Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
20 septembre 2005

Théorie des ensembles
Suites numériques

1 Théorie des ensembles

Exercice. [Intersection de relations]

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations binaires définies sur E. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{P}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ \mathcal{S} & \longmapsto & R_{\mathcal{S}} \end{array}$$

où $R_{\mathcal{S}}$ est définie par $xR_{\mathcal{S}}y \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{S}, xRy$. Montrer que cette application est surjective. Est-elle injective ? Montrer qu'elle envoie un ensemble non vide de relations d'équivalence (resp. d'ordre) sur une relation d'équivalence (resp. d'ordre).

2. Soit X un ensemble et $f : E \to X$. On note R_f la relation d'équivalence sur E associée à f, c'est-à-dire la relation définie par $xR_fy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Montrer que pour toute partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ contenant R_f, il existe une unique application $f_{\mathcal{S}}$ de $E/R_{\mathcal{S}}$ dans X telle que $f = f_{\mathcal{S}} \circ \pi$ où π désigne la surjection canonique de E sur $E/R_{\mathcal{S}}$.

Exercice. [Relation d'ordre induite]

1. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq_E$ et d'une relation d'équivalence R_E. On considère la relation $\prec$ définie sur l'ensemble quotient E/R_E par

$$\forall (X, Y) \in (E/R_E)^2,\ X \prec Y \Leftrightarrow (\forall x \in X, \exists y \in Y, x \leq_E y).$$

a. On suppose que

$$(*) \quad \forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \leq_E y \leq_E z \text{ et } xR_Ez) \Rightarrow xR_Ey.$$

Monter que $\prec$ est une relation d'ordre sur E/R_E.

b. Montrer qu'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq_E$ et de la relation d'égalité satisfait la condition $(*)$.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq_E$ et F un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq_F$ et d'une relation d'équivalence R_F. Soit f une application croissante de E dans F et R_E la relation d'équivalence sur E définie par $xR_Ey \Leftrightarrow f(x)R_Ff(y)$. Montrer que si $(F, \leq_F, R_F)$ vérifie la condition $(*)$, alors $(E, \leq_E, R_E)$ aussi. Discuter la réciproque.

c. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la relation d'ordre classique et R_E la congruence modulo 2. Montrer que la condition $(*)$ n'est pas vérifiée, mais que la relation $\prec$ est une d'ordre sur E/R.

2. On revient à un ensemble E quelconque et on suppose que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur E/R_E.

a. Soit p la projection canonique de E sur E/R_E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que p soit une application croissante.

b. Soit F un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq_F$ et f une application croissante de E/R_E dans F. Montrer que si $f \circ p$ est croissante, alors f est croissante.

Exercice. [Cardinal d'une relation d'équivalence]

Soit M un ensemble de cardinal m, et R une relation d'équivalence sur M de cardinal r et avec s classes d'équivalence. Montrer que $m^2 \leq rs$.

Exercice. [Relation d'ordre sur un quotient]

Soit E un ensemble et R une relation réflexive et transitive sur E. On considère la relation $\tilde{R}$ sur E définie par $x\tilde{R}y \Leftrightarrow xRy$ et yRx. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.

Montrer que la relation R passe au quotient $E/\tilde{R}$ et qu'elle y définit une relation d'ordre.

Exercice. [Existence d'un idempotent]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative. Monter qu'il existe $s \in E$ tel que $s^2 = s$.

Exercice. [Ordre déduit d'une loi idempotente]

On considère un ensemble E muni d'une loi interne $\star$ commutative, associative et idempotente (ie. $\forall x \in E, x\star x = x$). On considère la relation binaire $\leq$ définie par $x \leq y \Leftrightarrow x\star y = x$.

Montrer que c'est une relation d'ordre.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = \inf(\{x, y\})$.

Identifier l'ordre $\leq$ lorsque la loi $\star$ est la loi $\cup$ (resp. $\cap$) sur l'ensemble des parties d'un ensemble X.

Exercice. [Théorème de Cantor-Bernstein]

Soit X un ensemble, $Y \subset X$ et f une injection de X dans Y. On définit par récurrence les ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $A_0 = X \setminus Y$ et $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. Montrer que les ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

3. En déduire une bijection de X sur Y.

4. Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein : si il existe une injection de A dans B et de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

Exercice. [Parties d'un ensemble]

Soit A un ensemble infini.

1. Soit X une partie dénombrable de A telle que $A \setminus X$ infini. Montrer que A et $A \setminus X$ sont équipotents.

2. On veut montrer que A et $\mathcal{P}(A)$ ne peuvent pas être en bijection. En supposant qu'une telle bijection f existe, et en considérant l'ensemble $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$, montrer ce résultat.

Exercice. [Indénombrabilité de $\mathbb{R}$]

1. Soit E un ensemble infini totalement ordonné dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. On suppose en outre que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x < y) \Rightarrow (\exists z \in E, x < z < y).$$

Montrer que E n'est pas dénombrable.

2. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $]0, 1[$. En considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \lfloor 10^{n+1} f(n) \rfloor - 10\lfloor 10^n f(n) \rfloor + 1,$$

montrer que f n'est pas surjective.

2 Suites numériques

Exercice. [Suites linéaires récurrentes]
On fixe $m \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.
Déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+m+1} = \sum_{i=0}^{m} a_i x_{n+i}.$$

Exercice. [Développement en série de Engel]
Soit $x \in]0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite croissante d'entiers $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $e_0 \geq 2$ et $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e_0 e_1 \ldots e_i}$. Cette suite est appelée développement en série de Engel de x.

2. Montrer que x est rationnel si et seulement si son développement en série de Engel est stationnaire.

Exercice. [Développement en base 2]

1. À toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{k=0}^{i} a_k}{2^i}.$$

Montrer que cette suite converge vers une limite $f(a) \in [-2,2]$.

2. Montrer qu'à tout élément x de $[-2,2]$, on peut associer une suite $a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(a) = x$. Cette suite est-elle unique ?

3. En utilisant l'égalité $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sin(2h)}$ pour $|h| \leq \frac{\pi}{4}$, montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ et tout entier n,

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} b_n\right) = a_0\sqrt{2 + a_1\sqrt{2 + \ldots + a_{n-1}\sqrt{2 + a_n\sqrt{2}}}}.$$

4. Étudier la suite de terme général $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$.

Exercice. [Suite sous-additive]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

1. la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,
2. $\forall m, n \in \mathbb{N}, a_m + a_n \leq a_{m+n}$.

Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice. [Monotonie]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(x+k).$$

Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la monotonie de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \ln k.$$

Exercice. [Développement asymptotique]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Quelle est la limite de cette suite en $+\infty$? Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice. [Suite récurrente]

Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$.

3 Informatique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $(b_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ la décomposition de n en base 2, c'est-à-dire que $\forall i \in \mathbb{N}, b_i(n) \in \{0, 1\}$ et

$$n = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i(n)2^i.$$

On pose

$$B(n) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i(n) \quad \text{et} \quad S_n = (-1)^{B(n)}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite de Thue-Morse**.

Un **facteur** de **longueur** p d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite finie $(v_n)_{n\in\{0,\ldots,p-1\}} \in E^p$ telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $u_{N+k} = v_k$. L'entier N s'appelle alors **début d'occurence** de v dans u. On note $occ[v, u]$ l'ensemble des débuts d'occurence de v dans u et $R[v, u] = \min occ[v, u]$. On note

$$\rho_u(p) = \max_{v\in E^p} R[v, u] \quad \text{et} \quad F_u(p) = p + \rho_u(p).$$

On désigne enfin par $P_u(p)$ le nombre de facteurs de longueur p de la suite u.

Exercice. [Facteurs impossibles, congruence des débuts d'occurence]

Montrer que $S_{2n} = S_n$ et que $S_{2n+1} = -S_n$.

En déduire que si n est pair, alors $S_{n+1} = -S_n$.

Montrer qu'aucune des suites $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1, 1, -1)$ n'est facteur de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit t un facteur de la suite de Thue-Morse de longueur au moins 4. Montrer que si m et n sont deux débuts d'occurence de t, alors $m \equiv n \mod 2$.

Exercice. [Expressions explicites des suites $(\rho_S(p))_{p\in\mathbb{N}}$, $(F_S(p))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(P_S(p))_{p\in\mathbb{N}}$]

Montrer que

$$\forall p \geq 3, \quad \rho_S(p) = 2\rho_S\left(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor + 1\right) + 1,$$

$$\forall p \geq 3, \quad F_S(p) \leq 2F_S\left(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor + 1\right),$$

$$\forall p \geq 3, \quad P_S(2p) = P_S(p+2) + P_S(p) \quad \text{et} \quad P_S(2p+1) = 2P_S(p+1).$$

En déduire que

$$\forall p \geq 3, \quad \rho_S(p) = 3.2^{\ln_2(p-2)} - 1,$$

$$\forall p \geq 3, \quad F_S(p) \leq 8(p-2),$$

$$\forall p \geq 3, \quad P_S(p) \leq 4(p-1).$$

Exercice. [Un produit étrange]

Le but de l'exercice est de montrer que

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{S_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On pose

$$P=\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{S_n},\quad Q=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{S_n}\quad\text{et}\quad R=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{S_n}.$$

Montrer que P, Q et R sont des produits convergents, puis que $PQ=\frac{1}{2}R$ et que $R=\frac{Q}{P}$. En déduire le résultat.