Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
14 mars 2006

Calcul différentiel

1 Quelques fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Exercice. [Contre-exemples]

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0,y) = y.$$

Montrer que f est dérivable selon tout vecteur au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

existent et sont différentes.

Exercice. [Étude d'une fonction]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2-xy} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle différentiable ?

Exercice. [Taux de variation]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad \text{si } (x,y) \notin \delta \quad \text{et} \quad F(x,x) = f'(x).$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Montrer que si $f''(a)$ existe, alors F est différentiable en (a,a).

Exercice. [Recherche d'extrémums locaux]

Donner les extremums locaux de la fonction

$$(x,y) \mapsto \frac{x^2}{2} - \sqrt{4-x^2}\cos y.$$

2 Différentiabilité et géométrie

Exercice. [Cercles tangents]
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles tangents en A. Déterminer les points $B \in \mathcal{C}$ et $B' \in \mathcal{C}'$ tels que l'aire du triangle ABB' soit maximale.

Exercice. [Tangentes à une ellipse]
Montrer que la tangente à une ellipse de foyer F et F' en un point M est une bissectrice de l'angle (MF, MF').

Exercice. [Une courbe sur un cylindre]
Soit $\mathcal{C}$ une courbe tracée sur un cylindre, paramétrée en coordonnées cylindriques par $\rho = 1$ et $z = f(\theta)$, où f est de classe C^1. On suppose que le diamètre de $\mathcal{C}$ est 2. Déterminer l'ensemble des longueurs possibles de $\mathcal{C}$.

Exercice. [Applications α-homogènes]
Soit O un cône (ie. $\forall x \in O, \forall t > 0, tx \in O$) ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f une fonction différentiable sur O, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in O, \forall t > 0, \quad f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \iff \quad \forall x \in O, \quad df_x(x) = \alpha f(x).$$

3 Différentiabilité et matrices

Exercice. [Quelques différentielles]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner les différentielles des applications suivantes (si elles existent et là où elles existent) :

(i) $A \mapsto A^t$,
(ii) $A \mapsto A^p$ (où $p \in \mathbb{N}^*$),
(iii) $A \mapsto \det(A)$,
(iv) $A \mapsto \mathrm{Com}(A)$,
(v) $A \mapsto A^{-1}$,
(vi) $A \mapsto \chi_A$.

Exercice. [Espaces tangents]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les espaces tangents des sous-variétés suivantes en l'identité :

(i) $GL_n(\mathbb{R})$,
(ii) $SL_n(\mathbb{R})$,
(iii) $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice. [Différentielle l'exponentielle de matrices]

A. Les représentations Ad et ad

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit l'automorphisme intérieur correspondant

$$\phi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA^{-1} \end{array} \right. .$$

La différentielle de cette application est

$$AdA : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA^{-1} \end{array} \right. .$$

Ceci définit l'application $Ad : GL_n(\mathbb{R}) \to L(M_n(\mathbb{R}))$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $adA \in L(M_n(\mathbb{R}))$ par

$$adA : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right. .$$

Ceci définit l'application linéaire $ad : M_n(\mathbb{R}) \to L(M_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que la différentielle de l'application Ad en l'identité est l'application ad.
2. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $Ad(\exp A) = \exp(adA)$.

B. Différentielle de l'exponentielle

Soit $M, X \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\psi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(\alpha) = \alpha.d\exp_{\alpha M}(X)$.

1. Montrer que ψ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, \quad \psi(r+s) = \psi(r)\exp(sM) + \exp(rM)\psi(s).$$

2. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle

$$\psi'(s) = \psi'(0)\exp(sM) + M\psi(s),$$

avec de plus $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = X$.

3. En utilisant la méthode de variation de la constante, montrer que

$$\exp(-M).d\exp_M : X \mapsto \frac{\mathrm{Id} - \exp(-adM)}{adM}(X).$$