Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
6 décembre 2005

Convergences de suites de fonctions

1 Convergence simple, convergence uniforme

Exercice. [Différentes convergences]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.
1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue, mais que la convergence n'est pas uniforme.
2. Montrer que $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas normale.

Exercice. [Convergence uniforme et composée]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans F convergeant simplement (resp. uniformément) vers une fonction f et g une fonction de F dans G.
1. La suite $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement (resp. uniformément) vers $g \circ f$?
2. Donner une condition suffisante simple sur la fonction g pour que ce soit le cas.

Exercice. [Théorèmes de Dini]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme si on suppose

(i) que la suite de fonctions est croissante,
(ii) que les fonctions sont croissantes.

Exercice. [Suite de fonctions lipschitziennes sur un compact]
Soit K un compact d'un espace vectoriel normé, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions α-lipschitziennes de K dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice. [Suite de fonctions convexes]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur le segment $[a, b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a, b[$.

Exercice. [Théorème d'Ascoli]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.
1. On suppose que

$$\forall x \in A, \exists M_x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M_x.$$

Montrer que si A est fini ou dénombrable, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur A.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, ie.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la convergence est uniforme sur tout compact.

3. Montrer réciproquement que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact, elle est uniformément bornée sur tout compact et équicontinue.

Exercice. [Critère de convergence uniforme]

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f et telle que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ convergente vers x, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

1. Montrer que f est continue.

2. En déduire la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

2 Densité des polynômes

Exercice. [Polynômes de Bernstein]

1. Soit $B_{n,k} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme de Bernstein défini par

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nX)^2 B_{n,k} = nX(1-X).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1[$, on pose

$$A_{n,x,\alpha} = \left\{ k \in \{0, \dots n\} \mid \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \alpha \right\}.$$

Montrer que

$$\sum_{k \in A_{n,x,\alpha}} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On définit

$$P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

Montrer que la suite $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. En déduire que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme (Théorème d'approximation par des polynômes de Weierstrass).

Exercice. [Polynômes à coefficients entiers]

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$.

1. Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = 2x(1-x)$. Montrer que la suite de fonction $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\Phi_n = \Phi \circ \ldots \circ \Phi$) converge uniformément vers la fonction constante à $1/2$.

2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $C(I,\mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.