Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

27 septembre 2005

Suites numériques
Séries numériques

1 Suites numériques

Exercice. [Analogie séries-fonctions]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in]0,1[\quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Montrer qu'elle converge vers 0 et donner un équivalent de u_n. Continuer le développement asymptotique jusqu'à épuisement.

Autres énoncés :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n),$$

$$u_1 \in]0,1] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2},$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1-\cos(u_n).$$

2 Séries numériques

Exercice. [Autour du cours]
1. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. Montrer que

$$\sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \text{ est majorée.}$$

Montrer que si la série diverge, alors

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n) \sim_{N\to\infty} \int_0^N f(t)dt.$$

Donner un équivalent du reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$ lorsque

$$f(n) = o_{n\to\infty}\left(\int_N^{+\infty} f(t)dt\right) \quad \text{(resp. lorsque } \int_N^{+\infty} f(t)dt = o_{n\to\infty}(f(n))\text{)}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in [0;+\infty]$. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$, de ses sommes partielles et de ses restes en fonction des valeurs de λ ?

3. Rappeler le critère de convergence des séries alternées. Donner des contre-exemples lorsque les hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

4. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\psi(0) = 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{i=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_i.$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'elles ont la même somme en cas de convergence.

Donner un contre-exemple dans le cas où les séries ne sont plus à termes positifs. Quelles hypothèses peut-on ajouter pour que le résultat reste vrai dans le cas de séries à termes quelconques ?

5. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum u_{\sigma(n)} = \sum u_n$.

Montrer que si $\sum u_n$ est une série semi-convergente,

$$\forall \lambda \in]-\infty, +\infty[, \exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}) \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda.$$

Exercice. [Constante d'Euler]

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1),$$

où γ est la constante d'Euler, que l'on déterminera.

Exercice. [Formule de Stirling]

Montrer que

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice. [Intégrabilité de $t \to \frac{\sin t}{t}$]

Montrer que $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite quand $x \to +\infty$ mais que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable.

Exercice. [Méthode du développement asymptotique]

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n})}{n + (-1)^n}.$$

Autres énoncés :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n},$$

$$u_n = (-1)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right].$$

Exercice. [Regroupements]

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k u_k.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ aussi et que les deux séries ont la même somme.

Exercice. [Suite décroissante]
Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k = 0.$$

En déduire que si $\sum a_n$ converge, alors $a_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
Montrer que le résultat est faux quand on ne suppose plus la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice. [Séries associées]
1. Soit $\sum a_n$ une série réelle positive divergente. Étudier la nature des séries

$$\sum a_n^2, \quad \sum \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}.$$

2. Soit $\sum a_n$ une série réelle positive convergente. Étudier la nature des séries

$$\sum a_n^2, \quad \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\lambda}\ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad \sum \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{1+n^2 a_n}.$$

Exercice. [Série des inverses des nombres premiers]
Pour tout entier n, on note p_n le n-ième nombre premier et $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs à n.
1. Montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge. [Indication : on pourra montrer que si ce n'est pas le cas, les séries

$$\sum \frac{1}{p_n} \quad \text{et} \quad \prod \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

sont de même nature et trouver une absurdité].

2. En déduire que $\pi(n) = o_{n\to+\infty}(n)$.

Exercice. [Permutations]
Soit $\phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$. Quelle est la nature des séries

$$\sum \frac{\phi(n)}{n^2}, \quad \sum \frac{\phi(n)}{n^2 \ln n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\phi(n)}{n^3}\ ?$$

3 Informatique

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la série $\sum \frac{1}{n^2}$ dont on veut accélérer la convergence. On montre d'abord que la somme de cette série vaut $\frac{\pi^2}{6}$, puis on propose deux méthodes d'accélération pour le calcul approché de cette somme.

Exercice. [Séries de Fourrier et calcul de la somme]
En considérant la fonction $t \to \frac{\pi - t}{2}$, montrer que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

puis que $\sum \frac{1}{2n+1}^2 = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice. [Accélération en $\frac{1}{n^2}$]
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Montrer que $R_n \sim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$.
Montrer que $T_n = S_n + \frac{1}{n}$ tend vers S par excès.
Montrer que

$$T_n - S \leq \frac{1}{n^2}.$$

Exercice. [Méthode de Stirling : accélération en $\frac{1}{n^3}$]
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k}(x+i)}.$$

Par ailleurs, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, on définit la fonction Δf sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

1. Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et f_k.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$, la série $\sum_l f_k(l)$ converge et que

$$\sum_{l=n+1}^{+\infty} f_k(l) = \frac{1}{k \prod_{i=1}^{k}(n+i)}.$$

3. Montrer que pour tous $p, q \geq 1$,

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

4. On pose pour $n, q \geq 1$

$$T_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k \prod_{i=1}^{k}(n+i)}.$$

Montrer que

$$0 \leq S - T_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\ldots(n+q)}.$$

5. Conclure en s'intéressant au cas où $q = 2$.