciale est présentée par la théorie monoïdale*

$$\mathfrak{M} = (E_1, s_1, t_1, E_2, s_2, t_2, E_3)$$

où

- l'ensemble  $E_1 = \{1\}$  des générateurs des objets est réduit à un élément,
- l'ensemble  $E_2$  des générateurs des morphismes contient deux éléments

$$\mu : 1 \otimes 1 \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \eta : 0 \rightarrow 1$$

où 0 est l'unité du monoïde  $E_1^*$ ,

- l'ensemble  $E_3$  des relations contient trois relations

$$\mu \circ (\mu \otimes 1) \equiv \mu \circ (1 \otimes \mu), \quad \mu \circ (\eta \otimes 1) \equiv \mu \quad \text{et} \quad \mu \circ (1 \otimes \eta) \equiv \mu. \quad (3.17)$$

Si  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est une catégorie monoïdale stricte, la présentation ci-dessus montre qu'un foncteur monoïdal strict  $F : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  est uniquement déterminé par l'image  $M$  de l'objet 1 par  $F$  ainsi que par les morphismes  $F\mu : M \otimes M \rightarrow M$  et  $F\eta : I \rightarrow M$ . De plus, ces morphismes vérifient des équations similaires à (3.17); l'objet  $(FM, F\mu, F\eta)$  est donc un monoïde. À l'inverse tout monoïde de la catégorie  $\mathcal{C}$  est l'image par un foncteur de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$ . On a ainsi établi une bijection entre les monoïdes de  $\mathcal{C}$  et les foncteurs monoïdaux stricts de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$ . De plus les transformations naturelles entre de tels foncteurs sont précisément les morphismes de monoïdes entre les monoïdes correspondant :

**Propriété 3.17.** *Si  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est une catégorie monoïdale stricte, la catégorie des algèbres strictes de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$  est isomorphe à la catégorie des monoïdes de  $\mathcal{C}$  :*

$$\mathbf{StrAlg}_{\Delta}^{\mathcal{C}} \cong \mathbf{Mon}(\mathcal{C}).$$

Dans les équations précédentes, les catégories d'algèbres sont définies par

**Définition 3.18** (Algèbre d'une catégorie monoïdale). Si  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  et  $(\mathcal{D}, \otimes, I)$  sont deux catégories monoïdales, la *catégorie des algèbres monoïdales de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$* , notée  $\mathbf{Alg}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ , est la catégorie dont les objets sont les foncteurs monoïdaux forts de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  et les morphismes sont les transformations naturelles monoïdales entre les foncteurs. La *catégorie des algèbres monoïdales strictes de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$* , notée  $\mathbf{StrAlg}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ , est la sous-catégorie de  $\mathbf{Alg}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$  dont les objets sont les foncteurs monoïdaux stricts.

La catégorie simpliciale est donc la catégorie monoïdale stricte libre contenant un objet monoïde. À ce titre, elle peut véritablement être considérée comme une « personnification » de la notion de monoïde, ce que Baez appelle le *walking monoïd*<sup>1</sup>, et que nous nommerons plus prosaïquement la *théorie monoïdale des monoïdes*. Plus précisément,

**Propriété 3.19.** Notons  $\mathbf{Cat}^1$  la catégorie des catégories pointées (c'est-à-dire avec un objet distingué) et  $\mathbf{StrMonCat}^{\Delta}$  la catégorie des catégories monoïdales strictes avec un objet monoïde distingué. Le foncteur d'oubli évident  $U : \mathbf{StrMonCat}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{Cat}^1$  admet un adjoint à gauche  $F : \mathbf{Cat}^1 \rightarrow \mathbf{StrMonCat}^{\Delta}$  et la catégorie simpliciale  $\Delta$  est l'image  $\Delta = F\mathbf{1}$  de la catégorie triviale  $\mathbf{1}$  à un objet et un morphisme.

En effet, par propriété classique, le fait que la catégorie  $\Delta$  soit la catégorie libre sur la catégorie  $\mathbf{1}$  peut être reformulé en disant que pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un monoïde distingué, pour tout morphisme  $f : \mathbf{1} \rightarrow U\mathcal{C}$  de  $\mathbf{Cat}^1$ , il existe un unique morphisme  $g : F\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$  de  $\mathbf{StrMonCat}^{\Delta}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{\eta_{\mathbf{1}}} & UF\mathbf{1} & & F\mathbf{1} \\
 & \searrow f & \downarrow U g & & \downarrow g \\
 & & U\mathcal{C} & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

commute, où  $\eta$  désigne l'unité de l'adjonction. Cette unité étant l'identité, nous avons ainsi établi une bijection entre les morphismes  $g : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  et les morphismes  $f : \mathbf{1} \rightarrow U\mathcal{C}$ . Or il existe un unique tel morphisme  $f$  pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un objet distingué. Ceci montre que les monoïdes de la catégorie  $\mathcal{C}$  sont en bijection avec les foncteurs monoïdaux stricts de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$ .

**Définitions externes et définitions internes.** Il est intéressant de souligner la différence d'approche entre la définition habituelle de la catégorie simpliciale (Définition 3.1) et la définition équivalente par générateurs et relations de cette catégorie donnée par le Théorème 3.16. Notons  $\mathbf{F}$  la catégorie dont les objets sont les entiers naturels  $\underline{n}$  et les morphismes  $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  sont les fonctions de l'ensemble  $\underline{m}$  à  $m$  éléments dans l'ensemble  $\underline{n}$  à  $n$  éléments. Dans la Définition 3.1,

<sup>1</sup>This is one of Jim Dolan's jokes. Suppose some guy has really big bushy eyebrows, so that when you see him walking down the street you first notice his eyebrows and only later realize there's a person attached. Then you might call him a "walking pair of eyebrows". Such a guy is basically just a minimal life support system for his eyebrows!

In math, we see the same phenomenon in things like "the free group on 2 elements". This is a group whose sole purpose in life is to have 2 elements. To pick out 2 elements in any group  $G$ , we just need a homomorphism from the free group on 2 elements to  $G$ . Similarly, the monoidal category  $\Delta$  is a monoidal category whose sole purpose in life is to contain a monoid object. – Baez, le 24 mai 2007, dans le *n-category café*.

la catégorie  $\Delta$  est définie comme la sous-catégorie de  $\mathbf{F}$  dont les morphismes sont les fonctions  $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  qui vérifient la condition

$$\forall i, j \in \underline{m}, \quad i \leq j \quad \text{implique} \quad f(i) \leq f(j). \quad (3.18)$$

La définition est donc *externe* dans le sens où les morphismes de  $\Delta$  sont définis comme les morphismes d'un espace plus large qui vérifient une sorte de *critère de correction* (3.18). À l'inverse, la définition du Théorème 3.16 engendre inductivement les morphismes de  $\Delta$  et uniquement ceux-ci. Elle peut donc être qualifiée d'*interne*, car les générateurs et les égalités caractérisent intrinsèquement la catégorie simpliciale. Les sémantiques précises de systèmes de preuve ou de langages de programmation, dont les éléments sont définissables, sont presque systématiquement définies à l'aide de critères externes : le critère de correction des réseaux de preuve de la logique linéaire, l'innocence pour les jeux HO, etc. Il nous a semblé intéressant d'explorer la possibilité de donner une définition interne de ce type de sémantique.

### 3.4 Modèles d'une théorie

L'idée de « functorialiser » l'étude des structures algébriques en mathématiques, en les considérant comme les *modèles d'une théorie algébrique*, a été introduite dans les années soixante par Lawvere dans sa thèse [Law63]. Il y définit la notion de *théorie algébrique*, souvent encore appelée *théorie de Lawvere*, et que nous appellerons *théorie cartésienne*, comme une catégorie avec produits finis, dont les objets sont les entiers naturels  $n \in \mathbb{N}$ , dans laquelle le produit cartésien de deux objets  $m$  et  $n$  est donné par leur somme  $m + n$  et 0 est l'objet terminal. Dans une telle catégorie, un morphisme  $f : m \rightarrow 1$  est appelé une *opération  $m$ -aire* et tout morphisme  $f : m \rightarrow n$  est un  $n$ -uplet  $(f_0, \dots, f_{n-1})$  de telles opérations  $m$ -aires  $f_i : m \rightarrow 1$ . De nombreuses structures algébriques peuvent être vues comme les *modèles*, ou *algèbres*, d'une théorie cartésienne  $\mathbb{T}$ , c'est-à-dire comme les foncteurs préservant les produits finis de la catégorie  $\mathbb{T}$  dans une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$ .

Par exemple, la théorie cartésienne  $\mathbb{M}$  des monoïdes a pour opérations  $m$ -aires  $f : m \rightarrow 1$  les sommes formelles finies  $x_{i_0} + \dots + x_{i_k}$  de variables dans l'ensemble  $\{x_0, \dots, x_{m-1}\}$  et la composée  $g \circ f : m \rightarrow o$  de deux morphismes  $f = (f_0, \dots, f_{n-1}) : m \rightarrow n$  et  $g = (g_0, \dots, g_{p-1}) : n \rightarrow o$  est donnée par substitution :

$$g \circ f = (g_0[f_0/x_0, \dots, f_{n-1}/x_{n-1}], \dots, g_{p-1}[f_0/x_0, \dots, f_{n-1}/x_{n-1}])$$

et produit  $f \times g : m \rightarrow n_1 + n_2$  de deux morphismes  $f = (f_0, \dots, f_{n_1-1}) : m \rightarrow n_1$  et  $g = (g_0, \dots, g_{n_2-1}) : m \rightarrow n_2$  est donné par concaténation des listes :

$$f \times g = (f_0, \dots, f_{n_1-1}, g_0, \dots, g_{n_2-1})$$

Un monoïde peut alors être vu comme un modèle de cette théorie cartésienne dans le sens où la catégorie  $\mathbf{cAlg}_{\mathbb{M}}^{\mathbf{Set}}$  des modèles de cette théorie  $\mathbb{M}$  dans  $\mathbf{Set}$  et transformations naturelles est isomorphe à la catégorie  $\mathbf{Mon}$  des monoïdes. En particulier, la multiplication du monoïde est l'image du morphisme  $x_0 + x_1 : 2 \rightarrow 1$  et son unité est l'image de l'unique morphisme de 0 dans 1 (la somme vide).

Si les théories cartésiennes ont des propriétés intéressantes et permettent de représenter de nombreuses structures algébriques (monoïdes, groupes, treillis, etc.), le cadre qu'elles offrent est cependant parfois trop restreint. D'une part, elles décrivent des structures algébriques dans des catégories cartésiennes et non dans le cadre général des catégories monoïdales ; d'autre part, elles ne permettent pas directement de décrire des structures algébriques ayant des opérations de co-arité différente de 1, les comonoïdes par exemple. Dans les mêmes années, MacLane [Mac65] a défini les notions de *PRO* (pour catégorie avec *PRO*duits) et de *PROP* (pour catégorie avec *PRO*duits et *Per*mutations) généralisant les théories cartésiennes. Un *PRO*, que nous appellerons une *théorie monoïdale*, est une catégorie monoïdale dont les objets sont les entiers naturels et telle que le produit tensoriel est donné par l'addition sur les objets et dont l'unité est l'objet 0. La catégorie  $\mathbf{Alg}_{\mathbb{T}}^{\mathcal{C}}$  des *algèbres* d'une théorie monoïdale  $\mathbb{T}$  dans une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  a pour objets les foncteurs monoïdaux  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{C}$  et pour morphismes les transformations naturelles monoïdales. La Propriété 3.17 montre par exemple que ce formalisme permet de capturer la théorie des monoïdes par la théorie monoïdale  $\Delta$  (la catégorie simpliciale), mais cette fois dans le cadre général des catégories monoïdales. De plus, cette notion est close par dualité : la catégorie duale d'une théorie monoïdale est toujours une théorie monoïdale, contrairement au cadre des théories cartésiennes (la catégorie duale d'une catégorie cartésienne n'est pas nécessairement cartésienne). De même, un *PROP*  $\mathbb{T}$ , que nous appellerons une *théorie monoïdale symétrique*, est une théorie monoïdale qui est une catégorie monoïdale symétrique. La catégorie  $\mathbf{sAlg}_{\mathbb{T}}^{\mathcal{C}}$  des algèbres d'une théorie monoïdale symétrique  $\mathbb{T}$  dans une catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{C}$  a pour objets les foncteurs monoïdaux symétriques  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{C}$  et pour morphismes les transformations naturelles monoïdales symétriques.

Un *morphisme*  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$  de *théories monoïdales* est un foncteur monoïdal strict  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$  entre les catégories sous-jacentes qui est l'identité sur les objets (i.e. pour tout entier  $n$ , on a  $F n = n$ ). De même, un *morphisme*  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$  de *théories monoïdales symétriques* (resp. *cartésiennes*) est un morphisme entre les catégories monoïdales sous-jacentes qui préserve la symétrie (resp. le produit cartésien) et est l'identité sur les objets. Notons respectivement  $\mathbf{Th}$ ,  $\mathbf{sTh}$  et  $\mathbf{cTh}$  la catégorie des théories monoïdales, la catégorie des théories monoïdales symétriques et la catégorie des théories monoïdales cartésiennes. Les foncteurs d'oubli  $U : \mathbf{cTh} \rightarrow \mathbf{sTh}$  et  $V : \mathbf{sTh} \rightarrow \mathbf{Th}$  admettent tous deux un adjoint à gauche

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G & & F \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbf{Th} & & \perp & & \perp & & \mathbf{cTh} \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & V & & U
 \end{array}$$

En particulier, les algèbres d'une théorie monoïdale  $\mathbb{T}$  dans une catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{C}$  sont précisément les algèbres de la théorie monoïdale symétrique  $G\mathbb{T}$  dans  $\mathcal{C}$ , et les algèbres d'une théorie monoïdale symétrique  $\mathbb{T}$  dans une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$  sont précisément les algèbres de la théorie cartésienne  $F\mathbb{T}$  dans  $\mathcal{C}$ .

La Propriété 3.28 caractérise les théories monoïdales qui sont l'oubli (par  $V$ ) d'une théorie monoïdale symétrique. De même, les images du foncteur d'oubli  $U$  peuvent être caractérisées par la propriété suivante.

**Propriété 3.20.** Une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  a les produits finis, avec  $\otimes$  comme produit sur les objets et  $I$  comme objet terminal, si et seulement si le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Alg}_{\mathbf{F}^{\text{op}}}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Alg}_{\mathbf{F}^{\text{op}}}^{\mathcal{C}} \cong \mathcal{C}$$

où  $\mathbf{F}$  est le squelette la catégorie **FinSet** des ensembles finis et fonctions. Par la Propriété 3.33, cela revient à imposer à la catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  d'admettre une symétrie  $\gamma$  (décrite à la Propriété 3.28) ainsi que deux transformations naturelles monoïdales de composantes

$$\delta_A : A \otimes A \rightarrow A \quad \text{et} \quad \varepsilon_A : A \rightarrow 1$$

induisant une structure de comonoïde  $(A, \delta_A, \varepsilon_A) : A \rightarrow 1$ .

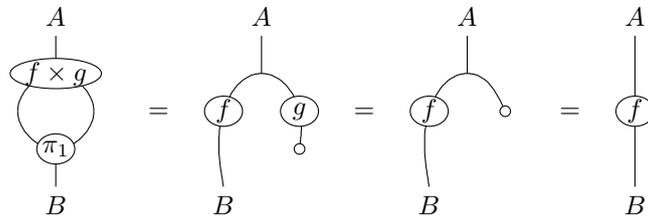
*Remarque 3.21.* La structure de comonoïde  $(A, \delta_A, \varepsilon_A)$  induite sur chaque objet est nécessairement commutative.

*Démonstration.* Supposons que la catégorie  $(\mathcal{C}, \times, 1)$  ait les produits finis. Par la Propriété 0.39, le produit cartésien induit une structure de catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  sur cette catégorie telle que le tenseur et le produit coïncident sur les objets. Pour tout objet  $A$ , notons  $\delta_A = A \times A$  et  $\varepsilon_A = \pi_1 \circ \rho_A^{-1}$ . Il est alors aisé, en utilisant les propriétés universelles définissant le produit et l'objet terminal de vérifier que les morphismes ainsi définis satisfont les propriétés requises par la définition.

Réciproquement, supposons que la catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  admette une symétrie  $\gamma$  et des morphismes  $\delta_A$  et  $\varepsilon_A$  pour tout objet  $A$ , vérifiant les axiomes de la propriété. Par souci de simplicité, nous faisons la preuve dans le cas où l'associateur  $\alpha$  de la catégorie monoïdale est l'identité. On définit le produit sur toute paire d'objets  $A$  et  $B$  par  $A \times B = A \otimes B$  avec comme projections associées  $\pi_1 = \rho_A \circ (A \otimes \varepsilon_B)$  et  $\pi_2 = \lambda_B \circ (\varepsilon_A \otimes B)$ . Pour toute paire de morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : A \rightarrow C$ , il existe un morphisme  $f \times g : A \rightarrow B \times C$  défini par  $f \times g = (f \otimes g) \circ \delta_A$ . Ce morphisme vérifie les égalités

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ (f \times g) &= \rho_B \circ (B \otimes \varepsilon_C) \circ (f \otimes g) \circ \delta_A = \rho_B \circ ((B \circ f) \otimes (\varepsilon_C \circ g)) \circ \delta_A \\ &= \rho_B \circ (f \otimes \varepsilon_A) \circ \delta_A = \rho_B \circ (f \otimes I) = f \end{aligned}$$

graphiquement,

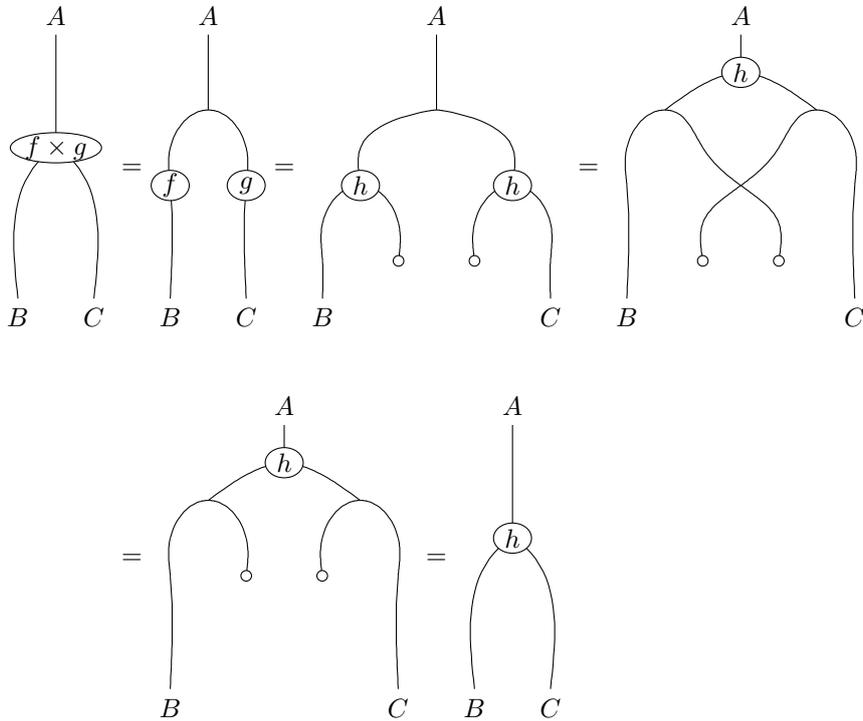


et de même  $\pi_2 \circ (f \times g) = g$ . Supposons qu'il existe un autre morphisme

$h : A \rightarrow B \times C$  tel que  $\pi_1 \circ h = f$  et  $\pi_2 \circ h = g$ . On a alors

$$\begin{aligned} f \times g &= (f \otimes g) \circ \delta_A = ((\pi_1 \circ h) \otimes (\pi_2 \circ h)) \circ \delta_A = (\pi_1 \otimes \pi_2) \circ \delta_{B \otimes C} \circ h \\ &= ((\rho_B \circ (B \otimes \varepsilon_C)) \otimes (\lambda_C \circ (\varepsilon_B \otimes C))) \circ (B \otimes \gamma_{B,C} \otimes C) \circ (\delta_B \otimes \delta_C) \circ h \\ &= (\rho_B \otimes \lambda_C) \circ (B \otimes \varepsilon_B \otimes \varepsilon_C \otimes C) \circ (\delta_B \otimes \delta_C) \circ h \\ &= (\rho_B \otimes \lambda_C) \circ (B \otimes I \otimes I \otimes C) \circ h \\ &= h \end{aligned}$$

graphiquement,



De plus, l'objet  $I$  est terminal par naturalité de  $\varepsilon_A$ . □

*Remarque 3.22.* « L'oubli ne commute pas aux algèbres ». Par exemple, nous verrons que la théorie cartésienne  $\mathbb{M}$  des monoïdes commutatifs, considérée comme une théorie monoïdale, est la théorie des bigèbres bicommutatives. On n'a donc pas d'équivalence de la forme

$$\mathbf{Alg}_{VUM}^C \cong \mathbf{cAlg}_{\mathbb{M}}^C.$$

*Remarque 3.23.* Bien que très général, le cadre des théories monoïdales ne couvre pas toutes les structures algébriques que l'on souhaiterait formaliser, les catégories par exemple. En effet, une catégorie est la donnée d'un diagramme

$$C_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C_1 \xleftarrow{i} 1$$

dans **Set** tel que  $s \circ i = t \circ i$ , où  $C_1 \times_{C_0} C_1$  est le produit fibré de  $C_1$  avec  $C_1$  sur le diagramme

$$C_1 \xrightarrow{s} C_0 \xleftarrow{t} C_1$$

ainsi que d'un morphisme

$$C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{m} C_1$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & C_1 \times_{C_0} C_1 & & \\ & s \swarrow & \downarrow m & \searrow t & \\ C_0 & \xleftarrow{s} & C_1 & \xrightarrow{t} & C_0 \end{array}$$

commute. L'objet  $C_0$  est l'ensemble des objets de la catégorie, l'objet  $C_1$  est l'ensemble des morphismes de la catégorie, les morphismes  $s$  et  $t$  associent à chaque morphisme leur source et leur but, le morphisme  $i$  associe à chaque objet l'identité sur cet objet et le morphisme  $m$  décrit la composition de la catégorie.

Les théories monoïdales ne permettent pas d'imposer à l'image d'un objet par une algèbre d'être le produit fibré de deux objets sur l'image d'un diagramme, il n'est donc pas possible de donner une théorie des catégories dans ce cadre. Il faut pour cela utiliser la notion plus générale d'*esquisse* [Ehr68, Wel93, HP00].

### 3.5 Autres techniques de présentation

Rappelons que la méthode générale que nous allons utiliser pour construire des présentations de catégories est essentiellement due à Burroni [Bur93] et Lafont [Laf03]. Celle-ci n'est cependant pas la seule à notre disposition, nous reviendrons au Chapitre 5 sur les motivations de notre choix.

**Méthodes catégoriques.** Une étude importante concernant les théories monoïdales a été menée par Lack [Lac04]. Il part de la constatation qu'une catégorie, et en particulier la catégorie monoïdale générée par une théorie algébrique, peut être vue comme une monade dans une bicatégorie de compas (voir Définition 0.56). La donnée d'une loi distributive entre deux telles monades permet donc de *composer* les catégories correspondantes. Par exemple, notons  $\mathbb{I}$  la catégorie monoïdale stricte des entiers naturels et injections et  $\mathbb{S}$  la catégorie monoïdale stricte des entiers naturels et surjections. Ces catégories sont toutes deux des sous-catégories de la catégorie simpliciale  $\Delta$  et permettent de décomposer sa présentation en deux « sous-présentations ». En effet la catégorie  $\mathbb{I}$  est présentée par la théorie monoïdale n'ayant qu'un 1-générateur  $1$ , un 2-générateur  $\eta : 1 \rightarrow 0$  et aucune équation, et la catégorie  $\mathbb{S}$  est présentée par la théorie monoïdale n'ayant qu'un 1-générateur  $1$ , un 2-générateur  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et une équation imposant l'associativité de la multiplication  $\mu$ . Les règles

$$\begin{array}{c} \circ \\ \cup \\ | \end{array} \Rightarrow \left| \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \circ \\ | \end{array} \Rightarrow \left| \right. \quad (3.19)$$

de la théorie des monoïdes permettent alors de transformer un morphisme de  $\Delta$  qui serait composé d'une injection suivie d'une surjection en une surjection suivie d'une surjection. Plus précisément, on peut montrer que ces lois induisent une loi distributive  $\lambda : \mathbb{I} \otimes \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} \otimes \mathbb{I}$  entre les monades associées aux catégories  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{S}$  et que  $\Delta = \mathbb{S} \otimes_{\lambda} \mathbb{I}$  est précisément la monade composée de ces deux monades suivant la loi distributive. Lack montre qu'une catégorie monoïdale est la composée de deux catégories monoïdales strictes précisément lorsqu'il existe un certain système de factorisation strict sur cette catégorie. Dans le cas de la catégorie simpliciale, ce système de factorisation est bien sûr donné par la factorisation unique  $f = m \circ e$  de tout morphisme  $f$  de la catégorie simpliciale en une surjection  $e$  suivie d'une injection  $m$ , c'est-à-dire en un morphisme de  $\mathbb{S}$  suivi d'un morphisme de  $\mathbb{I}$ .

Pour montrer que la catégorie simpliciale est présentée par la théorie des monoïdes, on peut donc se ramener à

- montrer que les catégories  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{S}$  admettent les présentations que nous avons décrites,
- montrer que les règles (3.19) induisent une loi distributive entre ces catégories,
- montrer que tout morphisme de  $\Delta$  peut être factorisé de façon unique en un morphisme de  $\mathbb{S}$  suivi d'un morphisme de  $\mathbb{I}$ .

Le cadre des théories symétriques est plus complexe car les deux sous-catégories qui vont factoriser la catégorie partagent la même symétrie. On n'a alors plus unicité de la décomposition  $f = m \circ e$  d'un morphisme mais seulement unicité à symétrie près, dans le sens où pour toute autre factorisation  $f = m' \circ e'$ , il existe une permutation  $\pi$  qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow e & \\
 & \pi & \\
 & \searrow e' & \\
 & \nearrow m & \\
 & \searrow m' &
 \end{array}$$

Ceci rend malaisée l'application de ces techniques au cas de la présentation de la sémantique de jeux que nous introduisons à la Section 4.2, car la symétrie  $y$  est partielle (elle n'est pas définie sur toute paire d'objets) et de ce fait plus difficile à manipuler.

**Méthodes géométriques.** Plutôt que de donner des présentations purement algébriques des catégories, il est aussi possible d'en donner des présentations de nature plus *géométrique*, en décrivant ces catégories comme des surfaces considérées modulo certaines déformations continues. Nous avons par exemple expliqué à la Section 0.3 comment les diagrammes de corde permettent de représenter les morphismes dans des catégories monoïdales. Plus généralement, Joyal et Street [JS91] ont montré que les catégories formées par ces diagrammes permettent de décrire la catégorie monoïdale libre engendrée par une signature monoïdale. Ces résultats peuvent être généralisés de diverses façons, notamment en dimension supérieure [BD95, BL03]. S'ils permettent de rendre formelles certaines intuitions géométriques – les morphismes de la plupart des catégories que

nous allons étudier peuvent être vus comme des « cordes posées sur un plan » – ils requièrent souvent beaucoup de minutie et se prêtent difficilement à une automatisation.

### 3.6 Structures algébriques catégoriques

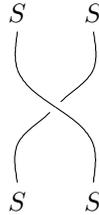
Dans toute cette section, on suppose fixée une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ . Par souci de simplicité, nous supposons que la catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  est stricte mais les définitions données ici s'étendent au cas général (par exemple, la Définition 0.35 donnée en introduction généralise la notion de monoïde de la Définition 3.30 ci-dessous). Les structures algébriques que nous introduisons ici peuvent être considérées comme les éléments d'une boîte à outils qui peuvent être combinés pour construire des théories algébriques.

#### 3.6.1 Objets symétriques

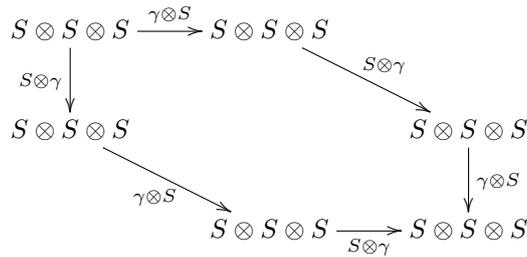
**Définition 3.24** (Objet tressé). Un *objet tressé* de  $\mathcal{C}$  est un objet  $S$  muni d'un morphisme

$$\gamma : S \otimes S \rightarrow S \otimes S$$

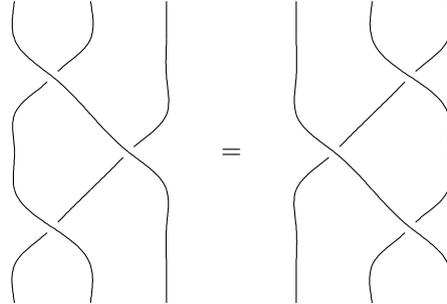
appelé *tressage* et représentée par



tel que le diagramme



commute. Diagrammatiquement,

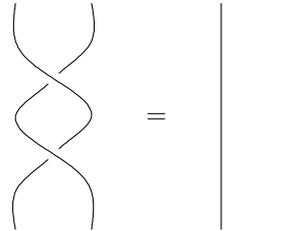


La théorie équationnelle monoïdale des objets tressés est notée  $\mathfrak{B}$  et la catégorie monoïdale associée est notée  $\mathbb{B}$ .

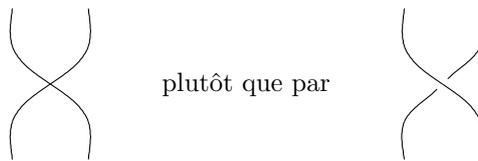
**Définition 3.25** (Objet symétrique). Un *objet symétrique* de  $\mathcal{C}$  est un objet tressé  $(S, \gamma)$  qui vérifie

$$\gamma \otimes \gamma = S \otimes S$$

Diagrammatiquement,



Le tressage  $\gamma$  est alors appelé *symétrie* et on le représente souvent par



car il est son propre inverse. La théorie équationnelle monoïdale des objets symétriques est notée  $\mathfrak{S}$  et la catégorie monoïdale associée est notée  $\mathbb{S}$ .

**Propriété 3.26.** La catégorie **Bij** dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont les bijections est présentée par la théorie monoïdale  $\mathfrak{S}$ .

*Remarque 3.27.* Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie monoïdale sous-jacente à une catégorie monoïdale tressée (resp. symétrique), tout objet  $S$  de la catégorie est tressé (resp. symétrique) si on le munit du morphisme  $\gamma_{S,S}$  induit par le tressage.

La plupart des définitions que nous donnerons dans la suite dans un cadre symétrique, peuvent être généralisées au cadre tressé. Si nous nous intéressons

principalement aux objets symétriques plutôt qu'aux objets tressés, c'est que ces derniers sont beaucoup plus difficiles à manipuler. Il est par exemple mentionné dans [Laf03], qu'on ne connaît pas de forme canonique pour les morphismes de la catégorie  $\mathbb{B}$ , contrairement à la catégorie  $\mathbb{S}$ .

**Propriété 3.28.** Une théorie monoïdale admet une symétrie si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes.

1. L'objet 1 admet une structure d'objet symétrique  $(1, \gamma)$ . Pour tout entier  $n$ , on note alors  $\gamma_{1,n}$  le morphisme défini par induction par

$$\gamma_{1,0} = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_{1,n+1} = (1 \otimes \gamma_{1,n}) \circ (\gamma \otimes n)$$

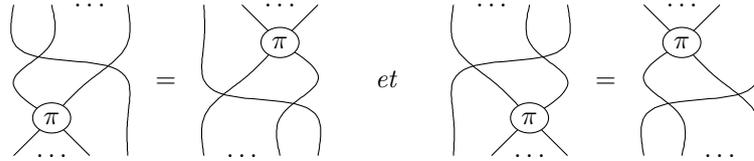
et  $\gamma_{n,1}$  le morphisme défini par induction par

$$\gamma_{0,1} = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1,1} = (\gamma_{n,1} \otimes 1) \circ (n \otimes \gamma).$$

2. Pour tout 2-générateur  $\pi : m \rightarrow n$ , les égalités

$$(\pi \otimes 1) \circ \gamma_{1,m} = \gamma_{1,n} \circ (1 \otimes \pi) \quad \text{et} \quad (1 \otimes \pi) \circ \gamma_{m,1} = \gamma_{m,1} \circ (\pi \otimes 1)$$

sont dérivables. Diagrammatiquement,



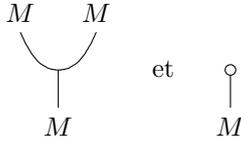
*Remarque 3.29.* La seconde propriété ci-dessus implique en particulier que l'objet  $(1, \gamma)$  est tressé.

### 3.6.2 Monoïdes

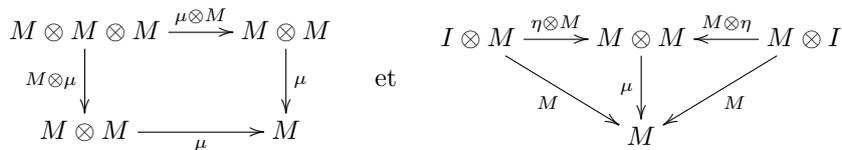
**Définition 3.30** (Monoïde). Un *monoïde* de  $\mathcal{C}$  est un objet  $M$  muni de deux morphismes

$$\mu : M \otimes M \rightarrow M \quad \text{et} \quad \eta : I \rightarrow M$$

appelés respectivement *multiplication* et *unité* du monoïde et représentés respectivement par



(dans la suite on omettra les indications  $M$  de la source et du but lorsque l'objet  $M$  dont il est question peut être déterminé par le contexte) tels que les diagrammes



commutent. Diagrammatiquement,



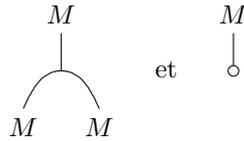
La théorie algébrique monoïdale des monoïdes est notée  $\mathfrak{M}$ .

De façon duale on a,

**Définition 3.31.** Un *comonoïde* de  $\mathcal{C}$  est un objet  $M$  muni de deux morphismes

$$\delta : M \rightarrow M \otimes M \quad \text{et} \quad \varepsilon : M \rightarrow I$$

appelés respectivement *duplication* (ou *comultiplication*) et *effacement* (ou *co-unité*) et représentés respectivement par



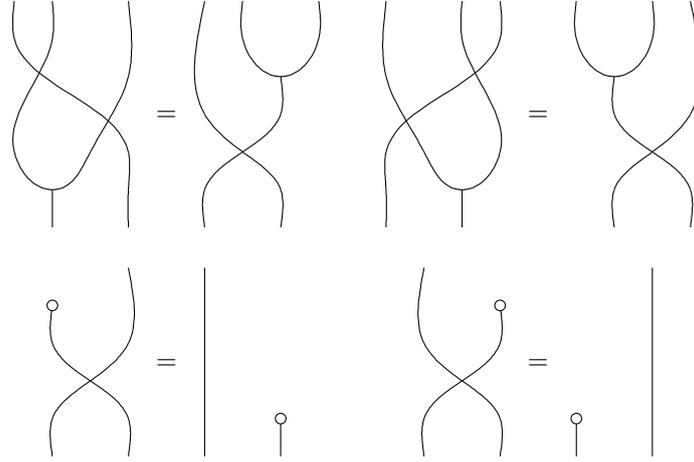
qui satisfont des égalités duales de celles de monoïdes. La théorie des comonoïdes est notée  $\mathfrak{M}^{\text{op}}$ .

### 3.6.3 Monoïdes commutatifs

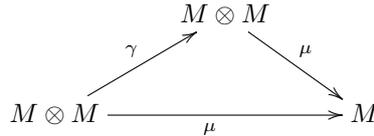
**Définition 3.32** (Monoïde symétrique, commutatif). Un *monoïde symétrique*  $(M, \mu, \eta, \gamma)$  de  $\mathcal{C}$  est un monoïde  $(M, \mu, \eta)$  équipé d'une structure d'objet symétrique  $(M, \gamma)$  compatible avec les opérations du monoïde dans le sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes M \otimes M & \xrightarrow{\gamma \otimes M} & M \otimes M \otimes M & \xrightarrow{M \otimes \gamma} & M \otimes M \otimes M \\
 \downarrow M \otimes \mu & & & & \downarrow \mu \otimes M \\
 M \otimes M & \xrightarrow{\gamma} & & & M \otimes M \\
 \\ 
 M \otimes M \otimes M & \xrightarrow{M \otimes \gamma} & M \otimes M \otimes M & \xrightarrow{\gamma \otimes M} & M \otimes M \otimes M \\
 \downarrow \mu \otimes M & & & & \downarrow M \otimes \mu \\
 M \otimes M & \xrightarrow{\gamma} & & & M \otimes M \\
 \\ 
 M & \xrightarrow{\eta \otimes M} & M \otimes M & \xrightarrow{\gamma} & M \otimes M \\
 & \searrow \eta \otimes M & & & \searrow M \otimes \eta \\
 M & \xrightarrow{\eta \otimes M} & M \otimes M & \xrightarrow{M \otimes \eta} & M \otimes M
 \end{array}
 \tag{3.20}$$

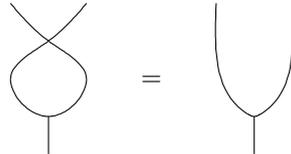
commutent. Graphiquement,



Un monoïde symétrique est *commutatif* lorsque le diagramme



commute. Graphiquement,



**Propriété 3.33.** La catégorie  $\mathbf{F}$  dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont les fonctions est présentée par la théorie monoïdale des monoïdes commutatifs.

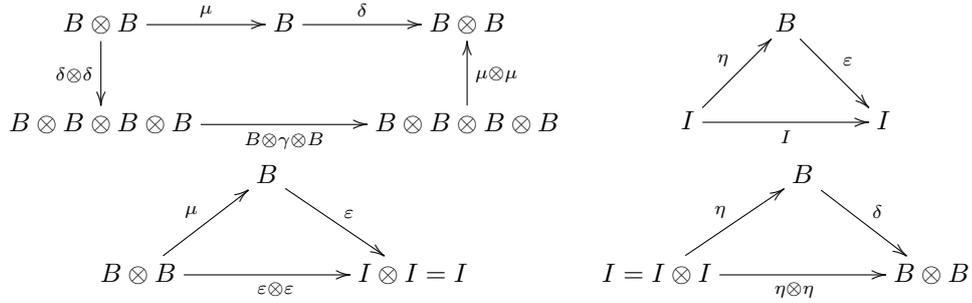
*Remarque 3.34.* Nous ne nous intéressons pas ici à la minimalité des théories que nous définissons et certaines des relations apparaissant dans les définitions sont dérivables à partir des autres. Une présentation minimale de la catégorie  $\mathbf{F}$  est par exemple donnée dans [Mas97]. Elle a les trois mêmes générateurs  $\mu$ ,  $\eta$  et  $\gamma$  mais ne retient que sept des relations que nous avons introduites, les autres étant superflues.

Les notions de *comonoïde symétrique* et de *comonoïde commutatif* sont définies de façon duale.

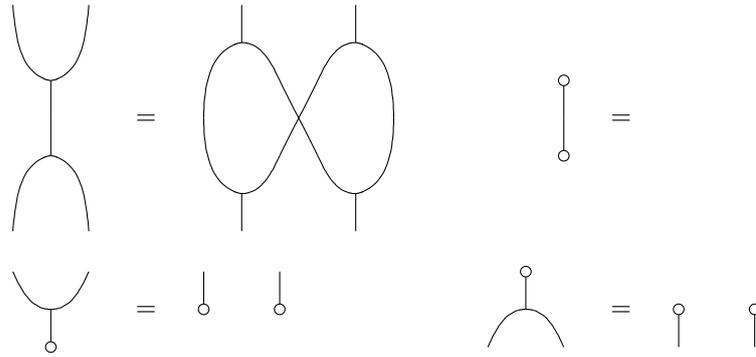
### 3.6.4 Bigèbres

**Définition 3.35** (Bigèbre). Une *bigèbre*, encore parfois appelée *bimonoïde*,  $(B, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma)$  de  $\mathcal{C}$  est un objet  $B$

- muni d'une structure de monoïde symétrique  $(B, \mu, \eta, \gamma)$ ,
- muni d'une structure de comonoïde symétrique  $(B, \delta, \varepsilon, \gamma)$ ,
- telle que ces deux structures sont compatibles dans le sens où les diagrammes



commutent ; graphiquement

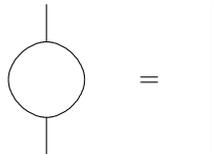


Une bigèbre est *commutative* lorsque le monoïde sous-jacent est symétrique, *cocommutative* lorsque le comonoïde sous-jacent est commutatif et *bicommunitative* lorsqu'elle est à la fois commutative et cocommutative.

**Définition 3.36** (Bigèbre qualitative). Une bigèbre  $(B, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma)$  est *qualitative* lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 \delta \nearrow & & \searrow \mu \\
 B & \xrightarrow{B} & B
 \end{array} \tag{3.21}$$

commute. Graphiquement,



Les bigèbres qualitatives sont parfois aussi qualifiées de *relationnelles* [HP00].

Remarque 3.37. Les bigèbres de Frobenius satisfaisant la loi (3.21) sont parfois qualifiées de *fortement séparables* [Str04].

**Bigèbres de Hopf**

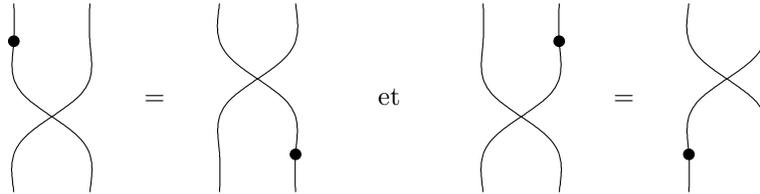
**Définition 3.38.** Une *bigèbre de Hopf*  $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  est la donnée d'une bigèbre  $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma)$  et d'un morphisme  $\sigma : H \rightarrow H$ , appelé *antipode* et représenté par



compatible avec la symétrie dans le sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} & H \otimes H \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} & H \otimes H \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} & H \otimes H \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} & H \otimes H \end{array}$$

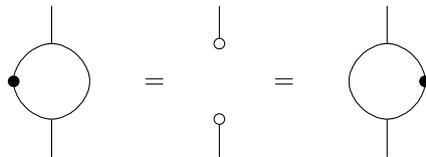
commutent, graphiquement



et telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} & H \otimes H & & \\ \delta \uparrow & & \downarrow \mu & & \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} & I & \xrightarrow{\eta} & H \\ \delta \downarrow & & \uparrow \mu & & \\ H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} & H \otimes H & & \end{array}$$

commute, graphiquement



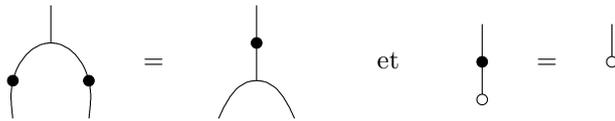
Les bigèbres de Hopf peuvent être considérées comme une version monoïdale affaiblie des groupes, comme le montre la propriété suivante.

**Propriété 3.39.** La catégorie **Grp** des groupes (resp. groupes abéliens) et morphismes de groupes est équivalente à la catégorie des algèbres cartésiennes de  $\mathbb{G}$ , où  $\mathbb{G}$  est la catégorie monoïdale stricte engendrée par la théorie monoïdale des bigèbres de Hopf cocommutatives (resp. bicommutatives).

**Définition 3.40.** Une bigèbre de Hopf  $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  a une *antipode comonoïdale* lorsque les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\delta} & H \otimes H \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \otimes \sigma \\
 H & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma} & H \otimes H
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & H & \\
 \sigma \nearrow & & \searrow \varepsilon \\
 H & \xrightarrow{\varepsilon} & I
 \end{array}$$

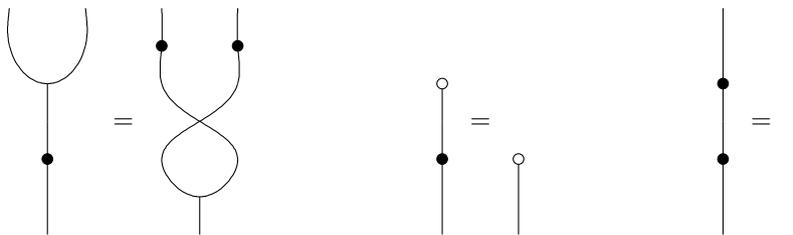
commutent. Graphiquement



**Propriété 3.41.** Dans toute bigèbre de Hopf  $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$ , on a les égalités

1.  $\sigma \circ \mu = \mu \circ \gamma \circ (\sigma \otimes \sigma)$ ,
2.  $\sigma \circ \eta = \eta$ ,
3. et  $\sigma \circ \sigma = H$  si de plus l'antipode est comonoïdale.

Graphiquement,



*Démonstration.* Ces égalités sont la « traduction » dans le cadre monoïdal d'égalités classiques de la théorie des groupes, où  $\mu$  représente la multiplication,  $\eta$  l'unité et  $\sigma$  l'inverse. Par souci de clarté, nous donnons les preuves dans ce cadre ainsi que leur transposition dans le cadre monoïdal (sauf pour la première par manque de place). On remarquera que cette transposition fait apparaître des étapes qui ne sont pas visibles dans la théorie des groupes.

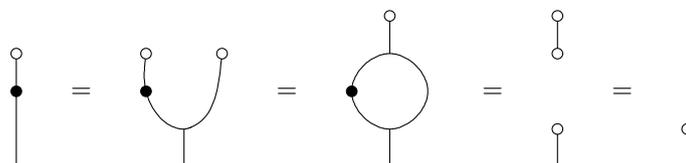
1. La première égalité peut être prouvée par

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)^{-1} &= (x \cdot y)^{-1} \cdot 1 \\
 &= (x \cdot y)^{-1} \cdot (x \cdot x^{-1}) \\
 &= (x \cdot y)^{-1} \cdot ((x \cdot 1) \cdot x^{-1}) \\
 &= (x \cdot y)^{-1} \cdot ((x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1}) \\
 &= ((x \cdot y)^{-1} \cdot (x \cdot y)) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) \\
 &= y^{-1} \cdot x^{-1}
 \end{aligned}$$

2. La deuxième égalité peut être prouvée par

$$1^{-1} = 1^{-1} \cdot 1 = 1$$

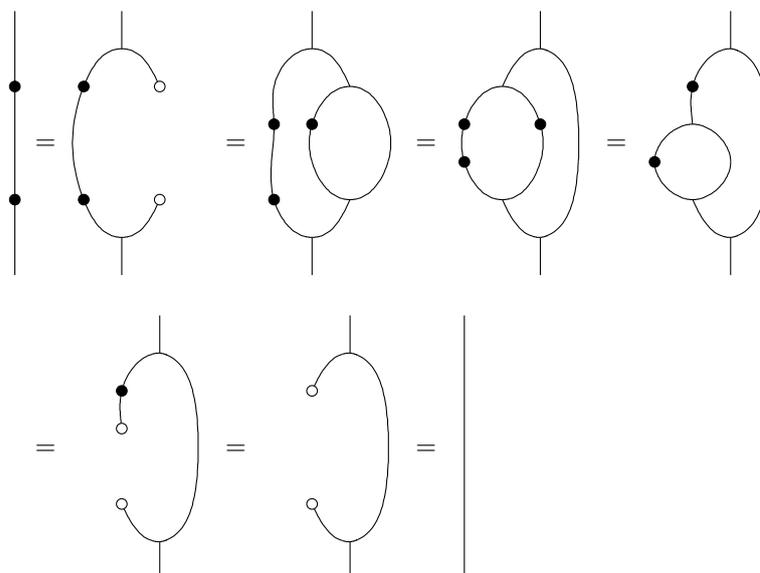
Graphiquement,



3. La troisième égalité peut être prouvée par

$$(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \cdot 1 = (x^{-1})^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x) = ((x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

Graphiquement,



□

**Bigèbres événementielles**

**Définition 3.42** (Bigèbre événementielle). Une *bigèbre événementielle conjonctive*  $(E, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  est une bigèbre qualitative  $(E, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma)$  munie d'un morphisme  $\sigma : E \rightarrow E$  appelé *événement* et représentée par

$$\begin{array}{c} E \\ | \\ \bullet \\ | \\ E \end{array} \tag{3.22}$$

compatible avec la symétrie de même que dans les bigèbres de Hopf et tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} & H \otimes H \\ \delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & \xrightarrow{\sigma} & H \\ \delta \downarrow & & \uparrow \mu \\ H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} & H \otimes H \end{array}$$

commute. Graphiquement,

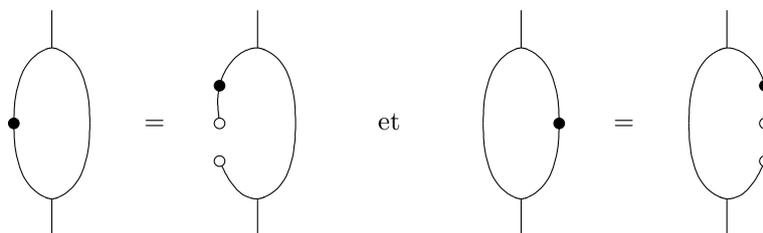
Une *bigèbre événementielle disjonctive* est définie de façon similaire en remplaçant le diagramme ci-dessus par les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} & H \otimes H \\ \delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & & H \\ \delta \downarrow & & \uparrow \mu \\ H \otimes H & \xrightarrow{\sigma \otimes H} H \otimes H \xrightarrow{\varepsilon \otimes H} H \xrightarrow{\eta \otimes H} & H \otimes H \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} & H \otimes H \\ \delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & & H \\ \delta \downarrow & & \uparrow \mu \\ H \otimes H & \xrightarrow{H \otimes \sigma} H \otimes H \xrightarrow{H \otimes \varepsilon} H \xrightarrow{H \otimes \eta} & H \otimes H \end{array}$$

Graphiquement,

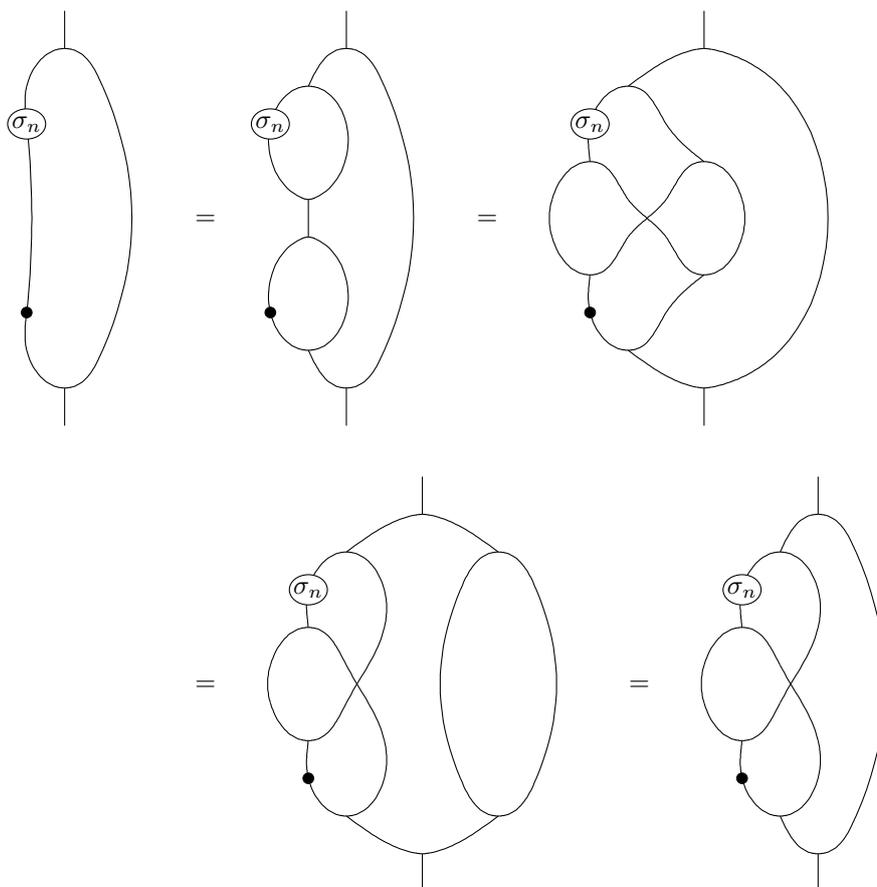


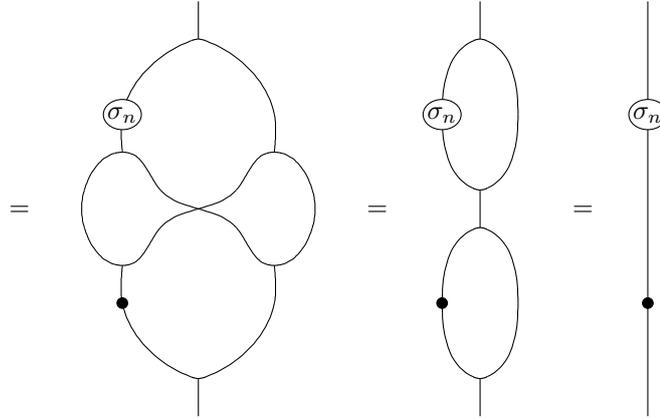
**Propriété 3.43.** *Supposons fixée une bigèbre événementielle et, pour tout entier  $n$ , notons  $\sigma_n : 1 \rightarrow 1$  le morphisme défini par induction sur  $n$  par  $\sigma_0 = 1$  et  $\sigma_{n+1} = \sigma \circ \sigma_n$ . Pour tout entier  $n$ , l'égalité*

$$\mu \circ (\sigma_n \otimes 1) \circ \delta = \sigma_n \tag{3.23}$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Par induction sur  $n$ . Le résultat est immédiat pour  $n = 0$  car une bigèbre événementielle est qualitative. Supposons l'égalité (3.23) vérifiée pour un entier  $n$ . La suite d'égalités





montre que l'égalité  $\mu \circ (\sigma_{n+1} \otimes 1) \circ \delta = \sigma_{n+1}$  est satisfaite.  $\square$

### Treillis

Les treillis, introduits à la Définition 1.54, admettent la définition algébrique suivante qui est équivalente.

**Définition 3.44.** Un *treillis*  $(L, \vee, \wedge)$  est un ensemble  $L$  muni de deux opérations  $\vee, \wedge : L \times L \rightarrow L$  qui satisfont les axiomes suivants, pour tous éléments  $x, y$  et  $z$  de  $L$ .

- *associativité* :

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{et} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

- *commutativité* :

$$x \vee y = y \vee x \quad \text{et} \quad x \wedge y = y \wedge x$$

- *absorption* :

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad \text{et} \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

**Propriété 3.45.** Dans tout treillis  $(L, \vee, \wedge)$  les opérations  $\vee$  et  $\wedge$  sont idempotentes : pour tout élément  $x$  de  $L$ , on a

$$x \vee x = x \quad \text{et} \quad x \wedge x = x$$

*Démonstration.* La preuve de ces égalités repose sur l'axiome d'absorption. On a ainsi

$$x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$$

et la seconde égalité peut être montrée de façon duale.  $\square$

Tout treillis est donc à la fois un  $\vee$ -semitreillis et un  $\wedge$ -semitreillis. On rappelle qu'un  $\vee$ -semitreillis est un objet  $(L, \vee)$  muni d'un morphisme  $\vee : L \times L \rightarrow L$  qui est associatif, commutatif et idempotent ; la définition d'un  $\wedge$ -semitreillis est similaire.

**Définition 3.46** (Treillis borné). Un treillis est dit *borné* lorsqu'il admet un élément minimum et un élément maximum. De façon équivalente, un *treillis borné*  $(L, \vee, 0, \wedge, 1)$  est un treillis  $(L, \vee, \wedge)$  muni de deux éléments 0 et 1 de  $L$  qui sont les éléments neutres respectivement des lois  $\vee$  et  $\wedge$  : pour tout élément  $x$  de  $L$ ,

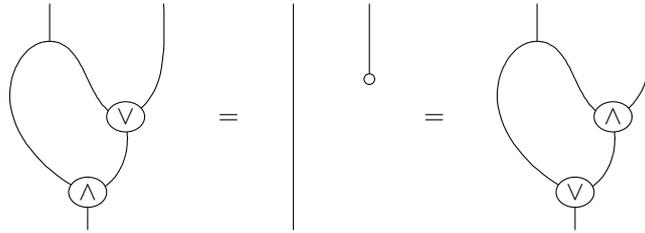
$$1 \vee x = x = x \vee 1 \quad \text{et} \quad 0 \wedge x = x = x \wedge 0.$$

Ceci nous amène à définir une théorie monoïdale  $\mathfrak{L}^-$  des treillis généralisant la définition précédente dans le sens où les treillis dans **Set** seront précisément les treillis au sens habituel.

**Définition 3.47** (Treillis). Un *treillis borné*  $(L, \check{\mu}, \check{\eta}, \hat{\mu}, \hat{\eta}, \delta, \varepsilon, \gamma)$  dans  $\mathcal{C}$  est un objet  $L$  muni de deux structures de bigèbres bicommutatives  $(L, \check{\mu}, \check{\eta}, \delta, \gamma)$  et  $(L, \hat{\mu}, \hat{\eta}, \delta, \gamma)$  telles que le diagrammes

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \check{\mu}} & L \otimes L \\ \delta \otimes L \uparrow & & \downarrow \hat{\mu} \\ L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \varepsilon} & L \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \hat{\mu}} & L \otimes L \\ \delta \otimes L \uparrow & & \downarrow \check{\mu} \\ L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \varepsilon} & L \end{array}$$

commutent. Graphiquement,

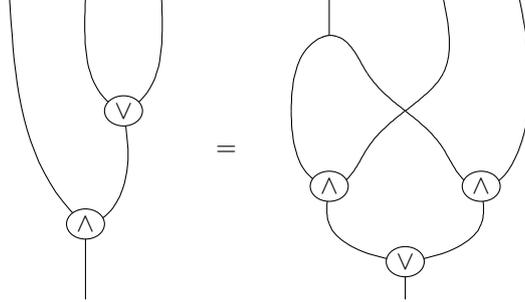


Nous noterons  $\mathfrak{L}^{\text{borné}}$  la théorie équationnelle des treillis bornés est notée  $\mathfrak{L}^{\text{borné}}$ . Un *treillis*  $(L, \check{\mu}, \hat{\mu}, \delta, \varepsilon, \gamma)$  dans  $\mathcal{C}$  est un objet  $L$  muni de morphismes qui satisfont les axiomes précédents qui ne font pas intervenir les morphismes  $\check{\eta}$  et  $\hat{\eta}$ . La théorie équationnelle des treillis est notée  $\mathfrak{L}$ .

Un *treillis distributif* est un treillis tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{\delta \otimes L \otimes L} & L \otimes L \otimes L \otimes L \xrightarrow{L \otimes \gamma \otimes L} & L \otimes L \otimes L \otimes L \xrightarrow{\hat{\mu} \otimes \hat{\mu}} & L \otimes L \\ L \otimes \check{\mu} \downarrow & & & & \downarrow \check{\mu} \\ L \otimes L & \xrightarrow{\hat{\mu}} & L \end{array} \quad (3.24)$$

commute. Graphiquement,



La théorie équationnelle des treillis distributifs est notée  $\mathfrak{L}^{\text{dist}}$  et celle des treillis distributifs bornés est notée  $\mathfrak{L}^{\text{dist+borné}}$ .

*Remarque 3.48.* Par extension de la Propriété 3.45, les deux structures de bi-gèbres sont nécessairement qualitatives.

**Propriété 3.49.** Dans la définition précédente, on pouvait de façon équivalente requérir la commutativité du diagramme dual du diagramme (3.24) :

$$\begin{array}{ccccc}
 L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{\delta \otimes L \otimes L} & L \otimes L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \gamma \otimes L} & L \otimes L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{\hat{\mu} \otimes \hat{\mu}} & L \otimes L \\
 \downarrow L \otimes \hat{\mu} & & & & & & \downarrow \hat{\mu} \\
 L \otimes L & \xrightarrow{\hat{\mu}} & & & & & L
 \end{array}$$

*Démonstration.* Ceci peut être prouvé en transposant la démonstration classique de l'équivalence entre les deux formulations duales de la distributivité dans les treillis [BS81]. La suite d'égalités suivante montre essentiellement que le diagramme de l'énoncé de la propriété implique le diagramme (3.24) :

$$\begin{aligned}
 x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\
 &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
 &= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \\
 &= x \vee (z \wedge (x \vee y)) \\
 &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
 &= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
 &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
 &= (x \vee y) \wedge (x \vee z)
 \end{aligned}$$

L'autre sens de l'équivalence peut être montré de façon duale.  $\square$

**Propriété 3.50.** On a les équivalences de catégories suivantes.

- La théorie des algèbres cartésiennes de  $\mathfrak{L}$  dans **Set** est équivalente à la catégorie des treillis.
- La théorie des algèbres cartésiennes de  $\mathfrak{L}^{\text{borné}}$  dans **Set** est équivalente à la catégorie des treillis bornés.

- La théorie des algèbres cartésiennes de  $\mathfrak{L}^{\text{dist}}$  dans **Set** est équivalente à la catégorie des treillis distributifs.
- La théorie des algèbres cartésiennes de  $\mathfrak{L}^{\text{dist+borné}}$  dans **Set** est équivalente à la catégorie des treillis distributifs bornés.

### 3.6.5 Paires duales

**Définition 3.51.** Une *paire duale*  $(A, B, \eta, \varepsilon)$  est une paire d'objets  $A$  et  $B$ , appelés respectivement *dual à gauche* et *dual à droite*, munie de deux morphismes

$$\eta : I \rightarrow A \otimes B \quad \text{et} \quad \varepsilon : B \otimes A \rightarrow I$$

appelés respectivement *unité* et *counité* et représentés par



tels que les diagrammes



commutent. Graphiquement,



*Remarque 3.52.* Deux objets d'une catégorie monoïdale forment une paire duale si et seulement si ils sont adjoints au sens de la Définition 0.18 dans la 2-catégorie associée.

## Chapitre 4

# Présentation d'une sémantique de jeux

---

Ce chapitre est dévolu à la construction de la présentation d'une catégorie de jeux interprétant le fragment sans connecteurs de la logique propositionnelle du premier ordre. Nous commençons par donner une présentation de la catégorie des relations et plus généralement de certaines catégories de matrices. La sémantique de jeux que nous nous proposons d'étudier est en effet une variante « orientée » de la catégorie relations.

### 4.1 Présentation de catégories de matrices

Nous donnons, dans cette section, une présentation de la catégorie dont les morphismes sont les matrices à coefficients entiers, ainsi que de quelques variantes de cette catégorie. Ce résultat fait partie du folklore de la théorie des catégories et on peut en trouver des preuves de natures très différentes dans la littérature [HP00, Pir02, Laf03, Lac04], voir aussi la Section 3.5. La preuve que nous présentons ici est une variante de celle donnée par Lafont [Laf03] et a l'avantage de pouvoir facilement s'étendre à des cas plus complexes. Nous verrons en particulier à la Section 4.2 comment l'étendre afin de présenter une catégorie de jeux.

#### 4.1.1 Présentation des matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$

La catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  des matrices à coefficients dans  $\mathbb{N}$  a pour objets les entiers naturels  $\underline{n} = \{0, \dots, n-1\}$  et pour morphismes entre deux objets  $\underline{m}$  et  $\underline{n}$  les matrices de taille  $m \times n$  (à  $m$  lignes et  $n$  colonnes) à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire les fonctions  $M : \underline{m} \times \underline{n} \rightarrow \mathbb{N}$ . La composée  $N \circ M : \underline{m} \rightarrow \underline{o}$  de deux matrices  $M : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  et  $N : \underline{n} \rightarrow \underline{o}$  est donnée par la formule habituelle

$$(N \circ M)(i, k) = \sum_{j \in \underline{n}} M(i, j) \times N(j, k)$$

pour tous entiers  $i \in \underline{m}$  et  $k \in \underline{o}$  et l'identité est la matrice identité usuelle. Nous utilisons parfois la notation habituelle  $MN$  pour dénoter la composée  $N \circ M$  de deux matrices. Cette catégorie peut être munie de la structure monoidale  $(\mathbf{Mat}(\mathbb{N}), \otimes, 0)$  où le tenseur  $\otimes$  est donné par l'addition sur les objets et est

défini de façon similaire à celui de la catégorie simpliciale sur les morphismes. Plus explicitement, le tenseur de deux matrices  $M$  et  $N$  est la matrice

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

Le cardinal  $|M|$  d'une matrice  $M : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  est défini par

$$|M| = \sum_{(i,j) \in \underline{m} \times \underline{n}} M(i,j)$$

Nous définissons les notations suivantes pour certains morphismes de  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  :

$$\begin{aligned} M^\mu &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & : \underline{2} \rightarrow \underline{1} \\ M^\eta &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & : \underline{0} \rightarrow \underline{1} \\ M^\delta &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & : \underline{1} \rightarrow \underline{2} \\ M^\varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & : \underline{1} \rightarrow \underline{0} \\ M^\gamma &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & : \underline{2} \rightarrow \underline{2} \end{aligned}$$

Notons  $\mathfrak{B}$  la théorie monoïdale des bigèbres bicommutatives. Cette théorie génère une catégorie monoïdale stricte  $\mathbb{B}$ , qui peut être décrite comme le quotient  $\mathcal{B}/\equiv$  de la catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{B}$  générée par la signature monoïdale sous-jacente à la théorie  $\mathfrak{B}$ , par la congruence monoïdale  $\equiv$  sur les morphismes de  $\mathcal{B}$  engendrée par les équations de  $\mathfrak{B}$ . Dans cette section, nous montrons que la théorie  $\mathfrak{B}$  présente la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ , c'est-à-dire que les catégories  $\mathbb{B}$  et  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  sont isomorphes. Les morphismes de la catégorie  $\mathcal{B}$  peuvent être interprétés dans la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  par le foncteur monoïdal strict  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  qui est l'identité sur les objets et est défini sur les générateurs des morphismes par

$$F\mu = M^\mu \quad F\eta = M^\eta \quad F\delta = M^\delta \quad F\varepsilon = M^\varepsilon \quad F\gamma = M^\gamma$$

La propriété suivante montre de plus que cette interprétation est compatible avec la relation d'équivalence  $\equiv$  dans le sens où deux morphismes équivalents  $\mathcal{B}$  sont interprétés par le même morphisme de  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ .

**Propriété 4.1.** *L'objet  $(1, M^\mu, M^\eta, M^\delta, M^\varepsilon, M^\gamma)$  est une bigèbre bicommutative dans la catégorie monoïdale  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ .*

*Démonstration.* Le morphisme  $M^\gamma$  est un tressage :

$$\begin{aligned} (M^\gamma \otimes 1) \circ (1 \otimes M^\gamma) \circ (M^\gamma \otimes 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1 \otimes M^\gamma) \circ (M^\gamma \otimes 1) \circ (1 \otimes M^\gamma) \end{aligned}$$

et une symétrie :

$$M^\gamma \circ M^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

La multiplication  $M^\mu$  est associative :

$$R^\mu \circ (R^\mu \otimes 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = R^\mu \circ (1 \otimes R^\mu)$$

admet  $M^\eta$  comme unité à gauche

$$M^\mu \circ (M^\eta \otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

et à droite (similaire), et est symétrique :

$$M^\mu \circ M^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M^\mu$$

Dualement, l'objet  $(1, M^\delta, M^\varepsilon)$  est un comonoïde cocommutatif. Finalement, on vérifie que les lois de compatibilité entre la structure de monoïde et la structure de comonoïde sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M^\delta \circ M^\mu &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (M^\mu \otimes M^\mu) \circ (1 \otimes \gamma \otimes 1) \circ (M^\delta \otimes M^\delta) \end{aligned}$$

et

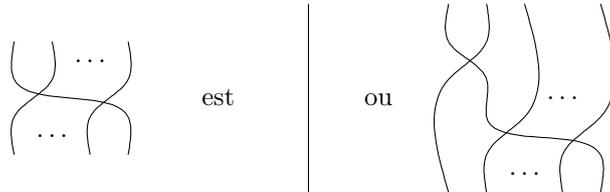
$$M^\varepsilon \circ M^\eta = ()() = () = 0$$

et

$$M^\varepsilon \circ M^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} () = () = () \otimes () = M^\varepsilon \otimes M^\varepsilon$$

et la dernière égalité est vérifiée dualement.  $\square$

Nous noterons  $F/\equiv : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  le foncteur monoïdal strict induit par  $F$  sur la catégorie monoïdale quotient  $\mathbb{B} = \mathcal{B}/\equiv$ . La propriété précédente nous assure que ce foncteur est bien défini. Pour montrer qu'il est plein et fidèle, nous allons définir une notion de forme canonique pour les morphismes de  $\mathcal{B}$  modulo la congruence  $\equiv$ , telle que les formes canoniques de  $\mathcal{B}$  soient en bijection avec les morphismes de  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ . Nous introduisons la notation suivante pour des morphismes de  $\mathcal{B}$ , appelés *escaliers*, et définis par induction par

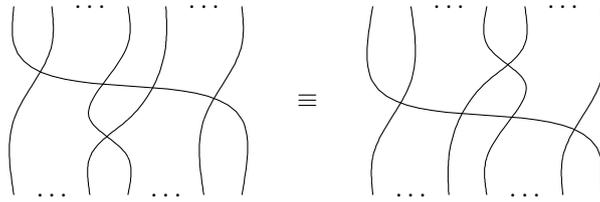


Un escalier est donc soit l'identité  $\text{id}_1$ , soit de la forme  $\phi \circ (\gamma \otimes \text{id}_{m-1})$ , où  $\phi : (m-1) \rightarrow (m-1)$  est un escalier. La *longueur* d'un escalier est l'entier 0 si l'escalier est de la première forme ou le successeur de la longueur de  $\phi$  si l'escalier est de la seconde forme. Pour tout entier  $n$ , l'escalier de longueur  $n$  sera noté  $\gamma_n : (n+1) \rightarrow (n+1)$  et la matrice qui est son interprétation par le foncteur  $F$  sera notée  $M^{\gamma_n} : n+1 \rightarrow n+1$ .

**Lemme 4.2.** Pour tous entiers  $n, n_1$  et  $n_2$  tels que  $n = n_1 + 2 + n_2$ , on a

$$(n_1 \otimes \gamma \otimes n_2 \otimes 1) \circ \gamma_n = \gamma_n \circ (1 \otimes n_1 \otimes \gamma \otimes n_2)$$

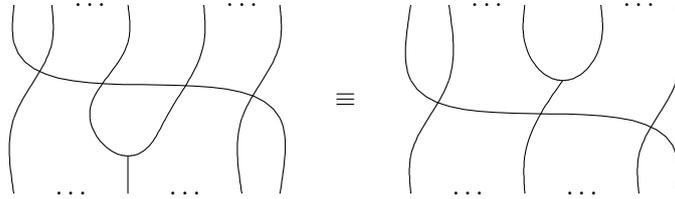
Graphiquement,



Pour tout entiers  $n, n_1$  et  $n_2$  tels que  $n = n_1 + 1 + n_2$ , on a

$$(n_1 \otimes \mu \otimes n_2 \otimes 1) \circ \gamma_{n+1} = \gamma_n \circ (1 \otimes n_1 \otimes \mu \otimes n_2)$$

Graphiquement,

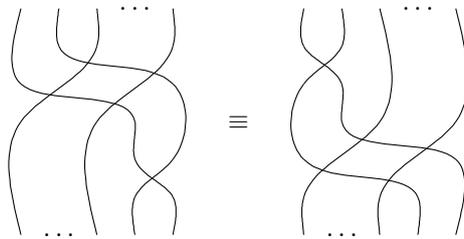


etc.

**Lemme 4.3.** Pour tout entier  $n$ , on a

$$(n \otimes \gamma) \circ (\gamma_n \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_n) = (\gamma_n \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_n) \circ (\gamma \otimes n)$$

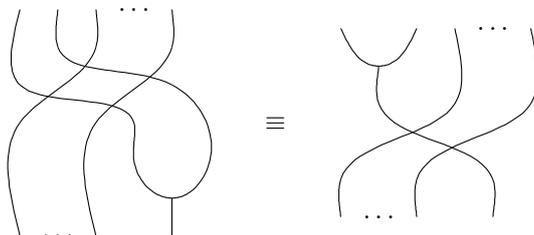
Graphiquement,



Pour tout entier  $n$ , on a

$$(n \otimes \mu) \circ (\gamma_n \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_n) = \gamma_n \circ (\mu \otimes 1)$$

Graphiquement,



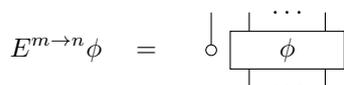
etc.

Nous introduisons aussi les notations suivantes pour certains contextes monoïdaux de  $\mathcal{B}$  :

- nous noterons  $Z$  le morphisme  $\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0$ ,
- pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$ , nous noterons  $H^{m \rightarrow n} \phi$  le morphisme  $\eta \otimes \phi : m \rightarrow n + 1$ ; graphiquement,



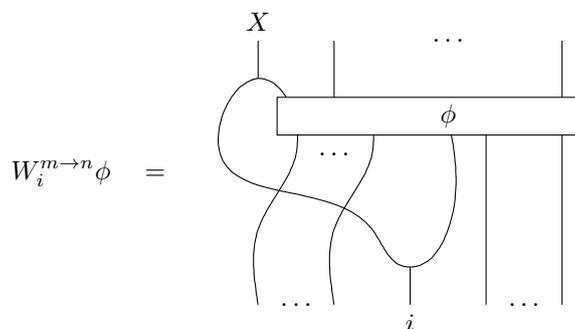
- pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$ , nous noterons  $E^{m \rightarrow n} \phi : m + 1 \rightarrow n$  le morphisme  $\eta \otimes \phi : m + 1 \rightarrow n$ ; graphiquement,



- pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  avec  $m > 0$  et  $n > 0$ , pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i < n$ , nous noterons  $W_i^{m \rightarrow n} \phi : m \rightarrow n$  le morphisme

$$(i \otimes \mu \otimes (n - 1 - i)) \circ (\gamma_i \otimes (n - i)) \circ (1 \otimes \phi) \circ (\delta \otimes (m - 1))$$

graphiquement,



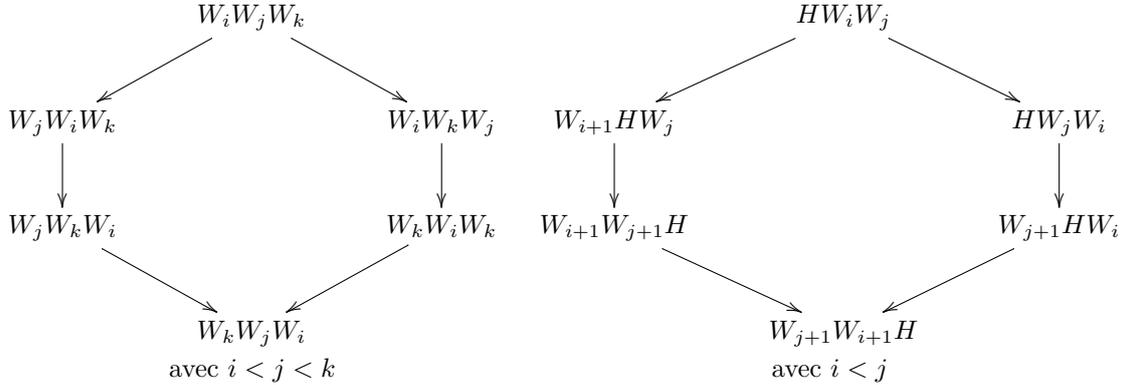
Un morphisme  $\phi$  de la catégorie  $\mathcal{B}$  est une *forme précanonique* lorsqu'il est

- soit égal à  $Z$ ,
- soit de la forme  $H^{m \rightarrow n} \phi$  où  $\phi : m \rightarrow n$  est une forme précanonique,
- soit de la forme  $E^{m \rightarrow n} \phi$  où  $\phi : m \rightarrow n$  est une forme précanonique,
- soit de la forme  $W_i^{m \rightarrow n} \phi$  où  $m$  et  $n$  sont non nuls,  $i < n$  et  $\phi : m \rightarrow n$  est une forme précanonique.

Les contextes monoïdaux  $Z$ ,  $H^{m \rightarrow n}$ ,  $E^{m \rightarrow n}$  et  $W_i^{m \rightarrow n}$  sont appelés les *constructeurs des formes précanoniques*. Ces formes précanoniques peuvent être vues comme les morphismes de la catégorie générée par un 1-polygraphe sans relations, dont les 0-générateurs sont les couples  $(m, n)$  d'entiers, encore parfois notés  $m \rightarrow n$ , et les 1-générateurs sont les constructeurs  $H^{m \rightarrow n}$ ,  $E^{m \rightarrow n}$  et  $W_i^{(m+1) \rightarrow (n+1)}$  pour tous entiers  $m, n$  et  $i \leq n$ . On peut ajouter à ce polygraphe les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
 H^{m \rightarrow n} W_i^{m \rightarrow n} & \implies & W_{i+1}^{m \rightarrow (n+1)} H^{m \rightarrow n} \\
 H^{(m+1) \rightarrow n} E^{m \rightarrow n} & \implies & E^{m \rightarrow (n+1)} H^{m \rightarrow n} \\
 W_i^{m \rightarrow n} W_j^{m \rightarrow n} & \implies & W_j^{m \rightarrow n} W_i^{m \rightarrow n} \quad \text{lorsque } i < j
 \end{array} \quad (4.1)$$

Le 1-polygraphe ainsi défini est appelé le *polygraphe des formes précanoniques*. Considérons les générateurs (4.1) comme les règles d'un système de réécriture typé (dans le sens où les productions préservent les types des morphismes) sur les morphismes de la catégorie générée par le 1-polygraphe sans relations. Il est aisé de constater que ce système est localement confluent en montrant que ses paires critiques sont joignables :



(nous omettrons dorénavant les indications de type en exposant par souci de concision). Il est de plus terminant, ce qui peut être montré en considérant l'interprétation  $\llbracket - \rrbracket$  des morphismes dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ordonné lexicographiquement, définie sur les générateurs par

$$\llbracket Z \rrbracket = (0, 0) \quad \llbracket H \rrbracket = (0, 0) \quad \llbracket E \rrbracket = (1, 0) \quad \llbracket W_i \rrbracket = (1, i)$$

et sur la composition et les identités par

$$\llbracket G \circ F \rrbracket = (\llbracket G \rrbracket_1 + 2 \times \llbracket F \rrbracket_1, \llbracket G \rrbracket_2 + 2 \times \llbracket F \rrbracket_2) \quad \text{et} \quad \llbracket \text{id} \rrbracket = (0, 0)$$

où  $\llbracket F \rrbracket = (\llbracket F \rrbracket_1, \llbracket F \rrbracket_2)$  et  $\llbracket G \rrbracket = (\llbracket G \rrbracket_1, \llbracket G \rrbracket_2)$ . Plus précisément, notre interprétation définit un foncteur de la catégorie  $\mathcal{B}$  dans la catégorie d'ordre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Il est alors aisé de vérifier que les règles de réécriture sur les morphismes données ci-dessus font décroître l'interprétation des morphismes. On en déduit que le système de réécriture est confluent. Les morphismes de  $\mathcal{B}$  qui sont des formes précanoniques et sont des formes normales du système de réécriture sont appelés *formes canoniques*. Ces formes canoniques sont les morphismes de la forme

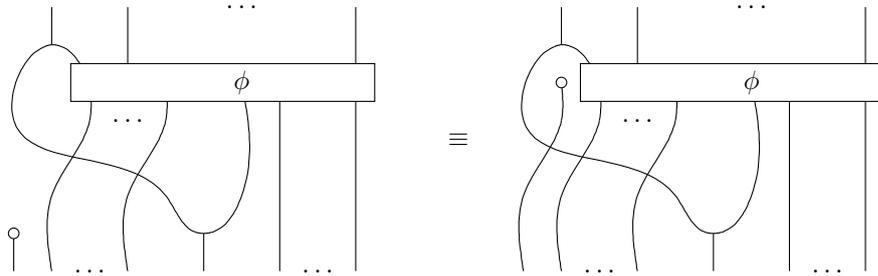
$$W_{i_{k_n}}^{i_n} \cdots W_{i_1}^{i_n} E \cdots \cdots W_{i_{k_1}}^{i_1} \cdots W_{i_1}^{i_1} EH \cdots HZ \tag{4.2}$$

avec pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n$ ,  $i_1^p \geq \dots \geq i_{k_p}^p$ . De plus, on peut vérifier que la relation de réécriture est compatible avec la relation d'équivalence  $\equiv$  :

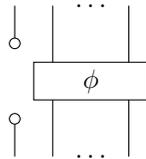
**Lemme 4.4.** *Deux morphismes  $\phi$  et  $\psi$  de  $\mathcal{B}$  tels que  $\phi$  se réécrit en  $\psi$  sont équivalents par la relation  $\equiv$ .*

*Démonstration.* On distingue trois cas selon la règle utilisée pour effectuer la réécriture  $\phi \Rightarrow \psi$ . La relation  $\equiv$  étant une congruence monoïdale, on peut supposer que la réécriture est effectuée en tête du morphisme. Pour tout morphisme  $\phi' : m \rightarrow n$ , on a les équivalences suivantes.

1.  $HW_i\phi' \equiv W_{i+1}H\phi'$ . Graphiquement,



2.  $HE\phi' = EH\phi'$ . Graphiquement,



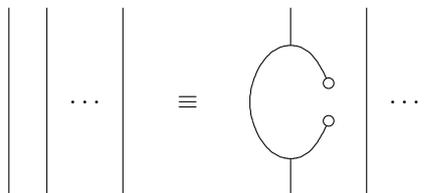
3.  $W_iW_j\phi' = W_jW_i\phi'$  lorsque  $i < j$ . Par souci de concision nous omettons ce cas qui se montre en utilisant le Lemme 4.3.  $\square$

Montrons maintenant que tout morphisme  $\phi$  de la catégorie  $\mathcal{B}$  est équivalent, par la relation  $\equiv$ , à une forme précanonique.

**Lemme 4.5.** *Pour tout entier  $n$ , l'identité sur  $n$  de  $\mathcal{B}$  est équivalente à une forme précanonique.*

*Démonstration.* Par induction sur  $n$ .

- Si  $n = 0$  alors  $\text{id}_0 = Z$ .
- Sinon on a l'égalité  $\text{id}_{n+1} = W_0 E H \text{id}_n$  et  $\text{id}_n$  est équivalente à une forme précanonique par hypothèse d'induction. Graphiquement,



□

**Propriété 4.6.** *Tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{B}$  est équivalent à une forme précanonique.*

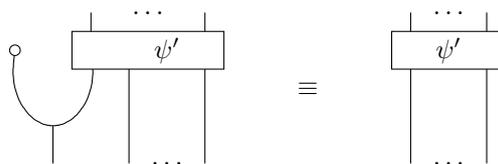
*Démonstration.* Par induction sur la taille  $|\phi|$  du morphisme  $\phi$ .

- Si  $|\phi| = 0$  alors  $m = n$ ,  $\phi$  est une identité et est égal à une forme précanonique par le lemme précédent.
- Sinon, le morphisme  $\phi$  est de la forme  $\phi = \xi \circ \psi$  avec  $|\xi| = 1$  et  $|\xi| + |\psi| = |\phi|$ . Par hypothèse d'induction, le morphisme  $\psi$  est équivalent à une forme précanonique. De plus, le morphisme  $\xi$  est de la forme  $m_1 \otimes \pi \otimes m_2$  où  $\pi$  est  $\mu, \eta, \delta, \varepsilon$  ou  $\gamma$ . On montre alors le résultat en distinguant ces cinq cas et pour chacun de ces cas en distinguant selon la forme précanonique de  $\psi$  (on a donc à chaque fois quatre cas correspondant aux formes  $Z, H\psi', E\psi'$  et  $W_i\psi'$  possibles pour  $\psi$ ).

1. Supposons  $\pi = \mu$ .

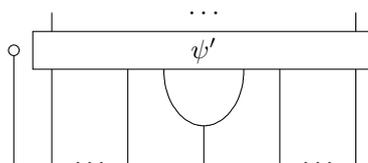
(a) Si  $\psi = H\psi'$  alors on distingue deux cas.

– Si  $m_1 = 0$  alors on a l'équivalence



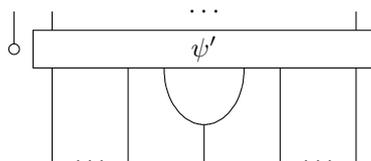
et  $\psi'$  est équivalente à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

– Sinon, le morphisme  $\phi$  peut être représenté par



et est de la forme  $H((m_1 - 1) \otimes \mu \otimes m_2) \circ \psi'$  où le morphisme  $((m_1 - 1) \otimes \mu \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

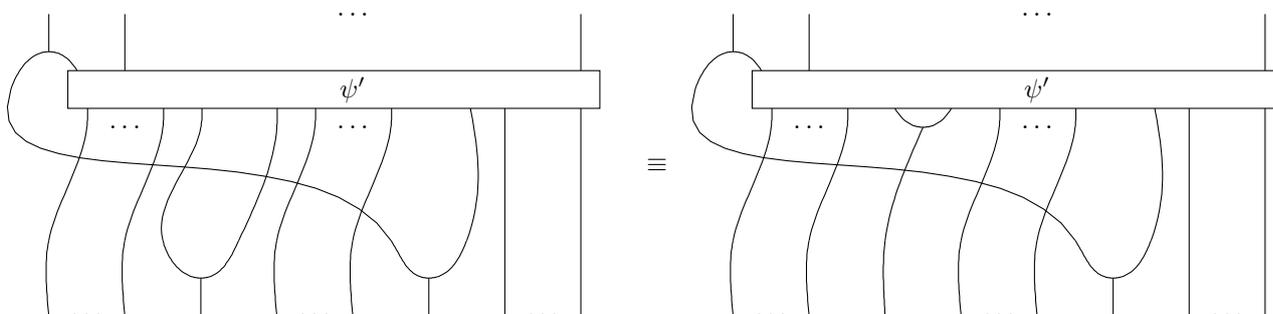
(b) Si  $\psi = E\psi'$  alors le morphisme  $\phi$  peut être représenté par



et est de la forme  $E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

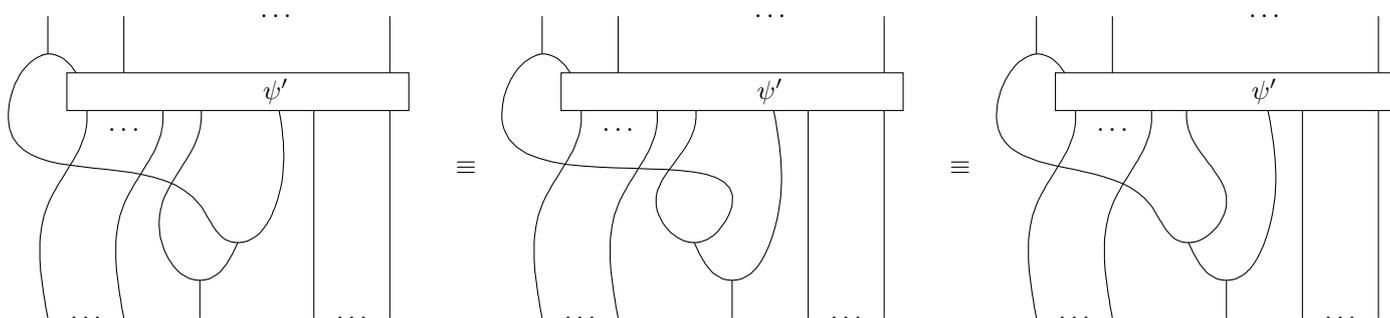
(c) Si  $\psi = W_i\psi'$  alors on distingue quatre cas.

– Si  $m_1 < i - 1$  alors on a l'équivalence



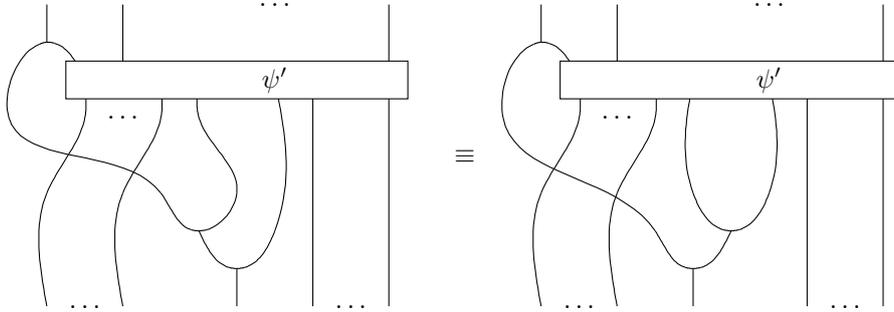
et est de la forme  $W_{i-1}(((m_1 - 1) \otimes \mu \otimes (m_2)) \circ \psi')$  où le morphisme  $((m_1 - 1) \otimes \mu \otimes (m_2)) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

– Si  $m_1 = i - 1$  alors on a les équivalences



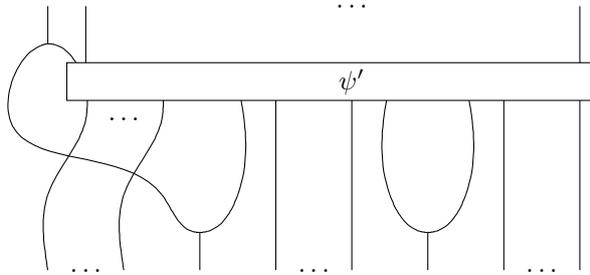
et on est ramené au cas suivant.

– Si  $m = i$  alors on a l'équivalence



et est de la forme  $W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

– Si  $m > i$  alors  $\phi$  peut être représenté par



et est de la forme  $W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

2. Supposons  $\pi = \eta$ .

(a) Si  $\psi = Z$  alors  $\phi = HZ$  qui est une forme précanonique.

(b) Si  $\psi = H\psi'$  alors on distingue deux cas.

– Si  $m_1 = 0$  alors  $\phi = HH\psi'$ .

– Sinon,  $\phi = H((m_1 - 1) \otimes \eta \otimes m_2) \circ \psi'$  où le morphisme  $((m_1 - 1) \otimes \eta \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

(c) Si  $\psi = E\psi'$  alors  $\phi = E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

(d) Si  $\psi = W_i\psi'$  alors on distingue deux cas.

– Si  $m_1 \leq i$  alors  $\phi \equiv W_{i+1}(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

– Sinon,  $\phi = W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

3. Supposons  $\pi = \delta$ .

(a) Si  $\psi = H\psi'$  alors on distingue deux cas.

– Si  $m_1 = 0$  alors  $\phi \equiv HH\psi'$  où  $\psi'$  est une forme précanonique.

- Sinon,  $\phi \equiv H(((m_1-1) \otimes \delta \otimes m_2) \circ \psi')$  où le morphisme  $((m_1-1) \otimes \delta \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
  - (b) Si  $\psi = E\psi'$  alors  $\phi = E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
  - (c) Si  $\psi = W_i\psi'$  alors on distingue trois cas.
    - Si  $m_1 < i$  alors  $\phi \equiv W_{i+1}(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Si  $m_1 = i$  alors  $\phi \equiv W_i W_{i+1}(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Sinon,  $\phi = W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
4. Supposons  $\pi = \varepsilon$ .
- (a) Si  $\psi = H\psi'$  alors on distingue deux cas.
    - Si  $m_1 = 0$  alors  $\phi \equiv \psi'$  où le morphisme  $\psi'$  est une forme précanonique.
    - Sinon  $\psi = H(((m_1-1) \otimes \varepsilon \otimes m_2) \circ \psi')$  où par hypothèse d'induction le morphisme  $((m_1-1) \otimes \varepsilon \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique.
  - (b) Si  $\psi = E\psi'$  alors  $\phi = E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
  - (c) Si  $\psi = W_i\psi'$  alors on distingue trois cas.
    - Si  $m_1 < i$  alors  $\phi \equiv W_{i-1}(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Si  $m_1 = i$  alors  $\phi \equiv E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Sinon,  $\phi = W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
5. Supposons  $\pi = \gamma$ .
- (a) Si  $\psi = H\psi'$  alors on distingue deux cas.
    - Si  $m_1 = 0$  alors  $\phi \equiv ((1 \otimes \eta \otimes m_2) \circ \psi')$  où le morphisme  $(1 \otimes \eta \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Sinon,  $\phi = H(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
  - (b) Si  $\psi = E\psi'$  alors  $\phi = E(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
  - (c) Si  $\psi = W_i\psi'$  alors on distingue quatre cas.
    - Si  $m_1 < i - 1$  alors  $\phi \equiv W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
    - Si  $m_1 = i - 1$  alors  $\phi \equiv W_{i-1}(((m_1+1) \otimes \gamma \otimes m_2) \circ \psi')$  où le morphisme  $((m_1+1) \otimes \gamma \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.

- Si  $m_1 = i$  alors  $\phi \equiv W_{i+1}(((m_1 + 1) \otimes \gamma \otimes m_2) \circ \psi')$  où le morphisme  $((m_1 + 1) \otimes \gamma \otimes m_2) \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.
- Sinon,  $\phi = W_i(\xi \circ \psi')$  où le morphisme  $\xi \circ \psi'$  est équivalent à une forme précanonique par hypothèse d'induction.  $\square$

*Remarque 4.7.* Pour simplifier la preuve, il est tentant de décomposer le morphisme dans l'autre sens, sous une forme  $\phi = \psi \circ \xi$ , où  $\xi = m_1 \otimes \pi \otimes m_2$ , le morphisme  $\pi$  étant l'un des morphismes  $\mu, \eta, \delta, \varepsilon$  et  $\gamma$ . Cependant, les cas où  $m_1 = 0$  et  $\pi = \mu$  (resp.  $\pi = \delta$ , resp.  $\pi = \gamma$ ) ne peuvent alors pas être simplement traités en utilisant l'hypothèse d'induction.

La propriété suivante montre que le foncteur  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  d'interprétation est plein, ce qui implique que le foncteur induit  $F/\equiv : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  l'est aussi.

**Propriété 4.8.** *Toute matrice  $M : m \rightarrow n$  de  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  est l'interprétation (par le foncteur  $F$ ) d'un morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* La preuve est faite par induction sur le triplet  $(m, |M|, n)$  où  $m \times n$  est la taille de la matrice  $M : m \rightarrow n$ .

- Si  $m = 0$  et  $n = 0$  alors  $M = FZ$ .
- Si  $m = 0$  et  $n > 0$  alors  $M$  est de la forme  $M = M^n \otimes M'$  où  $M'$  est la matrice de taille  $0 \times (n - 1)$  (et de cardinal nul). On en déduit que  $M = F(H\phi)$  où  $\phi$  est une forme précanonique telle que  $F\phi = M'$  obtenue par hypothèse d'induction.
- Si  $m \neq 0$  alors on distingue deux cas :
  - Si pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k < n$  on a  $M(0, k) = 0$  alors  $M$  est de la forme  $M = M^\varepsilon \otimes M'$  où  $M'$  est la matrice de taille  $(m - 1) \times n$  définie pour tous indices  $i, j$  par  $M'(i, j) = M(i + 1, j)$  (et  $|M'| = |M|$ ). On en déduit que  $M = F(E\phi)$  où  $\phi$  est une forme précanonique telle que  $F\phi = M'$  obtenue par hypothèse d'induction.
  - Sinon, nécessairement  $n \neq 0$  et, en notant  $k$  le plus grand indice tel que  $M(0, k) \neq 0$ , la matrice  $M$  est de la forme

$$M = (M^\mu \otimes (n - 1)) \circ (M^{\gamma k} \otimes (n - k)) \circ (1 \otimes M') \circ (M^\delta \otimes (m - 1))$$

où  $M$  est la matrice de taille  $m \times n$  définie par  $M'(0, k) = M(0, k) - 1$  et sur tous les autres indices  $i, j$  par  $M'(i, j) = M(i, j)$ . La matrice  $M'$  est donc de cardinal  $|M'| = |M| - 1$ . On en déduit que  $M = F(W_k\phi)$  où  $\phi$  est une forme précanonique telle que  $F\phi = M'$  obtenue par hypothèse d'induction.  $\square$

La propriété précédente nous fournit un algorithme pour construire une forme précanonique à partir d'une matrice. Informellement l'exécution de cet algorithme sur une matrice  $M : m \rightarrow n$  consiste à énumérer les coefficients non nuls de la première colonne, par ordonnée  $k$  décroissante, en écrivant, pour chaque telle ordonnée  $k$ ,  $M(0, k)$  fois  $W_k$ . Une fois la première colonne énumérée, on écrit  $H$  et on énumère la deuxième colonne et ainsi de suite. Après avoir

énuméré la dernière colonne, on écrit  $n$  fois  $E$ , puis  $Z$ . Le mot ainsi obtenu par l'exécution de l'algorithme sera une forme précanonique dont l'interprétation est la matrice  $M$ . On peut de plus constater que cette forme précanonique est une forme canonique.

*Remarque 4.9.* Nous avons volontairement gardé un énoncé plus faible que la démonstration qui est faite ici, car il nous suffit. On peut en déduire que toute matrice est l'image d'une forme canonique de la façon suivante. Par la Propriété 4.8, toute matrice  $M$  est l'image par  $F$  d'un morphisme  $\phi$  de  $\mathcal{B}$ . Or, par la Propriété 4.6, le morphisme  $\phi$  est équivalent à une forme précanonique  $\phi'$  et, par confluence du système de réécriture (4.1) et le Lemme 4.4, il est équivalent à une forme canonique  $\phi''$ . La Propriété 4.1 nous assurant que les images par  $F$  de deux morphismes équivalents sont égales, on en déduit que toute matrice  $M$  est l'interprétation d'une forme canonique.

Les formes canoniques étant explicitement décrites (4.2), il est intéressant de remarquer que l'algorithme fourni par la propriété précédente est le seul possible pour construire une forme canonique dont l'image est une matrice  $M$  donnée. On en déduit que

**Propriété 4.10.** *Le foncteur  $F/\equiv$  est fidèle.*

*Démonstration.* Soient  $f, g : m \rightarrow n$  deux morphismes de  $\mathbb{B}$  tels que l'on ait  $(F/\equiv)f = (F/\equiv)g$ . Par définition du foncteur  $F/\equiv$ , pour tous morphismes  $\phi : m \rightarrow n$  et  $\psi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{B}$ , qui sont respectivement dans les classes d'équivalence par  $\equiv$  des morphismes  $f$  et  $g$ , et il existe de tels morphismes, on a  $F\phi = F\psi$ . Par la Propriété 4.6, le morphisme  $\phi$  est équivalent à une forme précanonique  $\phi'$  et, par confluence du système de réécriture (4.1) et par le Lemme 4.4, il est équivalent à une forme canonique  $\phi''$ . De même, le morphisme  $\psi$  est équivalent à une forme canonique  $\psi''$ . Par le Lemme 4.1, les images par  $F$  de deux morphismes équivalents de  $\mathcal{B}$  sont égales. On a donc  $F\phi'' = F\psi''$ . Par la remarque précédente, les deux formes canoniques  $\phi''$  et  $\psi''$  sont nécessairement égales, donc  $\phi \equiv \psi$ , et on a finalement  $f = g$ .  $\square$

Les catégories  $\mathbb{B}$  et  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  sont donc isomorphes, soit encore

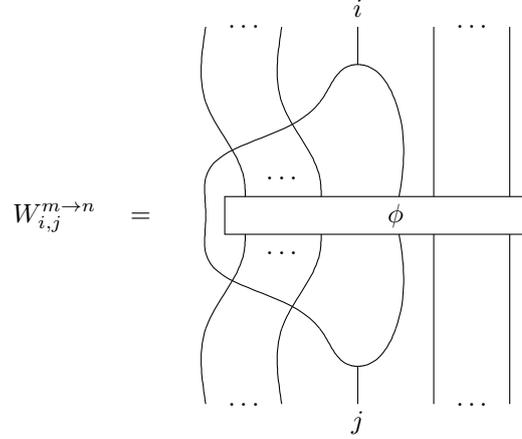
**Théorème 4.11.** *La catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  est présentée par la théorie monoïdale  $\mathfrak{B}$ .*

*Remarque 4.12.* Notons que, par le théorème précédent, le 1-polygraphe des formes précanoniques et des relations (4.1) fournit une sorte de présentation alternative des matrices à coefficients dans  $\mathbb{N}$  dans le sens où les morphismes de  $0 \rightarrow 0$  dans  $m \rightarrow n$  sont en bijection avec les matrices de taille  $m \times n$ . Cependant cette présentation est moins satisfaisante que celle fournie par  $\mathfrak{B}$ , car d'une part elle est infinie et d'autre part elle ne fournit pas de moyen direct de composer les matrices ainsi présentées.

*Remarque 4.13.* D'autres notions de formes (pré-)canoniques sont bien sûr utilisables pour mener à terme la preuve du Théorème 4.11. En particulier, il est possible de remplacer le constructeur  $W_i^{m \rightarrow n}$  dans la forme précanonique que nous avons donnée par un constructeur  $W_{i,j}^{m \rightarrow n}$ , où  $W_{i,j}^{m \rightarrow n} \phi$  est défini pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  par

$$(j \otimes \mu \otimes (n-1-j)) \circ (\gamma_j \otimes (n-j)) \circ (1 \otimes \phi) \circ (\gamma_i^{-1} \otimes (m-i)) \circ (i \otimes \delta \otimes (m-1-i))$$

Graphiquement,



Si cette notion de forme précanonique a l'intérêt d'être invariante par dualité (c'est-à-dire par symétrie horizontale), nous ne l'avons pas choisie car elle amenait à des développements plus longs : il y a plus de règles de réécriture pour définir les formes canoniques et plus de cas à traiter dans les preuves.

### 4.1.2 Présentation des relations

La catégorie **FRel** a pour objets les entiers  $\underline{n}$  et pour morphismes entre deux objets  $\underline{m}$  et  $\underline{n}$  les relations entre ces deux ensembles, c'est-à-dire les sous-ensembles  $R$  de  $\underline{m} \times \underline{n}$ .

Nous définissons une relation d'équivalence  $\approx$  sur les entiers naturels par

$$m \approx n \quad \text{ssi} \quad m = 0 \quad \text{ssi} \quad n = 0$$

Une relation  $R : m \rightarrow n$  peut être vue comme une fonction  $R : m \times n \rightarrow (\mathbb{N}/\approx)$ , où  $R(i, j) = 0$  si et seulement si  $(i, j) \in R$  dans la représentation initiale : la catégorie **FRel** est isomorphe à la catégorie quotient  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})/\approx$  où deux matrices  $M : m \rightarrow n$  et  $N : m \rightarrow n$  sont équivalentes par la relation  $\approx$  lorsque pour tous indices  $i, j$ , on a  $M(i, j) \approx N(i, j)$  (on vérifie aisément que cette relation d'équivalence est une congruence monoïdale). La catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  peut donc être écrasée dans la catégorie **FRel** par le foncteur  $F$  qui est l'identité sur les objets et à toute matrice  $M$  associe la relation  $M/\approx$ . Réciproquement, la catégorie **FRel** peut être plongée dans la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  par le foncteur fort fidèle  $G$  qui est l'identité sur les objets et à toute relation  $R : m \rightarrow n$  associe la matrice  $GR : m \rightarrow n$  définie par

$$GR(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(i, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le foncteur est *fort* car si l'image par  $G$  de l'identité est bien l'identité, l'image  $G(R_2 \circ R_1)$  de la composée de deux relations  $R_1$  et  $R_2$  n'est pas égale à la composée des images par  $G$  des relations mais on a seulement l'équivalence  $G(R_2 \circ R_1) \approx GR_2 \circ GR_1$ .

Nous notons  $R^\mu, R^\eta, R^\delta, R^\varepsilon, R^\gamma$  les quotients respectifs des morphismes  $M^\mu, M^\eta, M^\delta, M^\varepsilon$  et  $M^\gamma$  de  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ .

**Propriété 4.14.** *L'objet  $(1, R^\mu, R^\eta, R^\delta, R^\varepsilon, R^\gamma)$  est une bigèbre bicommutative qualitative dans  $\mathbf{FRel}$ .*

*Démonstration.* La catégorie  $\mathbf{FRel}$  étant obtenue comme un quotient de la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$ , la Propriété 4.1 nous assure que les morphismes munissent l'objet d'une structure de bigèbre bicommutative. De plus la suite d'égalités

$$R^\mu \circ R^\delta = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2) \approx (1) = 1$$

montre que cette bigèbre est qualitative. □

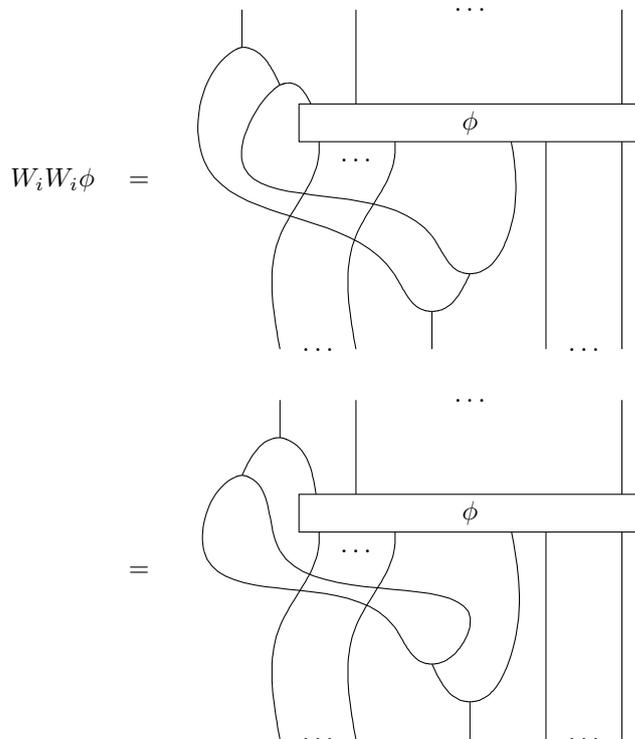
Nous allons montrer que la catégorie monoïdale stricte  $\mathbf{FRel}$  est présentée par une théorie monoïdale  $\mathfrak{R}$  des bigèbres bicommutatives qualitatives. Notons  $\mathbb{R} = \mathcal{R}/\equiv$  la catégorie monoïdale stricte générée par cette théorie. La preuve peut être faite en adaptant légèrement la preuve de la section précédente : les formes précanoniques sont les mêmes mais on ajoute la règle

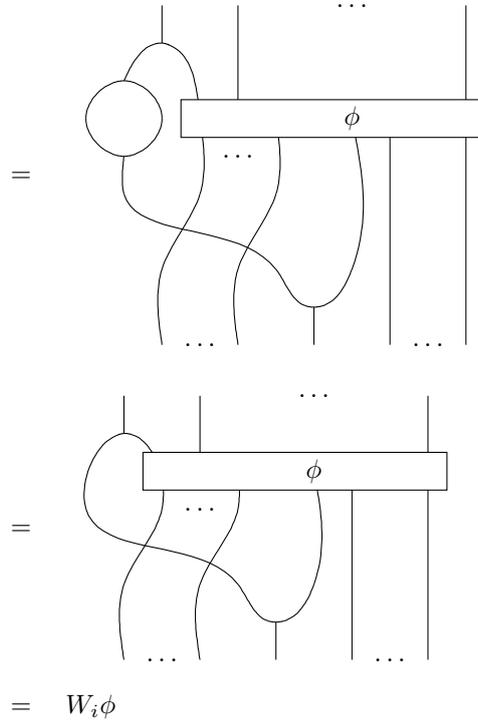
$$W_i^{m \rightarrow n} W_i^{m \rightarrow n} \implies W_i^{m \rightarrow n} \tag{4.3}$$

au système de réécriture (4.1) qui reste normalisant.

**Lemme 4.15.** *Pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$ , si  $\phi$  peut être réécrit en un morphisme  $\psi : m \rightarrow n$  en utilisant la règle (4.3) alors  $\phi \equiv \psi$ .*

*Démonstration.* Pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$ , on a les équivalences





□

Notons  $\equiv_q$  la plus petite congruence monoïdale engendrée sur les morphismes de  $\mathbb{B}$  par la loi des bigèbres qualitatives (3.21) de sorte que l'on ait

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{B}/\equiv_q \tag{4.4}$$

La catégorie **FRel** pouvant être obtenue comme un quotient de la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  par la congruence monoïdale  $\approx$ , le foncteur  $F/\equiv : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{Mat}(\mathbb{N})$  de la section précédente induit un foncteur  $G : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{FRel}$  qui est lui aussi plein. La Propriété 4.14, nous assurant que l'objet  $(1, R^\mu, R^\eta, R^\delta, R^\epsilon, R^\gamma)$  est une bigèbre qualitative dans **FRel**, par l'équation (4.4) ce foncteur induit à son tour un foncteur plein  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{FRel}$ . Le système de réécriture obtenu en ajoutant la règle (4.3) est normalisant ce qui permet de s'assurer que le foncteur  $H$  est fidèle. En effet, il est aisé de constater que les formes normales de ce systèmes sont précisément les matrices dont les coefficients sont 0 ou 1 qui sont en bijection avec les relations en vertu des remarques du début de la section.

**Théorème 4.16.** *La catégorie **FRel** est présentée par la théorie équationnelle monoïdale  $\mathfrak{R}$  des bigèbres bicommutatives qualitatives.*

### 4.1.3 Présentation des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Nous étendons ici les résultats de la Section 4.1.1 en donnant une présentation de la catégorie  $\mathbf{Mat}(\mathbb{Z})$  qui est la théorie monoïdale dont les morphismes  $M : m \rightarrow n$  sont les matrices de taille  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Le morphisme  $M^\sigma : 1 \rightarrow 1$  est défini par  $M^\sigma = (-1)$  et les morphismes  $M^\mu, M^\eta, M^\delta, M^\epsilon$  et  $M^\gamma$  sont définis de façon similaire à la Section 4.1.1.



2. un ensemble de symboles de fonctions  $f, g, \dots$  d'arités données,
3. un ensemble de variables du premier ordre  $x, y, \dots$

Les *termes*  $t$  et les *formules*  $A$  sont respectivement générés par les grammaires suivantes :

$$t ::= x \mid f(t, \dots, t) \quad A ::= P(t, \dots, t) \mid \forall x.A \mid \exists x.A$$

où les applications des propositions et des fonctions sont toujours supposées respecter les arités. Les formules sont considérées modulo renommage des variables (encore appelé  $\alpha$ -conversion) et la substitution  $A[t/x]$  d'une variable libre  $x$  par un terme  $t$  dans une formule  $A$  est définie de la façon habituelle, en évitant les captures de variables.

Nous allons considérer la logique associée à ces formules dans laquelle les preuves sont générées par les règles d'inférence décrites ci-dessous. On suppose fixé un ensemble  $Ax$  de couples  $(P(t_1, \dots, t_m), Q(t'_1, \dots, t'_n))$  de propositions, appelés *axiomes*, tel que cet ensemble est réflexif, transitif et est clos par  $\alpha$ -conversion et substitution.

$$\frac{A[t/x] \vdash B}{\forall x.A \vdash B} (\forall\text{-L})$$

$$\frac{A \vdash B}{A \vdash \forall x.B} (\forall\text{-R})$$

(avec  $x$  non libre dans  $A$ )

$$\frac{A \vdash B}{\exists x.A \vdash B} (\exists\text{-L})$$

$$\frac{A \vdash B[t/x]}{A \vdash \exists x.B} (\exists\text{-R})$$

(avec  $x$  non libre dans  $B$ )

$$\frac{(P(t_1, \dots, t_m), Q(t'_1, \dots, t'_n)) \in Ax}{P(t_1, \dots, t_m) \vdash Q(t'_1, \dots, t'_n)} (Ax)$$

$$\frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C} (\text{Cut})$$

### 4.2.2 Sémantique de jeux

Afin de comprendre la nature des dépendances dont la sémantique de jeux que nous allons introduire rendra compte, remarquons que les transformations de preuves suivantes sont possibles. Une preuve

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash A, \forall y.B, \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta} (\forall\text{-R})$$

peut toujours être transformée en une preuve

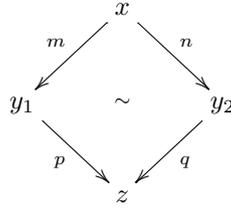
$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x.A, B, \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta} (\forall\text{-R})$$

et ces deux preuves ne diffèrent que par l'ordre introduction des quantificateurs universels : on a « permuté » les deux règles introduisant ces connecteurs. Cet

ordre semble donc être un artéfact introduit par la formalisation de la preuve en calcul des séquents et n'est pas véritablement important si l'on veut appréhender la preuve elle-même. C'est pourquoi nous souhaiterions pouvoir travailler modulo la commutation de ces règles, ce qui permettrait intuitivement de représenter des preuves qui introduisent plusieurs connecteurs simultanément comme

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta}$$

dans l'esprit des sémantiques asynchrones développées précédemment. Cette preuve correspond en effet à pouvoir introduire les deux connecteurs l'un après l'autre ou l'autre après l'un et ces deux séquences d'utilisations de règles d'introduction ne diffèrent que par une permutation d'instances indépendantes des règles d'introduction. Elles vont donc induire une tuile



dans la stratégie associée à la preuve dans sémantique de jeux que nous allons définir, où les transitions  $m$  et  $q$  représentent l'introduction du connecteur  $\forall x$  et les transitions  $n$  et  $p$  représentent l'introduction du connecteur  $\forall y$ .

De même, on peut toujours effectuer les transformations

$$\frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B[t'/y], \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash A[t/x], \exists y.B, \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, \exists y.B, \Delta} (\exists\text{-R}) \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B[t'/y], \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, B[t'/y], \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, \exists y.B, \Delta} (\exists\text{-R})$$

et

$$\frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B, \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash A[t/x], \forall y.B, \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, \forall y.B, \Delta} (\exists\text{-R}) \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B, \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, B, \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \exists x.A, \forall y.B, \Delta} (\forall\text{-R})$$

La transformation

$$\frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash A, \exists y.B, \Delta} (\exists\text{-R})}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta} (\forall\text{-R}) \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash \forall x.A, B[t/y], \Delta} (\forall\text{-R})}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta} (\exists\text{-R})$$

est plus subtile, car il n'est possible de la faire que lorsque le terme  $t$  n'a pas la variable  $x$  comme variable libre. C'est pour cela que nous allons considérer

qu'une preuve fait dépendre un connecteur existentiel d'un connecteur universel lorsque le témoin fourni pour introduire le connecteur existentiel a la variable quantifiée par le connecteur universel comme variable libre, et que ces dépendances sont les seules significatives.

Ainsi, nous allons interpréter les formules par des *jeux* dont les coups correspondront aux connecteurs, avec une polarité positive pour les connecteurs existentiels et une polarité négative pour les connecteurs universels. Ces coups seront ordonné dans le jeu, cet ordre correspondant à l'ordre d'exploration imposé par la formule. Les preuves seront quant à elles interprétées par des *stratégies*, c'est-à-dire des ordres partiels sur les coups du jeu compatibles avec l'ordre imposé par le jeu, indiquant les dépendances d'un connecteur existentiel sur un connecteur universel tel que nous l'avons expliqué.

**Définition 4.19** (Jeu). Un *jeu*  $A = (M_A, \leq_A, \surd_A, \lambda_A)$  est une structure d'événements  $(M_A, \leq_A, \surd_A)$  équipée d'une fonction  $\lambda_A : M_A \rightarrow \{-1, +1\}$  qui à tout coup  $m$  de  $M_A$  associe une polarité.

Dans la suite, nous nous restreindrons à des jeux dont la relation d'incompatibilité est vide. Si  $A = (M_A, \leq_A, \lambda_A)$  et  $B = (M_B, \leq_B, \lambda_B)$  sont deux jeux, leur *produit tensoriel* est défini par

$$M_{A \otimes B} = M_A \uplus M_B, \quad \lambda_{A \otimes B} = \lambda_A + \lambda_B \quad \text{et} \quad \leq_{A \otimes B} = \leq_A \cup \leq_B$$

Le *dual*  $A^*$  d'un jeu  $A$  est le jeu défini par

$$A^* = (M_A, -\lambda_A, \leq_A)$$

et finalement, le jeu flèche  $A \multimap B$  est défini par

$$A \multimap B = (A \otimes B^*)^*$$

Un jeu est dit *filiforme* lorsque l'ordre partiel sous-jacent est total.

Deux ordres partiels  $\leq$  et  $\leq'$  sur un ensemble  $M$  sont *compatibles* lorsque leur union  $\leq \cup \leq'$  (en tant que relations) est encore un ordre partiel, c'est-à-dire est acyclique.

**Définition 4.20** (Stratégie causale). Une *stratégie causale*  $\sigma : A$  est un ordre partiel  $\leq_\sigma$  sur les coups de  $A$  qui

1. est compatible avec l'ordre du jeu,
2. vérifie pour tous coups  $m, n \in M_A$ ,

$$m <_\sigma n \quad \text{implique} \quad \lambda_A(m) = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_A(n) = +1. \quad (4.5)$$

La *taille*  $|A|$  d'un jeu  $A$  est le cardinal de l'ensemble  $M_A$  des coups et la *taille*  $|\sigma|$  d'une stratégie  $\sigma$  est le cardinal de l'ensemble

$$\{ (m, n) \in M_A \times M_A \mid m <_\sigma n \}$$

Si  $\sigma : A \multimap B$  et  $\tau : B \multimap C$  sont deux stratégies, leur composée  $\tau \circ \sigma : A \multimap C$  est la stratégie  $\leq_{A \multimap C}$  définie comme la restriction à l'ensemble  $M_{A \multimap C}$  de la clôture transitive de l'union  $\leq_\sigma \cup \leq_\tau$  des ordres partiels  $\leq_\sigma$  et  $\leq_\tau$  considérés

comme des relations. La stratégie identité  $\text{id}_A : A \multimap A$  sur un jeu  $A$  est la stratégie telle que  $(m \multimap A) \leq_{\text{id}_A} (A \multimap m)$  si  $m$  est un coup Joueur et telle que  $(A \multimap m) \leq_{\text{id}_A} (m \multimap A)$  si  $m$  est un coup Opposant. Il peut être aisément vérifié que pour toute stratégie  $\sigma : A \multimap B$ , on a  $\sigma \circ \text{id}_A = \sigma = \text{id}_B \circ \sigma$ .

La composition étant définie dans la catégorie des relations, il nous faut vérifier que la composée de deux stratégies  $\sigma$  et  $\tau$  est bien une stratégie. Il peut être facilement constaté que la seconde condition (4.5) de la définition des stratégies est préservée par composition. Il est cependant plus difficile de montrer que la relation  $\leq_{\sigma \circ \tau}$  correspondant à la stratégie composée est bien un ordre partiel. Une preuve directe de cette propriété est longue et combinatoire; elle consiste à raisonner par l'absurde, et à extraire un cycle dans l'une des stratégies  $\sigma$  ou  $\tau$  à partir d'un cycle minimal de la stratégie composée. Plutôt que de formaliser cette preuve, nous nous accommodons provisoirement de stratégies qui contiennent potentiellement des cycles et définissons la catégorie **Jeux** comme la plus petite catégorie dont les objets sont les jeux filiformes finis et dont les morphismes entre deux objets  $A$  et  $B$  sont définis comme les plus petits ensembles contenant les stratégies  $\sigma : A \multimap B$  et clos par composition (en tant que relations). Nous déduisons au Corollaire 4.30 que les stratégies sont en réalité les seuls morphismes de la catégorie, c'est-à-dire que la composée de deux stratégies est une stratégie.

Pour tous jeux  $A$  et  $B$ , nous notons  $A \otimes B$  le jeu défini par

$$M_{A \otimes B} = M_A \uplus M_B \quad \lambda_{A \otimes B} = \lambda_A + \lambda_B$$

et par l'ordre partiel  $\leq_{A \otimes B}$  sur l'ensemble de coups  $M_{A \otimes B}$  défini comme la clôture transitive de la relation

$$\leq_A \cup \leq_B \cup \{ (a, b) \mid a \in M_A \text{ et } b \in M_B \}$$

Cette opération est étendue en un bifoncteur sur la catégorie **Jeux** de la façon suivante. Si  $\sigma : A \rightarrow B$  et  $\tau : C \rightarrow D$  sont deux stratégies, la stratégie  $\sigma \otimes \tau : A \otimes C \rightarrow B \otimes D$  est définie comme l'ordre partiel

$$\leq_{\sigma \otimes \tau} = \leq_\sigma \cup \leq_\tau$$

Ce bifoncteur induit une structure de catégorie monoidale (**Jeux**,  $\otimes$ ,  $I$ ) sur la catégorie **Jeux**, où  $I$  dénote le jeu vide.

En notant  $O$  le jeu réduit à un coup Opposant et  $P$  le jeu réduit à un coup Joueur, il est aisé de constater que les jeux filiformes  $A$  sont générés par la grammaire

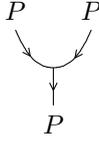
$$A ::= I \mid O \otimes A \mid P \otimes A$$

Un jeu  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes I$  où les  $X_i$  sont soit  $O$  soit  $P$  sera dit de *taille*  $n$  et représenté graphiquement horizontalement, de droite à gauche, par

$$X_n \quad \cdots \quad X_1$$

De même, une stratégie  $\sigma : A \rightarrow B$  sera représentée graphiquement en dessinant une ligne orientée d'un coup  $m$  à un coup  $n$  lorsque  $m \leq_\sigma n$ . Par exemple la

stratégie  $\mu^P : P \otimes P \rightarrow P$ , représentée par



est la stratégie sur le jeu  $(O \otimes O) \otimes P$  dans laquelle les deux coups Opposant de la composante de gauche justifient le coup Joueur de la composante de droite. De même, l'unique stratégie  $\varepsilon^P : P \rightarrow I$  est représentée par



Avec ces conventions, nous introduisons à la Figure 4.1 des notations pour certains morphismes de la catégorie.

Une formule  $A$  est interprétée dans notre modèle par un jeu  $\llbracket A \rrbracket$  défini par induction par

$$\llbracket P \rrbracket = I \quad \llbracket \forall x.A \rrbracket = O \otimes \llbracket A \rrbracket \quad \llbracket \exists x.A \rrbracket = P \otimes \llbracket A \rrbracket$$

Une preuve  $\pi : A \vdash B$  est interprétée par une stratégie  $\sigma : A \multimap B$ . L'ordre partiel correspondant  $\leq_\sigma$  est défini comme suit. Pour tout coup Joueur  $m$  interprétant une quantification introduite par une règle

$$\frac{A[t/y] \vdash B}{\forall y.A \vdash B} (\forall\text{-L}) \quad \text{ou} \quad \frac{A \vdash B[t/y]}{A \vdash \exists y.B} (\exists\text{-R})$$

et tout coup Opposant  $n$  interprétant une quantification introduite par une règle

$$\frac{A \vdash B}{A \vdash \forall x.B} (\forall\text{-R}) \quad \text{ou} \quad \frac{A \vdash B}{\exists x.A \vdash B} (\exists\text{-L})$$

la stratégie impose une dépendance causale  $m \leq_\sigma n$  lorsque la variable  $x$ , liée par la quantification correspondant au coup  $n$ , est libre dans le terme  $t$ . Cette relation  $\leq_\sigma$  est un ordre partiel, car la preuve est un *arbre* de dérivation. Elle définit donc bien une stratégie.

*Exemple 4.21.* Une preuve

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{P \vdash Q[t/z]} (\text{Ax})}{P \vdash \exists z.Q} (\exists\text{-R})}{\exists y.P \vdash \exists z.Q} (\exists\text{-L})}{\exists x.\exists y.P \vdash \exists z.Q} (\exists\text{-L})$$

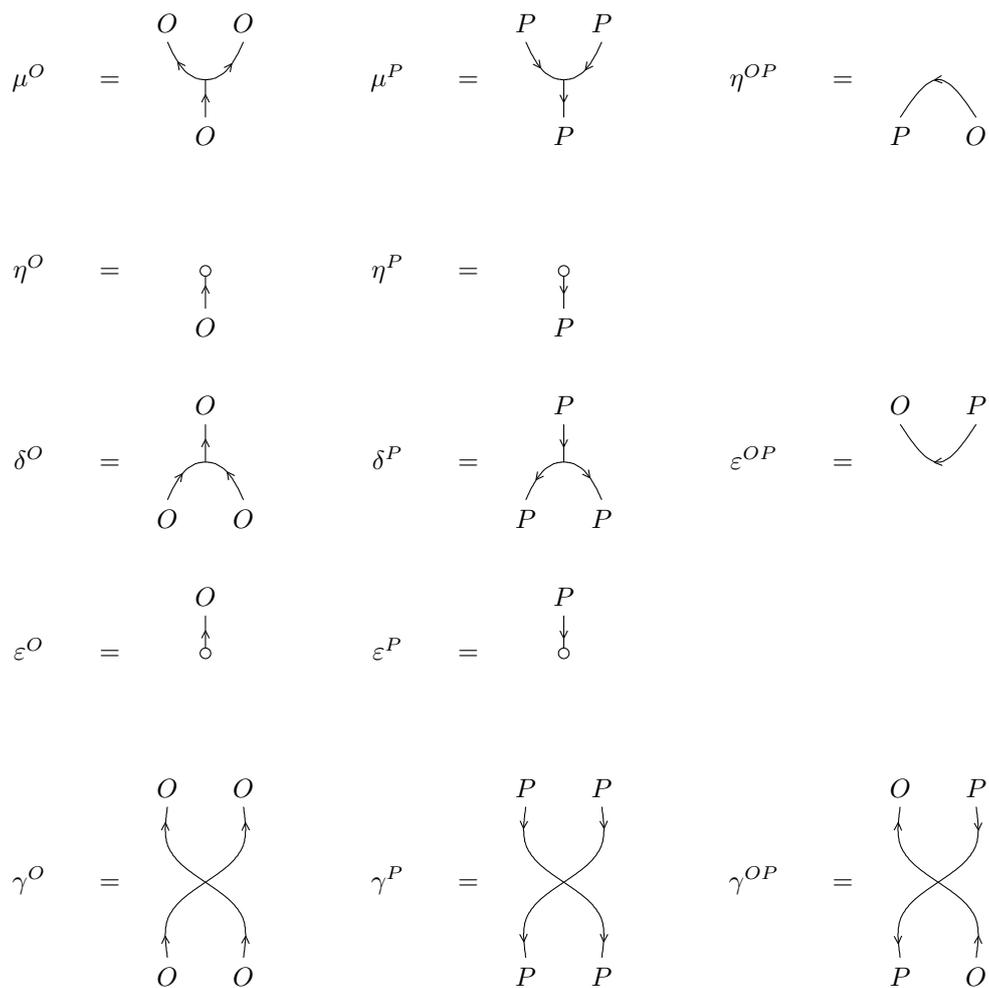
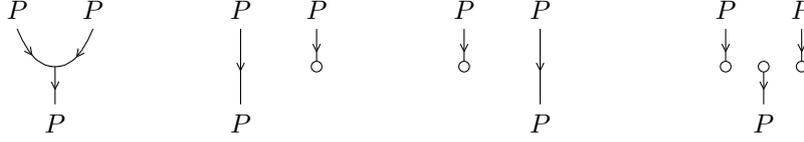


FIGURE 4.1 : Générateurs de la théorie équationnelle  $\mathfrak{G}$ .

sera respectivement interprétée par les stratégies



lorsque l'ensemble des variables libres de  $t$  est respectivement  $\{x, y\}$ ,  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  et  $\emptyset$ .

Lorsque l'ensemble Ax d'axiomes est assez riche, toute stratégie est *définissable*, c'est-à-dire qu'elle est l'interprétation d'une preuve. Supposons que l'ensemble des variables soit dénombrable. Supposons de plus qu'il existe un symbole propositionnel unaire  $I$ , permettant de voir tout terme  $t$  comme une proposition  $I(t)$  que nous noterons simplement  $t$ , et que l'ensemble des propositions contienne deux propositions 0-aires  $\top$  et  $\perp$  et soit clos par conjonctions et disjonctions formelles : si  $P(x_1, \dots, x_n)$  et  $Q(y_1, \dots, y_m)$  sont des propositions alors  $P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, \dots, y_m)$  et  $P(x_1, \dots, x_n) \vee Q(y_1, \dots, y_m)$  aussi. Nous définissons alors un ensemble Ax d'axiomes comme le plus petit ensemble de paires de propositions, qui soit réflexif et transitif et tel que :

- pour toute proposition  $P$ ,
  - $(P, \top) \in \text{Ax}$ ,
  - $(\perp, P) \in \text{Ax}$ ,
- pour toutes propositions  $P, P_1$  et  $P_2$ ,
  - si  $(P, P_1) \in \text{Ax}$  et  $(P, P_2) \in \text{Ax}$  alors  $(P, P_1 \wedge P_2) \in \text{Ax}$ ,
  - si  $(P, P_1) \in \text{Ax}$  ou  $(P, P_2) \in \text{Ax}$  alors  $(P, P_1 \vee P_2) \in \text{Ax}$ ,
  - si  $(P_1, P) \in \text{Ax}$  ou  $(P_2, P) \in \text{Ax}$  alors  $(P_1 \wedge P_2, P) \in \text{Ax}$ ,
  - si  $(P_1, P) \in \text{Ax}$  et  $(P_2, P) \in \text{Ax}$  alors  $(P_1 \vee P_2, P) \in \text{Ax}$ .

(par souci de concision, nous avons omis de mentionner les arguments des propositions). Par le Théorème 4.29 de présentation dont nous allons donner la preuve, il suffit pour montrer que toute stratégie est définissable de montrer que les stratégies de la Figure 4.1 sont définissables. Les stratégies  $\mu^P$  et  $\eta^P$  sont par exemple les interprétations respectives des preuves

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{(Ax)}}{x \wedge y \vdash x \wedge y}(\exists\text{-R})}{x \wedge y \vdash \exists z.z}(\exists\text{-L})}{\exists y.x \wedge y \vdash \exists z.z}(\exists\text{-L})}{\exists x.\exists y.x \wedge y \vdash \exists z.z}(\exists\text{-L}) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\frac{}{(Ax)}}{\top \vdash \top}(\exists\text{-R})}{\top \vdash \exists x.x}(\exists\text{-R})$$

les stratégies  $\delta^P$  et  $\varepsilon^P$  sont les interprétations respectives des preuves

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{(Ax)}}{x \vdash x \wedge x}(\exists\text{-R})}{x \vdash \exists z.x \wedge z}(\exists\text{-R})}{x \vdash \exists y.\exists z.y \wedge z}(\exists\text{-L})}{\exists x.x \vdash \exists y.\exists z.y \wedge z}(\exists\text{-L}) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\frac{}{(Ax)}}{x \vdash \top}(\exists\text{-L})}{\exists x.x \vdash \top}(\exists\text{-L})$$

les stratégies  $\eta^{OP}$  et  $\varepsilon^{OP}$  sont les interprétations respectives des preuves

$$\frac{\frac{\frac{}{\top \vdash x \vee (x \vee \top)}(\text{Ax})}{\top \vdash \exists y. x \vee y}(\exists\text{-R})}{\top \vdash \forall x. \exists y. x \vee y}(\forall\text{-R}) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\frac{}{x \wedge (x \wedge \perp) \vdash \perp}(\text{Ax})}{\forall y. x \wedge y \vdash \perp}(\forall\text{-L})}{\exists x. \forall y. x \wedge y \vdash \perp}(\exists\text{-L})$$

les stratégies  $\gamma^P$  et  $\gamma^{OP}$  sont les interprétations respectives des preuves

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{x \wedge y \vdash x \wedge y}(\text{Ax})}{x \wedge y \vdash \exists t. t \wedge y}(\exists\text{-R})}{x \wedge y \vdash \exists z. \exists t. t \wedge z}(\exists\text{-R})}{\exists y. x \wedge y \vdash \exists z. \exists t. t \wedge z}(\exists\text{-L})}{\exists x. \exists y. x \wedge y \vdash \exists z. \exists t. t \wedge z}(\exists\text{-L}) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{x \wedge z \vdash x \wedge z}(\text{Ax})}{x \wedge z \vdash \exists t. t \wedge z}(\exists\text{-R})}{\forall y. x \wedge y \vdash \exists t. t \wedge z}(\forall\text{-L})}{\exists x. \forall y. x \wedge y \vdash \exists t. t \wedge z}(\exists\text{-L})}{\exists x. \forall y. x \wedge y \vdash \forall z. \exists t. t \wedge z}(\forall\text{-R})$$

etc. Étant donnée une stratégie, il n'y a pas nécessairement unicité de la preuve dont elle est l'interprétation. En particulier, comme nous l'avons expliqué en introduction de cette section, deux preuves ne différant que par l'ordre d'introduction de certains connecteurs successifs sont identifiées dans la sémantique. Dans ce qui précède, nous aurions bien sûr tout aussi bien pu prendre l'ensemble contenant toutes les paires de propositions comme ensemble d'axiomes. L'ensemble Ax que nous avons défini ci-dessus montre cependant que le résultat de définissabilité peut être obtenu avec un ensemble d'axiomes raisonnable et en particulier *cohérent* : avec l'ensemble Ax tel que nous l'avons défini, il existe un séquent qui n'est pas prouvable (le séquent  $\top \vdash \perp$ ), ce qui n'aurait pas été le cas avec l'ensemble d'axiomes trivial.

*Remarque 4.22.* Nous aurions bien sûr pu présenter l'ensemble d'axiomes que nous avons décrit sous forme plus logique, par un calcul de séquent dans lequel les connecteurs sont restreints aux formules qui sont des propositions.

### 4.2.3 Présentation de la sémantique de jeux

**Définition 4.23** (Théorie équationnelle monoïdale des jeux). La *théorie équationnelle monoïdale des jeux* est la théorie équationnelle  $\mathfrak{G}$  avec

- deux générateurs des objets :  $O$  et  $P$ ,
- les treize générateurs des morphismes représentés Figure 4.1,
- les relations imposant que
  - $(O, \mu^O, \eta^O, \delta^O, \varepsilon^O, \gamma^O)$  soit une bigèbre bicommutative qualitative
  - les morphismes Joueur soient les adjoints des morphismes Opposants dans le sens où les égalités de la Figure 4.2 sont vérifiées.

La catégorie monoïdale stricte générée par la théorie  $\mathfrak{G}$  est notée  $\mathbb{G} = \mathcal{G}/\equiv$  où  $\mathcal{G}$  est la catégorie monoïdale stricte générée par la signature sous-jacente à  $\mathfrak{G}$ . Nous notons  $F$  le foncteur d'oubli évident  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Jeux}$ .

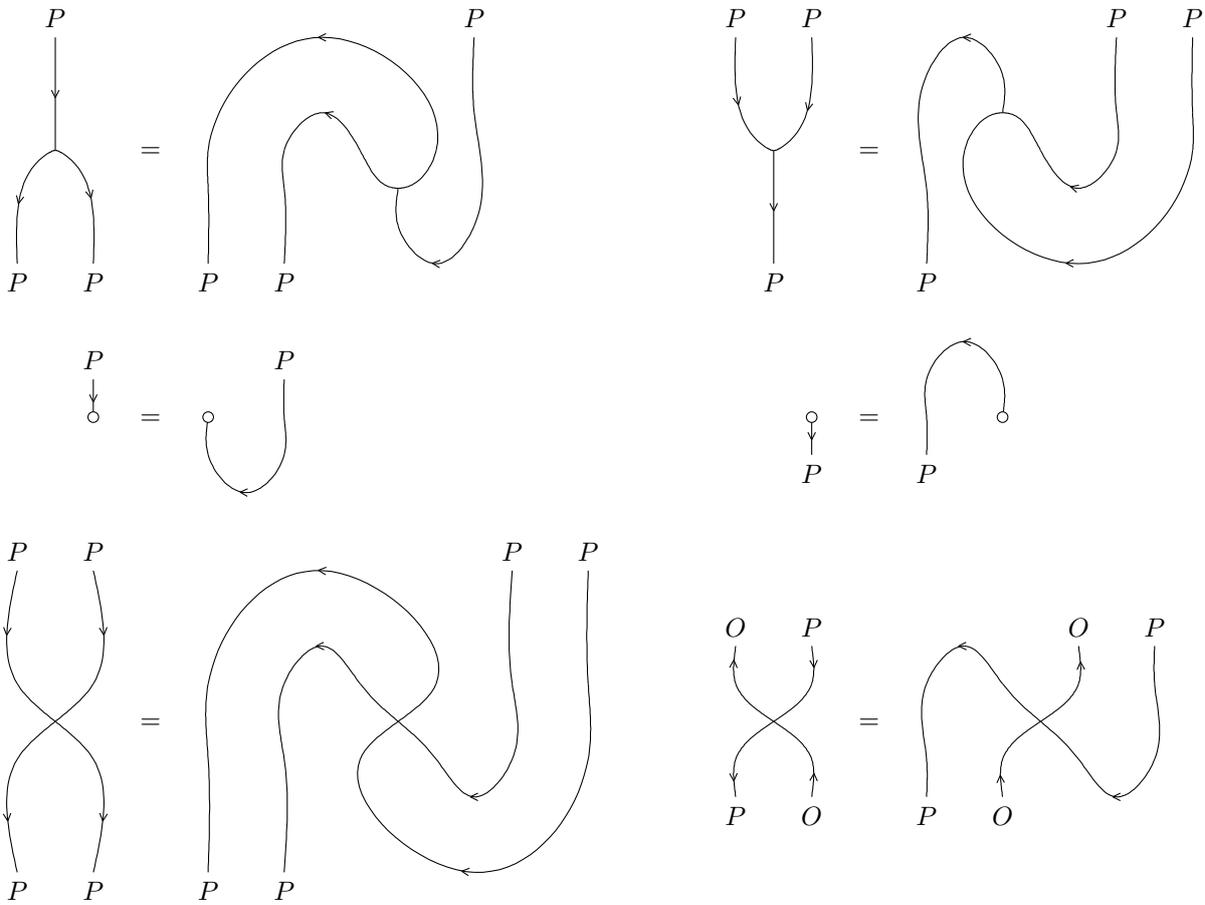
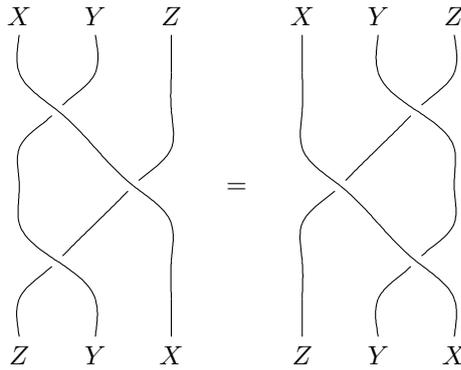


FIGURE 4.2 : Le Joueur est le dual à gauche de l'Opposant.

*Remarque 4.24.* Les générateurs  $\mu^P, \eta^P, \delta^P, \varepsilon^P, \gamma^P$  et  $\gamma^{OP}$  sont superflus dans cette présentation. Les preuves auraient cependant été bien plus complexes si nous ne les avions pas introduits.

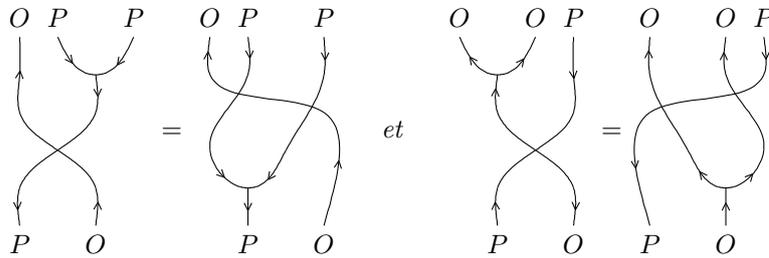
**Propriété 4.25.** *En utilisant les notations de la Définition 4.23, on a :*

- l'objet  $(P, \mu^P, \eta^P, \delta^P, \varepsilon^P, \gamma^P)$  est une bigèbre bicommutative commutative ;
- les égalités de Yang-Baxter



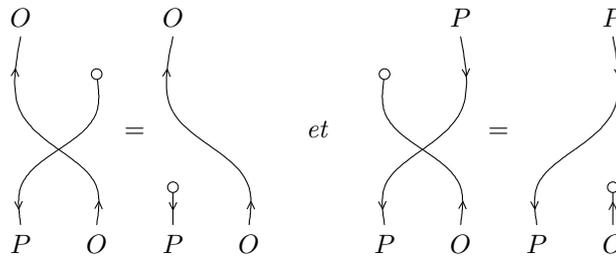
sont vérifiées lorsque  $(X, Y, Z)$  est  $(O, O, O), (O, O, P), (O, P, P)$  ou  $(P, P, P)$  ;

- les égalités



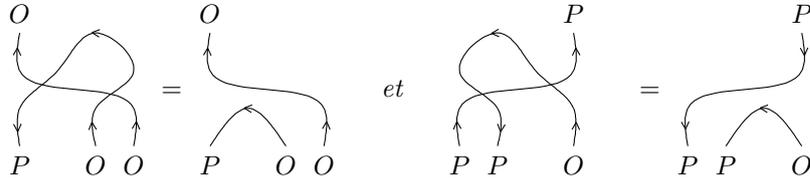
sont vérifiées, ainsi que les égalités duales pour les comultiplications ;

- les égalités



sont vérifiées, ainsi que les égalités duales pour les counités ;

- les égalités



sont vérifiées, ainsi que les égalités duales pour les unités des objets duaux.

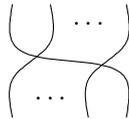
*Remarque 4.26.* Une algèbre de cette théorie dans **Cat** est la donnée d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et de deux endofoncteurs  $O$  et  $P$  sur  $\mathcal{C}$  qui sont en particulier tels que

- $P$  est l'adjoint à gauche de  $O$ ,
- $P$  et  $O$  sont tous deux des monades et des comonades avec des structures compatibles (parfois appelées des *monades de Hopf*)

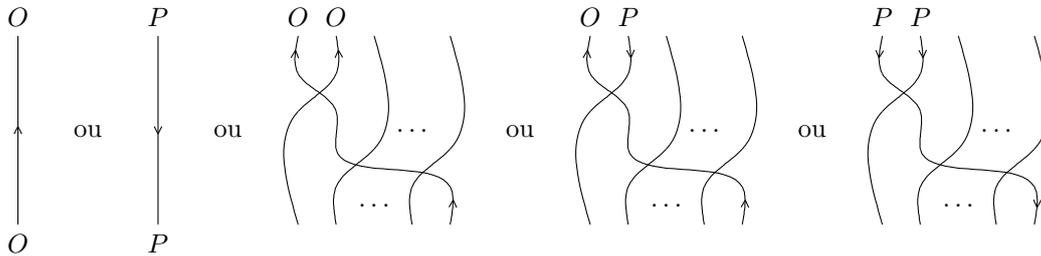
et munis de lois distributives de  $P$  sur  $P$ , de  $O$  sur  $O$  et de  $O$  sur  $P$ .

**Propriété 4.27.** Les objets  $O$  et  $P$  de la catégorie **Jeux** munis des morphismes définis à la Figure 4.1 forment un modèle de la théorie  $\mathfrak{G}$ .

Pour montrer que la théorie  $\mathfrak{G}$  présente la catégorie **Jeux**. Nous étendons encore une fois la preuve de la Section 4.1.1. Les *escaliers* sont maintenant définis par induction par



est



Notons que pour un objet  $A$  donné, il n'existe pas nécessairement d'escalier  $\gamma_{P,A} : P \otimes A \rightarrow A \otimes P$ , plus précisément il n'en existe que si  $A$  ne contient que des coups Joueur  $P$ . Dans la suite, nous supposons bien sûr implicitement que tous les escaliers que nous introduisons existent.

Les formes précanoniques sont définies par induction de façon similaire à la Section 4.1.1. L'unique morphisme  $Z : I \rightarrow I$  est une forme précanonique. De plus, si  $\phi : A \rightarrow B$  est une forme précanonique alors

$$H_O^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \\ \circ \\ | \\ O \end{array} \quad \text{et} \quad H_P^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \\ \circ \\ | \\ P \end{array}$$

sont des formes précanoniques,

$$E_O^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} O \\ | \\ \circ \\ | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \end{array} \quad \text{et} \quad E_P^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} P \\ | \\ \circ \\ | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \end{array}$$

sont des formes précanoniques,

$$W_i^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \\ | \\ \dots \\ | \\ \dots \\ | \\ i \end{array}$$

est une forme précanonique,

$$A_i^{A \rightarrow B} \phi = \begin{array}{c} O \quad \dots \quad i \quad \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \phi \text{---} \\ | \\ \dots \end{array}$$



- Si  $A = I$  et  $B = X \otimes B'$ , où  $X$  est  $P$  ou  $O$ , alors on distingue deux cas.
  - Si aucun coup ne dépend de  $X$  dans la stratégie, cette stratégie est l'image d'une forme précanonique  $H_X^{I \rightarrow B'} \phi$ , où  $\phi$  est une forme précanonique, obtenue par hypothèse d'induction, représentant la stratégie  $\sigma' : I \rightarrow B'$  obtenue en restreignant  $\sigma$  au codomaine  $B'$ , et donc telle que  $|\sigma'| = |\sigma|$ .
  - Sinon, notons  $i$  l'indice dans  $B$  du coup d'indice minimal dépendant de  $X$  dans la stratégie. La stratégie est alors l'image d'une forme précanonique  $B_i^{I \rightarrow B} \phi$ , où  $\phi$  est une forme précanonique, obtenue par hypothèse d'induction, représentant la stratégie  $\sigma' : I \rightarrow B$  obtenue à partir de  $\sigma$  en enlevant la dépendance du  $i$ -ème coup de  $B$  sur le premier coup de  $B$ , et donc telle que  $|\sigma'| < |\sigma|$ .
- Si  $A = X \otimes A'$ , où  $X$  est  $P$  ou  $O$ , alors on distingue deux cas.
  - Si aucun coup ne dépend de  $X$  dans la stratégie, cette stratégie est l'image d'une forme précanonique  $E_X^{A' \rightarrow B} \phi$ , où  $\phi$  est une forme précanonique, obtenue par hypothèse d'induction, représentant la stratégie  $\sigma' : A' \rightarrow B$  obtenue en restreignant  $\sigma$  au domaine  $A'$ .
  - S'il existe un coup de  $A$  dépendant de  $X$ , notons  $i$  l'indice dans  $A$  d'un tel coup d'indice minimal. La stratégie est alors l'image d'une forme précanonique  $A_i^{A \rightarrow B} \phi$ , où  $\phi$  est une forme précanonique, obtenue par hypothèse d'induction, représentant la stratégie  $\sigma' : A \rightarrow B$  obtenue à partir de  $\sigma$  en enlevant la dépendance du  $i$ -ème coup de  $A$  sur le premier coup de  $A$ , et donc telle que  $|\sigma'| < |\sigma|$ .
  - Sinon, il existe un coup de  $B$  qui dépende du coup  $X$ . Notons  $i$  l'indice dans  $B$  d'un tel coup d'indice minimal. La stratégie est alors l'image d'une forme précanonique  $W_i^{A \rightarrow B} \phi$ , où  $\phi$  est une forme précanonique, obtenue par hypothèse d'induction, représentant la stratégie  $\sigma' : A \rightarrow B$  obtenue à partir de  $\sigma$  en enlevant la dépendance du  $i$ -ème coup de  $B$  sur le premier coup de  $A$  et donc telle que  $|\sigma'| < |\sigma|$ .  $\square$

La preuve de la propriété précédente construit, à partir d'une stratégie  $\sigma$ , un morphisme  $\phi$  de la catégorie  $\mathcal{G}$  dont  $\sigma$  est l'image. Connaissant la forme générale (4.6) des formes canoniques, il est facile de vérifier que les morphismes ainsi construits par notre preuve sont toujours des formes canoniques. De plus, on peut montrer sans trop de difficultés (mais de façon fastidieuse) que cette forme canonique  $\phi$  est la seule dont l'image soit la stratégie  $\sigma$ , établissant ainsi une bijection entre les stratégies de la catégorie **Jeux** et formes canoniques de  $\mathcal{G}$ . On peut alors en déduire le théorème de présentation de la catégorie de jeux :

**Théorème 4.29.** *La catégorie monoïdale stricte **Jeux** est présentée par la théorie équationnelle monoïdale des jeux  $\mathfrak{G}$  introduite à la Définition 4.23.*

En particulier, on peut immédiatement en déduire que

**Corollaire 4.30.** *La composée de deux stratégies est une stratégie.*

Le Théorème 4.29, au delà de révéler la structure algébrique de notre catégorie de jeux, a été d'une grande importance technique pour mener à bien, et de

façon simple, nos preuves. En effet, ce théorème montre que le foncteur d'oubli  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Jeux}$  est un isomorphisme, ce qui a deux conséquences. Le fait que ce foncteur soit plein nous a permis, pour montrer que les stratégies sont définissables, de nous restreindre à montrer que les générateurs sont définissables. Le fait qu'il soit de plus fidèle nous a permis de déduire au Corollaire 4.30 que les stratégies composent : comme nous l'avons expliqué à la Section 3.3, la présentation permet de passer d'une formulation externe (les stratégies sont des relations qui vérifient certaines propriétés, de ne pas créer de cycle avec le jeu en particulier) à une formulation interne (le polygraphe engendre toutes les stratégies et n'engendre qu'elles), nous dispensant ainsi de montrer la compositionnalité des critères externes.

*Remarque 4.31.* La présentation que nous avons donnée permet d'envisager des variantes de la sémantique de jeux. Par exemple, les dépendances causales rendent compte de l'utilisation, par un quantificateur existentiel, d'une variable universellement quantifiée. On aurait pu vouloir aussi modéliser combien de fois chaque variable est utilisée. Ceci reviendrait à passer de stratégies qui sont des relations polarisées à des stratégies qui sont des matrices à coefficients entiers polarisées, c'est-à-dire du point de vue de la présentation à ne plus imposer aux bigèbres d'être qualitatives.

#### 4.2.4 Stratégies causales et stratégies asynchrones

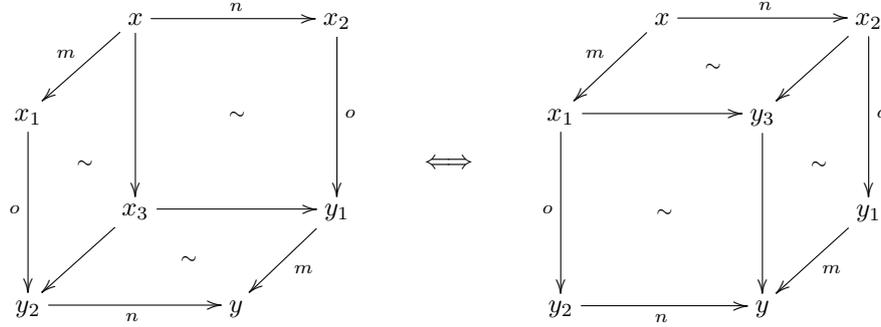
Tout jeu causal  $A$  induit un jeu asynchrone, défini comme le graphe de transitions généré par l'ordre partiel du jeu, et de même une stratégie causale  $\sigma : A$  induit une stratégie ingénue sur le jeu asynchrone associé à  $A$ . Les seules dépendances imposées par une stratégie causale étant d'un coup Opposant sur un coup Joueur, la stratégie asynchrone correspondante sera fortement courtoise. On peut ainsi construire un foncteur monoïdal  $U$  de la catégorie  $\mathbf{Jeux}$  dans la catégorie des jeux asynchrones finis et des stratégies ingénues, non vides, closes par préfixe et fortement courtoises. Pour toute paire de jeux causaux filiformes finis  $A$  et  $B$ , l'image par  $U$  des stratégies causales  $\sigma : A \multimap B$  est précisément l'ensemble des stratégies de  $UA \multimap UB$  qui atteignent la position maximale du jeu. Le foncteur  $U$  n'est pas fidèle, car il oublie les situations d'adjonction. Par exemple, considérons le jeu  $A$  contenant un coup Opposant  $m$  et un coup Joueur  $n$ , tels que  $m <_A n$ . Les deux stratégies causales  $\sigma$  et  $\tau$  sur le jeu  $I \multimap A$  définies par



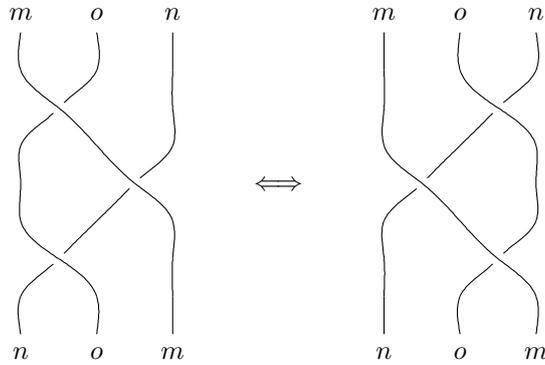
ont la même image par le foncteur  $U$  : les sémantiques séquentielles ne permettent pas de distinguer dans la partie  $m \cdot n$  si  $n$  dépend de  $m$  à cause du jeu ou à cause de la stratégie. En particulier, le foncteur qui soulève un jeu par un coup Joueur n'est pas adjoint à gauche au foncteur qui soulève un jeu par un coup Opposant dans les jeux asynchrones.

Il est par ailleurs intéressant de remarquer que les égalités de Yang-Baxter dans la présentation des jeux causaux sont la contrepartie de la Propriété du

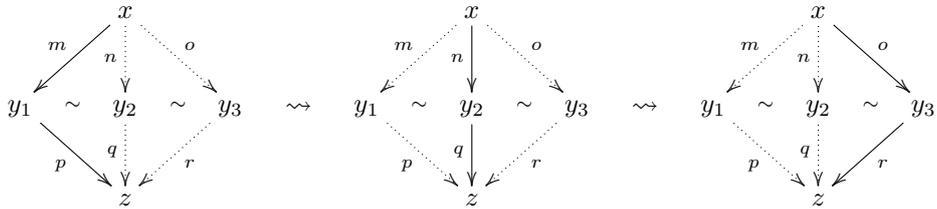
Cube dans les jeux asynchrones. En effet, par dualité de Poincaré l'équivalence



peut être reformulée diagrammatiquement par



Ainsi, la Propriété du Cube exprime la possibilité d'avoir une dépendance tressée : les deux façons de passer du chemin  $m \cdot o \cdot n$  au chemin  $n \cdot o \cdot m$  sont considérées comme égales. De même, la condition imposant aux graphes asynchrones qu'une paire de transitions consécutives  $x \xrightarrow{m} y_1 \xrightarrow{p} z$  détermine une unique paire de transitions  $x \xrightarrow{n} y_2 \xrightarrow{q} z$  induisant une tuile  $m \cdot p \diamond n \cdot q$  implique que cette dépendance tressée est une symétrie : dans toute suite de chemins passant d'un chemin  $m \cdot p$  à un chemin  $o \cdot r$  par les pas d'homotopie



les chemins  $m \cdot p$  et  $o \cdot r$  sont nécessairement égaux, ce qui correspond, par dualité de Poincaré, au fait que le tressage est une symétrie dans les jeux causaux.

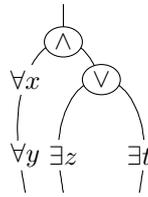
La possibilité de construire une présentation des catégories de jeux présentées dans la première partie de cette thèse reste encore à être investiguée dans le détail. Une telle construction serait particulièrement intéressante, car elle amènerait à une reformulation interne de la structure de la causalité imposée par critère de correction en logique linéaire.

### 4.3 Présentation des ordres partiels finis

Afin de tenter d'étendre la présentation que nous avons donnée à la section précédente à des cas plus complexes, en particulier au cas d'une sémantique de jeux pour des formules du premier ordre *avec connecteurs*, il nous a semblé intéressant d'étudier les présentations de catégories fondées sur les ensembles partiellement ordonnés. En effet, le jeu naturellement associé à une formule de la forme

$$\forall x. \forall y. P(x, y) \wedge (\exists z. Q(z) \vee \exists t. R(t))$$

n'est plus une suite linéaire de coups polarisés mais un arbre de la forme



qui induit un ordre *partiel* sur les coups du jeu, et une stratégie est un morphisme entre deux tels arbres, c'est-à-dire une façon de transformer un arbre en un autre. Afin de pouvoir appréhender la structure algébrique de ces objets, nous avons étudié les présentations de catégories contenant ce type de structure.

#### 4.3.1 Présentation des ordres partiels finis

On rappelle que **FinPOSet** est la catégorie des ensembles finis partiellement ordonnés et fonctions croissantes. Le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{FinPOSet} \rightarrow \mathbf{FinSet}$  admet un adjoint à gauche  $F : \mathbf{FinSet} \rightarrow \mathbf{FinPOSet}$ , qui munit tout ensemble de l'ordre partiel discret, et nous permettra dans la suite de considérer implicitement un ensemble comme un ensemble partiellement ordonné.

**Définition 4.32.** Introduisons la bicatégorie **bFPS**. Elle a pour objets les entiers naturels  $n \in \mathbb{N}$ , un morphisme  $\pi : m \rightarrow n$  est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (E^\pi, \leq^\pi) & \\ s^\pi \nearrow & & \nwarrow t^\pi \\ m & & n \end{array}$$

dans **FinPOSet** formé

- d'un ensemble fini partiellement ordonné  $(E^\pi, \leq^\pi)$ ,
- d'une injection  $s^\pi : m \rightarrow E^\pi$  de  $m$  dans les éléments minimaux de l'ordre partiel,
- d'une injection  $t^\pi : n \rightarrow E^\pi$  de  $n$  dans les éléments maximaux de l'ordre partiel.

La composée  $\rho \circ \pi : m \rightarrow o$  de deux morphismes  $\pi : m \rightarrow n$  et  $\rho : n \rightarrow o$  est l'ensemble  $(E^{\rho \circ \pi}, \leq^{\rho \circ \pi})$  défini comme un choix de somme amalgamée du diagramme

$$(E^\pi, \leq^\pi) \xleftarrow{t^\pi} n \xrightarrow{s^\rho} (E^\rho, \leq^\rho)$$

restreint aux éléments qui ne sont pas l'image d'éléments de  $n$ . Une 2-cellule entre deux ordres partiels parallèles est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés. Nous noterons **FPS** la catégorie obtenue en rendant stricte la bicatégorie **bFPS**. Cette catégorie est la catégorie sous-jacente d'une catégorie monoïdale stricte  $(\mathbf{FPS}, \otimes, I, \gamma)$ .

Un élément  $b$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(E, \leq)$  est le *successeur immédiat* d'un élément  $a$  si  $a < b$  et pour tout élément  $c$  tel que  $a < c \leq b$ , on a  $c = b$  (la notion de *prédécesseur immédiat* est définie de façon similaire). Les morphismes de la catégorie **FPS** seront représentés graphiquement les éléments minimaux en haut et les éléments maximaux en bas en indiquant par une ligne les dépendances entre un élément et son successeur immédiat. Les éléments qui ne font pas partie de la source ou du but seront représenté par un petit disque. Ainsi le diagramme



représente le morphisme  $\pi : 1 \rightarrow 2$  tel que  $E^\pi = \{a, b, c, d, e, f\}$  et  $a < b, b < c, b < d, c < e, d < f$ . Ce type de diagramme associé à un ordre partiel est parfois appelé *diagramme de Hasse*.

*Remarque 4.33.* La catégorie **FinRel** peut-être considérée comme une sous-catégorie de la catégorie **FPS** via le foncteur fidèle  $I : \mathbf{FinRel} \rightarrow \mathbf{FPS}$  qui est l'identité sur les objets et à toute relation  $R : m \rightarrow n$  associe l'ensemble fini partiellement ordonné  $\pi : m \rightarrow n$  défini par  $E^\pi = m \uplus n$ , pour tout élément  $i \in m$  et  $j \in n$ ,  $i \leq^\pi j$  si et seulement si  $(i, j) \in R$ , et  $s^\pi : m \rightarrow m \uplus n$  et  $t^\pi : n \rightarrow m \uplus n$  sont les injections. Les images de relations par le foncteur  $I$  sont précisément les morphismes  $\pi : m \rightarrow n$  de **FPS** tels que tous les éléments de  $E^\pi$  sont soit dans  $s^\pi(m)$ , soit dans  $t^\pi(n)$ .

**Propriété 4.34.** *L'objet 1 est muni d'une structure de bigèbre événementielle bicommutative  $(1, P^\mu, P^\eta, P^\delta, P^\varepsilon, P^\gamma, P^\sigma)$ , où les morphismes sont définis de façon évidente.*

Notons  $\mathfrak{P}$  la théorie des bigèbres événementielles bicommutatives et  $\mathbb{P} = \mathcal{P}/\equiv$  la catégorie monoïdale générée, où  $\mathcal{P}$  est la catégorie monoïdale générée par la signature monoïdale sous-jacente et  $\equiv$  est la congruence monoïdale générée par les relations de la théorie. Nous noterons

$$\mu : 2 \rightarrow 1 \quad \eta : 0 \rightarrow 1 \quad \delta : 1 \rightarrow 2 \quad \varepsilon : 1 \rightarrow 0 \quad \gamma : 2 \rightarrow 2 \quad \sigma : 1 \rightarrow 1$$

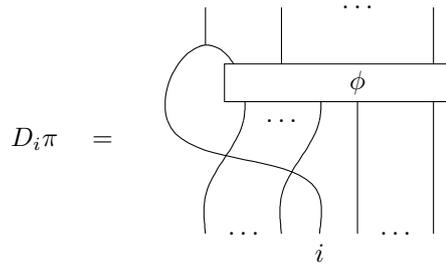
les morphismes de  $\mathcal{P}$  correspondant aux générateurs des 2-cellules. Nous noterons aussi  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{FPS}$  le morphisme de bigèbres évident. Pour tout entier  $i$ , on note  $\mu_i : i \rightarrow 1$  le morphisme défini inductivement par

$$\mu_0 = \eta, \quad \mu_1 = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{i+1} = \mu \circ (1 \otimes \mu_i)$$

De plus, pour tout entier  $n$ , si  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  est une liste d'indices tels que  $i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ , on note  $\delta_n^I : n+1 \rightarrow k+n$  le morphisme défini par induction sur la taille  $k$  de  $I$  par

$$\delta_n^\emptyset = \varepsilon \otimes n, \quad \delta_n^{\{i\}} = \gamma_i \otimes (n-i-1) \quad \text{et} \quad \delta_n^I = D_{i_1} \delta_n^{I'}$$

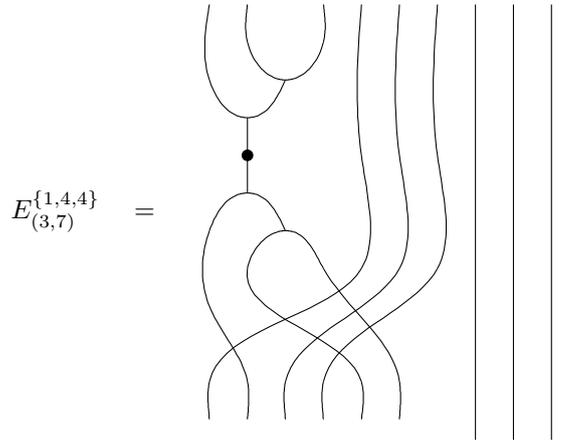
où  $I = \{i_1\} \uplus I'$  et le morphisme  $D_i \pi : m \rightarrow n+1$  est défini pour tout morphisme  $\pi : m \rightarrow n$  et pour tout entier  $i \leq n$  par



Enfin, pour tous entiers  $m$  et  $n$  et tout ensemble  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  d'indices tels que  $i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ , on définit le morphisme  $E_{(m,n)}^I : m+n \rightarrow k+n$  par

$$E_{(m,n)}^I = \delta_n^I \circ (\sigma \otimes n) \circ (\mu_m \otimes n)$$

Par exemple, le morphisme  $E_{(3,7)}^{\{1,4,4\}}$  peut être représenté par



Un morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  est une *forme précanonique* lorsqu'il est de la forme

$$\phi = E_{(m_k, n_k)}^{I_k} \circ \dots \circ E_{(m_1, n_1)}^{I_1} \circ R$$

où  $R$  est une relation.

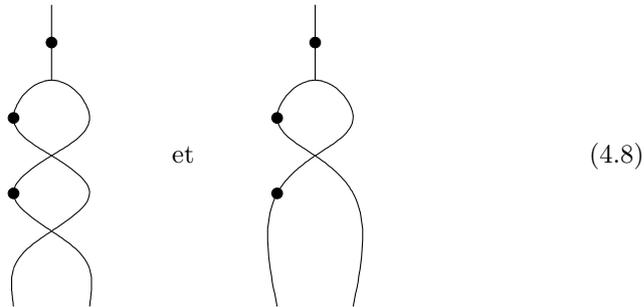
**Lemme 4.35.** *Tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{P}$  est équivalent à une forme précanonique.*

Notons  $U : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{FPS}$  le foncteur d'oubli évident, qui est l'identité sur les objets.

**Propriété 4.36.** *Tout morphisme  $\pi : m \rightarrow n$  de **FPS** est l'image par  $U$  d'une forme précanonique  $\phi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{P}$ .*

Cette propriété peut être prouvée de la façon suivante. Soit  $\pi : m \rightarrow n$  un morphisme de **FPS**. Nous montrons que cet ensemble fini partiellement ordonné est l'image d'une forme précanonique  $\phi : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{P}$  par induction sur le nombre d'éléments de  $E^\pi$  qui ne sont pas dans la source ou dans le but de  $\pi$ . Nous décrivons la preuve sous forme d'un algorithme qui maintient comme invariant un triplet  $(\pi_i, \phi_i, \lambda_i)$  où  $\pi_i : m \rightarrow m_i$  est un morphisme de **FPS** et  $\phi_i : m_i \rightarrow n$  est un morphisme de  $\mathcal{P}$  représentant un ordre partiel dont les éléments initiaux ont exactement un successeur (ou éventuellement l'élément lui-même s'il fait aussi partie du but  $n$ ) tels que  $F\phi_i \circ \pi_i = \pi$ . Informellement,  $\pi_i$  représente donc la partie du morphisme  $\pi$  qui n'a pas encore été explorée par l'algorithme. La fonction  $\lambda_i : m_i \rightarrow E^\pi$  associe à tout élément de la source de  $\phi_i$  le successeur immédiat dans  $\pi$  de l'élément qu'il représente. On suppose fixée une linéarisation de l'ordre partiel  $\pi$ , c'est-à-dire une énumération  $E^\pi = \{e_1, \dots, e_r\}$  des éléments de  $E^\pi$  telle qu'il n'existe pas d'indices  $i$  et  $j$ , avec  $i < j$ , tels que  $e_j > e_i$ . L'algorithme débute avec le triplet  $(\pi, n, t^\pi)$ . Une étape de l'algorithme se déroulera comme suit. Supposons qu'il existe un élément dans  $E^\pi$  qui ne soit pas dans la source ou dans le but de  $\pi$  et notons  $e_{k_i}$  un tel élément d'indice  $k_i$  maximal. On note  $p_i$  le nombre de prédécesseurs immédiats de  $e_{k_i}$  et  $q_i$  son nombre de successeurs immédiats. Notons  $I_i = \{i_1, \dots, i_{q_i}\}$  un ensemble d'indices tels que  $\{\lambda_i(i_1), \dots, \lambda_i(i_{q_i})\}$  est l'ensemble des successeurs immédiats de  $e_{k_i}$  (il en existera toujours un par construction). On pose alors  $m_{i+1} = p_i + m_i - q_i$ ,  $\phi_{i+1} = \pi_i \circ E_{(p_i, q_i)}^{I_i} : m_i \rightarrow n$  et  $\pi_{i+1} : m \rightarrow m_i$  est l'ordre partiel obtenu en enlevant de  $\pi_i$  l'élément  $e_{k_i}$  ainsi que ses successeurs immédiats et ajoutant  $p_i$  éléments à son but avec des dépendances évidentes. La fonction  $\lambda_{i+1} : m_{i+1} \rightarrow E^\pi$  est la fonction induite par  $\lambda_i$  en en restreignant le domaine à  $m_i - q_i$ , puis étendue sur le domaine  $p_i + m_i - q_i$  par  $\lambda_i(j) = e_{k_i}$  pour tout élément  $j$  de  $p_i$ . L'algorithme fait décroître le nombre d'éléments de  $E^\pi$  qui ne sont pas dans la source ou dans le but de  $\pi$ . Lorsque ce nombre devient nul,  $\pi_i$  est une relation (au sens de la Remarque 4.33) et, par le Théorème 4.16, elle est l'image d'un morphisme  $\phi_{i+1} : m \rightarrow m_i$ . On peut alors finalement vérifier que  $\pi$  est l'image du morphisme  $\pi_{i+1} \circ \phi_i : m \rightarrow n$ .

Par exemple, le morphisme (4.7) est l'image des formes précanoniques



de la catégorie  $\mathcal{P}$ .

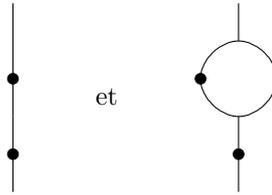
**Théorème 4.37.** *La catégorie monoïdale  $(\mathbf{FPS}, \otimes, I)$  est présentée par la théorie monoïdale des bigèbres événementielles bicommutatives.*

La preuve de ce théorème peut être faite comme précédemment en montrant que l'algorithme décrit ci-dessus est essentiellement le seul possible, c'est-à-dire que toute forme canonique représentant un morphisme de la catégorie **FPS** est équivalente à la forme précanonique produite par l'algorithme ci-dessus. Soit  $\pi : m \rightarrow n$  un morphisme de la catégorie **FPS** représenté par un morphisme  $\psi : m \rightarrow n$  de la catégorie  $\mathcal{P}$  qui est une forme précanonique et supposons fixée une énumération  $E^\pi = \{e_1, \dots, e_k\}$  des éléments de  $\pi$ . Supposons de plus que la forme précanonique  $\phi : m \rightarrow n$  produite par l'algorithme sur le morphisme  $\pi$  muni de l'énumération ci-dessus ne diffère de  $\pi$  qu'à partir d'une étape  $i$ . Notons

$$\phi = E_{(m_k, n_k)}^{I_k} \circ \dots \circ E_{(m_1, n_1)}^{I_1} \circ R \quad \text{et} \quad \psi = E_{(m'_k, n'_k)}^{I'_k} \circ \dots \circ E_{(m'_1, n'_1)}^{I'_1} \circ R'$$

ces deux formes précanoniques. Ces deux formes précanoniques sont nécessairement construites à partir du même nombre  $k + 1$  de contextes, car l'entier  $k$  est précisément le nombre d'éléments de  $\pi$  qui ne sont ni dans la source ni dans le but. La différence entre les deux formes précanoniques peut avoir trois causes (qui ne sont pas mutuellement exclusives). Dans chacun des cas, on peut montrer que les formes précanoniques sont équivalentes.

- Si  $p'_i > p_i$ , le morphisme  $\psi$  contient des représentations de dépendances superflues, qui sont redondantes car elles peuvent être déduites par transitivité. On peut alors montrer le morphisme  $\psi$  est équivalent à un morphisme ne représentant pas les dépendances transitives en utilisant une preuve similaire à celle de la Propriété 3.43, se ramenant ainsi à un morphisme dans lequel  $p'_i = p_i$ . Typiquement, les deux formes précanoniques



représentent le même morphisme de **FPS**, mais celle de droite contient une dépendance superflue. Le cas où  $p_i > p'_i$  est bien évidemment similaire. Si pour tout indice  $i$  on a  $p'_i = p_i$  alors on peut montrer que nécessairement  $q'_i = q_i$  pour tout indice  $i$ . Dans la suite, nous supposons que nous sommes dans ce cas.

- Si les morphismes  $\phi$  et  $\psi$  correspondent à des exécutions de l'algorithme utilisant des linéarisations différentes de l'ensemble  $E^\pi$  alors on peut montrer que ces formes précanoniques sont équivalentes en utilisant le fait que l'on peut faire « commuter » deux événements dans le sens où pour tous entiers  $p_1, p_2, q_1, q_2$  et tous ensembles d'indices  $I_1$  et  $I_2$ , il existe des ensembles d'indices  $I'_1$  et  $I'_2$  définis de façon naturelle tels que

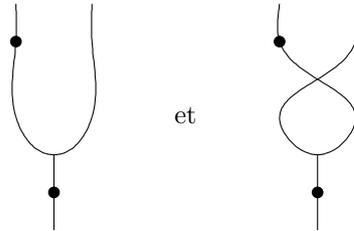
$$E_{(p_2, q_2)}^{I_2} \circ E_{(p_1, q_1)}^{I_1} = E_{(p_1, q_1)}^{I'_1} \circ E_{(p_2, q_2)}^{I'_2}.$$

Typiquement, les deux morphismes (4.8) représentent toutes les deux le morphisme (4.7) et correspondent respectivement aux linéarisations

$$a < b < c < d < e < f \quad \text{et} \quad a < b < d < c < e < f$$

de l'ordre partiel (4.7).

- Si  $I'_i \neq I_i$  alors on peut montrer que les formes canoniques sont équivalentes par commutativité de la multiplication  $\mu$  et de la comultiplication  $\delta$ . Typiquement, les deux formes précanoniques

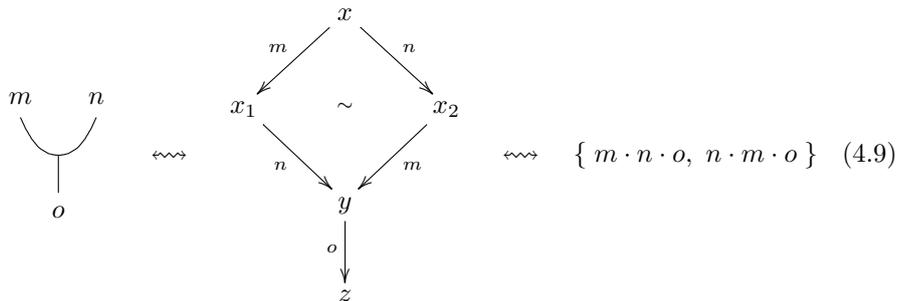


représentent le même morphisme, à commutativité près.

### 4.3.2 Présentation des ordres partiels non stables

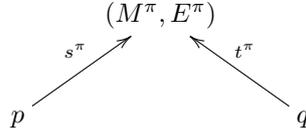
Il est intéressant de faire le lien entre la présentation de la catégorie des ordres partiels qui précède et les ensembles de traces que ces ordres partiels génèrent de la façon décrite à la Section 1.4.5. Nous donnons ici quelques pistes pour établir ce lien.

Nous avons montré au Théorème 1.68 que les ensembles finis partiellement ordonnés sont en bijection avec les graphes asynchrones finis qui vérifient la Propriété du Cube et dans lesquels deux chemins maximaux sont nécessairement homotopes. Ces graphes asynchrones sont eux-mêmes en bijection avec les ensembles de traces sur les mêmes coups, dans lesquels on peut passer d'une trace à une autre par une série de permutations de deux coups adjacents et dont le graphe asynchrone associé vérifie la Propriété du Cube. Le passage des ensembles partiellement ordonnés aux traces peut être décrit simplement : les traces associées à un ensemble partiellement ordonné sont les linéarisations de cet ordre partiel. Ainsi, on a les trois représentations possibles de l'ensemble fini partiellement ordonné suivant



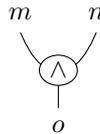
S'il n'est pas immédiat de définir une notion de composition directement sur les graphes asynchrones, nous avons vu au Chapitre 2, et plus précisément à la Définition 2.8, qu'il est possible de définir une notion de composition sur les traces par composition parallèle et masquage. Ainsi, la bicatégorie **bFPS** est

isomorphe à la bicatégorie dont les objets sont les entiers naturels et dont les morphismes  $\pi : p \rightarrow q$  sont les diagrammes

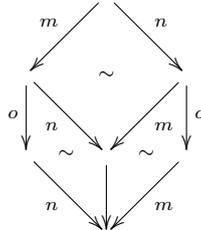


où  $M^\pi$  est un ensemble de coups,  $E^\pi$  est l'ensemble des linéarisations maximales d'un ordre partiel  $(M^\pi, \leq^\pi)$  et  $s^\pi : p \rightarrow M^\pi$  (resp.  $t^\pi : q \rightarrow M^\pi$ ) est une fonction injective qui à tout entier associe un élément minimal (resp. maximal) de  $M^\pi$ . Ici, un élément est dit minimal (resp. maximal) lorsqu'il est le premier (resp. le dernier) élément d'au moins une trace dans  $E^\pi$ . La composition de deux tels morphismes  $\pi : p \rightarrow q$  et  $\pi' : q \rightarrow r$  se fait par composition parallèle des traces  $E^\pi$  et  $E^{\pi'}$  de façon similaire à la Définition 2.8, en identifiant (et masquant) les coups  $m$  et  $n$  respectivement dans  $M^\pi$  et dans  $M^{\pi'}$  tels qu'il existe un entier  $i \in q$  pour lequel  $t^\pi(i) = s^{\pi'}(i)$ .

Comme nous l'avons indiqué, les ensembles de traces obtenus en linéarisant un ensemble fini partiellement ordonné sont précisément les chemins maximaux de certains graphes asynchrones vérifiant la Propriété du Cube et la catégorie qu'ils forment est présentée par la théorie des bigèbres événementielles bicommutatives. Il semble alors naturel de se demander quelle est la structure algébrique obtenue si l'on relâche la Propriété du Cube. En particulier, si l'on refait la même construction en partant cette fois des graphes asynchrones qui ne vérifient que la Propriété du Cube en avant, par quelle théorie la catégorie  $\mathcal{C}$  ainsi construite peut-elle être présentée? Dans les structure d'événement vérifiant la Propriété du Cube, un coup  $o$  peut dépendre de deux autre coups  $m$  et  $n$ , ce qui signifie que le coup  $o$  ne peut être joué que si les coups  $m$  et  $n$  ont déjà été joués. C'est par exemple le cas dans l'exemple (4.9). Dorénavant, nous noterons la multiplication exprimant ce type de dépendances par

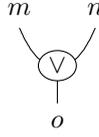


Dans un graphe asynchrone ne vérifiant que la Propriété du Cube en avant, un nouveau type de dépendance apparaît. En effet, dans le graphe asynchrone



le coup  $o$  peut être joué dès que le coup  $m$  ou le coup  $n$  a été joué. Nous

représenterons ce type de dépendances par un diagramme de la forme



Réciproquement, à tout diagramme construit à partir d'une duplication, de ces deux types multiplications, etc. il est aisé d'associer un ensemble de traces. Ceci nous suggère la présentation suivante pour la catégorie  $\mathcal{C}$  des traces générées par les graphes asynchrones qui satisfont la Propriété du Cube en avant :

**Conjecture 4.38.** *La catégorie  $\mathcal{C}$  est présentée par la théorie algébrique des objets  $(L, \check{\mu}, \hat{\mu}, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  tels que*

- $(L, \check{\mu}, \eta, \hat{\mu}, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma)$  est un treillis distributif,
- $(L, \hat{\mu}, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  est une bigèbre événementielle conjonctive,
- $(L, \check{\mu}, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$  est une bigèbre événementielle disjonctive.

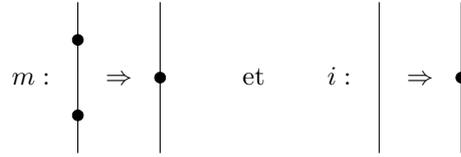
Un ensemble partiellement ordonné est une structure d'événements dans laquelle la relation d'incompatibilité est vide. La Définition 1.10 que nous avons donnée pour les structures d'événements est celle qui est la plus communément acceptée aujourd'hui, mais Winskel avait originellement introduit une notion plus générale dans [Win87], que nous appellerons *structure d'événement non stable*, car les structures d'événements au sens de la Définition 1.10 peuvent être retrouvées en imposant une condition de *stabilité*. Nielsen, Sassone et Winskel [SNW93] ont montré que de même que les graphes asynchrones finis vérifiant la Propriété du Cube et dans lesquels deux chemins maximaux quelconques sont homotopes sont en bijection avec les ensembles finis partiellement ordonnés, les graphes asynchrones finis vérifiant la Propriété du Cube *en avant* et dans lesquels deux chemins maximaux quelconques sont homotopes sont en bijection avec les structures d'événements non stables finies dont la relation d'incompatibilité est vide. Ils axiomatisent en ce sens une notion d'« ordre partiel non stable ».

### 4.3.3 Présentation des fonctions croissantes

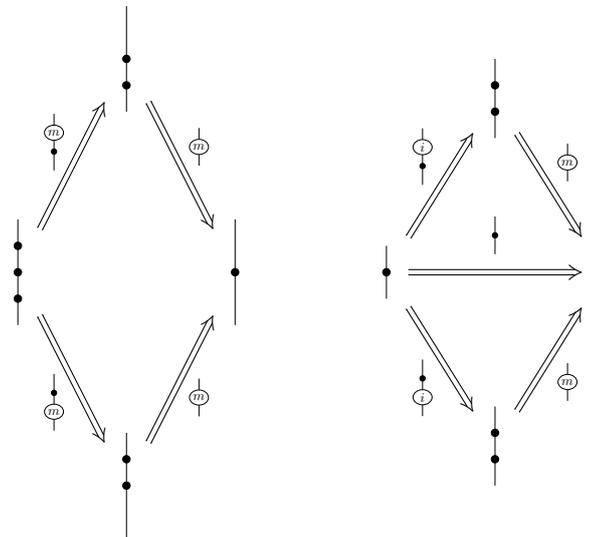
Nous avons vu à la Section 4.3.1 que la catégorie **FPS** des ordres partiels finis pouvait être présentée par la théorie  $\mathfrak{P}$  des bigèbres bicommutatives. Nous étendons ce résultat dans cette section en introduisant une théorie décrivant la catégorie des fonctions croissantes entre ensembles partiellement ordonnés. Nous noterons **FPS**<sub>2</sub> la 2-catégorie monoïdale qui admet **FPS** comme catégorie monoïdale sous-jacente et dont les 2-cellules sont les fonctions croissantes.

**Définition 4.39** (Monoïdes événementiels). Supposons fixée une 2-catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ .

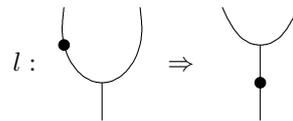
- Un *événement synchronisable*  $(E, \sigma, m, i)$  est la donnée de d'une 2-cellule  $\sigma : E \rightarrow E$  appelée *événement* et représentée comme en (3.22) et de deux 2-cellules



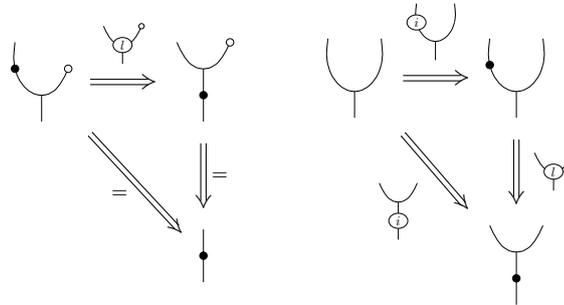
respectivement appelés *synchronisation* et *création de l'événement*, qui satisfont les lois d'associativité et d'unité habituels



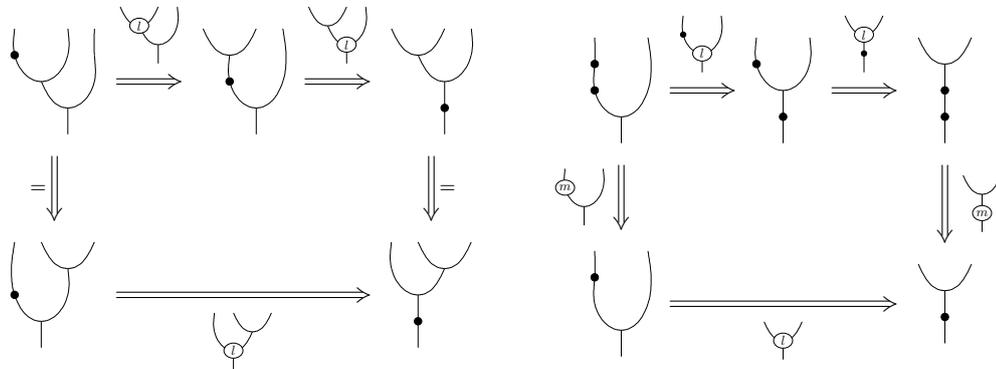
- Un *monoïde événementiel synchronisable*  $(E, \mu, \eta, \sigma, m, i)$  est un monoïde  $(E, \mu, \eta)$  muni d'un événement synchronisable  $(E, \sigma, m, i)$ .
- Un *monoïde événementiel synchronisable fort (à gauche)*  $(E, \mu, \eta, \sigma, m, i, l)$  est un monoïde événementiel synchronisable muni d'une 2-cellule



appelé *force (à gauche)*, tel que les diagrammes suivant commutent :



et



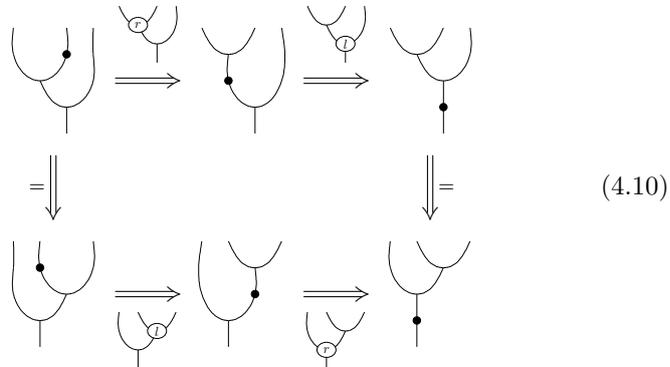
Un *monoïde événementiel synchronisable fort à droite* est un monoïde événementiel synchronisable muni d'une loi

$$r : \text{cup with dot on right} \Rightarrow \text{vertical line with dot at bottom}$$

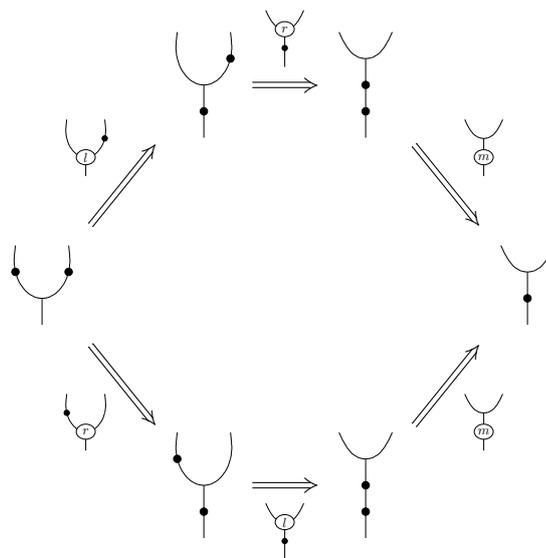
appelée *force à droite* qui satisfait des axiomes duaux de ceux de la force.

- Un *comonoïde événementiel synchronisable fort à gauche* (resp. à droite) est défini de façon duale.
- Un monoïde événementiel synchronisable fort à gauche et à droite a ses

forces compatibles lorsque le diagramme



commute. Un tel monoïde événementiel synchronisable est dit à *synchronisation commutative* lorsque le diagramme

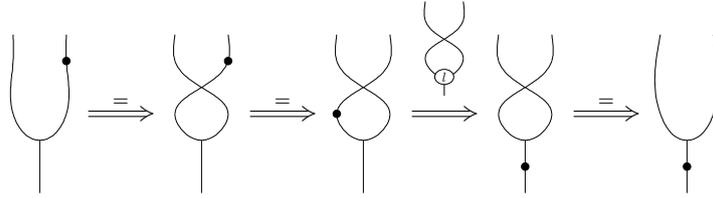


commute.

*Exemple 4.40.* Un monoïde événementiel synchronisable dans la catégorie **Cat** munie de la structure monoïdale induite par le produit cartésien (que l'on considère comme étant strictement associatif) est une catégorie monoïdale stricte munie d'une monade. Les forces de ce monoïde événementiel synchronisable correspondent aux forces de la monade.

**Propriété 4.41.** *Tout monoïde commutatif synchronisable fort à gauche est*

muni de façon canonique d'une force à droite définie par



qui est compatible avec la force dans le sens où le diagramme (4.10) commute.

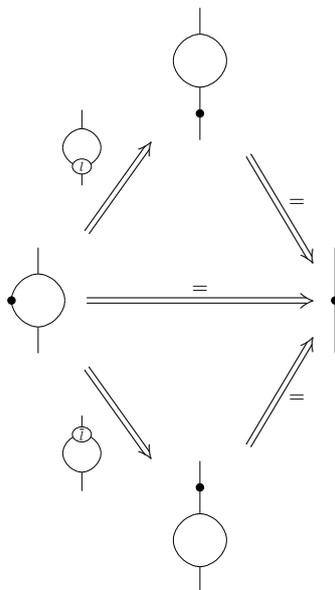
**Théorème 4.42.** Les algèbres de la 2-catégorie monoïdale stricte  $\mathbf{FPS}_2$  dans une 2-catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  sont en bijection avec les objets

$$(E, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma, m, i, l, \bar{l})$$

de  $\mathcal{C}$  munis

- d'une structure de bigèbre événementielle bicommutative  $(E, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \gamma, \sigma)$ ,
- d'une structure de monoïde synchronisable fort à gauche  $(E, \mu, \eta, \sigma, m, i, l)$  dont la synchronisation est commutative si on le munit de la force à droite induite par la Propriété 4.41,
- d'une structure de comonoïde synchronisable fort à gauche  $(E, \delta, \varepsilon, \sigma, m, i, \bar{l})$  dont la synchronisation est commutative si on le munit de la force à droite induite par la Propriété 4.41,

tel que le diagramme



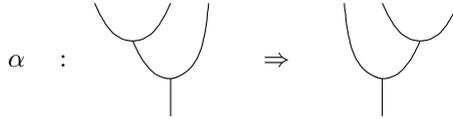
commute.

**Vers une présentation polygraphique**

Il semble naturel de définir un 3-polygraphe correspondant à la structure algébrique de bigèbre introduite au Théorème 4.42. Cela n'est cependant pas directement possible car un 3-polygraphe ne permet pas d'imposer des égalités entre des 2-cellules qui ne sont pas parallèles. L'associativité stricte de la multiplication



n'est par exemple pas directement exprimable dans le langage des 3-polygraphes. On peut néanmoins affaiblir la structure algébrique du théorème en remplaçant par exemple l'égalité ci-dessus par un isomorphisme



c'est-à-dire en ajoutant le 3-générateur  $\alpha$  ainsi qu'un autre 3-générateur  $\alpha^{-1}$ , son inverse formel, et deux 4-générateurs imposant les égalités  $\alpha^{-1}\alpha = \text{id}$  et  $\alpha\alpha^{-1} = \text{id}$ . Il faut alors aussi imposer des axiomes de cohérence entre les 3-générateurs que nous avons introduits. Il semble par exemple naturel d'affaiblir la structure de monoïde en un pseudomonoides :

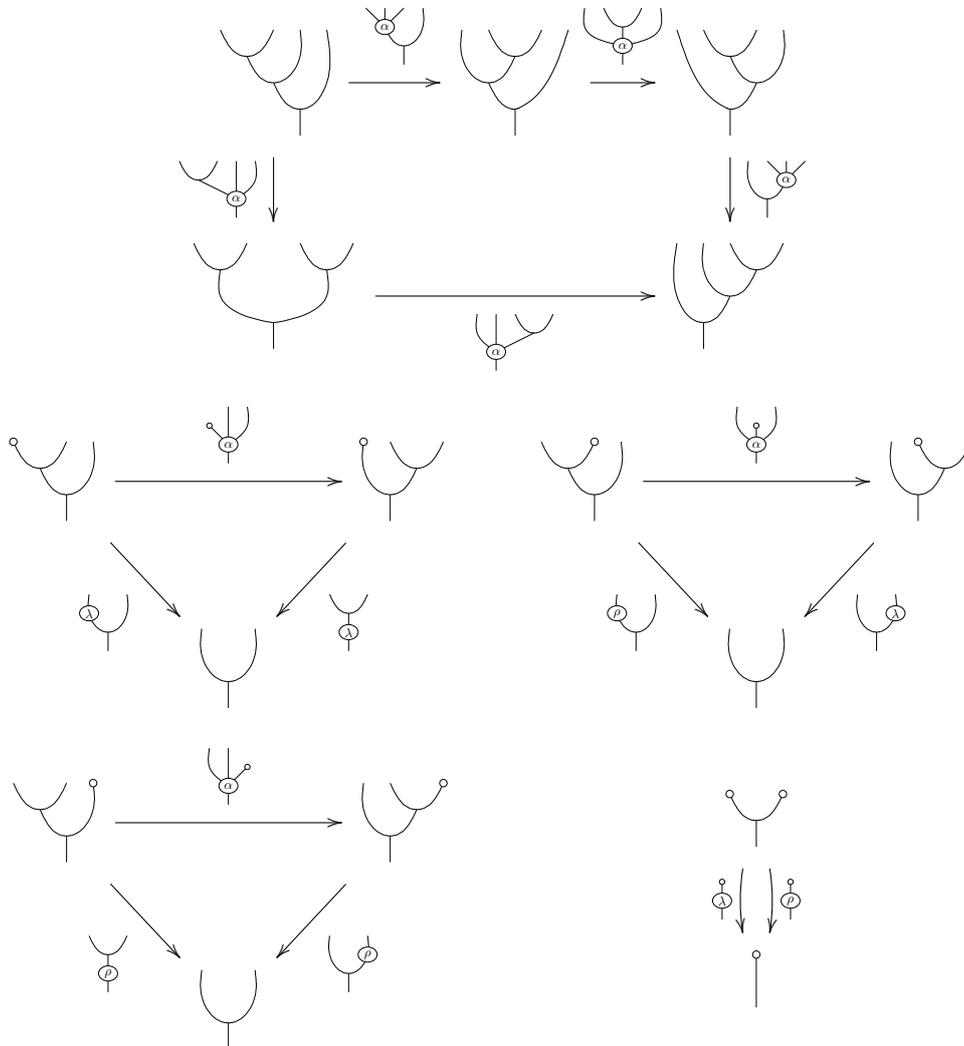
**Définition 4.43** (Pseudomonoides). Un *pseudomonoides*  $(M, \mu, \eta, \alpha, \lambda, \rho)$  dans une 2-catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est un objet  $M$  muni de deux 1-cellules

$$\mu : M \otimes M \rightarrow M \quad \text{et} \quad \eta : I \rightarrow M$$

qui seront représentées graphiquement comme précédemment, ainsi que de trois 2-cellules inversibles

$$\alpha : \mu \circ (\mu \otimes M) \Rightarrow \mu \circ (M \otimes \mu), \quad \lambda : \mu \circ (\eta \otimes M) \Rightarrow M \quad \text{et} \quad \rho : \mu \circ (M \otimes \eta) \Rightarrow M$$

telles que les diagrammes



commutent.

Nous projetons d'étudier les axiomes que doivent satisfaire l'affaiblissement de la notion de bigèbre introduite au Théorème 4.42 dans des travaux futurs.

## Chapitre 5

# Présentations confluentes

Nous avons vu à la Section 3.5 que la technique de preuve que nous avons employée n'était pas la seule à notre disposition. Si nous l'avons choisie, c'est parce qu'elle nous semble efficace et simple à mettre en œuvre pour traiter les cas qui nous ont intéressés. Elle peut cependant sembler laborieuse et ennuyeuse ; la preuve de la Propriété 4.6 nous amène par exemple à considérer de nombreux cas. Nous pensons que ce caractère répétitif et systématique des preuves est en réalité un atout, car il ouvre la voie à un traitement informatique automatisé de ce type de problèmes. Le passage des preuves aux programmes générant les preuves nécessite au préalable de fournir des réponses à des questions telles que : quelle serait une bonne représentation informatique des morphismes d'une catégorie monoïdale libre ? comment détecter si un morphisme est sous forme canonique ? etc. Cette section est dévolue à l'étude de ces questions.

Les travaux présentés dans ce chapitre (aux Sections 5.3 et 5.4 en particulier) sont récents et demanderaient une étude plus détaillée que celle que nous fournissons ici. Nous avons cependant tenu à présenter de façon générale les structures qui nous semblent pertinentes pour effectuer des manipulations concrètes de morphismes dans des catégories monoïdales libres.

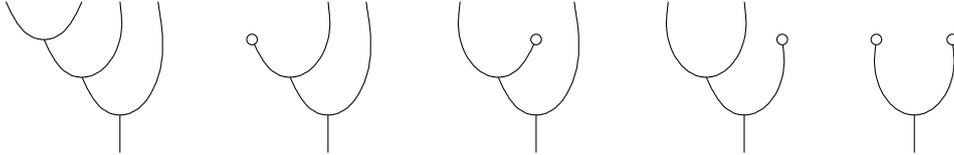
### 5.1 Système de réécriture monoïdaux

Les égalités entre morphismes sont difficiles à manipuler et on préfère souvent, lorsque c'est possible, les orienter afin d'obtenir un système de réécriture. Ainsi, les égalités de la théorie des monoïdes  $\mathfrak{M}$  de la Définition 3.30 peuvent par exemple être orientées en

$$(5.1)$$

En particulier, les systèmes de réécritures *convergeants* (ou *normalisants*), c'est-à-dire à la fois *confluents* et *terminants*, sont particulièrement intéressants car ils permettent de décider de l'égalité associée à la relation de réécriture : deux morphismes sont équivalents par la relation d'équivalence générée par les règles

de réécriture si et seulement s'ils ont la même forme normale. C'est par exemple le cas du système (5.1). Informellement, il est terminant car la règle ASSOC « déplace les multiplications vers la droite » et les règles UNITL et UNITR font décroître le nombre de générateurs apparaissant dans les morphismes. Il est de plus confluent, car il est à la fois localement confluent et terminant, la confluence locale pouvant être montrée en vérifiant que les cinq paires critiques



du système sont confluentes. Ce système de réécriture fournit ainsi une nouvelle preuve du fait que la théorie équationnelle  $\mathfrak{M}$  présente la catégorie simpliciale  $\Delta$ . En effet, en notant  $\mu_n : n \rightarrow 1$  le morphisme défini par induction par  $\mu_0 = \eta$ ,  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_{n+2} = \mu \circ (1 \otimes \mu_{n+1})$ , il est aisé de montrer que les formes normales du système de réécriture sont exactement les morphismes qui peuvent être construits par produits tensoriels  $\mu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{i_k}$  de tels  $\mu_i$  et de vérifier que ces formes normales sont en bijection avec les morphismes de la catégorie  $\Delta$ . Au passage, il est intéressant de remarquer que les cinq paires critiques correspondent aux cinq diagrammes de cohérence de la Définition 0.26 définissant les catégories monoïdales. Ceci n'est pas surprenant : MacLane [Mac71] utilise en effet la confluence du système de réécriture (5.1) pour montrer le théorème de cohérence des catégories monoïdales (Propriété 0.32).

Introduisons formellement les outils dont nous allons nous servir pour étudier les systèmes de réécritures associés à des théories monoïdales.

**Définition 5.1** (Système de réécriture monoïdal). Un *système de réécriture monoïdal* est une théorie équationnelle monoïdale

$$\mathfrak{E} = (E_1, s_1, t_1, E_2, s_2, t_2, E_3)$$

dans laquelle les relations de  $E_3$  sont pensées comme étant orientées. Une relation  $f \stackrel{r}{\equiv} g$  sera souvent notée en utilisant la notation

$$f \xrightarrow{r} g$$

Nous avons expliqué à la Section 3.2 qu'un tel polygraphe génère librement un diagramme de la forme (3.15) induisant ainsi une 3-catégorie  $\mathcal{E}$  à un objet, que l'on peut considérer comme une 2-catégorie monoïdale (stricte). Plus explicitement, la 2-catégorie monoïdale  $\mathcal{E}$  a la catégorie monoïdale générée par la signature  $(E_1, s_1, t_1, E_2)$  comme catégorie monoïdale sous-jacente et ses 2-cellules sont générées inductivement par :

- pour toute 1-cellule  $\phi : A \rightarrow B$ , il existe une 2-cellule  $\text{id}_\phi : \phi \Rightarrow \phi$ ,
- pour tout élément  $r \in E_3$  tel que  $s_2(r) = \phi$  et  $t_2(r) = \psi$ , il existe une 2-cellule  $r : \phi \Rightarrow \psi$ ,
- les 2-cellules sont closes par les trois compositions (celles induites par le produit tensoriel et la composition de la catégorie monoïdale, ainsi que la composition propre aux 2-cellules),

ces 2-cellules étant quotientées par des axiomes de cohérence rendant les compositions associatives, unitaires et distribuant convenablement les unes avec les autres.

Une 1-cellule  $\phi : A \rightarrow B$  de cette 2-catégorie monoïdale se *réécrit* en une 1-cellule  $\psi : A \rightarrow B$  lorsqu'il existe une règle  $r : \alpha \Rightarrow \beta : C \rightarrow D$  de  $E_3$  et un contexte monoïdal  $K : C \rightarrow D \Rightarrow A \rightarrow B$  tel que  $K\alpha = \phi$  et  $K\beta = \psi$ . On dit alors que  $\phi$  se réécrit en  $\psi$  par la règle  $r$  dans le contexte  $K$ , ce que l'on note

$$\phi \xrightarrow{K,r} \psi$$

On omettra parfois le contexte  $K$  lorsqu'il peut être deviné. De plus, on notera simplement  $\phi \Rightarrow^1 \psi$  pour indiquer qu'il existe un contexte  $K$  et une règle  $r$  avec lesquels  $\phi$  se réécrit en  $\psi$ ; on notera  $\Rightarrow^*$  la clôture réflexive et transitive de la relation  $\Rightarrow^1$  sur les morphismes. De même, la clôture symétrique de  $\Rightarrow^1$  sera notée  $\Leftarrow^1$  et la clôture réflexive et transitive de  $\Leftarrow^1$  sera notée  $\Leftarrow^*$ .

**Lemme 5.2.** *Si  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : A \rightarrow B$  sont deux morphismes parallèles de  $\mathcal{E}$  alors  $\phi \Rightarrow^* \psi$  si et seulement si il existe une 2-cellule  $\rho : \phi \Rightarrow \psi$  dans  $\mathcal{E}$ . Plus précisément, à tout chemin de réécriture*

$$\phi \xrightarrow{K_1,r_1} \phi_1 \cdots \phi_{n-1} \xrightarrow{K_n,r_n} \psi$$

*on peut associer une 2-cellule  $\rho : \phi \Rightarrow \psi$  induisant ainsi une fonction surjective des chemins de réécriture  $\phi \Rightarrow^* \psi$  dans les 2-cellules de  $\phi$  dans  $\psi$ .*

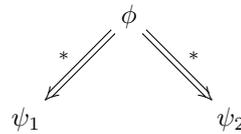
**Corollaire 5.3.** *La congruence monoïdale  $\equiv$  associée à la théorie équationnelle  $\mathfrak{E}$  est la relation  $\Leftarrow^*$ .*

**Définition 5.4.** Le système de réécriture  $\mathfrak{E}$  est dit

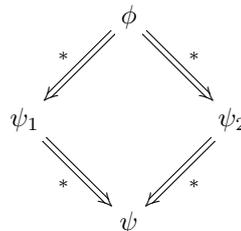
- *terminant* lorsqu'il n'existe pas de suite infinie de réductions

$$\phi_0 \xrightarrow{K_1,r_1} \phi_1 \xrightarrow{K_2,r_2} \phi_2 \xrightarrow{K_3,r_3} \dots$$

- *confluent* lorsque pour tout morphisme  $\phi$  tel qu'il existe deux morphismes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  pour lesquels on a



il existe un morphisme  $\psi$  tel que



- *localement confluent* lorsque pour tout morphisme  $\phi$  tel qu'il existe deux morphismes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  pour lesquels on a

$$\begin{array}{ccc}
 & \phi & \\
 \swarrow 1 & & \searrow 1 \\
 \psi_1 & & \psi_2
 \end{array} \tag{5.2}$$

il existe un morphisme  $\psi$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
 & \phi & \\
 \swarrow 1 & & \searrow 1 \\
 \psi_1 & & \psi_2 \\
 \searrow * & & \swarrow * \\
 & \psi &
 \end{array}$$

Le diagramme (5.2) est alors dit *joignable*.

De façon similaire au cadre des systèmes de réécriture de termes [New42, BN99],

**Propriété 5.5** (Lemme de Newman). *Un système de réécriture terminant est confluent si et seulement si il est localement confluent.*

La terminaison des systèmes de réécriture monoïdaux a en particulier été étudiée par Guiraud dans sa thèse [Gui04, Gui06]. Nous nous intéresserons principalement ici à la confluence locale des systèmes de réécritures.

**Définition 5.6** (Sous-morphisme). Soit  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : C \rightarrow D$  deux morphismes tels qu'il existe un contexte  $K : A \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow D$  tel que  $\psi = K \circ \phi$ . Le morphisme  $\phi$  est alors appelé un *sous-morphisme* du morphisme  $\psi$  par le contexte  $K$ .

**Définition 5.7** (Sous-morphismes indépendants). Supposons que  $\phi_1 : A_1 \rightarrow B_1$  et  $\phi_2 : A_2 \rightarrow B_2$  soient deux sous-morphismes d'un même morphisme  $\phi : C \rightarrow D$  par des contextes respectifs  $K_1$  et  $K_2$ . Ces deux sous-morphismes sont dits *indépendants* lorsqu'il existe une décomposition de la forme

$$\phi = \phi'' \circ \phi'$$

avec

$$K_1 = \phi'' \circ K'_1 \quad K_2 = K'_2 \circ \phi' \quad \text{ou} \quad K_1 = K'_1 \circ \phi' \quad K_2 = \phi'' \circ K'_2$$

*Remarque 5.8.* Nous verrons à la Définition 5.29 que la notion de contexte peut être généralisée de façon directe en une notion de contexte à  $n$  trous

$$K : A_0 \rightarrow B_0, \dots, A_{n-1} \rightarrow B_{n-1} \Rightarrow C \rightarrow D$$

Les deux sous-morphismes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de la définition précédente sont indépendants précisément lorsqu'il existe un contexte  $K : A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2 \Rightarrow C \rightarrow D$  à deux trous tel que les contextes  $K_1$  et  $K_2$  peuvent être retrouvés par application partielle de ce contexte :  $K_1 = K(-, \phi_2)$  et  $K_2 = K(\phi_1, -)$ .

**Définition 5.9** (Paire critique). Considérons un diagramme

$$\psi_1 \xleftarrow{K_1, r_1} \phi \xrightarrow{K_2, r_2} \psi_2 \quad (5.3)$$

les membres gauches  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des règles  $r_1$  et  $r_2$  sont alors des sous-morphismes de  $\phi$  par les contextes respectifs  $K_1$  et  $K_2$ . Les deux réductions de ce diagramme sont dites *indépendantes* lorsque les sous-morphismes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont indépendants. Le diagramme (5.3) est appelé une *paire critique* lorsque ses réductions ne sont pas indépendantes. Une paire critique 5.3 est dite *minimale* lorsque pour tout contexte  $K$  telle que la paire critique est égale à un diagramme de la forme

$$K\psi'_1 \xleftarrow{K \circ K'_1, r_1} K\phi' \xrightarrow{K \circ K_2, r_2} K\psi'_2$$

le contexte  $K$  est le contexte identité.

**Propriété 5.10.** *Un système de réécriture est localement confluent si et seulement si ses paires critiques minimales sont joignables.*

**Définition 5.11** (Unificateur). Un *unificateur* de deux morphismes

$$\phi_1 : A_1 \rightarrow B_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 : A_2 \rightarrow B_2$$

est une paire de contextes

$$K_1 : A_1 \rightarrow B_1 \Rightarrow A \rightarrow B \quad \text{et} \quad K_2 : A_2 \rightarrow B_2 \Rightarrow A \rightarrow B$$

telle que

$$K_1\phi_1 = K_2\phi_2.$$

Un unificateur est dit *trivial* lorsque les morphismes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont indépendants dans le morphisme  $K_1\phi_1$ . Un *unificateur minimal*, ou *unificateur le plus général*, de deux morphismes

$$\phi_1 : A_1 \rightarrow B_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 : A_2 \rightarrow B_2$$

est un unificateur

$$K_1 : A_1 \rightarrow B_1 \Rightarrow A \rightarrow B \quad \text{et} \quad K_2 : A_2 \rightarrow B_2 \Rightarrow A \rightarrow B$$

tel que toute factorisation

$$K_1 = K_1'' \circ K_1' \quad \text{et} \quad K_2 = K_2'' \circ K_2'$$

où  $(K_1', K_2')$  est aussi un unificateur de  $(\phi_1, \phi_2)$ , est triviale dans le sens où

$$(K_1'', K_2'') = (\text{Id}, \text{Id}).$$

Par abus de langage, on assimilera parfois dans la suite un unificateur de deux morphismes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  au morphisme  $K_1\phi_1 = K_2\phi_2$  lorsque les contextes  $K_1$  et  $K_2$  peuvent être devinés.

**Propriété 5.12.** *Pour toute paire de règles*

$$\phi_1 \xrightarrow{r_1} \phi'_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 \xrightarrow{r_2} \phi'_2$$

*un diagramme*

$$\psi_1 \xleftarrow{K_1, r_1} \phi \xrightarrow{K_2, r_2} \psi_2$$

*est une paire critique si et seulement si la paire de contextes  $(K_1, K_2)$  est un unificateur non trivial de la paire de morphismes  $(\phi_1, \phi_2)$ . La paire critique est minimale si et seulement si l'unificateur est minimal.*

Ces propriétés généralisent à notre cadre 2-dimensionnel les définitions et propriétés classiques des systèmes de réécriture de termes [BN99]. En particulier, dans un système de réécriture de termes, une paire de règles admet un nombre fini d'unificateurs les plus généraux de leurs membres gauches. Si le système est terminant, il suffit alors pour déterminer si le système est confluent de déterminer s'il est localement confluent, ce qui peut être fait en calculant tous les unificateurs les plus généraux de membres gauches de règles de réécriture, et de vérifier que les paires critiques (minimales) ainsi induites sont joignables.

Les systèmes de réécriture monoïdaux sont plus généraux que les systèmes de réécriture de termes et cette généralité rend l'étude de ces systèmes plus difficile dans le cas général. En particulier, les paires critiques engendrées par deux règles de réécriture  $r_1$  et  $r_2$  ne sont pas nécessairement en nombre fini. Lafont a en effet remarqué [Laf03] que dans la théorie des objets tressés introduits à la Définition 3.24, pour tout morphisme  $\phi : m + 1 \rightarrow n + 1$ , le morphisme

$$Y\phi = \begin{array}{c} \text{Diagram: A box labeled } \phi \text{ is connected to a tangle of strands on the left. The strands enter from the bottom and exit from the top, crossing each other. There are three strands on the left and three on the right. Ellipses (...) are shown above and below the strands on the right side.} \end{array} \quad (5.4)$$

est un unificateur non trivial du morphisme

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A tangle of strands on the left, similar to the one in (5.4), but without the box. It consists of three strands on the left and three on the right, crossing each other. Ellipses (...) are shown above and below the strands on the right side.} \end{array} \quad (5.5)$$

avec lui-même. En particulier, en notant  $\gamma_n : 2 \rightarrow 2$  le morphisme défini par induction sur  $n$  par  $\gamma_0 = 2$  et  $\gamma_{n+1} = \gamma \circ \gamma_n$ , le morphisme  $Y\gamma_n$  est un unificateur non trivial minimal du morphisme (5.5) avec lui-même.

## 5.2 Indécidabilité de la confluence

Le problème consistant à déterminer si un système de réécriture monoïdal est confluent est indécidable. Il est en effet facile d'encoder le Problème du Mot étendant ainsi la preuve dans le cadre des systèmes de réécriture de termes [BN99].

**Définition 5.13** (Problème du Mot). Le *Problème du Mot* est le problème de décision suivant : étant donnée une présentation de monoïde  $\langle E_0 \mid E_1 \rangle$  et deux mots  $u$  et  $v$  du monoïde libre  $E_0^*$  sur  $E_0$ , les mots  $u$  et  $v$  sont-ils égaux dans le monoïde présenté ?

L'indécidabilité de ce problème entraîne celle de la confluence des systèmes de réécriture monoïdaux. En effet, soit  $\langle E_0 \mid E_1 \rangle$  avec  $E_1 = \{u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n\}$  une présentation de monoïde et  $s$  et  $t$  deux mots de  $E_0^*$ . On associe à cette présentation un polygraphe avec un seul 0-générateur 1, avec un 1-générateur  $\sigma : 1 \rightarrow 1$ , ainsi qu'un 1-générateur  $\sigma_a : 1 \rightarrow 1$  pour toute lettre  $a \in E_0$ , et avec deux 2-générateurs

$$\sigma_{u_i^{p_i}} \circ \dots \circ \sigma_{u_i^1} \implies \sigma_{v_i^{q_i}} \circ \dots \circ \sigma_{v_i^1} \quad \text{et} \quad \sigma_{v_i^{q_i}} \circ \dots \circ \sigma_{v_i^1} \implies \sigma_{u_i^{p_i}} \circ \dots \circ \sigma_{u_i^1}$$

pour tout indice  $i$ , où  $u_i = u_i^1 \dots u_i^{p_i}$ ,  $v_i = v_i^1 \dots v_i^{q_i}$  et les  $u_i^j$  et  $v_i^j$  sont des lettres de  $E_0$ , ainsi que deux 2-générateurs

$$\sigma \implies s \quad \text{et} \quad \sigma \implies t$$

Il est alors aisé de vérifier que le système de réécriture monoïdal ainsi défini est confluent si et seulement si la paire critique  $s \leftarrow \sigma \implies t$  est confluente, c'est-à-dire si  $s$  et  $t$  sont égaux modulo les équations de  $E_1$ , adaptant ainsi la preuve donnée dans [BN99].

De même que dans le cadre de la réécriture de termes, nous verrons que la confluence des systèmes de réécriture monoïdaux *terminants* est cependant décidable. Les systèmes de réécriture monoïdaux étant typés, il est naturel de se demander aussi si le *Problème de la Confluence Typée* est décidable pour les systèmes terminants : étant donné un système de réécriture monoïdal terminant et deux types  $A$  et  $B$ , la relation de réécriture induite sur les morphismes de type  $A \rightarrow B$  est-elle confluente ? Nous allons montrer que le Problème de Correspondance de Post peut être codé dans le problème de décision de la confluence typée pour les systèmes de réécriture monoïdaux terminants, en adaptant la preuve de Plump [Plu93] de l'indécidabilité de la confluence des systèmes de réécriture sur les hypergraphes à notre cadre. Nous en déduisons que le Problème de la Confluence typée n'est pas décidable pour les systèmes de réécriture monoïdaux terminants.

**Définition 5.14** (Problème de Correspondance de Post). Le *Problème de Correspondance de Post* sur un alphabet  $\Sigma$  est le problème de décision suivant : étant données deux listes  $U = (u_1, \dots, u_n)$  et  $V = (v_1, \dots, v_n)$  de mots sur l'alphabet  $\Sigma$ , existe-t-il une suite non vide  $i_1, \dots, i_k$  d'indices telle que l'égalité

$$u_{i_1} \dots u_{i_k} = v_{i_1} \dots v_{i_k}$$

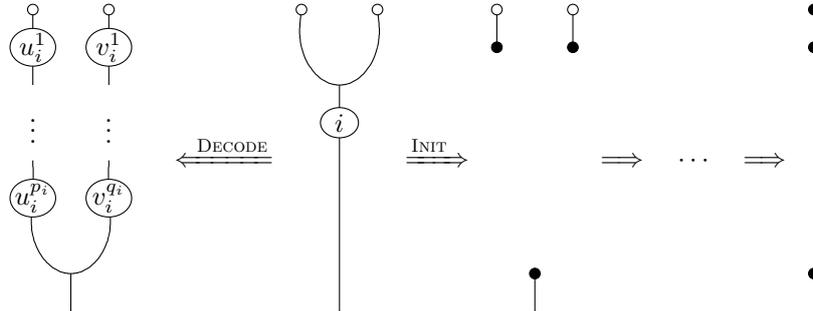
soit vérifiée ?

Une paire  $(U, V)$  telle que décrite ci-dessus est appelée une *instance* du Problème de Correspondance de Post et une suite  $i_1, \dots, i_k$  telle que ci-dessus une *solution* de l'instance  $(U, V)$ . Si l'alphabet  $\Sigma$  comporte au moins deux symboles, le problème consistant à déterminer si une instance du problème a une solution est indécidable [Pos46]. On suppose fixé dans la suite un tel alphabet  $\Sigma$  fini. Soit  $(U, V)$  une instance du Problème de Correspondance de Post, avec  $U = (u_1, \dots, u_n)$  et  $V = (v_1, \dots, v_n)$ . Nous construisons une théorie algébrique monoïdale  $\mathfrak{P}(U, V)$  qui est confluente sur les morphismes de type  $0 \rightarrow 0$  si et seulement si l'instance  $(U, V)$  admet une solution. Cette théorie n'a qu'un seul 0-générateur noté 1. Les 1-générateurs sont  $\eta : 0 \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon : 1 \rightarrow 0$ ,  $\bar{\eta} : 0 \rightarrow 1$ ,  $\bar{\varepsilon} : 1 \rightarrow 0$ ,  $\mu : 2 \rightarrow 1$ , ainsi qu'un 1-générateur  $\sigma_a : 1 \rightarrow 1$  pour chaque lettre  $a \in \Sigma$ , et un 1-générateur  $\sigma_i : 1 \rightarrow 1$  pour tout entier  $1 \leq i \leq n$ , représentés respectivement par



Enfin, les 2-générateurs sont donnés à la Figure 5.2.

Remarquons qu'il est important de ne considérer la confluence du système de réécriture monoïdal que sur les termes de type  $0 \rightarrow 0$  car le système n'est en général pas confluente. En effet, pour tout indice  $i$  la paire



n'est pas joignable.

**Lemme 5.15.** *Le système de réécriture  $\mathfrak{P}(U, V)$  termine.*

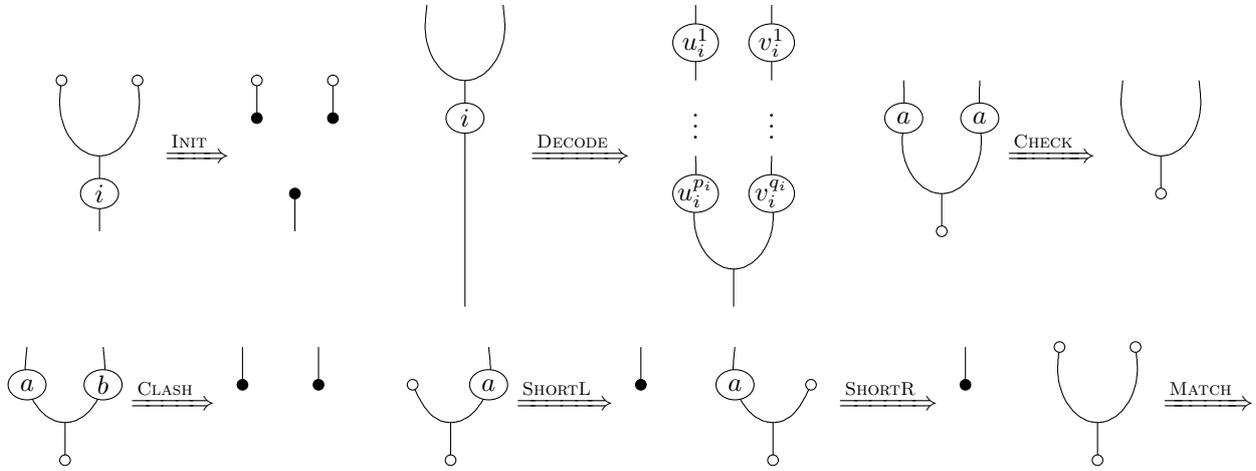
*Démonstration.* Pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$ , les règles font décroître le triplet formé du nombre de générateurs  $\sigma_i$  apparaissant dans  $\phi$ , du nombre de générateurs différents de  $\bar{\eta}$  et  $\bar{\varepsilon}$  et du nombre de générateurs apparaissant dans  $\phi$ , ordonné lexicographiquement.  $\square$

Notons  $\perp : 0 \rightarrow 0$  et  $\top : 0 \rightarrow 0$  les morphismes définis par  $\perp = \bar{\varepsilon} \circ \bar{\eta}$  et  $\top = 0$ . Graphiquement,



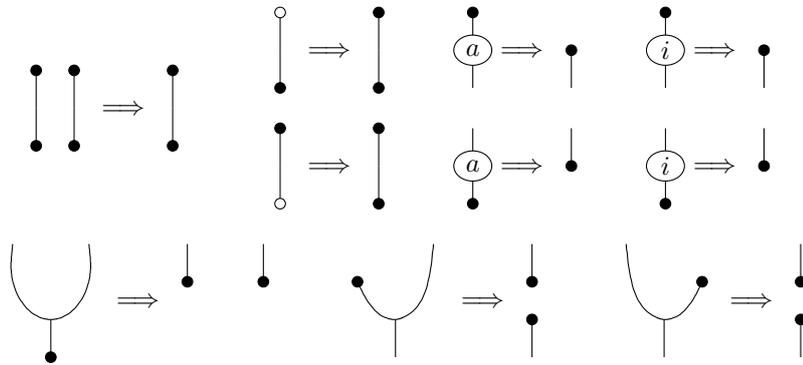
On peut alors montrer le lemme suivant par une étude systématique des morphismes.

1. Règles de mise en correspondance des mots :



Dans deuxième règle de la première ligne, on suppose que  $u_i = u_i^1 \cdots u_i^{p_i}$  et  $v_i = v_i^1 \cdots v_i^{q_i}$  où les  $u_i^j$  et les  $v_i^j$  sont des lettres de  $\Sigma$ ; dans la première règle de la seconde ligne, le lettre  $a$  et  $b$  sont supposées distinctes.

2. Règles d'« effacement » :



3. Règles éliminant les morphismes « mal formés » :

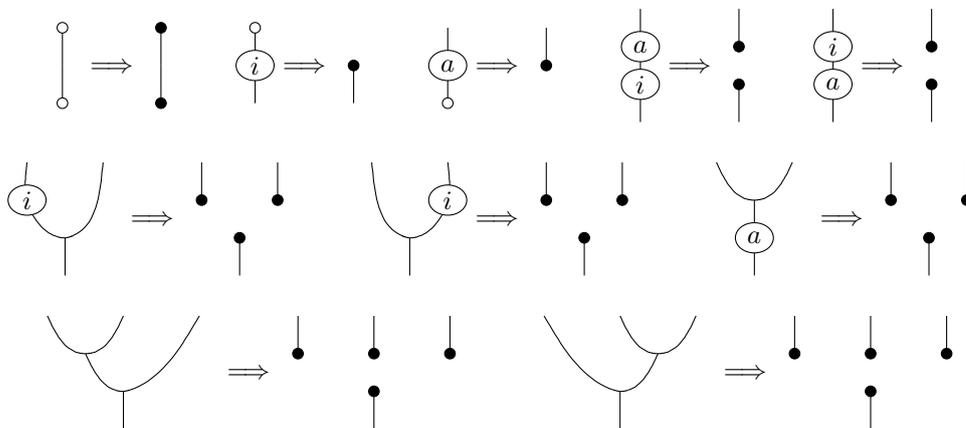


FIGURE 5.1 : Système de réécriture monoïdal associé à une instance du PCP.

**Lemme 5.16.** *Les deux seuls morphismes  $\phi : 0 \rightarrow 0$  sous forme normale sont  $\perp$  et  $\top$ .*

**Lemme 5.17.** *Si un morphisme  $\phi : 0 \rightarrow 0$  contient le générateur  $\bar{\eta}$  ou le générateur  $\bar{\varepsilon}$  alors il admet  $\perp$  comme unique forme normale.*

*Démonstration.* Soit  $\phi : 0 \rightarrow 0$  est un morphisme contenant le générateur  $\bar{\eta}$  ou le générateur  $\bar{\varepsilon}$ . Si  $\phi$  se réécrit en un morphisme  $\psi$  par l'une des règles de la Figure 5.2, alors  $\psi$  contient nécessairement le générateur  $\bar{\eta}$  ou le générateur  $\bar{\varepsilon}$ , car si  $\bar{\eta}$  ou  $\bar{\varepsilon}$  apparaît dans le membre gauche d'une règle du système de réécriture alors l'un de ces générateurs apparaît aussi dans le membre droit de la règle. Le système étant terminant par le Lemme 5.15, le morphisme  $\phi : 0 \rightarrow 0$  se réduit nécessairement à une forme normale et cette forme normale est l'un des morphismes  $\top$  ou  $\perp$  par le Lemme 5.16. Or,  $\top$  ne contient ni le générateur  $\bar{\eta}$  ni le générateur  $\bar{\varepsilon}$ . On en déduit que  $\phi$  se réduit vers le morphisme  $\perp$ .  $\square$

**Lemme 5.18.** *L'instance  $(U, V)$  admet une solution si et seulement si le système de réécriture monoïdal associé n'est pas confluent sur les morphismes de type  $0 \rightarrow 0$ .*

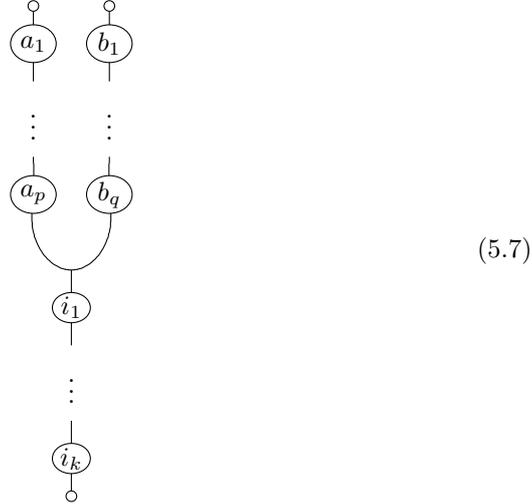
*Démonstration.* Supposons que le système  $(U, V)$  admette une solution  $i_1, \dots, i_k$ . Alors, le morphisme

$$(5.6)$$

se réduit à  $\perp$  en utilisant la règle INIT puis des applications répétées des règles du second groupe. De plus,  $i_1, \dots, i_k$  étant une solution de  $(U, V)$ , en appliquant tant que possible la règle DECODE, puis la règle CHECK, puis la règle MATCH, le morphisme se réduit à  $\top$ .

Réciproquement, supposons que le système de réécriture ne soit pas confluent sur les morphismes de type  $0 \rightarrow 0$ . Par le Lemme 5.15 le système de réécriture est terminant et par le Lemme 5.16 les seules formes normales de type  $0 \rightarrow 0$  sont  $\top$  et  $\perp$ . Il existe donc un morphisme  $\phi : 0 \rightarrow 0$  tel que  $\perp \longleftarrow^* \phi \Longrightarrow^* \top$ . Par le Lemme 5.17, les seules règles utilisées dans la dérivation  $\phi \Longrightarrow^* \top$  sont les règles DECODE, CHECK et MATCH, les autres règles contenant l'un des générateurs  $\bar{\eta}$  ou  $\bar{\varepsilon}$  dans leur membre droit. Le morphisme  $\phi$  est nécessairement un produit

tensoriel de morphismes de la forme



avec  $a_1 \cdots a_p u_{i_1} \cdots u_{i_k} = b_1 \cdots b_q v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ , sinon on pourrait montrer en utilisant le Lemme 5.17 que le morphisme  $\phi$  admettrait  $\perp$  comme unique forme normale. Les morphismes (5.7) admettent  $\top$  comme forme normale et donc  $\phi$  aussi. Par hypothèse,  $\phi$  admet aussi  $\perp$  comme forme normale. L'un des morphismes (5.7) est donc tel que  $p = q = 0$ , auquel cas, on peut lui appliquer la règle INIT et il se réduira à  $\perp$  par le Lemme 5.17. On a alors  $u_{i_1} \cdots u_{i_k} = b_1 \cdots b_q v_{i_1} \cdots v_{i_k}$  : la suite  $i_1, \dots, i_k$  est une solution de l'instance du Problème de Post.  $\square$

### 5.3 Catégories de réseaux

Étant donnée une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$ , il est nécessaire de pouvoir manipuler les morphismes de la catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{S}$  générée par  $\mathfrak{S}$  afin d'automatiser l'étude de structures algébriques telles que celles que nous avons précédemment présentées. En particulier, nous avons donné à la Définition 3.5 une description explicite de la catégorie  $\mathcal{S}$  comme un quotient d'une structure algébrique libre. Il semble cependant difficile de travailler modulo la relation que nous avons décrite. Par exemple, considérons la signature monoïdale sans 0-générateur, et deux 1-générateurs

$$\theta : I \rightarrow I \quad \text{et} \quad \theta' : I \rightarrow I$$

(on note  $I$  l'unité du monoïde libre sur l'ensemble vide des 0-générateurs). Dans la catégorie monoïdale stricte associée à cette signature, les morphismes  $\theta \otimes \theta'$  et  $\theta' \otimes \theta$  sont égaux. On a en effet la suite d'égalités :

$$\theta \otimes \theta' = (\theta \circ I) \otimes (I \circ \theta') = (\theta \otimes I) \circ (I \otimes \theta') = \theta \circ \theta' = (I \otimes \theta) \circ (\theta' \otimes I) = (I \circ \theta') \otimes (\theta \circ I) = \theta' \otimes \theta$$

Cette congruence semble donc difficilement pouvoir être gérée par les méthodes usuelles en informatique telles que celles fournies par la réécriture : il faut en effet au cours de cette suite d'égalités créer et effacer des identités, utiliser la loi d'échange entre la composition et le tenseur dans les deux directions, etc.

### 5.3.1 Réseaux symétriques

Nous présentons ici une définition d'une toute autre nature pour décrire la catégorie symétrique monoïdale libre générée par une signature, comme une catégorie de réseaux. Cette construction est inspirée à la fois des diagrammes de corde [JS91] et des réseaux logiques comme les structures de preuve [Gir87] et les réseaux d'interaction [Laf90]. Nous expliquerons ensuite comment elle peut être généralisée pour traiter le cas des catégories monoïdales strictes (non nécessairement symétriques) libres. Dans la suite, nous supposons fixée une signature monoïdale  $\mathfrak{S} = (E_1, s_1, t_1, E_2)$ .

**Définition 5.19** (Réseau symétrique). Un *réseau symétrique* sur la signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  est un sextuple

$$\phi = (C_1^\phi, \lambda_1^\phi, \sigma_1^\phi, \tau_1^\phi, C_2^\phi, \lambda_2^\phi)$$

où

- $C_1^\phi$  est un ensemble fini de *ports*,
- $C_2^\phi$  est un ensemble fini de *cellules*,
- $\lambda_1^\phi : R_1^\phi \rightarrow E_1$  et  $\lambda_2^\phi : R_2^\phi \rightarrow E_2$  sont deux fonctions d'*étiquetage*,
- pour toute cellule  $c \in C_2^\phi$  avec  $\lambda_2^\phi(c) : A \rightarrow B$ , les fonctions

$$\sigma_1^\phi(c) : |A| \rightarrow C_1^\phi \quad \text{et} \quad \tau_1^\phi(c) : |B| \rightarrow C_1^\phi$$

qui à toute cellule  $c$  associent ses *ports source* et ses *ports but*.

Un port  $p \in C_1^\phi$  est une *source* d'une cellule  $c \in C_2^\phi$  lorsqu'il existe un indice  $i$  tel que  $\sigma_1^\phi(i) = p$  et c'est une *but* de  $c$  lorsqu'il existe un indice  $i$  tel que  $\tau_1^\phi(i) = p$ . On note  $<_\phi$  la relation sur les cellules définie sur toute paire de cellules  $c$  et  $d$  par  $c <_\phi d$  si et seulement si il existe un port  $p$  qui est à la fois un but de  $c$  et une source de  $d$ . Les réseaux symétriques doivent respecter les contraintes suivantes.

1. *Respect du typage* : pour toute cellule  $c \in C_2^\phi$  avec  $\lambda_2^\phi(c) : A \rightarrow B$ , on a

$$A = \lambda_1^\phi(\sigma_1^\phi(c)(0)) \otimes \cdots \otimes \lambda_1^\phi(\sigma_1^\phi(c)(|A| - 1))$$

et

$$B = \lambda_1^\phi(\tau_1^\phi(c)(0)) \otimes \cdots \otimes \lambda_1^\phi(\tau_1^\phi(c)(|B| - 1)).$$

2. *Linéarité en avant* : tout port est une source d'au plus une cellule.
3. *Linéarité en arrière* : tout port est un but d'au plus une cellule.
4. *Séquentialité* : la relation  $<_\phi$  est un ordre partiel sur les cellules.

Un port est une *entrée* s'il n'est un but d'aucune cellule et une *sortie* s'il n'est une source d'aucune cellule. Un port est *libre* si c'est une entrée ou une sortie. Le *bord* d'une cellule  $c$  est l'ensemble  $\sigma_1^\phi(c) \cup \tau_1^\phi(c)$  des ports source et but de cette cellule.

Un *morphisme de réseaux symétriques* entre deux réseaux symétriques  $\phi$  et  $\psi$  est une paire de fonctions  $\alpha_1 : C_1^\phi \rightarrow C_1^\psi$  et  $\alpha_2 : C_2^\phi \rightarrow C_2^\psi$  qui préservent la structure des réseaux symétriques dans le sens où les égalités

$$\lambda_1^\phi = \lambda_1^\psi \circ \alpha_1 \quad \sigma_1^\psi(\alpha_2(c)) = \alpha_1 \circ (\sigma_1(c)) \quad \tau_1^\psi(\alpha_2(c)) = \alpha_1 \circ (\tau_1(c)) \quad \lambda_2^\phi = \lambda_2^\psi \circ \alpha_2$$

sont vérifiées pour toute cellule  $c$  de  $C_2^\phi$ . Deux réseaux symétriques  $\phi$  et  $\psi$  sont  $\alpha$ -équivalents lorsqu'ils sont isomorphes.

**Définition 5.20** (Catégorie des réseaux symétriques). La catégorie  $\mathcal{R}_s(\mathfrak{S})$  des *réseaux symétriques* sur la théorie monoïdale  $\mathfrak{S}$  est définie de la façon suivante. Les objets  $A$  de  $\mathcal{R}_s(\mathfrak{S})$  sont les éléments  $A = A_0 \otimes \cdots \otimes A_{|A|-1}$  du monoïde libre  $(E_1^*, \otimes, I)$  sur l'ensemble  $E_1$ ; nous verrons un tel objet comme une fonction  $\lambda_A : |A| \rightarrow E_1$  qui à tout indice  $i$  associe le générateur  $A_i$ . Les morphismes de  $\mathcal{R}_s(\mathfrak{S})$  sont les triplets

$$(s_1^\phi, \phi, t_1^\phi) : A \rightarrow B$$

où  $\phi$  est un réseau symétrique et

$$s_1^\phi : |A| \rightarrow C_1^\phi \quad \text{et} \quad t_1^\phi : |B| \rightarrow C_1^\phi$$

sont des bijections entre l'ensemble fini  $|A|$  (resp.  $|B|$ ) et l'ensemble des entrées (resp. l'ensemble des sorties) du réseau symétrique  $\phi$  qui sont compatibles avec le typage dans le sens où les égalités

$$\lambda_1^\phi \circ s_1^\phi = \lambda_A \quad \text{et} \quad \lambda_1^\phi \circ t_1^\phi = \lambda_B$$

sont vérifiées. Deux réseaux symétriques  $\alpha$ -équivalents seront considérés égaux.

La composée  $\psi \circ \phi : A \rightarrow C$  de deux morphismes  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : B \rightarrow C$  est le morphisme

$$(s_1^{\psi \circ \phi}, \psi \circ \phi, t_1^{\psi \circ \phi}) : A \rightarrow C$$

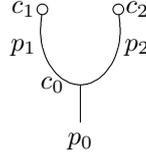
où le réseau symétrique  $\psi \circ \phi$  a la somme amalgamée sur le diagramme

$$C_1^\phi \xleftarrow{t_1^\phi} |B| \xrightarrow{s_1^\psi} C_1^\psi$$

comme ensemble de ports et l'union disjointe  $C_2^\phi \uplus C_2^\psi$  comme ensemble de cellules, les morphismes  $\lambda_1^{\psi \circ \phi}$ ,  $\sigma_1^{\psi \circ \phi}$ ,  $\tau_1^{\psi \circ \phi}$  et  $\lambda_2^{\psi \circ \phi}$  sont ceux induits par les morphismes correspondants de  $\phi$  et  $\psi$  et le morphisme  $s_1^{\psi \circ \phi}$  (resp.  $t_1^{\psi \circ \phi}$ ) est le morphisme induit par  $s_1^\phi$  (resp.  $t_1^\psi$ ). L'identité  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  sur un objet  $A$  est le morphisme tel que  $C_1^{\text{id}_A} = |A|$ ,  $\lambda_1^{\text{id}_A} = \lambda_A$  et  $C_2^{\text{id}_A} = \emptyset$ .

La catégorie ainsi définie est la catégorie sous-jacente d'une catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{R}_s(\mathfrak{S}), \otimes, I, \gamma)$ , où le produit tensoriel  $\phi \otimes \psi : A \otimes C \rightarrow B \otimes D$  de deux morphismes  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : C \rightarrow D$  est défini par l'union disjointe sur les ports et les cellules, et l'élément neutre  $I$  est le réseau symétrique vide. Si  $A$  et  $B$  sont deux objets, la symétrie  $\gamma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  est définie par  $C_1^{\gamma_{A,B}} = |A| \uplus |B|$ ,  $\lambda_1^{\gamma_{A,B}} = A \uplus B$ ,  $C_2^{\gamma_{A,B}} = \emptyset$ ,  $s_1^{\gamma_{A,B}} = |A| \uplus |B|$  et  $s_1^{\gamma_{A,B}} = |B| \uplus |A|$ . De façon générale, si  $A$  est un objet et  $s : |A| \rightarrow |A|$  est une bijection, on peut de même définir un réseau symétrique  $\gamma_s : A \rightarrow s(A)$ , qui ne contient pas de cellule, où  $s(A)$  est l'objet défini par  $|s(A)| = |A|$  et la fonction  $\lambda_{s(A)} : |s(A)| \rightarrow E_1$  est  $\lambda_{s(A)} = \lambda_A \circ s$ .

*Exemple 5.21.* Sur la signature  $\mathfrak{M}$  des monoïdes, avec un générateur 1 des 1-cellules et deux générateurs  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et  $\eta : 0 \rightarrow 1$  des 2-cellules, le diagramme



peut être représenté par le réseau symétrique  $\phi$  défini par  $C_1^\phi = \{p_0, p_1, p_2\}$ ,  $\lambda_1^\phi(p_i) = 1$ ,  $C_2^\phi = \{c_0, c_1, c_2\}$ ,  $\lambda_2^\phi(c_0) = \mu$ ,  $\lambda_2^\phi(c_1) = \lambda_2^\phi(c_2) = \eta$ ,  $\tau_1(c_1)(0) = p_1$ ,  $\tau_1(c_2)(0) = p_2$ ,  $\sigma_1(c_0)(0) = p_1$ ,  $\sigma_1(c_0)(1) = p_2$  et  $\tau_1(c_0)(0) = p_0$ .

*Remarque 5.22.* Par souci de simplicité, nous restons volontairement imprécis en considérant les réseaux *modulo  $\alpha$ -conversion*. En effet, la composition des réseaux étant définie par propriétés universelles – une somme sur les ports et une somme amalgamée sur les cellules – la composition n’est pas strictement associative dans le sens où les composées  $\xi \circ (\psi \circ \phi)$  et  $(\xi \circ \psi) \circ \phi$  de trois réseaux composables  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\xi$  ne sont pas égales mais seulement  $\alpha$ -convertibles. La construction que nous avons présentée ne définit donc pas une catégorie monoïdale symétrique mais seulement une bicatégorie monoïdale symétrique donc les 1-cellules sont les réseaux et les 2-cellules sont les morphismes de réseaux. Dans la suite, nous considérerons la catégorie monoïdale stricte symétrique obtenue en rendant stricte cette bicatégorie (voir la Propriété 0.32 et la Section 0.7). Lorsque nous parlerons d’égalité entre réseaux il faudra donc lire  $\alpha$ -convertibilité.

*Remarque 5.23.* À tout 2-générateur  $\pi : A \rightarrow B$  de  $E_2$ , on peut associer canoniquement un réseau symétrique  $\phi : A \rightarrow B$  ayant  $|A| \uplus |B|$  pour ports et une unique cellule d’étiquette  $\pi$  avec les fonctions  $\sigma_i^\phi$  et  $\tau_i^\phi$  évidentes. Dans la suite, nous noterons simplement  $\pi$  le réseau symétrique  $\phi$  associé à  $\pi$ .

Par une preuve similaire à celle du Théorème 4.37, on peut montrer que

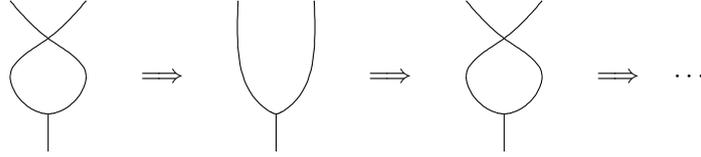
**Théorème 5.24.** *La catégorie des réseaux symétriques  $\mathcal{R}_s(\mathfrak{S})$  sur une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  est isomorphe à la catégorie monoïdale symétrique stricte générée par la signature  $\mathfrak{S}$ .*

Le cadre des catégories monoïdales *symétriques* générées par une signature monoïdale n’est cependant souvent pas satisfaisant pour étudier les systèmes de réécriture monoïdaux. En effet, considérons la signature  $\mathfrak{M}$  des monoïdes dont les 2-générateurs sont  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et  $\eta : 0 \rightarrow 1$  et un système de réécriture axiomatisant la théorie des monoïdes commutatifs dans la catégorie monoïdale symétrique libre générée par la signature contenant la règle

(5.8)

Il est important de noter que la symétrie  $\gamma : 2 \rightarrow 2$  apparaissant dans le morphisme du membre gauche de la règle ci-dessus n’est pas un générateur mais

provient de la structure de symétrie engendrée librement. On a donc l'égalité  $\gamma \circ \gamma \circ \mu = \mu$  qui rend le système de réécriture non terminant. On a en effet la suite infinie de réductions :



Ainsi, la plupart des systèmes de réécriture sur des structures symétriques, formalisés en utilisant la symétrie de la catégorie monoïdale symétrique librement générée par la signature monoïdale associée ne sont pas terminants. C'est pourquoi il faut véritablement considérer des systèmes de réécriture sur la catégorie monoïdale (non symétrique) libre, quitte à ajouter un générateur et des égalités représentant concrètement la symétrie. Ainsi, sur la signature à trois 2-générateurs  $\mu$ ,  $\eta$  et  $\gamma$ , la règle (5.8) fait décroître le nombre de générateurs dans les morphismes de la catégorie monoïdale symétrique libre (elle enlève un générateur  $\gamma$ ) et ne rend donc pas immédiatement le système de réécriture non terminant.

### 5.3.2 Réseaux non symétriques

Indiquons comment la construction de la catégorie de réseaux symétriques précédente peut être adaptée pour décrire la catégorie monoïdale stricte (non symétrique) libre générée par une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$ .

Une première idée pour construire la catégorie monoïdale stricte générée par une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  consiste à construire la plus petite sous-catégorie monoïdale  $\mathcal{R}_u(\mathfrak{S})$  de la catégorie  $\mathcal{R}_s(\mathfrak{S})$  contenant tous les 2-générateurs comme morphismes. Cependant, ce faisant on ne construit pas exactement la catégorie monoïdale stricte générée par la signature. Si les morphismes *connexes* sont bien représentés, certains morphismes non connexes sont égalisés, montrant que cette catégorie n'est pas libre. Par morphisme connexe, on entend ici :

**Définition 5.25** (Morphisme connexe). Un morphisme  $\phi : A \rightarrow B$  d'une catégorie monoïdale est *connexe* lorsque pour tout contexte  $K : I \rightarrow I \Rightarrow A \rightarrow B$  et tout morphisme  $\psi : I \rightarrow I$  tel que  $K \circ \psi = \phi$ , le morphisme  $\psi$  est l'identité sur  $I$ .

Informellement, les morphismes connexes sont les morphismes dont la représentation graphique est un graphe connexe, ne contenant pas d'« île flottante » selon la terminologie de [JK06].

Par exemple, si l'on effectue cette construction sur une signature monoïdale avec un 1-générateur  $1$  et deux 2-générateurs  $\eta : 0 \rightarrow 1$  et  $\varepsilon : 1 \rightarrow 0$ , on a dans la catégorie  $\mathcal{R}_u(\mathfrak{S})$  l'égalité :  $(\varepsilon \circ \eta) \otimes 1 = 1 \otimes (\varepsilon \circ \eta)$ . Diagrammatiquement,



Nous avons montré à la Propriété 0.46 pourquoi une telle égalité est vérifiée dans toute catégorie monoïdale symétrique. Dans le cadre des réseaux, elle provient essentiellement du fait que nos réseaux ne contiennent pas d'information sur les 0-cellules. En effet, graphiquement ces 0-cellules sont les zones du plan, indispensables par exemple pour indiquer dans le diagramme ci-dessus si le morphisme  $\varepsilon \circ \eta$  est dans la partie du plan qui est à gauche ou celle qui est à droite de l'identité. Autrement dit, la catégorie  $\mathcal{R}_u(\mathfrak{S})$  est équivalente à la catégorie monoïdale stricte avec unités commutatives libre sur la signature  $\mathfrak{S}$ . Par une catégorie monoïdale stricte *avec unités commutatives*, on entend ici une catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  dans laquelle pour tout morphisme  $f : I \rightarrow I$  et tout objet  $A$ , on a  $f \otimes A = A \otimes f$  (dans ces catégories, les îles flottantes peuvent changer de mer à leur guise).

Nous raffinons donc la définition des réseaux de la façon suivante. Un *réseau*  $\phi$  est un uple

$$\phi = (C_0^\phi, \sigma_0^\phi, \tau_0^\phi, \sigma_{10}^\phi, \tau_{10}^\phi, C_1^\phi, \lambda_1^\phi, \sigma_1^\phi, \tau_1^\phi, C_2^\phi, \lambda_2^\phi)$$

où

- $C_0^\phi$  est un ensemble fini de *zones*,
- $\sigma_0^\phi : C_1^\phi \rightarrow C_0^\phi$  et  $\tau_0^\phi : C_1^\phi \rightarrow C_0^\phi$  sont deux fonctions qui à tout port associent sa zone source et sa zone but,
- $\sigma_{10}^\phi : C_2^\phi \rightarrow C_0^\phi$  et  $\tau_{10}^\phi : C_2^\phi \rightarrow C_0^\phi$  sont deux fonctions qui à toute cellule associent sa zone source et sa zone but,

qui satisfont

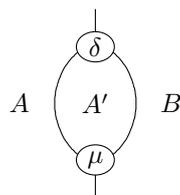
- pour toute cellule  $c \in C_1^\phi$ , avec  $\lambda_2^\phi(c) : A \rightarrow B$ ,
  - pour tout indice  $i$ ,  $\tau_0^\phi(\sigma_1^\phi(c)(i)) = \sigma_0^\phi(\sigma_1^\phi(c)(i+1))$ ,
  - pour tout indice  $i$ ,  $\tau_0^\phi(\tau_1^\phi(c)(i)) = \sigma_0^\phi(\tau_1^\phi(c)(i+1))$ ,
  - si  $|A| > 0$  alors  $\sigma_{10}^\phi(c) = \sigma_0^\phi(\sigma_1(c)(0))$  et  $\tau_{10}^\phi(c) = \tau_0^\phi(\sigma_1(c)(|A|-1))$ ,
  - si  $|B| > 0$  alors  $\sigma_{10}^\phi(c) = \sigma_0^\phi(\tau_1(c)(0))$  et  $\tau_{10}^\phi(c) = \tau_0^\phi(\tau_1(c)(|B|-1))$ ,
- les conditions de la Définition 5.19.

Nous pouvons alors étendre la construction de la catégorie de réseaux symétriques pour l'adapter aux réseaux non symétriques de la façon suivante. Un objet de cette catégorie est un uple

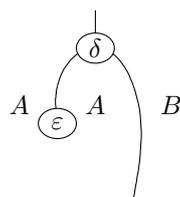
$$A = (C_0^A, \sigma_0^A, \tau_0^A, C_1^A, \lambda_1^A)$$

où  $(C_0^A, \sigma_0^A, \tau_0^A, C_1^A)$  est un graphe dont les éléments de  $C_0^A$  sont appelées *zones* et les éléments de  $C_1^A$  sont appelés *cellules*, tel que toute zone est la source et le but d'exactlyement une cellule, excepté une zone qui n'est que la source d'une cellule et une zone qui n'est que le but d'une cellule. La fonction  $\lambda_1^A : C_1^A \rightarrow E_1$  est une fonction d'*étiquetage*. On peut alors adapter la construction de cocompas de la Définition 5.20 et ainsi construire une catégorie monoïdale stricte de réseaux  $\mathcal{N}(\mathfrak{S})$ . De même qu'à la Remarque 5.23, on peut injecter les 2-générateurs de la signature monoïdale dans cette catégorie. On définit alors la catégorie  $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$

des réseaux comme la plus petite sous-catégorie monoïdale de cette catégorie contenant les 2-générateurs de la signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  : cette catégorie est la catégorie monoïdale libre générée par la signature monoïdale. Il semble difficile de donner une caractérisation directe des morphismes de  $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$  à l'intérieur de la catégorie  $\mathcal{N}(\mathfrak{S})$  en imposant des conditions permettant d'avoir des zones cohérentes. Par exemple, sur la signature monoïdale à un 1-générateur 1 et trois 2-générateurs  $\delta : 1 \rightarrow 2$ ,  $\mu : 2 \rightarrow 1$  et  $\varepsilon : 1 \rightarrow 0$ , le morphisme  $\phi$



dont les zones  $A$  et  $A'$  sont égales (i.e. sont le même élément de  $C_0^\phi$ ) est un morphisme de  $\mathcal{N}(\mathfrak{S})$  mais pas de  $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ . Cependant, le morphisme



est un morphisme de  $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ .

*Remarque 5.26.* Les constructions de réseaux présentées ici semblent proches des différents formalismes permettant de construire des « catégories de diagrammes » générant des  $n$ -catégories libres tels que les *schémas de collage* (*pasting schemes*) de Johnson [Joh89], les *complexes de parité* de Street [Str91] ou les *complexes dirigés* de Steiner [Ste93]. Il serait intéressant d'investiguer précisément le rapport entre nos réseaux et ces constructions.

## 5.4 Unification dans les catégories monoïdales

Afin de pouvoir formuler un algorithme d'unification dans les catégories monoïdales, il nous faut encore généraliser la construction de la catégorie de réseaux précédente afin de prendre en compte des « trous » à l'intérieur des morphismes, similaires à ceux déjà rencontrés lors de la formalisation des contextes monoïdaux (Définition 3.8).

### 5.4.1 Multicatégories de multicontextes

Commençons par rappeler brièvement la notion de multicatégorie. Une présentation plus approfondie pourra être trouvée dans [Lei04].

**Définition 5.27** (Multicatégorie). Une *multicatégorie*  $\mathcal{M}$  est la donnée

- d'une classe  $\text{Ob}(\mathcal{M})$  dont les éléments sont appelés *objets* de  $\mathcal{M}$ ,
- d'une classe  $\mathcal{M}(A_1, \dots, A_n; A)$  pour tous objets  $A_1, \dots, A_n, A$  dont les éléments

$$f : A_1, \dots, A_n \rightarrow A$$

sont appelés *morphismes* ou *opérations n-aires*,

- d'une fonction

$$\mathcal{M}(A_1, \dots, A_n; A) \times \mathcal{M}(A_1^1, \dots, A_n^{k_1}; A_1) \times \dots \times \mathcal{M}(A_n^1, \dots, A_n^{k_n}; A_n) \rightarrow \mathcal{M}(A_1^1, \dots, A_n^{k_1}, \dots, A_n^1, \dots, A_n^{k_n}; A)$$

pour tous objets  $A, A_i$  et  $A_i^j$

telles que

- la composition est associative :

$$f \circ (f_1 \circ (f_1^1, \dots, f_1^{k_1}), \dots, f_n \circ (f_n^1, \dots, f_n^{k_n})) = (f \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (f_1^1, \dots, f_1^{k_1}, \dots, f_n^1, \dots, f_n^{k_n})$$

pour tous morphismes  $f, f_i$  et  $f_i^j$  tels que les compositions font sens,

- l'identité est l'élément neutre de la composition : pour tout morphisme  $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow A$ , on a

$$f \circ (\text{id}_{A_1}, \dots, \text{id}_{A_n}) = f = \text{id}_A \circ (f)$$

Une telle multicatégorie est *symétrique* lorsque les permutations  $\sigma : n \rightarrow n$  induisent une fonction

$$- \cdot \sigma : \mathcal{M}(A_1, \dots, A_n; A) \rightarrow \mathcal{M}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}; A)$$

pour tous objets  $A_1, \dots, A_n$  et  $A$ , de façon cohérente, dans le sens où pour tout morphisme  $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow A$  et toutes permutations  $\sigma, \tau : n \rightarrow n$ , on a

$$(f \cdot \sigma) \cdot \tau = f \cdot (\tau \circ \sigma) \quad \text{et} \quad f \cdot n = f$$

et de façon compatible avec la composition, dans le sens où

$$(f \cdot \sigma) \circ (f_{\sigma(1)} \cdot \tau_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)} \cdot \tau_{\sigma(n)}) = (f \circ (f_1, \dots, f_n)) \cdot (\sigma \circ (\tau_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \tau_{\sigma(n)}))$$

pour tous morphismes  $f, f_1, \dots, f_n$  de  $\mathcal{M}$  et permutations  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$  pour lesquelles l'équation ci-dessus fait sens. Le tenseur et la composition des permutations ci-dessus sont ceux de la catégorie **Bij** définie à la Propriété 3.26.

Les multicatégories peuvent être organisées en une catégorie appelée **MultiCat**.

Toute multicatégorie induit une catégorie en se restreignant aux morphismes unaires. Cette construction définit un adjoint à droite au foncteur d'inclusion de **Cat** dans **MultiCat**.

**Définition 5.28** (Catégorie des morphismes unaires). À toute catégorie  $\mathcal{M}$ , on peut associer une *catégorie des morphismes unaires* ayant les mêmes objets que la multicatégorie, ayant les éléments de  $\mathcal{M}(A; B)$  comme morphismes de  $A$  dans  $B$ , et dont la composition et les identités sont celles induites par la multicatégorie.

La notion de multicatégorie permet de généraliser la construction de la catégorie de contexte monoïdale introduite à la Définition 3.8 afin de prendre en compte des contextes comportant plusieurs trous.

**Définition 5.29** (Multicatégorie de multicontextes). À toute catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{C}$ , on peut associer une multicatégorie  $\mathcal{K}(\mathcal{C})$  de contextes à plusieurs trous ou *multicontextes*. Ses objets sont des paires d'objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , notées  $A \rightarrow B$ , et l'ensemble des morphismes

$$K : A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n \Rightarrow A \rightarrow B$$

de cette multicatégorie est l'ensemble des fonctions

$$K : \text{Hom}(A_1, B_1) \times \dots \times \text{Hom}(A_n, B_n) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$$

défini par induction par

- pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la fonction constante

$$K_f : 1 \Rightarrow A \rightarrow B$$

qui associe le morphisme  $f$  à l'unique objet de l'ensemble terminal 1, parfois encore simplement notée  $f$ , est un élément de  $\mathcal{K}(\mathcal{C})(; A \rightarrow B)$ ,

- la fonction identité  $\text{id}_{A \rightarrow B}$  est un élément de  $\mathcal{K}(\mathcal{C})(A \rightarrow B; A \rightarrow B)$ ,
- pour toute paire de morphismes

$$K \in \mathcal{K}(\mathcal{C})(A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n; A \rightarrow B)$$

et

$$K' \in \mathcal{K}(\mathcal{C})(A'_1 \rightarrow B'_1, \dots, A'_n \rightarrow B'_n; B \rightarrow C)$$

la fonction définie par

$$(f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) \mapsto K'(g) \circ K(f)$$

est un élément de

$$\mathcal{K}(\mathcal{C})(A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n, A'_1 \rightarrow B'_1, \dots, A'_n \rightarrow B'_n; A \rightarrow C)$$

- pour toute fonction

$$K \in \mathcal{K}(\mathcal{C})(A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n; A \rightarrow B)$$

et toute permutation  $\pi : n \rightarrow n$ , la fonction  $K \circ \pi^{-1}$  est un élément de

$$\mathcal{K}(\mathcal{C})(A_{\pi(1)} \rightarrow B_{\pi(1)}, \dots, A_{\pi(n)} \rightarrow B_{\pi(n)}; A \rightarrow B)$$

Il est aisé de vérifier que ces ensembles, munis des identités habituelles et de la composition induite par la composition de fonctions, définissent une multicatégorie symétrique.

Cette construction est inspirée de l'*opérade des petits cubes* en topologie algébrique [Lei04], où l'on compose de petits cubes avec des trous cubiques de la même façon que l'on compose les multicontextes dans notre cadre syntaxique.

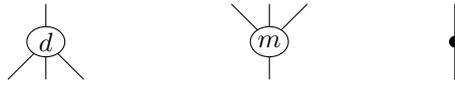
### 5.4.2 Multicatégories de régions

Comme l'exemple des tresses l'a montré à la Section 5.1, les unificateurs minimaux de deux morphismes ne sont parfois pas en nombre fini, auquel cas ils sont générés par des sortes de diagrammes paramétriques (dépendant d'un morphisme  $\phi$ ) comme celui figuré en (5.4). Afin de tenter de formaliser ce nouveau type de diagramme, nous allons définir la notion de *région monoïdale* qui généralise celle de multicontexte monoïdal. En effet, le « bord » d'un multicontexte monoïdal

$$K : A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n \Rightarrow C \rightarrow D$$

est constitué d'un objet  $C$  en entrée et d'un objet  $D$  en sortie. Le bord d'une région peut quant à lui être plus complexe et contenir plusieurs objets en entrée et en sortie entremêlés. De plus, les régions sont munies d'un produit tensoriel qui généralise à la fois la composition et le produit tensoriel de la catégorie sous-jacente.

Pour mieux comprendre cette notion de région que nous allons introduire, considérons un polygraphe avec un unique 0-générateur, un unique 1-générateur noté 1, et trois 2-générateurs  $d : 1 \rightarrow 3$ ,  $m : 3 \rightarrow 1$  et  $s : 1 \rightarrow 1$ , respectivement représentés par



et notons  $\mathcal{C}$  la catégorie monoïdale stricte engendrée. Étudions les unificateurs minimaux des morphismes

(5.9)

Par exemple, pour tout morphisme  $\phi : m \rightarrow n$  (avec  $m \geq 2$  et  $n \geq 2$ ), le morphisme

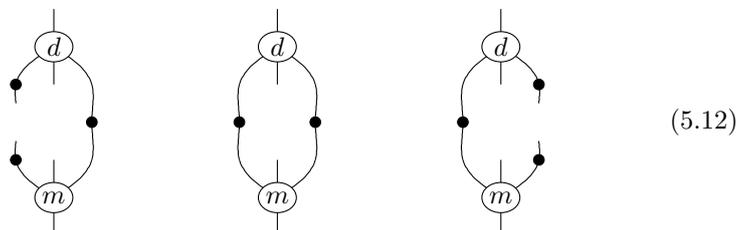
(5.10)

est un unificateur des deux morphismes (5.9). Ce diagramme décrit donc une famille d'unificateurs, paramétrée par le morphisme  $\phi$ . Ces familles étant difficiles à manipuler directement, il est alors tentant de considérer ces générateurs de familles en eux-mêmes et d'étudier la façon dont ils s'organisent d'un point de vue algébrique, c'est-à-dire de construire une catégorie dans laquelle on pourrait

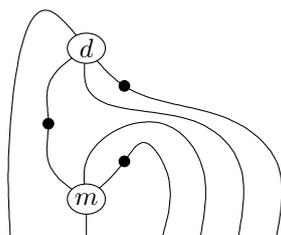
manipuler des « diagrammes ouverts » de la forme



Une fois ce saut conceptuel effectué, les morphismes (5.9) admettent un nombre fini d'unificateurs minimaux non triviaux dans cet espace généralisé :

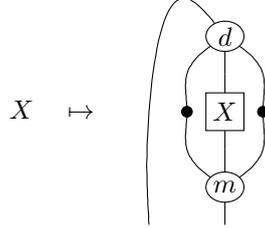


Les morphismes correspondant à ces diagrammes seront appelés des *régions* et nous allons montrer qu'ils peuvent être structurés en une multicatégorie. La construction que nous allons proposer procède en deux temps. Tout d'abord, nous allons ajouter formellement des duaux à gauche et à droite aux objets de la catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  (voir Définition 3.51). D'un point de vue graphique, ceci revient à donner la possibilité de « tourner les fils », et nous permettra ainsi de nous ramener à des morphismes de type de la forme  $I \rightarrow A$ . Par exemple, le morphisme (5.11) va induire le morphisme



Dans un second temps, nous gérons les régions comme celle du milieu de (5.12) qui contiennent des « trous », en utilisant le mécanisme de composition dans les multicatégories de multicontextes. Ainsi, le morphisme évoqué induira une

fonction



dans la multicatégorie des régions.

**Définition 5.30** (Catégorie avec duaux). Une *catégorie avec duaux* est une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  dans laquelle tout objet  $A$  est muni

- d'un choix de dual à droite  $A^*$ , d'unité et de counité

$$\eta_A^R : I \rightarrow A \otimes A^* \quad \text{et} \quad \varepsilon_A^R : A^* \otimes A \rightarrow I$$

- d'un choix de dual à gauche  ${}^*A$ , d'unité et de counité

$$\eta_A^L : I \rightarrow {}^*A \otimes A \quad \text{et} \quad \varepsilon_A^L : A \otimes {}^*A \rightarrow I$$

*Remarque 5.31.* Une catégorie monoïdale symétrique avec duaux est équivalente à une catégorie *compacte fermée* [KL80] (voir Définition 0.53). Ici, nous ne supposons pas que la catégorie monoïdale est symétrique mais une grande partie de l'étude menée par Kelly et Laplaza se généralise à notre contexte.

**Propriété 5.32.** Dans toute catégorie avec duaux  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ , pour tous objets  $A$  et  $B$ , on a les isomorphismes canoniques suivants :

1.  $({}^*A)^* \cong A \cong (A^*)^*$
2.  $(A \otimes B)^* \cong B^* \otimes A^* \quad \text{et} \quad ({}^*(A \otimes B)) \cong {}^*B \otimes {}^*A$
3.  ${}^*I \cong I \cong I^*$

*Démonstration.* La preuve de ces propositions est simple et est essentiellement donnée dans [KL80] qui utilise des résultats de [KS72] sur les adjonctions dans les 2-catégories.  $\square$

**Définition 5.33** (Catégorie avec duaux stricte). Une catégorie avec duaux est *stricte* lorsque la catégorie monoïdale sous-jacente est stricte et de plus les isomorphismes de la Propriété 5.32 sont des égalités.

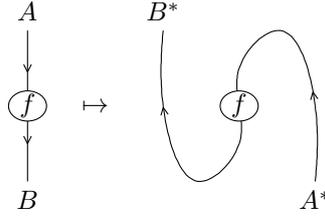
**Propriété 5.34.** Dans une catégorie avec duaux strictes, on a pour tous objets  $A$  et  $B$  les égalités :

- $\eta_A^R = \eta_{A^*}^L \quad \text{et} \quad \varepsilon_A^R = \varepsilon_{A^*}^L$
- $\eta_{A \otimes B}^L = ({}^*B \otimes \eta_A^L \otimes B) \circ \eta_B^L \quad \text{et} \quad \varepsilon_{A \otimes B}^R = \varepsilon_A^L \circ (A \otimes \varepsilon_B^L \otimes {}^*A)$
- $\eta_I^L = I = \varepsilon_I^L$

Dans une catégorie avec dual stricte  $\mathcal{C}$ , l'opération qui à un objet  $A$  associe  $A^*$  peut être étendue en un foncteur  $(-)^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  défini sur tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  par

$$f^* = (\varepsilon_B^R \otimes A^*) \circ (B^* \otimes f \otimes A^*) \circ (B^* \otimes \eta_A^R)$$

Graphiquement,



Le foncteur  $*(-) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  est défini de façon similaire. La propriété précédente permet aisément de montrer que ces foncteurs sont strictement monoïdaux et sont inverses l'un de l'autre.

**Définition 5.35.** Si  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est une catégorie monoïdale stricte, on note  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  la catégorie avec dual stricte libre sur la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Décrivons la catégorie avec dual stricte  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  associée à une catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ . Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  et tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit la notation  $A^n$  par

$$A^0 = A \quad A^{n+1} = (A^n)^* \quad A^{n-1} = *(A^n)$$

(cette notation entre en conflit avec la notation pour les inverses lorsque  $n = -1$  mais nous ne considérerons pas d'inverses dans la suite). L'opération  $(-)^n$  peut être étendue comme précédemment en un foncteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  si  $n$  est impair et de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  si  $n$  est pair. Tout objet  $A$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  peut être écrit de façon unique sous la forme

$$A = A_1^{\theta_1} \otimes \dots \otimes A_n^{\theta_n}$$

où les  $A_i$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  et les  $\theta_i$  sont des entiers que nous appellerons *orientations*. Les morphismes de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  sont obtenus par composition et produit tensoriel formels d'identités, de morphismes  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  vus comme des morphismes  $f : A^0 \rightarrow B^0$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  et des morphismes formels

$$\eta_{A^n} : I \rightarrow A^{n-1} \otimes A^n \quad \text{et} \quad \varepsilon_{A^n} : A^n \otimes A^{n-1} \rightarrow I$$

où  $A$  est un objet de  $\mathcal{C}$ . La composition et le produit tensoriel vérifient les lois requises par une catégorie monoïdale stricte. De plus, la composition et le produit tensoriel dans la catégorie  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  coïncident avec celle de la catégorie  $\mathcal{C}$  pour les morphismes provenant de  $\mathcal{C}$ . Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , l'identité sur  $A$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  coïncide avec celle de  $\mathcal{C}$ . Enfin, les morphismes  $\eta_{A^n}$  et  $\varepsilon_{A^n}$  vérifient les égalités zig-zag définissant les objets duals.

**Propriété 5.36.** Pour toute catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ , le plongement de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est plein et fidèle.

*Démonstration.* Un morphisme de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  sera dit *primaire* lorsqu'il est

1. de la forme  $f^n : A^{2n} \rightarrow B^{2n}$ ,
2. ou de la forme  $f^{2n+1} : B^{2n+1} \rightarrow A^{2n+1}$ ,
3. ou de la forme  $\varepsilon_{B^{2n}} \circ (f^{2n} \otimes B^{2n-1}) : A^{2n} \otimes B^{2n-1} \rightarrow I$ ,
4. ou de la forme  $\varepsilon_{A^{2n+1}} \circ (f^{2n+1} \otimes A^{2n}) : B^{2n+1} \otimes A^{2n} \rightarrow I$ ,
5. ou de la forme  $(A^{2n-1} \otimes f^{2n}) \circ \eta_{A^{2n}} : I \rightarrow A^{2n-1} \otimes B^{2n}$ ,
6. ou de la forme  $(B^{2n} \otimes f^{2n+1}) \circ \eta_{B^{2n+1}} : I \rightarrow B^{2n} \otimes A^{2n+1}$ ,

pour un certain morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ . Un morphisme primaire sera dit *vertical* lorsqu'il est de la forme 1 ou 2. Un morphisme sera dit *haut* lorsqu'il a  $I$  pour but et est une composée de morphismes de la forme  $A \otimes h \otimes B$ , où  $h$  est un morphisme de la forme 3 ou 4. Un morphisme sera dit *bas* lorsqu'il a  $I$  pour source et est une composée de morphismes de la forme  $A \otimes h \otimes B$ , où  $h$  est un morphisme de la forme 5 ou 6. Par induction sur la taille des morphismes, on peut montrer que tout morphisme de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est exprimable comme un produit tensoriel de morphismes verticaux, hauts et bas et que deux écritures représentant un même morphisme peuvent être montrées égales en n'utilisant que les axiomes des catégories monoïdales (i.e. sans utiliser les axiomes liés à la présence d'objets duaux), ce qui permet de conclure.  $\square$

La propriété suivante montre que dans une catégorie avec duaux, il n'est pas restrictif de se restreindre aux morphismes dont le type est de la forme  $I \rightarrow A$ .

**Propriété 5.37.** *Dans toute catégorie avec duaux stricte  $\mathcal{C}$ , pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , l'ensemble de morphisme  $\mathcal{C}(A, B)$  est naturellement isomorphe par une bijection  $\phi_{A,B}$  à l'ensemble  $\mathcal{C}(I, A^{-1} \otimes B)$ . Par « naturellement », on entend ici que cette bijection transporte tout diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & B \\
 h_A \uparrow & & \downarrow h_B \\
 A' & \xrightarrow{f} & B'
 \end{array} & \text{en} & \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\phi_{A,B}(g)} & A^{-1} \otimes B \\
 \parallel & & \downarrow h_A^{-1} \otimes h_B \\
 I & \xrightarrow{\phi_{A,B}(f)} & (A')^{-1} \otimes B'
 \end{array}
 \end{array}$$

Diagrammatiquement,

$$\phi_{A,B} = \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ \textcircled{f} \\ \downarrow \\ B \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \textcircled{f} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ A^{-1} \quad B \end{array}$$

Étant donnée une catégorie monoïdale stricte  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  considérons maintenant la multicatégorie de multicontextes  $\mathcal{K}(\mathcal{D}(\mathcal{C}))$  sur la catégorie libre avec duaux  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  sur  $\mathcal{C}$ . Ses objets sont de la forme  $A \rightarrow B$ , où  $A$  et  $B$  sont des objets de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Par la propriété précédente, nous allons nous restreindre aux objets de la forme  $I \rightarrow A$  pour définir la multicatégorie des régions.

**Définition 5.38** (Multicatégorie des régions). Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  une catégorie monoïdale stricte. La multicatégorie des régions  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  est la sous-multicatégorie de la multicatégorie  $\mathcal{K}(\mathcal{D}(\mathcal{C}))$  dont les objets ont des types de la forme  $I \rightarrow A$ , que nous noterons simplement  $A$ .

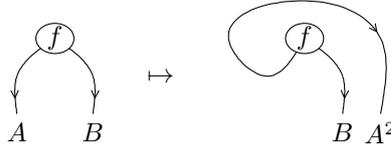
Si  $\mathfrak{S}$  est une signature monoïdale, nous noterons  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$  la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , où  $\mathcal{C}$  est la catégorie monoïdale stricte générée par la signature  $\mathfrak{S}$ .

Dans toute telle multicatégorie de régions, on peut identifier les morphismes suivants.

- *Rotations.* Pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , le morphisme de rotation anti-horaire  $\rho_{A,B}^+ : A \otimes B \rightarrow B \otimes A^2$  est la fonction qui à tout morphisme  $f : A \otimes B$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  associe le morphisme

$$\rho_{A,B}^+(f) = (\varepsilon_{A^1} \otimes B \otimes A^2) \circ (A^1 \otimes f \otimes A^2) \circ \eta_{A^2}$$

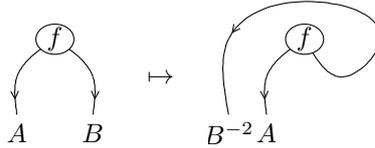
de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Graphiquement,



De même, la rotation horaire  $\rho_{A,B}^- : A \otimes B \rightarrow B^{-2} \otimes A$  est la fonction qui à tout morphisme  $f : A \otimes B$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  associe le morphisme

$$\rho_{A,B}^-(f) = (B^{-2} \otimes A \otimes \varepsilon_B) \circ (B^{-2} \otimes f \otimes B^{-1}) \circ \eta_{B^{-1}}$$

de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Graphiquement,



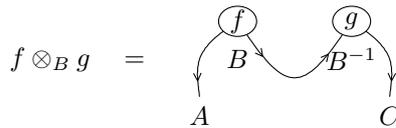
- *Coupure.* Pour tous objets  $A$ ,  $B$  et  $C$ , la coupure sur  $B$ , notée

$$\otimes_B : A \otimes B, B^{-1} \otimes C \rightarrow A \otimes C$$

est le morphisme qui à tout morphisme  $f : A \otimes B$  et  $g : B^{-1} \otimes C$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  associe le morphisme

$$f \otimes_B g = (A \otimes \varepsilon_B \otimes C) \circ (f \otimes g)$$

de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Graphiquement,



**Propriété 5.39.** *Les morphismes de rotation satisfont les propriétés suivantes.*

1. Pour tous objets  $A$  et  $B$ , la rotation  $\rho_{A,B}^+$  est inversible d'inverse  $\rho_{B,A^2}^-$ .
2. Pour tous objets  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on a

$$\rho_{A \otimes B, C}^+ = \rho_{B, C \otimes A^2}^+ \circ \rho_{A, B \otimes C}^+ \quad \text{et} \quad \rho_{A, B \otimes C}^- = \rho_{C^{-1} \otimes A, B}^- \circ \rho_{A \otimes B, C}^-$$

3. Pour tout objet  $A$ , on a

$$\rho_{I, A}^+ = \text{id}_A \quad \text{et} \quad \rho_{A, I}^- = \text{id}_A$$

Par extension, nous nous autoriserons parfois dans la suite à être légèrement informels et utiliserons la notation de la coupure pour la fonction qui à toute paire de morphismes  $f : A \otimes B \otimes C$  et  $g : D \otimes B^{-1} \otimes E$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  associe le morphisme  $f \otimes_B g : C^{-2} \otimes A \otimes E \otimes D^2$  défini par

$$f \otimes_B g = (\rho_{A \otimes B, C}^- \circ f) \otimes_B (\rho_{D, B^{-1} \otimes E}^+ \circ g)$$

et plus généralement, afin d'alléger les notations, nous omettrons parfois des compositions avec les rotations lorsqu'elles peuvent être devinées à l'aide du type des morphismes.

**Propriété 5.40.** *Les morphismes de coupure satisfont les propriétés suivantes.*

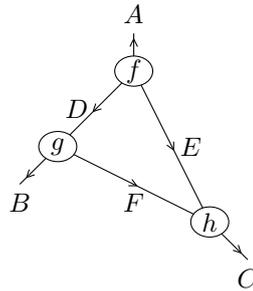
1. Associativité. Pour tous objets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  et tous morphismes

$$f : A \otimes D \otimes E, \quad g : D^{-1} \otimes B \otimes F \quad \text{et} \quad h : E^{-1} \otimes F^{-1} \otimes C$$

de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ , on a

$$(f \otimes_D g) \otimes_{F \otimes E} h = f \otimes_{D \otimes E} (g \otimes_F h)$$

Graphiquement, la composée



est définie de façon unique.

2. Unité. Pour tous objets  $A$  et  $B$  et tout morphisme  $f : A^{-1} \otimes B$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ , on a

$$A \otimes_A f = f \otimes_B B^{-1}$$

3. Coupure et composition. Pour tous objets  $A, B$  et  $C$  et toute paire de morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ , on a

$$\phi_{A,C}(g \circ f) = \phi_{A,B}(f) \otimes_B \phi_{B,C}(g)$$

où  $\phi$  est l'isomorphisme introduit à la Propriété 5.37.

4. Coupure et produit tensoriel. Pour tous objets  $A, B, C$  et  $D$  et toute paire de morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ , on a

$$\phi_{A \otimes C, B \otimes D}(f \otimes g) = \rho_{A^{-1} \otimes B \otimes C, D^1}^-(\phi_{A,B}(f) \otimes_I \rho_{C,D}^+(\phi_{C,D}(g)))$$

où  $\phi$  est l'isomorphisme introduit à la Propriété 5.37.

Nous introduisons enfin deux constructions de la catégorie  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 5.41** (Phagocytose). Dans toute multicatégorie de régions  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , on définit l'opération de *phagocytose* selon  $C$ , notée  $\pi_{A,C}$ , qui à tout morphisme

$$f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B \otimes C^1 \otimes A \otimes C$$

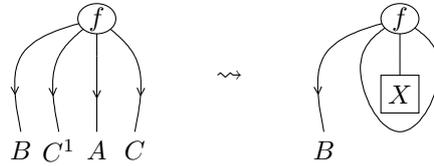
associe le morphisme

$$\pi_{A,C}(f) : A_1, \dots, A_n, A^{-1} \rightarrow B$$

défini par

$$\pi_{A,C}(f) = f \otimes_{C^1 \otimes A \otimes C} \rho_{A^{-1} \otimes C, C^1}^-(\text{id}_{A^{-1}} \otimes_I \phi_{C^1, C^1}(C^1))$$

Graphiquement,



**Définition 5.42** (Compartimentation). Dans toute multicatégorie de régions  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , on définit le morphisme de *compartimentation* selon  $C$

$$\chi_{A,C,B} : A, B \rightarrow A \otimes C^{-1} \otimes B \otimes C$$

défini par

$$\chi_{A,C,B} = f, g \mapsto f \otimes_I (\rho_{C^{-2}, B}^+(\phi_{C^{-1}, C^{-1}}(C^{-1}) \otimes_I g))$$

Diagrammatiquement,

$$\chi_{A,C,B}(f, g) = \begin{array}{c} \text{f} \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} \text{g} \\ | \\ C \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \\ | \\ C \end{array}$$

En particulier, tout morphisme  $f : A_1, \dots, A_n, C^{-1} \otimes A \otimes C \otimes B \rightarrow D$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$  induit un morphisme  $f' : A_1, \dots, A_n, A, B \rightarrow D$  par précomposition avec le morphisme de compartimentation.

La propriété suivante montre qu'il existe en un certain sens un plongement plein et fidèle d'une catégorie monoïdale stricte dans sa catégorie des régions.

**Propriété 5.43.** *Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  une catégorie monoïdale stricte. Cette catégorie est isomorphe à la catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{D}$  dont*

- les objets sont les objets de  $\mathcal{C}$ ,
- les morphismes  $f : A \rightarrow B$  sont les morphismes

$$f : \quad \rightarrow \quad A^{-1} \otimes B$$

de la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ,

- la composition de deux morphismes de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  est définie par  $g \circ f = f \otimes_B g$ ,
- le tenseur de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  est défini par  $f \otimes g = f \otimes_I g$ .

*Démonstration.* Le fait que  $\mathcal{D}$  soit bien une catégorie découle des propriétés d'associativité et d'unité de la Propriété 5.40. Par définition de la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ , il est facile de se convaincre que la Propriété est équivalente à montrer que le plongement évident de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est plein et fidèle, ce que nous avons montré à la Propriété 5.36.  $\square$

Cette propriété nous permet de généraliser la notion d'unificateur de deux morphismes de la catégorie monoïdale générée par la signature  $\mathfrak{S}$  :

**Définition 5.44** (Unificateur). Un *unificateur*

$$(\kappa_1, \kappa_2) : A_1, \dots, A_n \rightarrow C$$

de deux morphismes de la catégorie monoïdale générée par une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$ , vus comme des morphismes nullaires

$$\phi : \rightarrow A \quad \text{et} \quad \psi : \rightarrow B$$

de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ , est une paire de morphismes

$$\kappa_1 : A_1, \dots, A_n, A \rightarrow C \quad \text{et} \quad \kappa_2 : A_1, \dots, A_n, B \rightarrow C$$

tels que

$$\kappa_1 \circ (\text{id}_{A_1}, \dots, \text{id}_{A_n}, \phi) = \kappa_2 \circ (\text{id}_{A_1}, \dots, \text{id}_{A_n}, \psi)$$

Cet unificateur  $(\kappa_1, \kappa_2)$  est *minimal* lorsque pour tout autre unificateur  $(\kappa'_1, \kappa'_2)$ ,

- si  $\kappa'$  est un morphisme tel que

$$\kappa_1 = \kappa'_1 \circ \kappa'_1 \quad \text{et} \quad \kappa_2 = \kappa'_2 \circ \kappa'_2$$

alors  $\kappa'$  est l'identité sur  $C$ ,

- si  $\phi_1, \dots, \phi_m$  sont des morphismes tels que

$$\kappa_1 = \kappa'_1(\phi_1, \dots, \phi_m, \text{id}) \quad \text{et} \quad \kappa_2 = \kappa'_2(\phi_1, \dots, \phi_m, \text{id})$$

alors ces morphismes  $\phi_i$  sont des identités de la multicatégorie.

Cet unificateur est *trivial* lorsqu'il existe un morphisme

$$\kappa : A_1, \dots, A_n, A, B \rightarrow C$$

tel que

$$\kappa_1 = \kappa \circ (\text{id}_{A_1}, \dots, \text{id}_{A_n}, \text{id}_A, \psi) \quad \text{et} \quad \kappa_2 = \kappa \circ (\text{id}_{A_1}, \dots, \text{id}_{A_n}, \phi, \text{id}_B)$$

*Remarque 5.45.* La définition précédente peut être généralisée pour définir une notion d'unificateur de deux morphismes quelconques de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ .

De même, la notion de système de réécriture monoïdal sur une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  peut être généralisée à ce nouveau cadre (ainsi que la notion de paire critique, etc.) : les règles deviennent des paires  $\phi \Longrightarrow \psi$  de morphismes parallèles de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ .

*Remarque 5.46.* Un système de réécriture sur une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  peut être confluent sans que tous ses unificateurs minimaux non triviaux dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$  soient joignables dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ . Bien sûr tous ses unificateurs minimaux non triviaux dans la catégorie monoïdale stricte générée par  $\mathfrak{S}$  le seront. C'est par exemple le cas pour le système de réécriture naturel associé à la théorie des symétries [Laf03] : la paire critique induite par le morphisme (5.4) n'est pas confluite. Voir aussi l'exemple traité à la Section 5.5.

Ce phénomène est bien connu en réécriture : un système de réécriture peut être confluent sur les termes clos, sans pour autant l'être sur les termes ouverts. C'est par exemple le cas dans certains  $\lambda$ -calculs avec substitutions explicites [ACCL89]. Ici, les bords jouent le rôle des variables ouvertes (parfois encore appelées métavariabes) familières en réécriture de termes. On peut donc rencontrer ce phénomène avec des « variables d'entrée » ainsi qu'avec des « variables de sortie » dans nos systèmes de réécriture.

### 5.4.3 Multicatégories de régions de réseaux

La construction de la catégorie des réseaux symétriques sur une signature monoïdale  $\mathfrak{S} = (E_1, s_1, t_1, E_2)$  peut être adaptée afin de construire « concrètement » la multicatégorie des régions de la catégorie monoïdale symétrique libre sur la signature monoïdale  $\mathfrak{S}$ , en vue de l'implémentation d'un algorithme d'unification.

Commençons par adapter certaines des constructions faites précédemment dans un cadre « avec deux ». Si  $E$  est un ensemble, le *monoïde avec deux libre*  $(E^*, \otimes, I)$  sur  $E$  est le monoïde dont les éléments sont les mots sur  $E$   $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ , parfois vus comme des fonctions  $\lambda_A : |A| \rightarrow E$ , munis d'une fonction d'*orientation*  $\theta_A : |A| \rightarrow \mathbb{Z}$ . Une signature monoïdale avec deux  $\mathfrak{T}$  est un triplet  $(E_1, b_1, E_2)$ , où  $E_1$  est un ensemble de 1-générateurs,  $E_1^*$  est le monoïde avec deux libres sur  $E_1$  et  $E_2$  est un ensemble de 2-générateurs et  $b_1 : E_2 \rightarrow E_1^*$  associe à tout 2-générateur son *bord*. Nous noterons parfois  $f : A$  pour indiquer que  $f$  est un 2-générateur de bord  $A$ . En particulier, la signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  induit une signature monoïdale avec deux  $(E_1, b_1, E_2)$ , où le bord de tout 2-générateur  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathfrak{S}$  est  $A^{-1} \otimes B$ . Dans la suite, nous noterons encore  $\mathfrak{S}$  la signature monoïdale avec deux associée à  $\mathfrak{S}$ .

Nous considérerons dans cette section une variante des réseaux de la Section 5.3.1. Un réseau  $\phi$  est

$$\phi = (C_1^\phi, \lambda_1^\phi, \beta^\phi, C_2^\phi, \lambda_2^\phi)$$

où  $C_1^\phi$  est un ensemble fini de ports,  $C_2^\phi$  est un ensemble fini de cellules, les fonctions  $\lambda_1^\phi : C_1^\phi \rightarrow E_1$  et  $\lambda_2^\phi : C_2^\phi \rightarrow E_2$  sont des fonctions d'étiquetage et la fonction  $\beta^\phi : C_2^\phi \rightarrow (C_1^\phi)^*$  associe à toute cellule une liste orientée de ports, son *bord*. Un port est une *entrée* lorsque son orientation est impaire et une *sortie* lorsque son orientation est paire. Les réseaux doivent satisfaire des conditions de cohérence similaires à celles requises à la Définition 5.19 pour les réseaux symétriques.

Notons  $\overline{\mathfrak{S}}$  la signature monoïdale avec duaux obtenue en ajoutant à  $\mathfrak{S}$  une infinité dénombrable de 2-générateurs  $x^A : A$ , appelés *variables*, pour tous éléments  $A$  du monoïde avec duaux libre sur  $E_1$ . Un réseau avec variables linéaires sur  $\overline{\mathfrak{S}}$  est un réseau sur la signature  $\overline{\mathfrak{S}}$  dans lequel une variable apparaît au plus une fois. L'ensemble des variables apparaissant dans un tel réseau  $\phi$  est noté  $\text{FV}(\phi)$  et ses éléments sont appelés *variables libres* de  $\phi$ . Les réseaux sont considérés à renommage des variables libres près.

**Définition 5.47** (Multicatégorie des régions des réseaux symétriques). La *multicatégorie des régions des réseaux symétriques* sur la signature monoïdale  $\mathfrak{S}$ , notée  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$ , est définie de la façon suivante. Ses objets  $A$  sont les éléments du monoïde avec duaux libre sur  $E_1$ . Les morphismes de  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$  sont les triplets

$$(s_1^\phi, \dots, s_n^\phi, \phi, t^\phi) : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$$

où

$$\phi = (C_1^\phi, \lambda_1^\phi, \beta_1^\phi, C_2^\phi, \lambda_2^\phi)$$

est un réseau avec variables linéaires, dont les variables libres sont  $x^{A_1}, \dots, x^{A_n}$  (dans cet ordre) et

$$s_i^\phi : |A_i| \rightarrow C_1^\phi \quad \text{et} \quad t^\phi : |B| \rightarrow C_1^\phi$$

sont des fonctions, où chacune des  $s_i^\phi$  est une bijection de  $|A_i|$  dans le bord de la variable  $x^{A_i}$ , et  $t^\phi$  est une bijection de  $|B|$  dans l'ensemble des ports libres de  $\phi$ . Ces fonctions doivent bien sûr être compatibles avec le typage. La composition est donnée par la substitution des variables par les arguments et l'identité  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  est le réseau contenant une variable  $x^A$  comme unique cellule.

De façon similaire à la définition de la catégorie des réseaux avec unités symétriques  $\mathcal{R}_u(\mathfrak{S})$  sur une signature  $\mathfrak{S}$ , nous définissons la multicatégorie des régions des réseaux avec unités commutatives  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$  sur une signature  $\mathfrak{S}$  comme la plus petite sous-multicatégorie de la multicatégorie  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$  telle que

- pour tout 2-générateur  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathfrak{S}$ , le morphisme de  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$  correspondant  $\phi_{A,B}(f) : \rightarrow A^{-1} \otimes B$  est dans  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$  (ici,  $\phi_{A,B}$  désigne la bijection de la Propriété 5.37),
- pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , les morphismes  $\rho_{A,B}^+$  et  $\rho_{A,B}^-$  de  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$  sont dans  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ ,
- pour tous objets  $A$ ,  $B$  et  $C$ , le morphisme  $\otimes_B : A \otimes B, B^{-1} \otimes C \rightarrow A \otimes C$  de  $\mathcal{M}_s(\mathfrak{S})$  est dans  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ .

Là encore, la multicatégorie  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$  est « presque » équivalente à la multicatégorie des régions  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ . En effet, le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{M}(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$  est plein. Il est de plus injectif sur les morphismes *connexes* – la Définition 5.25 de connexité peut être étendue de façon immédiate aux morphismes de la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ . La plupart des morphismes à unifier en pratique sont connexes, par exemple tous les membres gauche des règles de réécriture des Figures 5.2 et 5.3 le sont. On peut de plus montrer que les unificateurs minimaux non triviaux de deux morphismes connexes sont connexes. Nous formulerons donc notre algorithme d'unification dans ce cadre. Nous étudions en ce moment la possibilité d'une construction d'une multicatégorie de réseaux équivalente à la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ , en nous inspirant de la construction de la catégorie  $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ .

#### 5.4.4 Un algorithme d'unification

Dans la suite, nous supposons fixée une signature monoïdale  $\mathfrak{S}$  et notons  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  la catégorie monoïdale stricte libre qu'elle génère. Nous décrivons un algorithme d'unification permettant de calculer l'ensemble des unificateurs minimaux non triviaux de deux morphismes connexes  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : C \rightarrow D$  de  $\mathcal{C}$ , en généralisant à notre cadre l'algorithme classique d'unification de termes par transformation [Rob65, BN99]. Le cadre est proche des systèmes de réécriture de graphes [PH96], mais les graphes manipulés ici sont orientés (les ports sont des entrées ou des sorties) et planaires, ce qui rend nécessaire l'introduction du formalisme des régions. Comme nous l'avons expliqué à la section précédente, nous allons calculer ces unificateurs à l'intérieur de la multicatégorie  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ . Si  $(\kappa_1, \kappa_2) : A_1, \dots, A_n \rightarrow C \otimes D$  est un unificateur des morphismes

$$\phi : \rightarrow A^{-1} \otimes B \quad \text{et} \quad \psi : \rightarrow C^{-1} \otimes D$$

alors  $(\rho_{C,D}^+ \circ \kappa_1, \rho_{C,D}^+ \circ \kappa_2)$  et  $(\rho_{C,D}^- \circ \kappa_1, \rho_{C,D}^- \circ \kappa_2)$  sont aussi des unificateurs de  $\phi$  et  $\psi$ . Notre algorithme travaillera donc modulo rotation : il fournira (au moins) un morphisme par classe d'équivalence par rotation des unificateurs minimaux non triviaux.

L'algorithme va, de façon non déterministe, calculer un unificateur minimal non trivial  $(\kappa_1, \kappa_2) : A_1, \dots, A_n \rightarrow C$  des deux morphismes  $\phi$  et  $\psi$ , ou plus précisément des deux réseaux correspondants dans la multicatégorie  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ . L'ensemble des unificateurs minimaux non triviaux sera obtenu par la sémantique collectrice de l'algorithme. Nous nous autoriserons à renvoyer une valeur particulière ÉCHEC lorsqu'une branche du calcul ne produit pas d'unificateur. Nous allons adopter une présentation légèrement différente (mais équivalente) des unificateurs et nous allons calculer un morphisme  $\kappa : A_1, \dots, A_n \rightarrow C \otimes D$ , ainsi que des plongements  $\iota_1$  et  $\iota_2$  des réseaux  $\phi$  et  $\psi$  dans le réseau  $\kappa$ . Le morphisme  $\kappa_1$  (resp.  $\kappa_2$ ) pourra être déduit en « remplaçant » l'image de  $\iota_1$  (resp.  $\iota_2$ ) par une variable. Par un plongement, on entend ici un morphisme de réseaux dont les fonctions sur les ports et sur les cellules sont injectives. Le fait que l'unificateur soit non trivial signifie alors que les images de  $\iota_1$  et  $\iota_2$  sur les cellules ont une intersection non vide.

L'algorithme va construire une suite de réseaux  $\kappa_i$  qui va converger vers un unificateur minimal non trivial  $\kappa$ . Il va aussi construire une suite de relations  $R_i^p$  entre les ports de  $\psi$  et les ports de  $\kappa_i$ , et une suite de relations  $R_i^c$  entre les cellules de  $\psi$  et les cellules de  $\kappa_i$ ; ces relations vont converger vers des relations

induisant un plongement du réseau  $\psi$  dans le réseau  $\kappa$ . Il va enfin construire une suite de relations  $R_i^{p?}$  entre les ports orientés de  $\psi$  et les ports orientés de  $\kappa_i$ , et une suite de relations  $R_i^{c?}$  entre les cellules de  $\psi$  et les cellules de  $\kappa_i$ ; ces relations représentent les ports et les cellules qui doivent être unifiés, et l'algorithme s'arrête lorsqu'elles sont toutes les deux vides. L'algorithme débute en posant  $\kappa_0 = \phi$ ,  $R_0^p = \emptyset$ ,  $R_0^c = \emptyset$ ,  $R_0^{p?} = \emptyset$  et  $R_0^{c?} = \{(c, c')\}$ , où  $c$  est une cellule de  $\kappa_0$  et  $c'$  est une cellule de  $\psi$ , choisies de façon non déterministe.

À chaque étape, l'algorithme effectue la première des actions suivantes qui est applicable.

1. Si l'ensemble  $R_i^{c?}$  contient un élément  $(c, c')$  tel que les types de  $c$  et  $c'$  diffèrent, i.e.  $\lambda_2^\psi(c) \neq \lambda_2^{\kappa_i}(c')$ , alors l'algorithme renvoie ÉCHEC.
2. Si l'ensemble  $R_i^{c?}$  contient un élément  $(c, c')$  qui appartient à  $R_i^c$  alors on pose  $R_{i+1}^{c?} = R_i^{c?} \setminus \{(c, c')\}$  et les autres relations ainsi que  $\kappa$  restent inchangés.
3. Si l'ensemble  $R_i^{c?}$  contient un élément  $(c, c')$ , notons  $p_1^{\theta_1} \otimes \dots \otimes p_k^{\theta_k}$  les ports du bord de  $c$  et  $q_1^{\theta'_1} \otimes \dots \otimes q_k^{\theta'_k}$  les ports du bord de  $c'$ . On pose alors

$$R_{i+1}^{p?} = R_i^{p?} \cup \{(p_1^{\theta_1}, q_1^{\theta'_1}), \dots, (p_k^{\theta_k}, q_k^{\theta'_k})\}$$

ainsi que  $R_{i+1}^p = R_i^p$ ,  $R_{i+1}^c = R_i^c \cup \{(c, c')\}$ ,  $R_{i+1}^{c?} = R_i^{c?} \setminus \{(c, c')\}$  et  $\kappa_{i+1} = \kappa_i$ .

4. Si l'ensemble  $R_i^{p?}$  contient un élément  $(p^\theta, q^{\theta'})$  tel que les types de  $p$  et  $q$  diffèrent, i.e.  $\lambda_1^\psi(p) \neq \lambda_1^{\kappa_i}(q)$ , ou les orientations diffèrent, i.e.  $\theta \neq \theta'$ , alors l'algorithme renvoie ÉCHEC.
5. Si l'ensemble  $R_i^{p?}$  contient un élément  $(p^\theta, q^{\theta'})$  tel que  $(p, q)$  appartient à  $R_i^p$ , alors on pose  $R_{i+1}^{p?} = R_i^{p?} \setminus \{(p, q)\}$  et les autres relations ainsi que  $\kappa_i$  restent inchangés.
6. Si l'ensemble  $R_i^{p?}$  contient un élément  $(p^\theta, q^{\theta'})$ , on distingue plusieurs cas suivant les antécédents et les successeurs de  $p$  et  $q$  (l'antécédent d'un port est une cellule ayant ce port comme but, le successeur d'un port est une cellule ayant ce port comme source). On pose  $R_{i+1}^{c?} = R_i^{c?}$  et  $\kappa_{i+1} = \kappa_i$ . On commence par regarder les antécédents de  $p$  et  $p'$ .

(a) Si  $p$  n'a pas d'antécédent alors on ne fait rien.

(b) Sinon, on note  $d$  cet antécédent et  $p_1^{\theta_1} \otimes \dots \otimes p_n^{\theta_n} \otimes p^\theta$  son bord (à rotation près, on peut toujours supposer que  $p$  est en fin de bord).

i. Si  $p'$  a un antécédent  $d'$  qui n'est pas une variable, alors on ajoute  $(d, d')$  à l'ensemble  $R_{i+1}^{c?}$ .

ii. Si  $p'$  a un antécédent qui est une variable  $x$  dont le bord est  $q_1^{\theta'_1} \otimes \dots \otimes q_n^{\theta'_n} \otimes p^\theta$  alors, de façon non déterministe, on effectue l'une des deux actions suivantes.

A. On remplace  $x$  par le morphisme  $\xi$  dans le morphisme  $\kappa_{i+1}$ , constitué de deux cellules  $c_1$  et  $c_2$ , où  $c_1$  est une variable ayant

$$q_1^{\theta'_1} \otimes \dots \otimes q_n^{\theta'_n} \otimes p_n^{\theta_n-1} \otimes \dots \otimes p_1^{\theta_1-1}$$

pour bord et  $c_2$  est une cellule de même type que  $d$  et de bord  $p_1^{\theta_1} \otimes \dots \otimes p_n^{\theta_n} \otimes p^\theta$ , et on pose  $R_{i+1}^{c_2} = R_{i+1}^{c_1} \cup \{(d, c_2)\}$ .

- B. On « compartimente  $x$  selon  $p$  » en quotientant les ports de  $\kappa_{i+1}$  par l'égalité  $p = q_i^{\theta-1}$ , où  $q_i$  est un port de même type que  $p$  choisi de façon non déterministe, et en remplaçant  $x$  par deux variables  $x_1$  de bord  $q_1 \otimes \dots \otimes q_{i-1}$  et  $x_2$  de bord  $q_{i+1} \otimes \dots \otimes q_n$ . On reprend alors à l'étape (b) avec le nouveau  $k_{i+1}$  est les relations inchangées, excepté le même quotient  $p = q_i^{\theta-1}$ .
- iii. Si  $p'$  n'a pas d'antécédent alors on note  $q_1^{\theta'_1} \otimes \dots \otimes q_n^{\theta'_n} \otimes p^\theta$  le bord de  $\kappa_i$  et, de façon non déterministe, on effectue l'une des deux actions suivantes.
  - A. On compose  $\kappa_{i+1}$  avec le réseau correspondant à la cellule  $d$  sur le port  $p$ , et on pose  $R_{i+1}^{c_2} = R_{i+1}^{c_1} \cup \{(d, d)\}$ .
  - B. On « effectue une phagocytose de  $\kappa$  » selon  $p$  avec un port  $q_i^{\theta+1}$  de même type que  $p$  choisi de façon non déterministe et on reprend à l'étape (b).

On traite ensuite les successeurs de  $p$  et  $p'$  de façon similaire. Enfin, si on n'est pas déjà passé à l'étape suivante, on pose  $R_{i+1}^{p'} = R_i^{p'} \setminus \{(p, p')\}$ ,  $R_{i+1}^p = R_i^p \cup \{(p, p')\}$  et la relation  $R^c$  reste inchangée.

7. Si les relations  $R^{p'}$  et  $R^{c_2}$  ne sont pas vides alors l'algorithme renvoie ÉCHEC.
8. Si les relations  $R^p$  et  $R^c$  ne sont pas des fonctions injectives, on renvoie ÉCHEC.
9. Sinon, on revoie la cellule  $\kappa$ , ainsi que le plongement induit par  $R^p$  et  $R^c$  de  $\psi$  dans  $\kappa$ .

Le morphisme  $\kappa_0$  étant  $\phi$ , le morphisme  $\phi$  se plonge de façon triviale dans  $\kappa_0$ . On peut vérifier par induction que ce plongement induit un plongement de  $\phi$  dans tous les  $\kappa_i$ .

Par exemple, le morphisme de gauche de (5.9) peut être représenté par le réseau  $\phi$  défini par

$$C_1^\phi = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \quad C_2^\phi = \{c_0, c_1, c_2\}$$

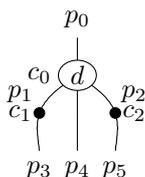
et

$$\lambda_1^\phi(p_i) = 1 \quad \lambda_2^\phi(c_0) = d \quad \lambda_2^\phi(c_1) = \lambda_2^\phi(c_2) = s$$

et

$$\beta_1^\phi(c_0) = p_0^{-1} \otimes p_1 \otimes p_4 \otimes p_2 \quad \beta_1^\phi(c_1) = p_1^{-1} \otimes p_3 \quad \beta_1^\phi(c_2) = p_2^{-1} \otimes p_5$$

Diagrammatiquement,



De même, le morphisme de droite de (5.9) peut être représenté par le réseau  $\psi$  défini par

$$C_1^\phi = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \quad C_2^\phi = \{d_0, d_1, d_2\}$$

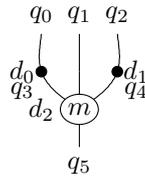
et

$$\lambda_1^\phi(q_i) = 1 \quad \lambda_2^\phi(d_0) = \lambda_2^\phi(d_1) = s \quad \lambda_2^\phi(d_2) = m$$

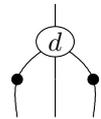
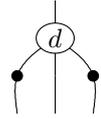
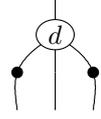
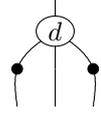
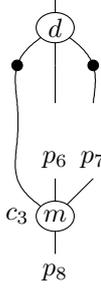
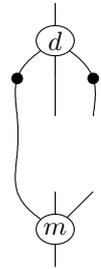
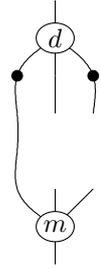
et

$$\beta_1^\phi(d_0) = q_0^{-1} \otimes q_3 \quad \beta_1^\phi(d_1) = q_2^{-1} \otimes q_4 \quad \beta_1^\phi(d_2) = q_4^{-1} \otimes q_1^{-1} \otimes q_3^{-1} \otimes q_5$$

Diagrammatiquement,



Montrons quelques étapes de l'exécution de l'algorithme partant du réseau  $\kappa_0 = \phi$  et de la relation  $R_0^{c_1} = \{(d_0, c_1)\}$ .

règle	$i$	$\kappa_i$	$R_i^p$	$R_i^c$	$R_i^{p?}$	$R_i^{c?}$
	0		$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(d_0, c_1)\}$
3.	1		$\emptyset$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_0, p_1), (q_3, p_3)\}$	$\emptyset$
6.a.	2		$\emptyset$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$
2.	3		$\emptyset$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_3, p_3)\}$	$\emptyset$
6.	4		$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\emptyset$	$\{(d_0, c_1), (d_2, c_3)\}$
2.	5		$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\emptyset$	$\{(d_2, c_3)\}$
3.	6		$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_4, p_7), (q_1, p_6), (q_5, p_8)\}$	$\emptyset$

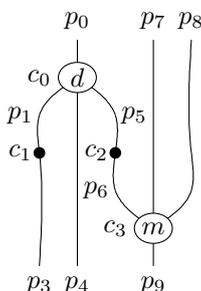
règle	$i$	$\kappa_i$	$R_i^P$	$R_i^c$	$R_i^{P?}$	$R_i^{c?}$
6.b.iii.B	7		$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_4, p_7), (q_1, p_6), (q_5, p_8)\}$	$\emptyset$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

À l'étape 7, de façon non déterministe, l'algorithme peut aussi s'exécuter de la façon suivante :

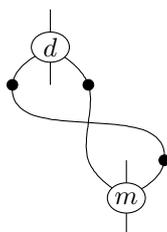
règle	$i$	$\kappa_i$	$R_i^P$	$R_i^c$	$R_i^{P?}$	$R_i^{c?}$
6.b.iii.A	7		$\{(q_3, p_3)\}$	$\{(d_0, c_1)\}$	$\{(q_1, p_6), (q_5, p_8)\}$	$\{(d_2, c_3), (d_1, c_4)\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Pour simplifier la présentation, nous n'avons pas mentionné le typage dans l'exemple ci-dessus, sur les ports en particulier. Celui-ci est cependant important, car il permet d'éviter à l'algorithme de produire des réseaux qui ne correspondent à aucun morphisme de la multicatégorie  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ . Par exemple, lors de

l'unification des réseaux  $\phi$  et  $\psi$ , partant de  $R_0^{c_2} = \{(d_0, c_2)\}$ , l'algorithme peut aboutir, à une étape  $i$ , au morphisme  $\kappa_i$  suivant :



de type  $1^{-1} \otimes 1^{-1} \otimes 1^{-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$ . Le typage empêche alors de faire une étape de phagocytose (6.b.iii.B) qui aboutirait à un réseau



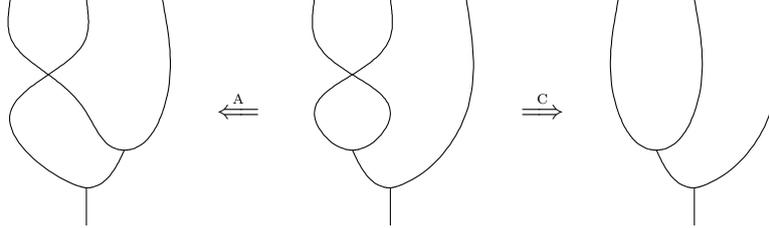
qui n'est pas un morphisme de la multicatégorie  $\mathcal{M}_u(\mathfrak{S})$ .

La preuve de la correction de l'algorithme que nous avons proposé, ainsi que l'étude des diverses variantes et optimisations possibles est laissée pour des travaux futurs.

## 5.5 Présentation localement confluente de $\mathbf{Mat}(\mathbb{N})$

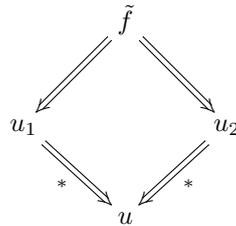
Notons  $\mathfrak{B}$  la théorie des bigèbres bicommutatives et  $\mathbb{B} = \mathbf{Mat}(\mathbb{N}) = \mathcal{B}/\equiv$  la catégorie monoïdale stricte générée par cette théorie, où  $\mathcal{B}$  est la catégorie monoïdale stricte générée par la signature monoïdale  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$  sous-jacente et  $\equiv$  est la congruence monoïdale générée par les relations de la théorie. Les équations de cette théorie peuvent être naturellement orientées de la façon décrite en haut de la Figure 5.2, dans l'espoir d'obtenir un système de réécriture *fini et normalisant*. Cette orientation est en particulier une généralisation de celle proposée par Lafont pour la théorie des monoïdes commutatifs [Laf03]. Le système de réécriture ainsi obtenu n'est pas confluente. Afin de le transformer en un système de réécriture localement confluente, une méthode usuelle en réécriture consiste à effectuer une complétion de Knuth-Bendix du système de réécriture [KB70, BN99], en ajoutant au système des règles obtenues à partir des morphismes apparaissant

dans les paires critiques. Par exemple, le morphisme



peut être réécrit soit par la règle A, soit par la règle C, et donner lieu à la règle SA de la complétion (voir Figure 5.3). Cependant, les paires critiques du système sont en nombre infini (si on les calcule dans la catégorie  $\mathcal{B}$ , au sens de la Définition 5.9) et génèrent un nombre infini de nouvelles règles par complétion. Plutôt que de calculer ces paires critiques dans la catégorie  $\mathcal{B}$ , on peut les calculer dans la multicatégorie  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$  ce qui génère un nombre fini de paires critiques. La complétion du système de réécriture initial permet alors de compléter le système de réécriture de la Figure 5.2 par les règles de la Figure 5.3, obtenant ainsi un système de réécriture fini dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ .

Le système de réécriture ainsi obtenu n'est pas confluente dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ . Par exemple, le morphisme correspondant à la famille de morphismes (5.4) induit une paire critique (la règle YB peut être appliquée à deux positions différentes) qui n'est pas confluente. Le système de réécriture est cependant localement confluente sur les morphismes de  $\mathbb{B}$  dans le sens suivant (voir aussi la Remarque 5.46). Par les Propriétés 5.37 et 5.43, tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{B}$  induit un morphisme  $\tilde{f} : A^{-1} \otimes B$  de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ . Si ce morphisme se réécrit (dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ ), en une étape de réécriture, en un morphisme  $u_1 : A^{-1} \otimes B$  d'une part, et en un morphisme  $u_2 : A^{-1} \otimes B$  d'autre part, alors les morphismes  $u_1$  et  $u_2$  se réécrivent tous deux, en un nombre quelconque d'étapes de réécriture, en un même morphisme  $u$ . Diagrammatiquement,



Les morphismes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u$  étant tous trois de type  $A^{-1} \otimes B$ , ces morphismes sont les images de morphismes  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g$  de type  $A \rightarrow B$  de  $\mathcal{B}$  par le plongement de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$  de la Propriété 5.43.

Afin de montrer la confluence locale du système, telle que nous l'avons définie, il faut montrer le lemme suivant, décrivant les générateurs apparaissant « à gauche » des morphismes de la catégorie  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 5.48.** *Pour tout morphisme  $\xi$  de la catégorie  $\mathcal{B}$ , il existe un morphisme  $\phi$  (et éventuellement un morphisme  $\psi$ ) tel que  $\xi$  se réécrive en un morphisme de l'une des formes présentées à la Figure 5.4.*

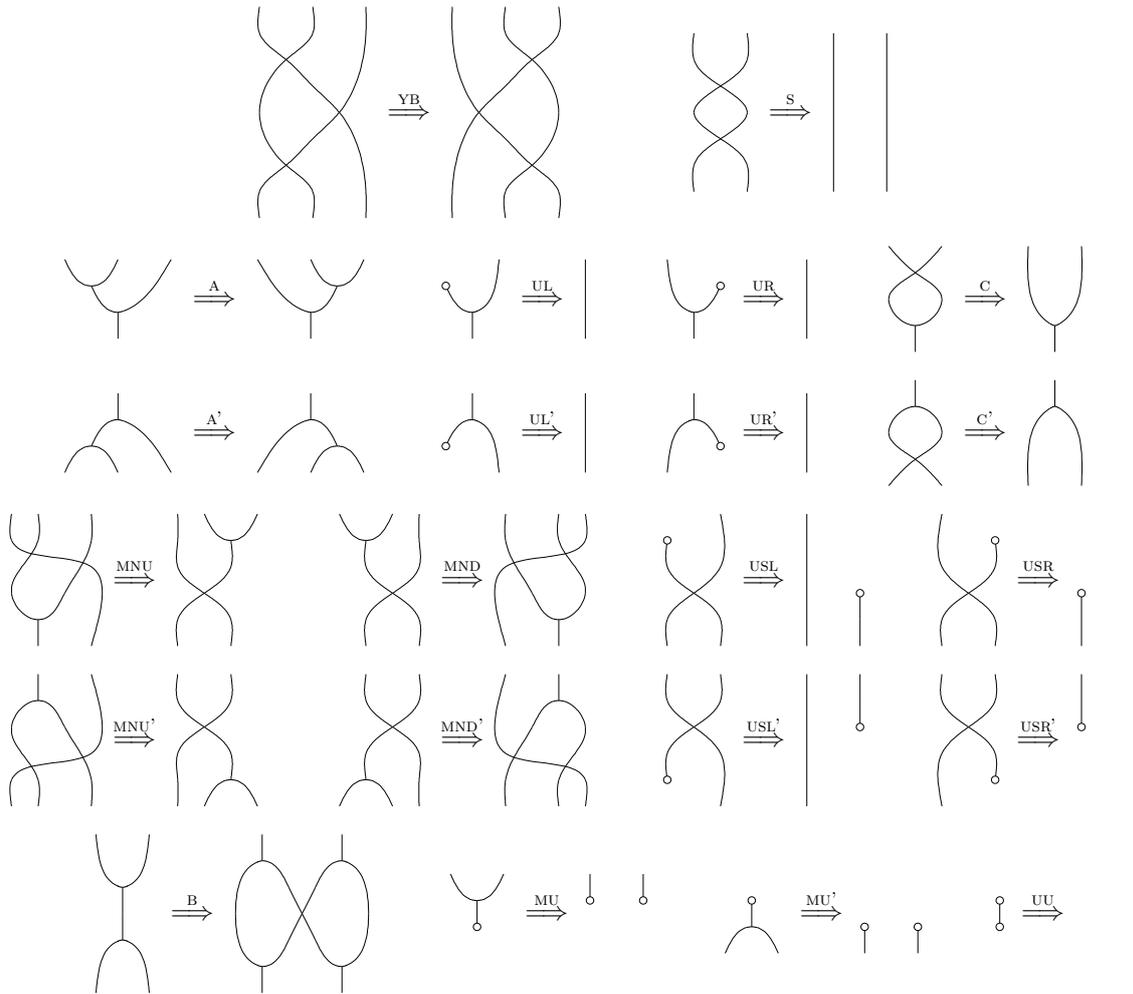


FIGURE 5.2 : Orientation des relations de la théorie des bigèbres bicommutatives.

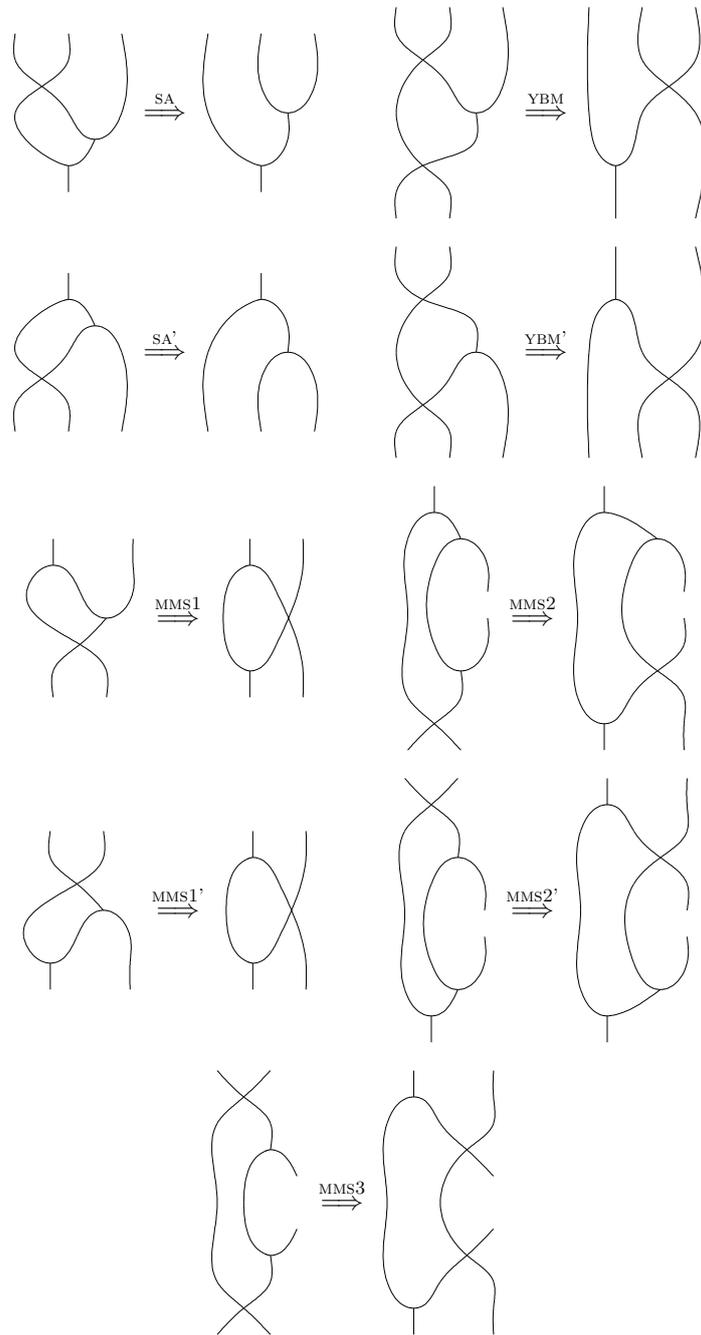


FIGURE 5.3 : Règles obtenues par complétion des règles de la théorie des bigèbres bicommutatives.

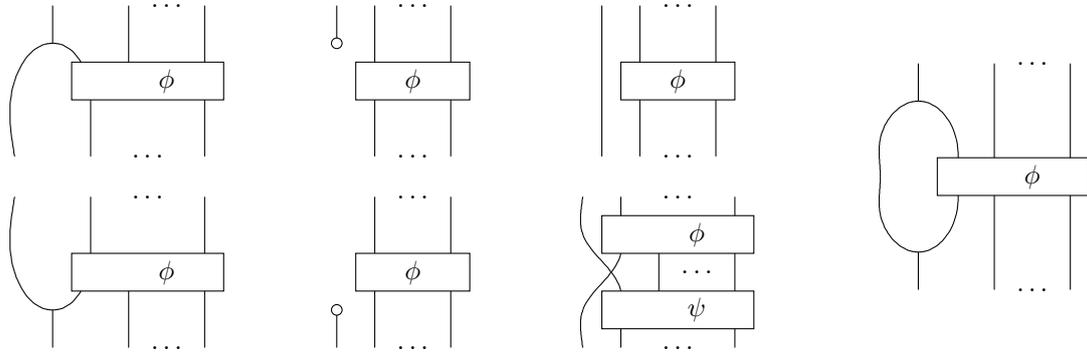
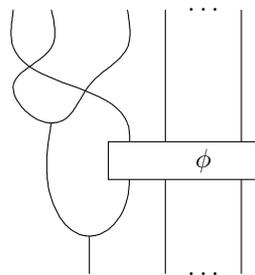


FIGURE 5.4 : Forme générale des morphismes réduits.

La confluence locale du système peut alors être prouvée en calculant toutes les paires critiques, ce qui peut être fait à l’aide de l’algorithme de la section précédente. Si une paire critique a un type de la forme  $A^{-1} \otimes B$  alors on peut directement montrer qu’elle est joignable. Dans le cas contraire, on montre que toutes les paires critiques induites dans  $\mathcal{B}$  par la paire critique de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$  sont joignables en utilisant le Lemme 5.48, utilisant ainsi une technique similaire à celle de [Laf03]. Par exemple, considérons la paire critique

(5.13)

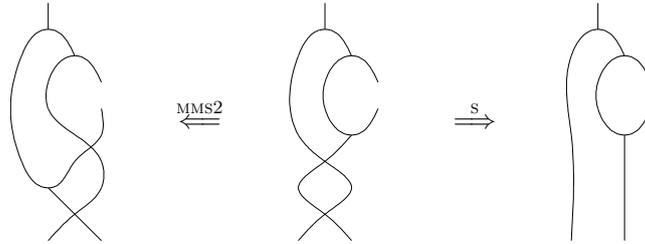
On ne peut pas montrer directement la confluence de cette paire critique. Cependant, pour montrer la confluence locale du système de réécriture, il nous suffit de montrer que pour tout morphisme  $\phi$ , les deux réécritures possibles du morphisme



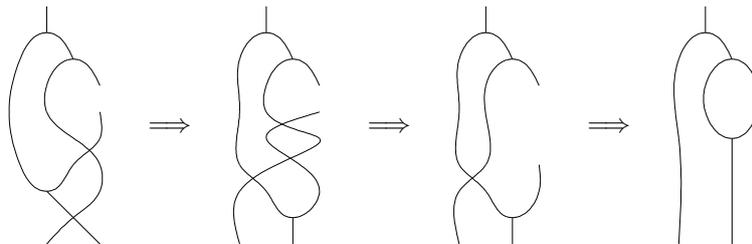
induites par la paire critique sont confluentes. On peut alors se ramener à des

morphismes  $\phi$  de la forme donnée par le Lemme 5.48 (Figure 5.4) et montrer dans chaque cas que la paire critique est joignable.

*Remarque 5.49.* Certaines paires critiques de  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{B}$  sont, contrairement à la (5.13), directement joignables dans  $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}})$ . Par exemple, la paire critique



est joignable, car le membre gauche peut se réécrire en le membre droit par la suite d'étapes suivante :



La terminaison du système de réécriture formé des règles des Figures 5.2 et 5.3 peut être montrée en montrant la décroissance d'un ordre de terminaison [Gui06] approprié (cet ordre sera détaillé dans des publications futures); il est donc confluente. Nous conjecturons qu'il est de même possible de définir un système de réécriture fini et confluente présentant la catégorie **FinRel** des relations finies, ainsi qu'un système de réécriture fini et confluente présentant la catégorie **Jeux** de jeux et stratégies introduite à la Section 4.2.2.

# Perspectives

---

Extension des présentations.

    Généralisation de la réécriture en dimension  $n$ .

    Critère de correction de LL.

    Optimisation de programmes (ex : un programme qui renvoie un couple suivi d'une projection).

    VLSI.

    Systèmes de gestions de versions.

# Annexe A

## Logique linéaire

---

### Formules

Les *formules* de la logique linéaire sont engendrées par la grammaire :

$$A ::= \begin{array}{l} X \mid A \wp A \mid A \& A \mid \perp \mid \top \mid ?A \\ \mid X^* \mid A \otimes A \mid A \oplus A \mid 1 \mid 0 \mid !A \end{array}$$

Le *dual*  $A^*$  d'une formule  $A$  est défini en utilisant les égalités de de Morgan :

$$(A \wp B)^* = A^* \otimes B^*, \quad (A \& B)^* = A^* \oplus B^*, \quad (?A)^* = !A^*, \quad \perp^* = 1, \quad \top^* = 0 \quad \text{et} \quad (A^*)^* = A$$

### Règles

Les règles de la logique linéaire présentées sous forme d'un calcul de séquents monolatères sont les suivantes :

$$\begin{array}{c} \frac{}{\vdash A, A^*}(\text{Ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash A^*, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}(\text{Cut}) \\ \\ \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B}(\wp) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash, \Gamma, \Delta, A \otimes B}(\otimes) \\ \\ \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}(\&) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}(\oplus_L) \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}(\oplus_R) \\ \\ \frac{}{\vdash \Gamma, \top}(\top) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}(\perp) \qquad \frac{}{\vdash 1}(1) \\ \\ \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}(?d) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}(?w) \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}(?c) \qquad \frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}(!) \end{array}$$

## Fragments

Les connecteurs  $\otimes$ ,  $\wp$ ,  $1$  et  $\perp$  sont *multiplicatifs*, les connecteurs  $\oplus$ ,  $\&$ ,  $0$  et  $\top$  sont *additifs* et les connecteurs  $!$  et  $?$  sont *exponentiels*. Les fragments de la logique linéaire sont obtenus en se restreignant à certaines de ces catégories de connecteurs.

## Polarisation

Les connecteurs  $\otimes$ ,  $1$ ,  $\oplus$ ,  $0$  et  $!$  sont *positifs* ou *synchrones* et les connecteurs  $\wp$ ,  $\perp$ ,  $\&$ ,  $\top$  et  $?$  sont *négatifs* ou *asynchrones*.

## Règle de mélange

L'ajout de la règle de mélange fournit une extension cohérente de la logique linéaire.

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} (\text{Mix})$$

# Annexe B

## Stratégies innocentes

---

Nous rappelons brièvement la définition des stratégies innocentes introduite par Hyland et Ong [HO00]. Divers textes introductifs proposent une présentation plus complète que celle fournie ici [Har05, Cur06].

**Définition B.1** (Arène). Une *arène*  $A$  est un triplet  $(M_A, \lambda_A, \vdash_A)$  où

- $M_A$  est un ensemble de *coups*,
- $\lambda_A : M_A \rightarrow \{O, J\} \times \{Q, R\}$  est une fonction qui à tout coup  $m$  associe sa *polarité* ( $O$  pour Opposant ou  $J$  pour Joueur) ainsi que sa *tonalité* ( $Q$  pour Question et  $R$  pour Réponse). Les deux projections de cette fonction seront respectivement notées  $\lambda_A^{OJ}$  et  $\lambda_A^{QR}$ .
- $\vdash_A \subseteq M_A \times M_A$  est une relation binaire appelée *permission* telle que,
  - pour tout coup  $n$  initial (tel qu’il n’existe pas de coup  $m$  pour lequel  $m \vdash_A n$ ), on a  $\lambda_A(m) = (O, Q)$ ,
  - si  $m \vdash_A n$  alors  $\lambda_A^{OJ}(m) \neq \lambda_A^{OJ}(n)$ ,
  - si  $m \vdash_A n$  et  $\lambda_A^{QR}(n) = R$  alors  $\lambda_A^{QR}(m) = Q$ .

**Définition B.2** (Partie). Une *partie* sur une arène  $A$  est une suite pointée  $m_1 \cdots m_k$  d’éléments de  $M_A$  (tout élément  $m_j$  de la suite peut être muni d’un pointeur vers un élément précédent  $m_i$  de la suite) qui est

- alternée : pour tout index  $i$ ,  $\lambda_A^{OJ}(m_i) \neq \lambda_A^{OJ}(m_{i+1})$ ,
- bien justifiée : pour tous coups  $m_i$  et  $m_j$  tels que  $m_j$  pointe sur  $m_i$ , on a  $m_i \vdash_A m_j$ .
- bien débutée : tout coup  $m_i$  n’ayant pas de pointeur est initial.

**Définition B.3** (Stratégie). Une *stratégie*  $\sigma$  sur une arène  $A$  est un ensemble de parties de longueur paire qui est

- non vide : la partie vide  $\varepsilon$  est dans  $\sigma$ ,
- clos par préfixes de longueur paire : pour toute partie  $s \cdot m \cdot n$  de  $\sigma$ , la partie  $s$  est aussi dans  $\sigma$ ,

- déterministe : pour toutes parties  $s \cdot m \cdot n_1$  et  $s \cdot m \cdot n_2$  de  $\sigma$ , on a  $n_1 = n_2$ .

**Définition B.4** (Vue). La *vue*  $\lceil s \rceil$  d'une partie  $s$  sur une arène  $A$  est la suite pointée définie par induction sur la longueur de  $s$  par

- $\lceil s \cdot n \rceil = \lceil s \rceil \cdot n$ , si  $n$  est un coup Joueur,
- $\lceil s \cdot m \cdot t \cdot n \rceil = \lceil s \cdot m \rceil \cdot n$ , si  $n$  est un coup Opposant justifié par le coup  $m$ ,
- $\lceil s \cdot n \rceil = n$ , si  $n$  est un coup Opposant initial,
- $\lceil \varepsilon \rceil = \varepsilon$ .

**Définition B.5** (Visibilité). Une partie  $s$  sur une arène  $A$  est *visible* lorsque sa vue  $\lceil s \rceil$  est une partie sur  $A$ . Une stratégie  $\sigma : A$  est *visible* lorsque toutes ses parties le sont.

**Définition B.6** (Stratégie innocente). Une stratégie visible  $\sigma : A$  est *innocente* lorsque pour toute partie  $s \cdot m \cdot n$  de  $\sigma$  et toute partie  $t \cdot m$  sur  $A$ ,

$$\lceil s \cdot m \rceil = \lceil t \cdot m \rceil \quad \text{implique} \quad t \cdot m \cdot n \in \sigma.$$

# Bibliographie

---

- [Abr03] S. ABRAMSKY : Sequentiality vs. concurrency in games and logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 13(04):531–565, 2003.
- [ACCL89] M. ABADI, L. CARDELLI, P.-L. CURIEN et J.-J. LÉVY : *Explicit substitutions*. ACM New York, NY, USA, 1989.
- [AJ94] S. ABRAMSKY et R. JAGADEESAN : Games and Full Completeness for Multiplicative Linear Logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 59(2):543–574, 1994.
- [AJM00] S. ABRAMSKY, R. JAGADEESAN et P. MALACARIA : Full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2):409–470, 2000.
- [AM96] S. ABRAMSKY et G. MCCUSKER : Linearity, Sharing and State: a fully abstract game semantics for Idealized Algol with active expressions Extended Abstract. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 3:2–14, 1996.
- [AM99] S. ABRAMSKY et P.-A. MELLIÈS : Concurrent games and full completeness. In *LICS*, volume 99, pages 431–442, 1999.
- [And92] J.M. ANDREOLI : Logic Programming with Focusing Proofs in Linear Logic. *Journal of Logic and Computation*, 2(3):297–347, 1992.
- [Bae07] J.C. BAEZ : *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*. 2007.
- [Bar79] M. BARR : *\*-Autonomous Categories*. *Lecture Notes in Mathematics*, 752, 1979.
- [BC82] G. BERRY et P.L. CURIEN : Sequential algorithms on concrete data structures. *Theoretical Computer Science*, 20(3):265–321, 1982.
- [BD95] J.C. BAEZ et J. DOLAN : Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6073, 1995.

- [BDER97a] P. BAILLOT, V. DANOS, T. EHRHARD et L. REGNIER : Believe it or not, AJM's games model is a model of classical Linear Logic. *Proceedings., 12th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 68–75, 1997.
- [BDER97b] P. BAILLOT, V. DANOS, T. EHRHARD et L. REGNIER : Timeless Games. *In CSL*, pages 56–77, 1997.
- [BDK97] F. BRACHO, M. DROSTE et D. KUSKE : Representation of computations in concurrent automata by dependence orders. *Theoretical Computer Science*, 174(1-2):67–96, 1997.
- [Bec69] J. BECK : Distributive laws. *Lecture Notes in Mathematics*, 80:119–140, 1969.
- [Bed88] M.A. BEDNARCZYK : *Categories of asynchronous systems*. Thèse de doctorat, University of Sussex, 1988.
- [Bén67] J. BÉNABOU : Introduction to bicategories. *Lecture Notes in Math*, 47:1–77, 1967.
- [Ber78] G. BERRY : Stable models of typed lambda-calculi. *In ICALP*, numéro 62 de Lecture Notes in Computer Science, pages 72–89. Springer-Verlag, 1978.
- [BHY01] M. BERGER, K. HONDA et N. YOSHIDA : Sequentiality and the  $\pi$ -calculus. *Proc. of TLCA 2001, the 5th International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, 2001.
- [Bir33] G. BIRKHOFF : On the combination of subalgebras. *In Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 29, pages 441–464, 1933.
- [BL03] J. BAEZ et L. LANGFORD : Higher-dimensional algebra IV: 2-tangles. *Advances in Mathematics*, 180(2):705–764, 2003.
- [Bla72] A. BLASS : Degrees of indeterminacy of games. *Fund. Math*, 77(2):151–166, 1972.
- [Bla92] A. BLASS : A game semantics for linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 56(1-3):183–220, 1992.
- [BN99] F. BAADER et T. NIPKOW : *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1999.
- [Bou94] G. BOUDOL : Lambda-calculi for (strict) parallel functions. *Inf. Comput.*, 108(1):51–127, 1994.
- [BS81] S. N. BURRIS et H. P. SANKAPPANAVAR : *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag, 1981.
- [Bur93] A. BURRONI : Higher-dimensional word problems with applications to equational logic. *Theoretical Computer Science*, 115(1):43–62, 1993.

- [CF05] P.L. CURIEN et C. FAGGIAN : L-Nets, Strategies and Proof-Nets. *In CSL*, pages 167–183. Springer, 2005.
- [CF06] P.L. CURIEN et C. FAGGIAN : An approach to innocent strategies as graphs. 2006.
- [Con01] J.H. CONWAY : *On Numbers and Games*. AK Peters, Ltd., 2001.
- [Cur98] P.L. CURIEN : Abstract Böhm trees. *Mathematical Structures in Computer Science*, 8(06):559–591, 1998.
- [Cur06] P.L. CURIEN : Notes on game semantics. 2006.
- [Cur07] P.L. CURIEN : Definability and Full Abstraction. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 172:301–310, 2007.
- [CVY07] S. CRAFA, D. VARACCA et N. YOSHIDA : Compositional Event Structure Semantics for the Internal  $\pi$ -Calculus. *CONCUR 2007-Concurrency Theory 18th International Conference, CONCUR 2007, Lisbon, Portugal, September 3-8, 2007; Proceedings*, 2007.
- [Deh00] P. DEHORNOY : On Completeness of Word Reversing. *Discrete Mathematics*, 225:93–119, 2000.
- [DHR96] V. DANOS, H. HERBELIN et L. REGNIER : Game semantics and abstract machines. *Proceedings, Eleventh Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 12:394–405, 1996.
- [DK95] M. DROSTE et D. KUSKE : Languages and logical definability in concurrency monoids. *Computer Science Logic*, pages 233–251, 1995.
- [DK02] M. DROSTE et D. KUSKE : Automata with concurrency relations – a survey. *Advances in Logic, Artificial Intelligence and Robotics*, pages 152–172, 2002.
- [DP02] B. A. DAVEY et H. A. PRIESTLEY : *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.
- [DR89] V. DANOS et L. REGNIER : The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28(3):181–203, 1989.
- [Ehr68] C. EHRESMANN : Esquisses et types de structures algébriques. *Bull. Inst. Polit. Iasi*, XIV, 1968.
- [FH02] C. FAGGIAN et M. HYLAND : Designs, disputes and strategies. *In CSL*, 2002.
- [FM05] C. FAGGIAN et F. MAUREL : Ludics nets, a model of concurrent interaction. *In Proceedings of the 21th Conference on Logic in Computer Science*, LICS, 2005.
- [FP07] C. FAGGIAN et M. PICCOLO : Ludics is a Model for the Finitary Linear  $\pi$ -Calculus. *Typed Lambda Calculi and Applications 8th International Conference, TLCA 2007, Paris, France, June 26-28, 2007; Proceedings*, 2007.

- [GH05] É. GOUBAULT et É. HAUCOURT : A practical application of geometric semantics to static analysis of concurrent programs. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 503–517, 2005.
- [Gir87] J.-Y. GIRARD : Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.
- [Gir89] J.-Y. GIRARD : *Proofs and types*. Cambridge University Press New York, 1989.
- [Gir01] J.-Y. GIRARD : Locus solum: from the rules of logic to the logic of rules. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3):301–506, 2001.
- [GLM92] G. GONTHIER, J.-J. LÉVY et P.-A. MELLIÉS : An abstract standardisation theorem. *In Proc. of the 8th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pages 72–81, 1992.
- [GM03] D.R. GHICA et G. MCCUSKER : The regular-language semantics of second-order idealized ALGOL. *Theoretical Computer Science*, 309(1-3):469–502, 2003.
- [GM04] D.R. GHICA et A.S. MURAWSKI : Angelic Semantics of Fine-Grained Concurrency. *In FoSSaCS*, pages 211–225, 2004.
- [Gou00] É. GOUBAULT : Geometry and Concurrency: A User’s Guide. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4):411–425, 2000.
- [Gui04] Y. GUIRAUD : *Présentations d’opérades et systèmes de réécriture*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2004.
- [Gui06] Y. GUIRAUD : Termination orders for 3-dimensional rewriting. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207(2):341–371, 2006.
- [Har05] R. HARMER : Innocent game semantics. 2005.
- [Hat02] A. HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [HHH07] M. HIRSCHOWITZ, A. HIRSCHOWITZ et T. HIRSCHOWITZ : A Theory for Game Theories. *Lecture Notes in Computer Science*, 4855:192, 2007.
- [HHM07] R. HARMER, M. HYLAND et P.-A. MELLIÉS : Categorical Combinatorics for Innocent Strategies. *In LICS ’07: Proceedings of the 22nd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 379–388, Washington, DC, USA, 2007. IEEE Computer Society.
- [HM99] R. HARMER et G. MCCUSKER : A fully abstract game semantics for finite nondeterminism. *Proceedings, Fourteenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 422–430, 1999.
- [HO93] J.M.E. HYLAND et C.H.L. ONG : Fair games and full completeness for multiplicative linear logic without the mix-rule. *preprint*, 190, 1993.

- [HO00] M. HYLAND et L. ONG : On Full Abstraction for PCF: I, II and III. *Information and Computation*, 163(2):285–408, décembre 2000.
- [HP00] M. HYLAND et J. POWER : Symmetric Monoidal Sketches. *In Proceedings of PPDP 00*, pages 280–288. ACM Press, 2000.
- [HS02] M. HYLAND et A. SCHALK : Games on Graphs and Sequentially Realizable Functionals. *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 257–264, 2002.
- [HS03] M. HYLAND et A. SCHALK : Glueing and orthogonality for models of linear logic. *Theoretical Computer Science*, 294(1-2):183–231, 2003.
- [HY99] K. HONDA et N. YOSHIDA : Game-theoretic analysis of call-by-value computation. *Theoretical Computer Science*, 221(1-2):393–456, 1999.
- [JK06] A. JOYAL et J. KOCK : Weak units and homotopy 3-types. *Arxiv preprint math.CT/0602084*, 2006.
- [Joh89] M. JOHNSON : The combinatorics of categorical pasting. *J. Pure Appl. Algebra*, 6(62):211–225, 1989.
- [Joy77] A. JOYAL : Remarques sur la théorie des jeux à deux personnes. *Gazette des Sciences Mathématiques du Québec*, 1(4):46–52, 1977.
- [JS91] A. JOYAL et R. STREET : The Geometry of Tensor Calculus, I. *Advances in Mathematics*, 88:55–113, 1991.
- [Kas95] C. KASSEL : *Quantum Groups*. Springer, 1995.
- [KB70] D. E. KNUTH et P. B. BENDIX : *Computational Problems in Abstract Algebra*, chapitre Simple word problems in universal algebra, pages 263–297. Pergamon Press, 1970.
- [KL80] G.M. KELLY et M.L. LAPLAZA : Coherence for compact closed categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 19:193–213, 1980.
- [KS72] G.M. KELLY et R. STREET : Review on the Elements of 2-categories. *Proceedings Sydney Category Theory Seminar*, 73:75–103, 1972.
- [Kus94] D. KUSKE : *Modelle nebenläufiger Prozesse – Monoide, Residuen-systeme und Automaten*. Thèse de doctorat, Universität Essen, 1994.
- [Lac04] S. LACK : Composing PROPs. *Theory and Applications of Categories*, 13(9):147–163, 2004.
- [Laf90] Y. LAFONT : Interaction Nets. *Proceedings of the 17th symposium on Principles of programming languages*, pages 95–108, 1990.
- [Laf03] Y. LAFONT : Towards an algebraic theory of Boolean circuits. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 184(2-3):257–310, 2003.

- [Lai97] J. LAIRD : Full abstraction for functional languages with control. *Proceedings, Twelfth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 58–67, 1997.
- [Lai01] J. LAIRD : A Game Semantics of Idealized CSP. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 45:232–257, 2001.
- [Lai05] J. LAIRD : A game semantics of the asynchronous  $\pi$ -calculus. *Proceedings of 16th CONCUR*, pages 51–65, 2005.
- [Lam95] F. LAMARCHE : Games semantics for full propositional linear logic. *Proceedings of the 10th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS'95)(San Diego, California)(D. Kozen, ed.)*, IEEE Computer Society Press, pages 464–473, 1995.
- [Lau04] O. LAURENT : Polarized games. *Annals of Pure and Applied Logic*, 130(1-3):79–123, 2004.
- [Law63] F. W. LAWVERE : *Functorial Semantics of Algebraic Theories and Some Algebraic Problems in the context of Functorial Semantics of Algebraic Theories*. Thèse de doctorat, Columbia University, 1963.
- [Lei04] T. LEINSTER : *Higher Operads, Higher Categories*. Numéro 298 de London Mathematics Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2004.
- [Lor61] P. LORENZEN : Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium. *Infinitistic Methods*, pages 193–200, 1961.
- [LP91] Y. LAFONT et A. PROUTÉ : Church-Rosser Property and Homology of Monoids. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):297–326, 1991.
- [Mac65] S. MACLANE : Categorical Algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71:40–106, 1965.
- [Mac71] S. MACLANE : *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1971.
- [Mas97] A. MASSOL : Minimality of the system of seven equations for the category of finite sets. *Theoretical Computer Science*, 176(1-2):347–353, 1997.
- [Maz88] A.W. MAZURKIEWICZ : Basic notions of trace theory. *Lecture Notes In Computer Science ; Vol. 354*, pages 285–363, 1988.
- [Mel03] P.-A. MELLIÈS : Asynchronous games 1: Uniformity by group invariance. 2003.
- [Mel04] P.-A. MELLIÈS : Asynchronous games 2: the true concurrency of innocence. In *Proceedings of the 15th CONCUR*, numéro 3170 de LNCS, pages 448–465. Springer Verlag, 2004.

- [Mel05a] P.-A. MELLIÈS : Asynchronous games 3: an innocent model of linear logic. In Lars BIRKEDAL, éditeur : *Category Theory in Computer Science, CTCS 2004*, volume 122 de *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2005.
- [Mel05b] P.-A. MELLIÈS : Asynchronous games 4: a fully complete model of propositional linear logic. *Proceedings of 20th LICS*, pages 386–395, 2005.
- [Mel05c] P.-A. MELLIÈS : Axiomatic Rewriting 1: A diagrammatic standardization theorem. *Lecture Notes in Computer Science*, 3838:554–638, 2005.
- [Mel05d] P.-A. MELLIÈS : Sequential algorithms and strongly stable functions. *Theoretical Computer Science*, 343(1-2):237–281, 2005.
- [Mel08] P.-A. MELLIÈS : Categorical Semantics of Linear Logic. To appear in *Panoramas et Synthèses*, Société Mathématique de France, 2008.
- [MH98] P. MALACARIA et C. HANKIN : A New Approach to Control Flow Analysis. *Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction*, pages 95–108, 1998.
- [Mil77] R. MILNER : Fully abstract models of typed lambda-calculi. *Theoretical Computer Science*, 4(1):1–22, 1977.
- [Mil80] R. MILNER : A Calculus of Communicating Systems, volume 92 of *Lecture Notes in Computer Science*, 1980.
- [Mil06] R. MILNER : Pure bigraphs: Structure and dynamics. *Information and Computation*, 204(1):60–122, 2006.
- [MM07] P.-A. MELLIÈS et S. MIMRAM : Asynchronous Games: Innocence without Alternation. In *Proceedings of the 18th International Conference on Concurrency Theory CONCUR*, volume 4703 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 395–411. Springer, Heidelberg, 2007.
- [MPW92] R. MILNER, J. PARROW et D. WALKER : A calculus of mobile processes, I and II. *Information and Computation*, 100(1):1–77, 1992.
- [MT07] P.-A. MELLIÈS et N. TABAREAU : Resource modalities in game semantics. In *LICS '07: Proceedings of the 22nd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 389–398, Washington, DC, USA, 2007. IEEE Computer Society.
- [New42] M.H.A. NEWMAN : On theories with a combinatorial definition of “equivalence”. *Annals of Mathematics*, 43(2):223–243, 1942.
- [Nic94] H. NICKAU : Hereditarily sequential functionals. In A. NERODE et Yu. V. MATIYASEVICH, éditeurs : *Proceedings of the Symposium on Logical Foundations of Computer Science: Logic at St. Petersburg*, volume 813 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–264. Springer Verlag, 1994.

- [Ong02] C.H.L. ONG : Observational equivalence of 3rd-order Idealized Algol is decidable. *Proc. of LICS*, pages 245–256, 2002.
- [Pen71] R. PENROSE : Applications of negative dimensional tensors. *Combinatorial Mathematics and its Applications*, pages 221–244, 1971.
- [Pet62] C.A. PETRI : *Kommunikation mit Automaten*. Thèse de doctorat, Rheinisch-Westfälisches Institut f. instrumentelle Mathematik an d. Univ., 1962.
- [PH96] D. PLUMP et A. HABEL : Graph Unification and Matching. In *Selected papers from the 5th International Workshop on Graph Grammars and Their Application to Computer Science*, pages 75–88, London, UK, 1996. Springer-Verlag.
- [Pir02] T. PIRASHVILI : On the PROP Corresponding to Bialgebras. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 43(3): 221–239, 2002.
- [Plo77] G.D. PLOTKIN : LCF considered as a programming language. *Theoretical Computer Science*, 5(3):223–255, 1977.
- [Plu93] D. PLUMP : *Term graph rewriting: theory and practice*, chapitre 15, Hypergraph rewriting: critical pairs and undecidability of confluence, pages 201–213. John Wiley and Sons Ltd. Chichester, UK, 1993.
- [Pos46] E. POST : A variant of a recursively unsolvable problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(264-268):48, 1946.
- [Pow90] A. J. POWER : An  $n$ -categorical pasting theorem. *Category Theory, Proc. Int. Conf. Como*, pages 326–358, 1990.
- [PR84] R. PENROSE et W. RINDLER : *Spinors and space-time*. Cambridge University Press, 1984.
- [Pra91] V.R. PRATT : Modeling Concurrency with Geometry. *Conference Record of the Eighteenth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 311–322, 1991.
- [PSS90] P. PANANGADEN, V. SHANBHOGUE et E.W. STARK : Stability and Sequentiality in Dataflow Networks. In *International Conference on Automates, Languages and Programming*, volume 443 de LNCS, pages 253–264. Springer Verlag, 1990.
- [Rob65] J. A. ROBINSON : A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. *Journal of the ACM*, 12(1):23–41, 1965.
- [Sel97] P. SELINGER : First-order axioms for asynchrony. In *CONCUR '97*, numéro 1243 de Lecture Notes in Computer Science, pages 376–390. Springer, 1997.
- [Sel01] P. SELINGER : Control categories and duality: on the categorical semantics of the  $\lambda$ - $\mu$  calculus. *Mathematical Structures in Comp. Sci.*, 11(2):207–260, 2001.

- [Shi85] M.W. SHIELDS : Concurrent Machines. *The Computer Journal*, 28(5):449–465, 1985.
- [SNW93] V. SASSONE, M. NIELSEN et G. WINSKEL : Deterministic Behavioural Models for Concurrency. *Proceedings of 18th International Symposium on the Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS '93, LNCS*, pages 682–692, 1993.
- [Squ87] C.C. SQUIER : Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(1-2):201–217, 1987.
- [Ste93] R. STEINER : The algebra of directed complexes. *Applied Categorical Structures*, 1(3):247–284, 1993.
- [Str76] R. STREET : Limits indexed by category-valued 2-functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 8(2):149–181, 1976.
- [Str91] R. STREET : Parity complexes. *Cah. Top. Geom. Di. Categoriqes*, 32:315–343, 1991.
- [Str04] R. STREET : Frobenius monads and pseudomonoids. *Journal of Mathematical Physics*, 45:3930, 2004.
- [Str07] R. STREET : *Quantum Groups – A Path to Current Algebra*. Numéro 19 de Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 2007.
- [Tab08] N. TABAREAU : *Dualité, Ressources, Contrôle*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2008.
- [vGP04] R. van GLABBEEK et G. PLOTKIN : Event Structures for Resolvable Conflict. *Mathematical Foundations of Computer Science 2004: Proceedings of the 29th International Symposium MFCS 2004*, pages 550–561, 2004.
- [Wel93] C. WELLS : *Sketches: Outline with References*. 1993.
- [Win82] G. WINSKEL : Event Structure Semantics for CCS and Related Languages. *Proceedings of the 9th Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 561–576, 1982.
- [Win87] G. WINSKEL : Event Structures. *Advances in Petri Nets*, 255:325–392, 1987.
- [WN95] G. WINSKEL et M. NIELSEN : Models for concurrency. *In Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, pages 1–148. Oxford University Press, 1995.

# Index

---

- $\lambda$ -calcul ..... 125
- 2-catégorie ..... 19
  - des catégories ..... 20
- 2-foncteur ..... 20
- 2-polygraphe ..... 158
  
- A**
- action ..... 146
- adjonction ..... 24, 25
- algèbre ..... 166
  - d'une catégorie monoïdale ..... 164
  - d'une monade ..... 42
- après ..... 132
- arbre de Böhm ..... 125
- arène ..... 278
- avant ..... 132
  
- B**
- biais ..... 146
- bicategorie
  - de compas ..... 40
- bicatégorie ..... 39
- bigèbre ..... 175
  - de Hopf ..... 177
    - avec antipode comonoïdale ..... 178
  - qualitative ..... 176
  - événementielle ..... 180
- borne
  - inférieure ..... 69
  - supérieure ..... 69
  
- C**
- calculade ..... 156
- catégorie ..... 14
  - \*-autonome ..... 38
  - avec deux ..... 254
  - stricte ..... 254
- cartésienne ..... 31
- compacte fermée ..... 39
- d'ordre ..... 68
- de factorisations ..... 67
- des ensembles ..... 15
- des graphes ..... 16
- des monoïdes ..... 15
- des relations ..... 15
- des 2-catégories ..... 21
- des catégories
  - monoïdales strictes ..... 29
- des bijections ..... 172
- des catégories ..... 18
  - monoïdales ..... 29
- des chemins modulo homotopie ..... 49
- des factorisations ..... 68
- des jeux monochromes ..... 85
- des monoïdes d'une catégorie ..... 30
- des ordres partiels finis ..... 219
- des relations et ensembles finis ..... 199
- des réseaux symétriques ..... 245
- libre sur un graphe ..... 26
- monoïdale ..... 26
  - avec unités commutatives ..... 248
  - générée par une signature ..... 159
  - symétrique ..... 34
  - symétrique fermée ..... 37
  - tressée ..... 33
- opposée ..... 17
- simpliciale ..... 153
- tranche ..... 18
- comonoïde ..... 174
- compartmentation ..... 259
- compas ..... 40
- compatibilité ..... 61, 65

complétion	
par élément maximal	110
configuration	52
confluence	235
locale	235
congruence	
monoïdale	162
contexte	
monoïdal	161
coproduit	31
correspondance de Galois	26
courtoisie	101
forte	103
<b>D</b>	
daimon	146
dessein	146
dessin	146
diagramme	
commutatif	16
de corde	21
domaine	52
généralisé par une structure d'événements	52
dual	38
dualité	
de Poincaré	21
<b>E</b>	
égalité	
de Yang-Baxter	35
endofoncteur	41
épimorphisme	17
équivalence	
de catégories	26
escalier	188, 213
événement	50
initial	
modulo homotopie	57
modulo indépendance	57
synchronisable	226
<b>F</b>	
famille de Moore	109
foncteur	17
d'oubli	25
monoïdal	28
tressé	37
force	227
<b>G</b>	
graphe	47
asynchrone	48
de transitions	52
générateur	
superflu	162
<b>H</b>	
homotopie	48
OP-	114
<b>I</b>	
idéal	70
île flottante	247
indépendance	50
injection	
d'une partie	84
innocence	279
interface	146
isomorphisme	17
<b>J</b>	
jeu	205
alterné	114
avec tests d'ordonnancement	132
monochrome	82
ordonné	137
polarisé	96
<b>L</b>	
L-réseau	147
correct	147
linéarisation	
d'un ordre partiel	54
logique linéaire	276
loi	
d'échange	20, 27
de Godement	20, 28
loi distributive	
entre monades	43
ludique	145
<b>M</b>	
matrice	186
monade	42
monomorphisme	17
monoïde	29, 173
commutatif	174
libre	25
symétrique	174
événementiel	227

- morphisme  
  connexe ..... 247  
  d'algèbres ..... 42  
  sous- ..... 236
- multicatégorie ..... 249  
  de multicontextes ..... 251  
  des régions ..... 257  
  des réseaux symétriques ... 262
- multicontexte ..... 251  
  mélange ..... 277
- O**
- objet  
  dual ..... 38  
  symétrique ..... 172  
  terminal ..... 31  
  tressé ..... 171
- objets duaux ..... 185  
  opérateur de clôture ..... 109  
  ordonnancement ..... 131  
  orthogonalité ..... 135
- P**
- paire critique ..... 237  
  paire duale ..... 185  
  partie ..... 82, 278  
  phagocytose ..... 259  
  point fixe ..... 109  
  polygraphe ..... 156
- position  
  acceptante ..... 88  
  d'arrêt ..... 101
- problème  
  de correspondance de Post ... 239  
  de la confluence typée ..... 239  
  du mot ..... 239
- produit  
  cartésien ..... 30  
  fibré ..... 33  
  tensoriel ..... 26
- projection  
  d'une partie ..... 83
- propriété  
  du Cube ..... 55
- présentation  
  de catégorie monoïdale ..... 162  
  de monoïde ..... 150  
  minimale ..... 162
- préservation de la compatibilité ... 89  
  pseudomonoïde ..... 231
- pullback ..... 33  
  pushout ..... 32
- R**
- ramification ..... 146  
  relation  
  superflue ..... 162
- résidu ..... 62  
  région ..... 257
- réseau  
  symétrique ..... 244
- réécriture  
  par courtoisie ..... 119
- S**
- signature  
  monoïdale ..... 159
- somme ..... 31  
  amalgamée ..... 32
- sous-  
  2-catégorie ..... 20  
  catégorie ..... 16  
  morphisme ..... 236
- squelette ..... 26  
  stratégie ..... 82, 278  
  alternée ..... 114  
  avec positions d'interaction .. 134  
  causale ..... 205  
  close par préfixe ..... 85  
  cohérente ..... 114  
  courtoise ..... 101  
  déterministe ..... 97  
  fortement courtoise ..... 103  
  identité ..... 85  
  ingénue ..... 98  
  innocente ..... 279  
  négative ..... 116  
  ordonnançable ..... 139  
  positionnelle ..... 86, 87  
  réceptive ..... 116  
  sans conflit ..... 133  
  sans mémoire ..... 141  
  séquentielle ..... 116  
  séquentiellement innocente ... 118  
  tampon ..... 102
- strid ..... 24  
  structure d'événements ..... 51  
  système de réécriture  
  monoïdal ..... 234

**T**

taille	
d'un morphisme.....	160
d'un objet.....	160
tampon.....	102
terminaison.....	235
théorie	
cartésienne.....	165
de Lawvere.....	165
des jeux.....	210
monoïdale.....	165
monoïdale symétrique.....	166
théorie équationnelle	
monoïdale.....	160
duale.....	163
théorème	
de représentation de Birkhoff..	71
transformation naturelle.....	18
monoïdale.....	28
symétrique.....	37
tressée.....	37
transitions	
compatibles.....	49
treillis.....	69, 182, 183
borné.....	183
complet.....	109
distributif.....	70
semi-.....	69

**U**

unificateur.....	237, 260
minimal.....	237

**V**

vue.....	279
----------	-----



## SÉMANTIQUE DES JEUX ASYNCHRONES ET RÉÉCRITURE 2-DIMENSIONNELLE

Les sémantiques de jeux s'attachent à caractériser le comportement interactif des preuves et des programmes, en les modélisant par des stratégies qui décrivent la façon dont ils réagissent à leur environnement. Afin de prendre en compte les aspects concurrents des preuves en logique linéaire, nous avons été amenés à retravailler les notions et techniques classiques de sémantique des jeux pour les étendre à un cadre asynchrone et non-alterné. Dans une première partie, nous définissons une famille de stratégies asynchrones donnant lieu à un modèle de logique linéaire, pleinement complet pour le fragment multiplicatif. Ces stratégies sont définies de façon locale par une série d'axiomes diagrammatiques ; elles sont ensuite raffinées par un critère dynamique d'ordonnement, dont nous montrons qu'il impose une version orientée du critère de correction des réseaux de preuve. Cette formulation asynchrone permet d'unifier des modèles variés de la logique linéaire – aussi bien séquentiels que concurrents, dynamiques que statiques – où les preuves sont vues comme des stratégies séquentielles, des stratégies concurrentes, des relations ou des structures d'événements. Dans une seconde partie, nous abordons une autre approche pour décrire la causalité induite par les preuves et introduisons une sémantique de jeux capturant les dépendances engendrées par les connecteurs du premier ordre en logique propositionnelle. Nous montrons alors que la catégorie résultante peut être finiment présentée par un 2-polygraphe et étudions la possibilité d'orienter cette présentation en un système de réécriture confluent, notamment en introduisant un algorithme d'unification dans ce cadre 2-dimensionnel.

---

## ASYNCHRONOUS GAME SEMANTICS AND 2-DIMENSIONAL REWRITING SYSTEMS

Game semantics characterize the interactive behaviour of proofs and programs, by modeling them as strategies which describe the way they react to their environment. In order to take in account concurrent aspects of proofs in linear logic, usual notions and techniques in game semantics are recasted in an asynchronous and non-alternating framework. In a first part, we define a family of asynchronous strategies giving rise to a model of linear logic, which is fully complete for the multiplicative fragment. These strategies are defined in a purely local way by a series of diagrammatic axioms. Then, they are refined by a dynamic scheduling criterion, which is shown to constrain strategies to satisfy an oriented variant of the correctness criterion of proof nets. This asynchronous formulation unifies various models of linear logic – sequential as well as concurrent, dynamic as well as static – where proofs are seen either as sequential strategies, as concurrent strategies, as relations, or as event structures. In a second part, we investigate another approach to describe the causality induced by proofs and introduce a game semantics which captures dependencies induced by first order connectives in propositional logic. We then show that the resulting category can be finitely presented by a 2-polygraph and discuss how this presentation could be oriented in a confluent rewriting system. In particular, we introduce an unification algorithm in this 2-dimensional framework.