Calculs de points fixes pour la vérification de programmes numériques.

Yassamine Seladji

CEA, LIST, Laboratoire de Modélisation et d'Analyse des Systemes en Intéraction.
yassamine.seladji@cea.fr

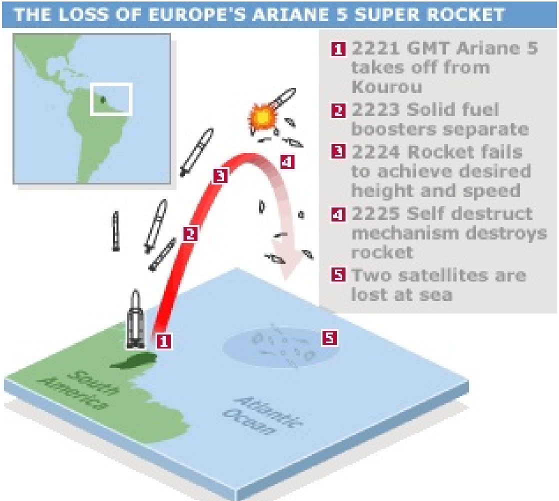
27 juin 2011

Éric Goubault et Olivier Bouissou.
Polytechnique 91128 PALAISEAU Cedex, France ; CEA-LIST LMeASI,
Point Courrier 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France ;

Contexte

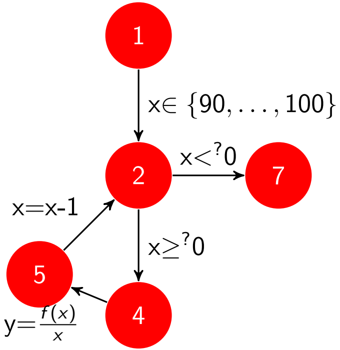
Un problème industriel

- le crash d'Ariane 5 : causé par un overflow.
  $\Longrightarrow$ 700 Million d'euro de perte.



Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle

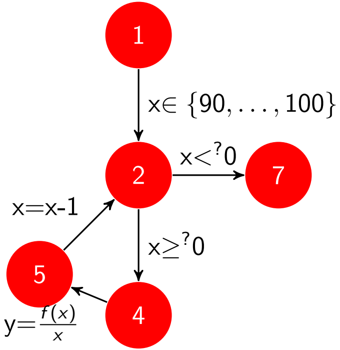


Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.

Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle

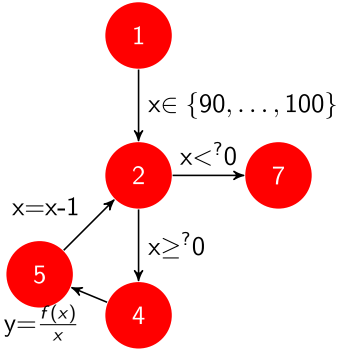


Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.
- $S_2 = [\![x \in \{90, \ldots, 100\}]\!](S_1) \cup$
  $[\![\text{x=x-1}]\!](\text{S}_5)$.

Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle

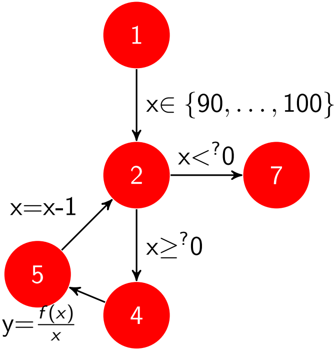


Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.
- $S_2 = [\![x \in \{90, \ldots, 100\}]\!](S_1) \cup$
  $[\![\mathrm{x=x\text{-}1}]\!](\mathrm{S}_5)$.
- $S_4 = [\![x \geq 0]\!](S_2)$.

Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle

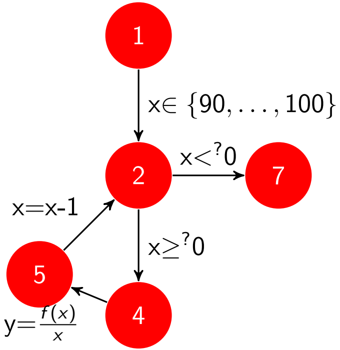


Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.
- $S_2 = [\![x \in \{90, \ldots, 100\}]\!](S_1) \cup$
  $[\![\text{x=x-1}]\!](\text{S}_5)$.
- $S_4 = [\![x \geq 0]\!](S_2)$.
- $S_5 = [\![y = \frac{f(x)}{x}]\!](S_4)$.

Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle

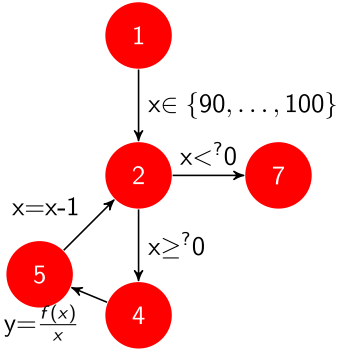


Les équations sémantiques

- $S_1 = \bot$.
- $S_2 = [\![x \in \{90, \ldots, 100\}]\!](S_1) \cup$
  $[\![\text{x=x-1}]\!](\text{S}_5)$.
- $S_4 = [\![x \geq 0]\!](S_2)$.
- $S_5 = [\![y = \frac{f(x)}{x}]\!](S_4)$. $S_7 = [\![x < 0]\!](S_2)$.

Sémantique collectrice

Graphe de flôt de contrôle



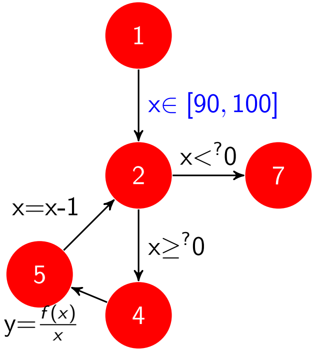
Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.
- $S_2 = [\![x \in \{90, \ldots, 100\}]\!](S_1) \cup$
  $[\![\text{x=x-1}]\!](\text{S}_5)$.
- $S_4 = [\![x \geq 0]\!](S_2)$.
- $S_5 = [\![y = \frac{f(x)}{x}]\!](S_4)$. $S_7 = [\![x < 0]\!](S_2)$.

$$\overrightarrow{S} = F(\overrightarrow{S}).$$

Interprétation abstraite

Graphe de flôt de contrôle



Les équations sémantiques

- $S_1 = \perp$.
- $S_2 = [\![x \in [90, 100]]\!](S_1) \cup$
  $[\![x = x - 1]\!](S_5)$.
- $S_4 = [\![x \geq 0]\!](S_2)$.
- $S_5 = [\![y = \frac{f(x)}{x}]\!](S_4)$. $S_7 = [\![x < 0]\!](S_2)$.

$$\overrightarrow{S} = F(\overrightarrow{S}).$$

Calcul du point fixe

Algorithm 1 Algorithme d'itération de Kleene

$\overrightarrow{X}_i := \bot$
repeat
$\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
until $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

```
1 : x = [90,100];
2 : While (x ≥ 0)
3 :{
4 : y := f(x)/x;
5 : x := x-1;
6 : }
7 :
```

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 0

	x
1	$\bot$
2	$\bot$
5	$\bot$
7	$\bot$

Calcul du point fixe

Algorithm 2 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/x$;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 0

	x
1	[90,100]
2	$\bot$
5	$\bot$
7	$\bot$

Algorithm 3 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \perp$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 0

	x
1	[90,100]
2	[90,100]
5	$\perp$
7	$\perp$

Calcul du point fixe

Algorithm 4 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 1

	x
1	[90,100]
2	[90,100]
5	[89,99]
7	$\bot$

Algorithm 5 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \perp$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 1

	x
1	[90,100]
2	[89,100]
5	[89,99]
7	$\perp$

Calcul du point fixe

Algorithm 6 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 2

	x
1	[90,100]
2	[89,100]
5	[88,99]
7	$\bot$

Calcul du point fixe

Algorithm 7 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 2

	x
1	[90,100]
2	[88,100]
5	[88,99]
7	$\bot$

Calcul du point fixe

Algorithm 8 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 100

	x
1	[90,100]
2	[1,100]
5	[0,99]
7	$\bot$

Calcul du point fixe

Algorithm 9 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 100

	x
1	[90,100]
2	[0,100]
5	[0,99]
7	$\bot$

Calcul du point fixe

Algorithm 10 Algorithme d'itération de Kleene

1: $\overrightarrow{X}_i := \perp$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \sqcup F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ; $\Longrightarrow$ Error
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul du point-fixe

Itération : 101

	x
1	[90,100]
2	[0,100]
5	[-1,99]
7	[-1,-1]

Widening avec seuils

Algorithm 11 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T \; F(\overrightarrow{X}_{i-1})$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Widening avec seuils

Algorithm 12 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :1

	x
1	[90,100]
2	[90,100]
5	[89,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 13 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/x$;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :1

	x
1	[90,100]
2	[89,100]
5	[89,99]
7	$\bot$

Algorithm 14 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)$/x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :2

	x
1	[90,100]
2	[89,100]
5	[88,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 15 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)/x$;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :2

	x
1	[90,100]
2	[50,100]
5	[88,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 16 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

$\overrightarrow{X}_i := \bot$
repeat
  $\overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
until $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)/x$;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :3

	x
1	[90,100]
2	[50,100]
5	[49,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 17 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :3

	x
1	[90,100]
2	[10,100]
5	[49,99]
7	$\bot$

Algorithm 18 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}.$
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While ($x \geq 0$)
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :4

	x
1	[90,100]
2	[10,100]
5	[9,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 19 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :4

	x
1	[90,100]
2	[0,100]
5	[9,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 20 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ;$\Longrightarrow$ Error
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :5

	x
1	[90,100]
2	[0,100]
5	[-1,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 21 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ; $\Longrightarrow$ Error
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération :5

	x
1	[90,100]
2	[-1,100]
5	[-1,99]
7	$\bot$

Widening avec seuils

Algorithm 22 Méthode d'itération de Kleene avec widening avec seuils

1: $\overrightarrow{X}_i := \bot$
2: **repeat**
3: $\quad \overrightarrow{X}_i := \overrightarrow{X}_{i-1} \nabla_T F(\overrightarrow{X}_{i-1}) \Longrightarrow \{50, 10, 0\}$.
4: **until** $\overrightarrow{X}_i \sqsubseteq \overrightarrow{X}_{i-1}$

Exemple

1 : x = [90,100] ;
2 : While $(x \geq 0)$
3 :{
4 : y := $f(x)/$x ; $\Longrightarrow$ Error
5 : x := x-1 ;
6 : }
7 :

$\Longrightarrow$

Calcul d'un point-fixe

Itération : 6

	x
1	[90,100]
2	[-1,100]
5	[-1,99]
7	[-1,-1]

Convergence des suites numériques[Brezinski77]

Une suite convergente

Soit (S_n) une suite numérique et S un réel. Nous disons que (S_n) converge vers S ssi $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$.

Procédé de transformation de suites

Un procédé de transformation de suites est une fonction P qui associe à toute suite numérique (S_n) une nouvelle suite (Y_n) telle que, si (S_n) converge vers S, alors (Y_n) converge plus rapidement vers S.

Quelques procédés de transformation.

- La méthode Δ^2-d'Aitken.
- ε-Algorithme.

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000				
1.3333333				
1.2500000				
1.2000000				
1.1666667				
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333				
1.2500000				
1.2000000				
1.1666667				
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000				
1.2000000				
1.1666667				
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000				
1.1666667				
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667				
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667	1.0833333			
1.1428571				
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667	1.0833333			
1.1428571	1.0714287			
1.1250000				
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667	1.0833333			
1.1428571	1.0714287			
1.1250000	1.0624998			
1.1111111				
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667	1.0833333			
1.1428571	1.0714287			
1.1250000	1.0624998			
1.1111111	1.0555557			
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667			
1.2500000	1.1249999			
1.2000000	1.1000001			
1.1666667	1.0833333			
1.1428571	1.0714287			
1.1250000	1.0624998			
1.1111111	1.0555557			
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667	1.1111109		
1.2500000	1.1249999	1.0833337		
1.2000000	1.1000001	1.0666663		
1.1666667	1.0833333	1.0555556		
1.1428571	1.0714287	1.0476161		
1.1250000	1.0624998	1.0416761		
1.1111111	1.0555557			
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}.$$

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667	1.1111109		
1.2500000	1.1249999	1.0833337	1.0624931	
1.2000000	1.1000001	1.0666663	1.0500028	
1.1666667	1.0833333	1.0555556	1.0416545	
1.1428571	1.0714287	1.0476161	1.0357504	
1.1250000	1.0624998	1.0416761		
1.1111111	1.0555557			
1.1000000				

La méthode Δ^2-d'Aitken

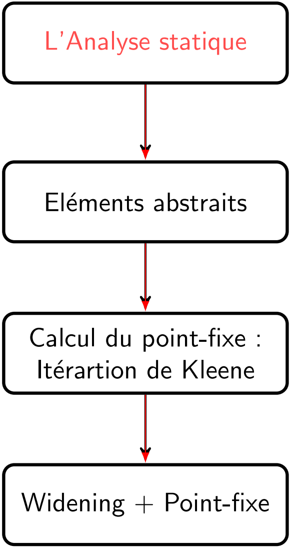
Définition

Soit (S_n) la suite initiale et (S'_n) la suite transformée telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, S'_{n+1} = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$.

Exemple : $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

ε_n^0	ε_n^2	ε_n^4	ε_n^6	ε_n^8
2.0000000				
1.5000000	1.2500000			
1.3333333	1.1666667	1.1111109		
1.2500000	1.1249999	1.0833337	1.0624931	
1.2000000	1.1000001	1.0666663	1.0500028	1.0399799
1.1666667	1.0833333	1.0555556	1.0416545	1.0334257
1.1428571	1.0714287	1.0476161	1.0357504	
1.1250000	1.0624998	1.0416761		
1.1111111	1.0555557			
1.1000000				

Récapitulatif

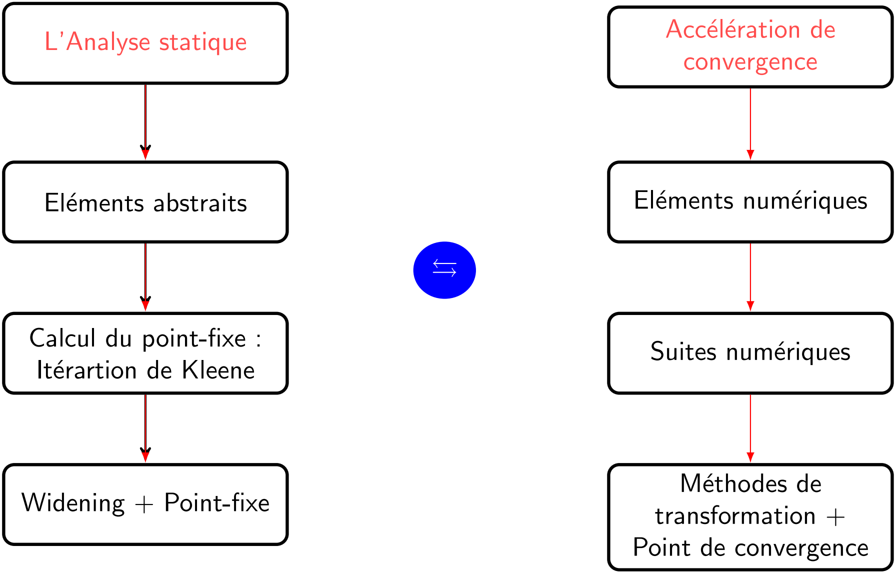


Récapitulatif

L'Analyse statique → Eléments abstraits → Calcul du point-fixe : Itérartion de Kleene → Widening + Point-fixe

Accélération de convergence → Eléments numériques → Suites numériques → Méthodes de transformation + Point de convergence

Récapitulatif



Méthodologie par l'exemple

Le programme

```
while (1) {*
xn1 = -0.4375*x1+0.0625*x2+0.2652*x3+0.1*u1;
xn2 = 0.0625*x1+0.4375*x2+0.2652*x3+0.1*u2;
xn3 = -0.2652*x1+0.2652*x2+0.375*x3+0.1*u3;
x1 = xn1;
x2 = xn2;
x3 = xn3;
}
```

$\Longrightarrow$

Chaque itération

x_1

$$[1.000000, 2.000000]$$

Méthodologie par l'exemple

Le programme

```
while (1) {*
xn1 = -0.4375*x1+0.0625*x2+0.2652*x3+0.1*u1;
xn2 = 0.0625*x1+0.4375*x2+0.2652*x3+0.1*u2;
xn3 = -0.2652*x1+0.2652*x2+0.375*x3+0.1*u3;
x1 = xn1;
x2 = xn2;
x3 = xn3;
}
```

$\Longrightarrow$

Chaque itération

x_1

$[1.000000, 2.000000]$
$[-0.447300, 5.716500]$

Méthodologie par l'exemple

Le programme

```
while (1) {*
xn1 = -0.4375*x1+0.0625*x2+0.2652*x3+0.1*u1;
xn2 = 0.0625*x1+0.4375*x2+0.2652*x3+0.1*u2;
xn3 = -0.2652*x1+0.2652*x2+0.375*x3+0.1*u3;
x1 = xn1;
x2 = xn2;
x3 = xn3;
}
```

$\Longrightarrow$

Chaque itération

x_1

$$[1.000000, 2.000000]$$
$$[-0.447300, 5.716500]$$
$$[-2.291255, 6.573381]$$

Méthodologie par l'exemple

Le programme

```
while (1) {*
xn1 = -0.4375*x1+0.0625*x2+0.2652*x3+0.1*u1;
xn2 = 0.0625*x1+0.4375*x2+0.2652*x3+0.1*u2;
xn3 = -0.2652*x1+0.2652*x2+0.375*x3+0.1*u3;
x1 = xn1;
x2 = xn2;
x3 = xn3;
}
```

$\Longrightarrow$

Chaque itération

x_1

$[1.000000, 2.000000]$
$[-0.447300, 5.716500]$
$[-2.291255, 6.573381]$

$\downdownarrows$ 127 itérations

$[-5.197505, 8.873306]$

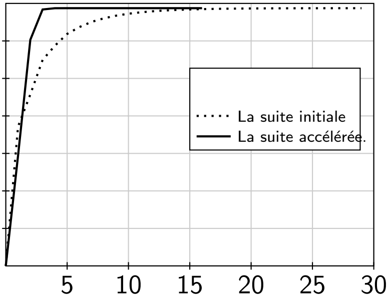
Méthodologie par l'exemple

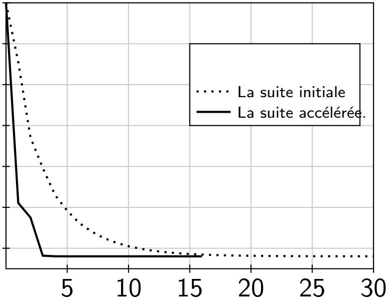
Chaque itération

x_1
$[1.000000, 2.000000]$
$[-0.447300, 5.716500]$
$[-2.291255, 6.573381]$

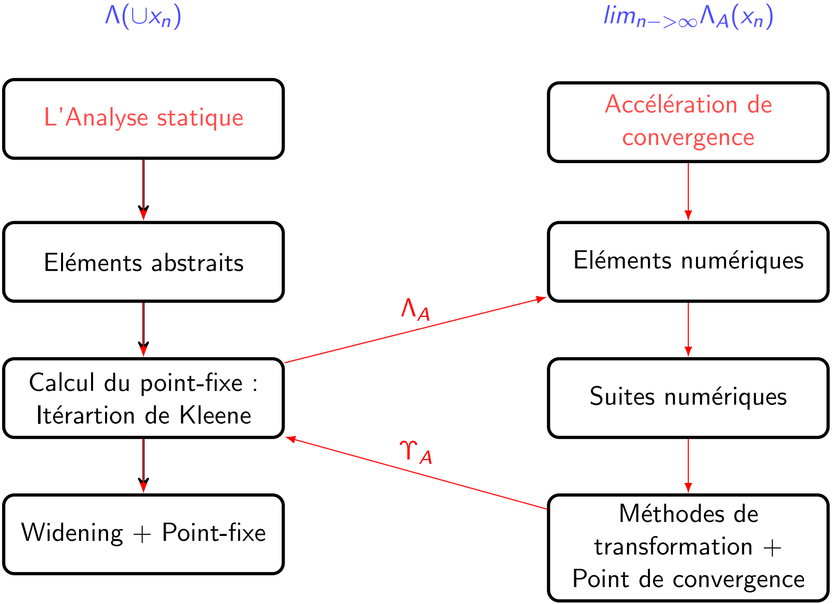
$\Downarrow$ 127 itérations

$[-5.197505, 8.873306]$





Récapitulatif.



Algorithme de Kleene accéléré

Algorithm 23 L'itération de Kleene accélérée

$\overrightarrow{X}_i := \perp$
repeat
  $\overrightarrow{X_i} := \overrightarrow{X_{i-1}} \sqcup F(\overrightarrow{X_{i-1}})$
until $\overrightarrow{X_i} \sqsubseteq \overrightarrow{X_{i-1}}$

Algorithme de Kleene accéléré

Algorithm 24 L'itération de Kleene accélérée

$\overrightarrow{X}_i := \perp$
repeat
  $\overrightarrow{X_i} := \overrightarrow{X_{i-1}} \sqcup F(\overrightarrow{X_{i-1}})$
  $\overrightarrow{y_i} := \mathit{Accelerate}\left(\Lambda_A(\overrightarrow{X_0}), \ldots, \Lambda_A(\overrightarrow{X_i})\right)$
until $\overrightarrow{X_i} \sqsubseteq \overrightarrow{X_{i-1}}$

Algorithme de Kleene accéléré

Algorithm 25 L'itération de Kleene accélérée

$\overrightarrow{X}_i := \bot$
repeat
  $\overrightarrow{X_i} := \overrightarrow{X_{i-1}} \sqcup F(\overrightarrow{X_{i-1}})$
  $\overrightarrow{y_i} := \mathit{Accelerate}\left(\Lambda_A(\overrightarrow{X_0}), \ldots, \Lambda_A(\overrightarrow{X_i})\right)$
  if $||\overrightarrow{y_i} - \overrightarrow{y_{i-1}}|| \leq \delta$ **then**
    $\overrightarrow{X_i} := \overrightarrow{X_i} \sqcup \Upsilon_A(\overrightarrow{y_i})$
  end if
until $\overrightarrow{X_i} \sqsubseteq \overrightarrow{X_{i-1}}$

Expérimentation

TABLE: Les résultats obtenus en utilisant le domaine abstrait des intervalles (avec $\delta = 10^{-3}$).

	Nombres d'itérations			Précision
Nom du programme	Kleene	Accel.	Ratio	Distance
`contraction.c`	127	17	1/6	8.10^{-12}
`butter1.c`	346	8	1/43	6.10^{-12}
`butter2.c`	180	16	1/12	5.10^{-13}
`gauss-seidl.c`	24	12	1/2	5.10^{-14}
`nonlinear1.c`	58	17	1/3	10^{-14}
`nonlinear2.c`	53	12	1/4	10^{-14}
`nonlinear3.c`	1929	7	1/275	10^{-14}

Conclusion

[1] P.Cousot and R.Cousot, *Abstract interpretation : a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints*, Symposium on Principles of Programming Languages, 1977

[2] C.Brezinski and M.Redivo Zaglia, *Extrapolation Methods-Theory and Practice*, 1991

[3] O.Bouissou, A.Chapoutot and Y.Seladji, *Acceleration of Abstract Fixpoint Computation in Numerical*, Journal of Symbolique comutation on Invariant Generation and Advanced Techniques for reasoning about loops,2011 Program Analysis

Perspectives

- Étendre notre technique d'accélération à d'autres domaines abstraits.
- Expérimenter d'autres algorithmes d'accélération de convergence.
- Comparer avec d'autres méthodes de calcul du point-fixe.
- Traiter le cas des programmes avec la structure *if-then-else* (itérations sur les politiques).