Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
13 décembre 2005

Dérivabilité de fonctions d'une variable réelle

1 Liens entre les propriétés de f et de f'

Exercice. [Fonctions continues nulle part dérivables]

1. Soit Δ la fonction 1-périodique paire définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $\Delta(x) = |x|$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n}$$

est continue et nulle par dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon, A > 0$, on pose

$$U_{\varepsilon,A} = \{f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1],\ |y - x| < \varepsilon \text{ et } \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| > A\}.$$

Montrer que $U_{\varepsilon,A}$ est un ouvert (on montrera que le complémentaire est fermé) dense (pour $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$, on considèrera la fonction $x \mapsto f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N bien choisi). En considérant $(U_{\frac{1}{n},n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice. [Propriétés de parité et de périodicité]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice. [Limites en $+\infty$]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$?
2. On suppose que f' admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?
3. On suppose que f' admet une limite l en $+\infty$ et que f est bornée. Montrer que $l = 0$.

Exercice. [Limite de $\frac{f(x)}{x}$]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Chercher un contrexemple pour la réciproque.

Exercice. [$f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$]

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

2 Propriétés d'une fonction dérivée

Exercice. [Ensemble des points de continuité d'une dérivée]

1. On veut montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.

(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{\varepsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall m \geq n, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{\varepsilon,n} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, Ω_ε est un ouvert dense. En déduire que Ω est dense. Montrer enfin que Ω est contenu dans l'ensemble des points de continuité de f.

(ii) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.

2. On veut maintenant montrer qu'il existe des fonctions dérivées dont l'ensemble des points de discontinuité est dense.

(i) Montrer qu'il existe une fonction ψ dérivable sur $[-1, 1]$ dont la dérivée est continue et bornée sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ et discontinue en 0.

(ii) Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cup [0, 1]$ une bijection. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$:

$$\Psi_n(x) = \frac{\psi(x - \phi(n))}{n^2}.$$

Montrer que $\sum \Psi'_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\Psi_n(x_0)$ converge. Ainsi (admis provisoirement), $\sum \Psi_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction dont la dérivée est $\sum \Psi'_n$.

(iii) Montrer que cette dérivée est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Exercice. [Théorème de Darboux]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On va montrer dans cet exercice que l'image d'un intervalle par la dérivée de f est un intervalle. On propose trois méthodes pour montrer ce résultat.

1. *Preuve topologique* : Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et

$$G = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x < y \in I \right\}.$$

Montrer que G est connexe et que $G \subset f'(I) \subset \overline{G}$. Conclure.

2. *Pentes* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y \in (f'(a), f'(b))$. On définit deux fonctions $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Montrer que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ et en déduire l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

3. *Existence d'un maximum* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g'(a) \geq 0$ et $g'(b) \leq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$. Conclure en posant $g(x) = yx - f(x)$.

3 Autres exercices

Exercice. [Une caractérisation des polynômes]

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ \phi^{(n)}(x) = 0.$$

On va montrer que ϕ est un polynôme sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi^{(n)} = 0\}$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ et $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$.

1. Soit $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}$ tendant vers $x \in \mathbb{R}$ lorsque l tend vers ∞ telle que $\exists n \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N},\ \phi^{(n)}(x_l) = 0$. Montrer que $\forall m \geq n,\ \phi^{(m)}(x) = 0$.
2. Montrer que ϕ est polynomiale sur toute composante connexe de Ω.
3. Montrer que F n'a pas de point isolé.
4. Montrer que $F = \emptyset$ et conclure.

Exercice. [$\sum \binom{n}{k}^2$]

Soit $f_n(x) = x^n(1-x)^n$. En calculant la dérivée $n$ième de cette fonction, calculer $\sum \binom{n}{k}^2$.

Exercice. [Limite d'une somme]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et nulle en 0. Soit $l \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{i=0}^{nl} f\left(\frac{i}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.