Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
22 novembre 2005

Topologie

1 Généralités

Exercice. [Intérieur de la boule fermée, adhérence de la boule ouverte]

Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Comparer l'intérieur (resp. l'adhérence) de la boule fermée (resp. ouverte) de centre x et de rayon r avec la boule ouverte (resp. fermée) de même centre et de même rayon.

Que peut-on dire lorsque l'espace est un espace vectoriel normé ?

Exercice. [Sommes de parties ouvertes et fermées]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Si $A, B \subset E$, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A+B$ est fermé. Ce résultat subsiste-t-il si on suppose juste A fermé.

Exercice. [Points isolés et dénombrabilité]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et qu'il est dense dans $\mathbb{R}^n$.

2. Soit A une partie dont tous les points sont isolés. Montrer que A est au plus dénombrable.

Exercice. [Espaces de Baire]

1. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E,

(ii) toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de E est d'intérieur vide.

Un espace satisfaisant ces conditions est appelé espace de Baire

2. Montrer qu'un espace complet est un espace de Baire (théorème de Baire).

Exercice. [Caractérisation séquentielle de la continuité]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^+ \to E$. On définit les deux propositions :

$$(P) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad (Q) : \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{n\to\infty} f(ny) = 0.$$

Il est clair que $(P) \Rightarrow (Q)$.

1. A-t-on $(Q) \Rightarrow (P)$?

2. On suppose f uniformément continue. Montrer que $(Q) \Rightarrow (P)$.

3. On suppose f continue. Montrer que $(Q) \Rightarrow (P)$. (On pourra dans un premier temps montrer que pour tous réels $0 \le \alpha \le \beta$ et tout entier p, il existe un réel γ tel que

$$]\gamma, \infty[\subset \bigcup_{k\ge p}]k\alpha, k\beta[,$$

puis utiliser le théorème de Baire pour conclure).

Exercice. [Recouvrement par des cercles]

1. Soit S une sphère de $\mathbb{R}^3$ à laquelle on a retiré deux points quelconques. Montrer qu'il est possible de recouvrir S par des cercles disjoints. Montrer que l'intersection de toute sphère de $\mathbb{R}^3$ centrée en 0 avec l'union disjointe des cercles de centre $(4k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$ et de rayon 1 contenus dans le plan $z=0$ est constituée d'exactement deux points. En déduire un recouvrement de $\mathbb{R}^3$ par des cercles disjoints.

2. Montrer qu'il est impossible de recouvrir $\mathbb{R}^2$ avec des cercles disjoints. Que peut-on dire du recouvrement d'une sphère privée d'un point par des cercles disjoints ?

Exercice. [Sous-groupes particuliers de $(\mathbb{C}^*, \times)$]

Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ qui sont

(i) finis,

(ii) compacts,

(iii) fermés dans $\mathbb{C}^*$,

(iv) ouverts dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice. [Construction de distance]

1. Soient (E,d) un espace métrique et $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) Ψ croissante,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \Psi(x+y) \leq \Psi(x) + \Psi(y)$.

Montrer que l'application $\delta : E \times E \to \mathbb{R}^+$, définie par $\forall x, y \in E, \quad \delta(x,y) = \Psi(d(x,y))$, définit une distance sur E.

2. Soient E un espace et $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de distances sur E. Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, définie par

$$\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(x,y)}{2^i},$$

définit une distance sur E.

3. Application : soient E un espace et $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de distances sur E. Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, définie par

$$\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(x,y)}{2^i(1 + d_i(x,y))},$$

définit une distance sur E.

Exercice. [Espaces ultra-métriques]

On dit qu'un espace métrique (E,d) est ultra-métrique si

$$\forall x, y, z \in Z, \quad d(x,z) \leq \max[d(x,y), d(y,z)].$$

1. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$, cette inégalité est une égalité. En déduire que tous les triangles sont isocèles.

2. Montrer que toute boule ouverte (resp. fermée) est ouverte et fermée. Montrer que tout point contenu dans une boule est centre de cette boule.

3. Montrer que l'ensemble des boules ouvertes de rayon $r > 0$ contenues dans la boule fermée de centre x et de rayon r partitionnne cette boule, deux boules distinctes étant à une distance mutuelle r.

4. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(u_n, u_{u+1}) = 0$.

Exercice. [Exemples d'espaces ultra-métriques]

1. Soit $E = \mathbb{K}[[T]]$ l'ensemble des séries formelles sur un corps $\mathbb{K}$. On pose $d(S,T) = e^{-\omega(S-T)}$ si $S \neq T$ et $d(S,S) = 0$ (où $\omega(S)$ est l'ordre de la série formelle S). Montrer que (E,d) est un espace ultra-métrique. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}[[T]]$ au sens de d.

2. Soit p un nombre premier et $\omega \in]0,1[$. Tout rationnel x s'écrit de manière unique $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ où $\alpha, a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que a et b soient premiers entre eux et premiers avec p. On pose alors $|x| = \omega^\alpha$ (et $|0| = 0$). Montrer que l'on définit ainsi une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ et que la distance associé fait de $\mathbb{Q}$ un espace ultra-métrique.

2 Compacité, connexité

Exercice. [Précompacité]

1. On dit qu'un espace métrique (E,d) est précompact si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε. Montrer qu'un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.

2. On dit qu'un espace topologique E est séparable si il existe une partie de E dénombrable et dense dans E. Montrer qu'un espace compact est séparable.

Exercice. [Distance entre deux compacts disjoints]

Soient (E,d) un espace métrique et F, G deux parties compactes disjointes de E.

1. Montrer que la distance entre les deux compacts est atteinte et donc strictement positive.

2. Montrer qu'il exite deux ouverts U, V de E tels que

(i) $F \subset U$ et $G \subset V$,

(ii) $U \cap V = \emptyset$.

Exercice. [Connexité d'un ensemble de valeurs d'adhérence]

Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

Le résultat subsiste-t-il si E n'est plus supposé compact.

Exercice. [Espaces bien enchaînés]

Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on dit que E est ε-enchaîné si pour tout $x, y \in E$, il existe un entier n et des éléments $x_0, \dots, x_n$ tels que $x = x_0$, $y = x_n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$. On dit que E est bien enchaîné si pour $\varepsilon > 0$, E est ε-enchaîné.

1. Soit $\varepsilon < \varepsilon'$. Montrer que si E est ε-enchaîné, alors il est ε'-enchaîné et que la réciproque est fausse. Donner des exemples d'espaces métriques qui sont bien enchaînés et d'espaces métriques qui ne le sont pas.

2. Montrer qu'un espace métrique connexe est bien enchaîné.

3. Montrer que la réciproque est vraie lorsque E est supposé compact. Que se passe-t-il lorsque l'espace n'est plus supposé compact ?

Exercice. [Théorème de Jung]

Soit X un compact de $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne et δ sont diamètre (ie. $\delta = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in X\}$). Montrer que X est contenu dans une unique boule fermée de rayon minimum r. Montrer de plus que

$$r \leq \delta \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}},$$

cette inégalité étant la meilleure possible.