Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

18 octobre 2005

Algèbre linéaire

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$. E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ qui ne sont pas a priori de dimension finie. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$, celui des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{GL}(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E. Pour tout $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, on note $\mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $r \times s$ et $\mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille r.

1 Compositions d'applications linéaires

Exercice. [CNS d'inversibilité]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $\forall g \in \mathcal{L}(F,E)$, $f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$.

Exercice. [CNS pour que $\mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(v)$]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(v)$ si et seulement si il existe $x \in \mathcal{GL}(F)$ et $y \in \mathcal{L}(E)$ tels que $x \circ u = v \circ y$.

Exercice. [Pseudo-inverses]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On considère les trois conditions suivantes

(i) $f \circ g \circ f = f$,
(ii) $g \circ f \circ g = g$,
(iii) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.

Montrer que si f et g satisfont deux de ces conditions, alors ils satisfont aussi la troisième.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ qui satisfait les trois conditions de la question précédente.

3. Soient $f, g, h, \tilde{f}$ et $\tilde{g}$ des endomorphismes de E tels que $f \circ \tilde{f} \circ f = f$ et $g \circ \tilde{g} \circ g = g$. Montrer qu'il existe $i \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ i \circ g = h$ si et seulement si $f \circ \tilde{f} \circ h \circ \tilde{g} \circ g = h$.

Exercice.[Endomorphismes dont le noyau et l'image sont en somme directe]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ inversible.

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $Ker(u) = Ker(u^2)$,
(ii) $Im(u) = Im(u^2)$,
(iii) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.

Exercice. [Théorème d'extension et de relèvement linéaires]

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $u = w \circ v$ (extension linéaire).

2. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(F,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire $v \in \mathcal{L}(E,G)$ telle que $u = w \circ v$ (relèvement linéaire).

2 Dualité

Exercice. [Matrices de passage et dualité]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie d. Soient $(e_1, \dots, e_d)$ et $(f_1, \dots, f_d)$ deux bases de E et $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ et $(f_1^*, \dots, f_d^*)$ leurs bases duales. On note P (resp. Q) la matrice de passage entre $(e_1, \dots, e_d)$ et $(f_1, \dots, f_d)$ (resp. entre $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ et $(f_1^*, \dots, f_d^*)$. Quelle relation existe-t-il entre P et Q ?

Exercice. [Formes p-linéaires]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ (formes p-linéaires alternées) ? Même question avec les formes p-linéaires alternées symétriques (resp. antysimétriques).

Exercice. [Dualité et géométrie]
1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E^* son espace dual. Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ des formes linéaires indépendantes de E^*. Montrer que pour toute forme linéaire $\psi \in E^*$,

$$\psi \in \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_n) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} Ker\phi_i \subset Ker\psi.$$

2. En déduire que si ϕ_1 et ϕ_2 sont les formes linéaires associées à deux plans H_1 et H_2 de $\mathbb{R}^3$, alors la forme linéaire associée à tout plan H contenant la droite commune à H_1 et H_2 peut s'écrire $\psi = \cos\theta\phi_1 + \sin\theta\phi_2$ pour un θ bien choisi.

3. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ définie par $4x + y + z = 0$ et $2x + 5y + 3z + 4 = 0$. Déterminer les équetions des plans contenant D et dont la distance au point $(1, 1, 1)$ est 1.

Voir aussi exercices «fonction multiplicative» et «fonction commutative» sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

3 Calcul matriciel

Exercice. [Matrices élémentaires]
On note δ_{ij} le **symbole de Kronecker** du couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. On appelle **matrices élémentaires** les matrices

(i) **base canonique** : pour $(k, l) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$, $E_{kl} = [\delta_{ik}.\delta_{jl}]_{i,j} \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$,
(ii) **transvection** : pour $k \neq l \in \{1, \dots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{kl}(\lambda) = I_r + \lambda E_{kl} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$,
(iii) **dilatation** : pour $k \in \{1, \dots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_k(\lambda) = I_r + (\lambda - 1)E_{kk} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$,
(iv) **permutation** : pour $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $P_\sigma = [\delta_{i\sigma(j)}]_{i,j} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Expliquer la correspondance entre le produit par les matrices élémentaires d'une matrice et les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de cette matrice. Présenter le pivot de Gauss.
2.Calculer $E_{kl} \times E_{mn}$ pour tout $(k, l, m, n) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}^2 \times \{1, \dots, t\}$.
3. Calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$. En déduire P_σ^{-1}.
4. Calculer $P_\sigma \times E_{kl} \times P_{\sigma'}$ (resp. $P_\sigma \times T_{kl}(\lambda) \times P_\sigma^{-1}$, resp. $P_\sigma \times D_k(\lambda) \times P_\sigma^{-1}$) pour $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $\sigma' \in \mathfrak{S}_s$ (resp. $\mathfrak{S}_r$, resp. $\mathfrak{S}_r$) et $(k, l) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$ (resp. $(k \neq l) \in \{1, \dots, r\}^2$, resp. $k \in \{1, \dots, r\}$).

Exercice. [Commutation de matrices]
1. Montrer qu'une matrice qui commute avec toutes les autres (resp. avec toutes les matrices inversibles) est la matrice d'une homothétie.

2. Montrer qu'une matrice qui commute avec toutes les matrices diagonales (resp. avec une matrice diagonale dont les coefficients sont distincts) est diagonale.

Exercice. [Fonction multiplicative sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$]

On considère une fonction ψ de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\psi(A \times B) = \psi(A)\psi(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On suppose de plus que ψ n'est pas constante.

1. Montrer que $\psi(I_r) = 1$ et $\psi(0_r) = 0$. En déduire que $\psi(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible.
2. Montrer que $\psi(T_{kl}(\lambda))$ et $\psi(D_k(\lambda))$ ne dépendent pas de k et l.
3. On suppose que ces deux valeurs sont des polynômes en λ. Montrer qu'alors ψ est une puissance du déterminant.

Exercice. [Fonction commutative sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$]

On considère une forme linéaire ϕ de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\phi(A \times B) = \phi(B \times A)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On suppose de plus que ϕ n'est pas constante. Déterminer ϕ.

Exercice. [Lorsque le déterminant devient additif]

Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ (avec $r \geq 2$ et $car(\mathbb{K}) \neq 2$) telle que $\forall X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

Exercice. [Matrices de trace nulle]

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non triavial. Déterminer les endomorphismes f de E tels que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ est liée.
2. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

Exercice. [Matrices par blocs]

Les deux questions suivantes sont complètement indépendantes

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs par

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Le but de ce qui suit est de montrer que le déterminant de cette matrice est positif. On introduit la matrice $P \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})$ définie par

$$P = \begin{bmatrix} I_r & I_r \\ iI_r & -iI_r \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
b. Calculer $P^{-1}MP$.
c. Montrer que $\det(M) \leq 0$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs par

$$M = \begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A)$.
b. Si M est inversible, calculer son inverse.