

TROISIÈME PARTIE

Applications

CHAPITRE V

Structures et identifiabilité

Utilisant les notations de [K2], on a noté ci-dessus par θ un opérateur différentiel. Mais il est habituel dans de nombreux articles de désigner par θ le vecteur des paramètres d'une structure. C'est l'emploi qui en sera fait au cours de ce chapitre.

§ 1. STRUCTURES ET MODÈLES

1. Processus réel

Avant d'introduire une notion abstraite de modèle, tentons d'explicitier certaines hypothèses faites a priori sur le processus réel que l'on veut décrire. On peut supposer qu'il s'agit d'un dispositif expérimental, par exemple un montage de verrerie réalisé par un chimiste et dans lequel réagissent différentes substances. L'état d'un tel système peut être décrit à un instant donné par certaines grandeurs physiques, telles que la concentration des différentes espèces dans une éprouvette ou sa température.

Il évolue au cours du temps selon une loi qui dépend d'une part de paramètres internes, qui sont des constantes physiques comme le volume d'un récipient ou une constante de vitesse ; d'autre part de l'action de l'expérimentateur qui peut à tout instant introduire certaines substances en quantités arbitraires, modifier la température ou la pression etc. . .

L'expérience se concrétise par une moisson de mesures, que l'on suppose réalisées continûment au cours du temps. Les valeurs mesurées dépendent de l'état du système, mais les grandeurs d'état ne sont pas nécessairement directement mesurables, ni les paramètres internes connus. En revanche, on suppose connue l'action de l'expérimentateur, sous forme d'une ou de plusieurs fonctions dépendant du temps.

La modélisation va nécessiter le choix d'un protocole expérimental définissant les actions possibles de l'expérimentateur et les mesures qui seront effectuées parmi celles qui sont théoriquement et matériellement réalisables. Ensuite, on proposera une loi d'évolution du système, ce qui suppose le choix de grandeurs d'état significatives, si possible en nombre fini, et de paramètres internes a priori connus ou inconnus. On a alors défini une *structure*.

Le problème est désormais de déterminer un ensemble de valeurs pour les paramètres internes, compatibles avec les mesures effectuées. Cette évaluation définit un *modèle*, permettant ensuite de prédire l'évolution du système et éventuellement de le commander. Une première approche considère le système comme une boîte noire, cherchant à décrire son comportement entrée-sortie sans se soucier de savoir si le modèle choisi correspond bien à la réalité physique.

Une seconde approche consiste à vouloir identifier avec certitude le modèle correspondant au processus réel. Il importe alors de pouvoir déterminer un modèle unique en fonction de l'expérience. C'est ce point de vue qui sera adopté par la suite.

2. Une classe de modèles

Les modèles que l'on considère correspondent aux hypothèses décrites au n°1. On impose néanmoins quelques restrictions quant à la forme mathématique de la loi décrivant le processus.

DÉFINITION 1. — *On appellera modèle paramétré, ou structure, sur un corps k , égal à \mathbf{R} ou \mathbf{C} la donnée d'entiers n, m, p et r , d'ensembles $D \subset k^r$ de paramètres admissibles, $E \subset k^n$ de vecteurs d'état admissibles, d'une classe d'applications $U \subset \text{appl}(\mathbf{R}^+, k^m)$, de deux applications*

$$\begin{aligned} f : E \times D \times \mathbf{R}^+ \times k^m &\mapsto E \\ g : E \times D &\mapsto k^p, \end{aligned}$$

et d'une famille d'applications

$$h_i : D \mapsto k ; i \in I \subset \{1, \dots, n\}.$$

On appellera système d'équations d'état du modèle paramétré le système

$$(1) \quad \begin{aligned} dx/dt &= f(x, \theta, t, u(t)) \\ y &= g(x, \theta), \end{aligned}$$

et conditions initiales les équations du système

$$x_i(0) = h_i(\theta); i \in I,$$

où $t \in \mathbf{R}^+$ est le temps, $x \in E \subset k^n$ est le vecteur d'état, $y \in k^p$ est le vecteur d'observation et $\theta \in D \subset k^r$ est le vecteur des paramètres internes.

En donnant au vecteur des paramètres une valeur θ_0 particulière on obtient un modèle de la structure qui sera noté $M(\theta)$ si la structure est notée M .

Cette définition est conforme à l'idée intuitive qui a été développée, puisqu'on obtient un modèle du processus réel en fixant les valeurs des paramètres internes.

3. Structures particulières

Les structures linéaires auront par la suite un intérêt particulier, car on peut tester plus facilement par le calcul un certain nombre de leurs propriétés.

DÉFINITION 2. — On appelle *structure linéaire* une structure pour laquelle le système d'équation d'état est de la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} dx/dt &= A(t, \theta)x + B(t, \theta)u(t) \\ y &= C(t, \theta)x, \end{aligned}$$

où A , B et C sont des matrices de tailles respectives $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$ dont les coefficients sont des fonctions du vecteur des paramètres θ et du temps t .

On dira qu'une structure est *stationnaire* si les fonctions f , g et h de la def. 2.1. sont indépendantes du temps, et qu'elle est *polynomiale* ou *rationnelle* si ces fonctions le sont. Enfin, on dira qu'elle est à *conditions initiales nulles* si les fonctions h_i définissant ces conditions sont nulles.

§ 2. COMPORTEMENT ENTRÉE-SORTIE

1. Définition

DÉFINITION 1. — On appelle *comportement entrée-sortie* du modèle $M(\theta)$, défini en reprenant les notations de § 1, n° 1, déf. 1 l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \quad U &\mapsto \text{appl}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^p) \\ u &\mapsto y. \end{aligned}$$

Le comportement entrée-sortie de la structure M est l'application $\mathcal{C}(\theta)$ qui à tout vecteur de paramètres θ de D associe le comportement entrée-sortie du modèle $M(\theta)$.

2. Résumés exhaustifs

Le comportement entrée-sortie d'une structure est un objet trop peu maniable pour être utilisé directement dans les applications, c'est pourquoi on cherche à lui substituer une fonction des paramètres internes plus simple, mais en un sens équivalente.

DÉFINITION 2. — Soit M une structure, D son domaine de paramètres admissibles et \mathcal{C} son comportement entrée-sortie, on appelle *résumé* (resp. *résumé exhaustif*), une application ρ de D dans un ensemble E telle que

$$\begin{aligned} &\forall(\theta, \theta') \in D^2 \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \rho(\theta) = \rho(\theta') \\ (\text{resp.}) \quad &\forall(\theta, \theta') \in D^2 \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \iff \rho(\theta) = \rho(\theta'). \end{aligned}$$

Nous allons indiquer deux résumés exhaustifs bien connus, dans le cas des structures linéaires stationnaires avec conditions initiales nulles — on dira en abrégé *SLSCIN*.

DÉFINITION 3. — On appelle *paramètres de Markov* d'une structure linéaire stationnaire définie en reprenant les notations de 1.3 déf. 2, les coefficients des matrices CA^iB ; $i = 0, \dots, 2n - 1$

DÉFINITION 4. — On appelle *matrice de transfert* la matrice $H(\lambda) = C(\lambda \text{Id} - A)^{-1} B$ où Id désigne la matrice identité.

PROPOSITION 1. — Les paramètres de Markov d'une structure SLSCIN forment un résumé exhaustif.

PREUVE. Développant en série à l'origine les fonctions y_i pour une entrée analytique générique, on voit aisément que les matrices $CA^iB; i \in \mathbf{N}$ forment un résumé exhaustif. Le fait de pouvoir se restreindre à $i \leq 2n - 1$ provient du théorème de Cayley-Hamilton. ■

PROPOSITION 2. — Considérant une SLSCIN et ayant mis les fractions de la matrice de transfert sous forme canonique, par exemple en chassant les facteurs communs et en rendant le coefficient principal du dénominateur égal à 1, les coefficients de λ dans le dénominateur et numérateur de toutes les fractions forment un résumé exhaustif.

PREUVE. On trouve aisément ce résultat en considérant la transformée de Laplace de la sortie y . ■

§ 3. PROPRIÉTÉS DES MODÈLES

1. Identifiabilité

La présentation qu'on trouvera ici doit beaucoup aux travaux de WALTER, LECOURTIER, RAKSANYI. Elle ne prétend pas à l'exhaustivité. En particulier, d'autres méthodes de test existent, qui ne sont pas évoquées ici. Pour une vue plus large du sujet, on se reportera à [Wa1], [Wa2], où à l'article de BELLMAN [Bel].

DÉFINITION 1. — On dit qu'un modèle (resp. qu'une fonction $\phi(\theta)$ des paramètres d'un modèle) $M(\theta)$ d'une structure M est localement identifiable s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de θ , dans le domaine des paramètres admissibles D , tel que

$$\begin{aligned} & \forall \theta' \in \mathcal{O} \quad \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \theta = \theta' \\ (\text{resp.}) \quad & \forall \theta' \in \mathcal{O} \quad \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \phi(\theta) = \phi(\theta',) \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}(\theta)$ désigne le comportement entrée-sortie de $M(\theta)$.

DÉFINITION 2. — Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, on dit qu'un modèle (resp. qu'une fonction $\phi(\theta)$ des paramètres d'un modèle) $M(\theta)$ d'une structure M est globalement identifiable si

$$\begin{aligned} & \forall \theta' \in D \quad \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \theta = \theta' \\ (\text{resp.}) \quad & \forall \theta' \in D \quad \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \phi(\theta) = \phi(\theta'). \end{aligned}$$

2. Discernabilité

Considérant deux structures en compétition pour décrire un même processus réel, il faut évidemment que les deux structures soient comparables, c'est-à-dire que commandes et mesures soient identiques. On se propose de savoir si l'expérience permettra de les départager. On se place naturellement dans un cadre idéalisé, où l'une des structures est supposée décrire la réalité.

DÉFINITION 3. — Soient M et M' deux structures comparables et $M(\theta)$ un modèle de M . Notant \mathcal{C} , \mathcal{D} et \mathcal{C}' , \mathcal{D}' les comportements entrée-sortie et les ouverts de paramètres admissibles de M et M' , on dit que $M(\theta)$ est discernable de M' si

$$\forall \theta' \in \mathcal{D}' \quad \mathcal{C}(\theta) \neq \mathcal{C}'(\theta').$$

Ceci signifie que si la structure M est la bonne et le modèle $M(\theta)$ le modèle correspondant à la réalité, alors on pourra déduire de l'expérience que la structure M' doit être rejetée, puisqu'elle ne pourra pas décrire le comportement entrée-sortie expérimental.

Le test de discernabilité est très semblable au test d'identifiabilité. Il a été aussi implanté en Scratchpad II. On a d'ailleurs la même borne de complexité en fonction du degré des résumés exhaustifs, mais expérimentalement l'identifiabilité se teste mieux. On aura l'occasion de revenir sur ce sujet.

§ 4. PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES

1. Définition

Cherchant à étendre une propriété des modèles aux structures, il est trop contraignant d'exiger que tous les modèles la satisfassent. En effet, avec cette définition, peu de structures intéressantes en pratique satisferaient les propriétés que nous venons de définir, même si celles-ci sont vérifiées par des modèles génériques. La définition suivante évite un tel inconvénient.

DÉFINITION 1. — On dit qu'une propriété définie pour les modèles d'une structure M , est une propriété structurelle de M si elle est vérifiée par presque tous les modèles de la structure, au sens de la mesure uniforme sur \mathbf{R}^q .

À titre d'illustration, considérons le cas de la discernabilité. Dire qu'une structure M est structurellement discernable d'une structure M' signifie que si la structure M est la bonne, l'expérience permettra presque sûrement d'écarter la structure M' . Mais il se peut qu'on ne puisse pas discerner M' de M .

2. Identifiabilité structurelle globale

Nous donnons une définition explicite de l'identifiabilité structurelle, conforme à la définition 1.1.

DÉFINITION 2. — On dira qu'une structure M est structurellement globalement (resp. localement) identifiable s'il existe un sous-ensemble S de l'ensemble D des paramètres admissibles, de mesure nulle, tel que

$$\forall \theta \in D \setminus S \quad \forall \theta' \in D \quad \mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(\theta') \implies \theta = \theta'$$

où $\mathcal{C}(\theta)$ désigne le comportement entrée-sortie de $M(\theta)$.

§ 5. LE PROBLÈME DE L'IDENTIFIABILITÉ

Dans ce dernier paragraphe, et pour toute la suite, nous ne considérerons plus que des structures admettant des résumés exhaustifs rationnels.

1. Transcription algébrique

Nous allons d'abord considérer le cas de l'identifiabilité structurelle locale.

PROPOSITION 1. — Soit M une structure admettant un résumé exhaustif rationnel $\rho : D \mapsto \mathbf{R}^r$ alors M est structurellement localement identifiable ssi le rang générique de la matrice jacobienne de ρ est égal à la dimension n de l'espace des paramètres. ■

Ceci peut être testé comme l'a fait RAKSANYI par une méthode de triangularisation (cf [Ra]).

COROLLAIRE 1. — Sous les mêmes hypothèses, M est structurellement localement identifiable ssi le corps de fractions $k(\theta)$ est une extension algébrique de $k(\rho)$. ■

Remarques. — 1) On voit que l'identifiabilité structurelle locale est indépendante du domaine de paramètres admissibles choisis.

2) De plus, on voit que le caractère réel ou complexe de la structure ne joue aucun rôle.

En ce qui concerne l'identifiabilité structurelle globale, la situation est claire dans le cas où la structure est complexe et le domaine D égal à $\text{Dom}(\rho)$. Dans ce cas, ayant obtenu un résumé exhaustif rationnel ρ , il faut tester que pour presque tout $\theta \in \mathbf{C}^m$, $\rho(\theta) = \rho(\theta')$ implique $\theta = \theta'$. Ceci revient à dire, puisque ρ est rationnelle, que ρ admet un inverse à gauche rationnel. Ceci peut être testé par les méthodes des chapitres III et IV. J'ai implanté en Scratchpad II la méthode du chap III § 2 n° 3 th. 3 cor. 1 p. 51.

Dans le cas réel, ou si $D \neq \text{Dom}(\rho)$, le seul cas ambigu est celui où l'idéal \mathcal{J} , défini au th. III.2.3.1, est de dimension 0. Autrement, $k(\theta)$ n'est pas algébrique sur $k(\rho)$ et la structure n'est même pas structurellement localement identifiable. Une étude abstraite plus poussée pourrait être faite dans le cas réel si l'espace des paramètres admissibles est semi-algébrique, comme c'est en général le cas, par des méthodes de décomposition algébrique cylindrique, mais la complexité colossale des calculs laisse peu d'espoir (voir l'article de FITCHAS, GALLIGO et MORGENSTERN [FGM]).

Le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de solutions complexes possibles, explicitement connu car le calcul d'une base standard permet d'obtenir le degré de \mathcal{J} et de pouvoir

trancher après expérience. En effet, si l'on a pu déterminer une valeur possible pour θ , la résolution d'un système algébrique permet de les trouver toutes. On peut s'aider d'une base standard de \mathcal{J} pour l'ordre lexicographique, ramenant à un système triangulaire et tester alors si les valeurs trouvées sont admissibles ou non. Il est d'ailleurs fort possible que des valeurs admissibles selon la définition abstraite de la structure puisse être rejetées si leur ordre de grandeur est inacceptable.

Il est plus efficace de calculer une base standard de \mathcal{J} pour l'ordre lexicographique inverse et de passer ensuite à l'ordre lexicographique pur en utilisant le package de J. C. FAUGÈRE. On se reportera à l'article [FGLM] pour plus de détails.

On n'a donc pas de moyen efficace de répondre en toute rigueur à la question de l'identifiabilité, définie abstraitement, mais une transposition complexe permet d'obtenir une information substantielle, en général suffisante.

Un dernier problème concerne le corps de base. \mathbf{C} ou \mathbf{R} ne peuvent pas être représentés dans un système de calcul formel, mais en général les équations décrivant le système sont à coefficients rationnel. Si des grandeurs physiques devaient intervenir, on peut valablement les considérer comme génériques et donc transcendentes sur \mathbf{Q} et travailler sur une extension transcendante pure de \mathbf{Q} . En particulier, si des considérations théoriques permettent de savoir que certains des paramètres θ_i sont identifiables, on peut les faire passer dans le corps de base, puisqu'ils sont supposés génériques.

Le problème qui demeure est de trouver des résumés exhaustifs rationnels. On sait en trouver dans le cas d'une structure SLSCIN rationnelle, qui sont même polynômiaux si la structure est polynomiale, comme il a été vu ci-dessus. D'autres méthodes existent pour certaines classes de structures non-linéaires, comme celle décrite par VAJDA dans [Wa2 p. 42–48]. Le paragraphe suivant décrira une méthode s'appliquant à de nombreuses structures non-linéaires. Donnons d'abord quelques exemples dans le cas linéaire.

Exemples. — 1) Cet exemple provient de la thèse de Yves LECOURTIER [Le p. 106–109]. On donne un exemple d'utilisation du package écrit en Scratchpad II, avec le résumé exhaustif provenant de la matrice de transfert.

La structure considérée décrit l'effet de premier passage d'un médicament, représenté par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 u(t) & \rightarrow & (1) & \rightarrow & (2) & & \\
 & & & \searrow & \downarrow & & \\
 & & & & (3) & \rightarrow &
 \end{array}$$

Un médicament est absorbé en quantité $u(t)$. Il est présent dans le tube digestif en quantité x_1 , et passe de là dans la circulation générale avec une vitesse $\theta_1 x_1$ où il est présent en quantité x_2 . Il peut aussi passer dans la circulation générale en se dégradant en un métabolite, en quantité x_3 , avec une vitesse $\theta_2 x_1$, ou se dégrader en métabolite après son passage avec une vitesse $\theta_3 x_2$. Le métabolite est évacué par voie urinaire à la vitesse $\theta_4 x_3$. Enfin, on observe les concentrations en médicament et métabolite, respectivement égales à $\theta_6 x_2$ et $\theta_7 x_3$. On prend comme domaines d'admissibilité pour les θ et les x les quadrants positifs de \mathbf{R}^6 et \mathbf{R}^3 respectivement — cet exemple est une simplification du cas où le médicament peut aussi être évacué avec une constante θ_5 .

On veut savoir s'il est possible de définir les valeurs des paramètres θ . Voici un extrait d'une session Scratchpad II qui permet d'obtenir la réponse.

```
(5)
      [- th2 - th1    0    0 ]   [1]
dX   [                    ]   [ ]
--=  [   th1        - th3  0 ]X + [0]U
dt   [                    ]   [ ]
      [   th2          th3  - th4] [0]
      [0 th6  0 ]
Y =  [                    ]X
      [0  0  th7]
Paramètres internes = [th1,th2,th3,th4,th6,th7]
Type: STRUCTLS
identifiable?(struct,"Transfert")
(6) false
Type: B      .06 (IN) + 3.584 (EV) + .027 (OT) = 3.0671 sec
```

Le résultat de type booléen (B) est obtenu en un temps total de 0,33s.

On déduit aisément de la forme de la base standard calculée par le programme (voir appendice A), qu'une deuxième solution est donnée par :

$$\begin{aligned}\theta'_1 &= \theta_3 - \theta_2 \\ \theta'_2 &= \theta_2 \\ \theta'_3 &= \theta_1 + \theta_2 \\ \theta'_4 &= \theta_4 \\ \theta'_6 &= \theta_1 \theta_6 / (\theta_3 - \theta_2) \\ \theta'_7 &= \theta_7.\end{aligned}$$

La réponse négative du programme peut donc être nuancée. D'une part les paramètres θ_2 , θ_4 et θ_7 sont individuellement identifiables. D'autre part, si $\theta_3 > \theta_2$, la solution exédentaire est admissible, ce qui montre que la structure n'est pas structurellement globalement identifiable au sens de la définition formelle. En revanche, si l'on a trouvé un modèle solution avec $\theta_3 < \theta_2$, on sait que ce modèle est unique, donc globalement identifiable.

2) Cet exemple provient de [Ra p. 115–120]. On considère la structure linéaire stationnaire définie par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -f_1(v_{3,1} + v_{2,1} + v_{0,1}) & f_1 v_{1,2} & f_1 v_{1,3} & 0 & 0 \\ f_2 v_{2,1} & -f_2(v_{3,2} + v_{2,1}) & f_2 v_{2,3} & 0 & 0 \\ f_3 v_{3,1} & f_3 v_{3,2} & -f_3(v_{4,3} + v_{2,3} + v_{1,3}) & f_3 v_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & f_4 v_{4,3} & -f_4(v_{5,4} + v_{3,4}) & f_4 v_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{5,4} & -f_5(v_{4,5} + v_{0,5}) \end{pmatrix}$$

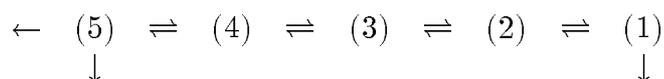
$$B = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v)^T \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système décrit un modèle de synthèse de l'ammoniac, appartenant à une classe connue sous le nom de modèles de Horiuti ou de Temkin, et étudiés par John Appel.



On se place dans un état chimiquement stationnaire, avec des débits d'hydrogène et d'azote constants. À l'instant $t = 0$, on commence à injecter une proportion $u(t)$ d'un isotope d'azote. Ceci a pour effet de rendre le modèle linéaire (cf [Wa1]). Les flèches indiquent les réactions élémentaires supposées permises. On mesure la concentration en isotope des produits sortants.

On associe à chacune des espèces présentes un compartiment, et l'on note x_i la quantité d'isotope dans le compartiment i à l'instant t , et f_i l'inverse de la quantité globale d'azote dans le compartiment. C'est une constante puisqu'on est dans un état stationnaire. À chaque flèche $(i) \rightarrow (j)$ correspond une constante de vitesse $v_{j,i}$ et à chaque flèche sortante $(i) \rightarrow$, une constante de vitesse $v_{0,i}$. Enfin v désigne le débit d'isotope à l'entrée.



Dans cet exemple les résumés exhaustifs donnés ci-dessus sont d'une taille rédhibitoire. Mais Raksanyi a pu obtenir un résumé exhaustif d'une taille acceptable en utilisant les spécificités de la structure. Il a d'abord montré que certains paramètres peuvent s'exprimer linéairement à partir des précédents, car on est dans un état stationnaire :

$$\begin{aligned} v_{4,5} &= v_{0,1} + v_{5,4}, \\ v_{3,4} &= v_{4,3} + v_{0,1}, \\ v_{2,3} &= v_{3,2} + v_{0,1} + v_{3,1} - v_{1,3}, \\ v_{1,2} &= v_{0,1} + v_{2,1} + v_{3,1} - v_{1,3}, \\ v &= v_{0,1} + v_{0,5}. \end{aligned}$$

Les constantes $v_{0,1}$, $v_{0,5}$, f_1 et f_5 sont directement mesurables. D'autre part, il a pu prouver que les paramètres $v_{5,4}$, f_4 , $v_{4,3}$ et f_3 sont structurellement globalement identifiables, en utilisant les propriétés des structures chaînées. Il ne reste donc plus à déterminer que les cinq paramètres $v_{1,3}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{3,2}$ et f_2 .

On peut ensuite prouver que les coefficients des polynômes caractéristiques des sous-matrices principales d'ordre 2 et 3 de A forment un résumé exhaustif.

Le package IDPACK de Scratchpad prend 4 minutes sur IBM 4381 et 20 sec. environ sur un 3090 pour calculer une base standard permettant de conclure que cette structure n'est pas identifiable. Comme l'idéal est de dimension non nulle, il n'y a pas d'ambiguïté, puisqu'elle n'est même pas localement identifiable. On trouvera la session complète montrant la résolution de cette exemple à l'appendice A.

Raksanyi m'a fait savoir que sur cet exemple son algorithme de résolution échoue par manque de mémoire après près d'une journée de calcul. Même si l'on a eu recours à des ordinateurs puissants, le système d'exploitation est tel qu'on dispose en pratique de peu de mémoire (moins de 4 Mo). D'autre part, l'algorithme de base standard implanté en Scratchpad II est plutôt lent, comparé à des systèmes spécialisés comme Macaulay par exemple. Les raisons pour lesquelles ma méthode se comporte mieux sont difficiles à préciser. Notons que Raksanyi n'a pas utilisé le fait que l'idéal est premier, ce qui permettrait de simplifier et d'accélérer l'algorithme. Une implantation de la méthode du chapitre IV

permettrait d'apprécier la valeur de cet argument. On peut surtout noter que si on a pu prouver une borne de complexité, en résolvant le système par les bases standard, la complexité de la méthode de Wu, et des méthodes voisines, est difficile à évaluer et encore très mal connue. Il n'est pas évident qu'elle soit plus rapide que l'algorithme de base standard, avec l'ordre du degré.

2. Discernabilité

Décrivons sommairement comment tester la discernabilité. Supposons qu'on ait deux structures comparables, M et M' admettant respectivement deux résumés exhaustifs rationnels ρ et ρ' , définis par des fractions P_i/Q_i $i \in [1, q]$ et P'_i/Q'_i $i \in [1, q]$ et qui soient eux aussi comparables, c'est-à-dire tels que $M(\theta)$ et $M'(\theta')$ aient même comportement entrée-sortie ssi $\rho(\theta) = \rho'(\theta')$. Alors, pour tester que M_1 est discernable de M_2 , il faut tester que l'idéal

$$\mathcal{I} = \left(\left(\prod_{i=1}^q Q'_i(\theta') \right) u - 1, P'_i(\theta') - P_i(\theta)/Q_i(\theta)Q_i(\theta') \right)_{k(\theta)[\theta', u]},$$

est égal à (1). Ceci peut être fait aisément par un algorithme de base standard et a donné lieu à une implantation en Scratchpad II. On se reportera à l'appendice A pour une démonstration et à l'appendice B § 1 pour le code source. Les paramètres de Markov donnent aisément des résumés exhaustifs comparables. On peut aussi utiliser la matrice de transfert (cf [Ra p. 109]). Cet idéal ressemble beaucoup à celui construit pour tester l'identifiabilité, et l'on a une borne de complexité du même ordre en utilisant le nullstellensatz effectif. Cependant, avec des résumés exhaustifs de taille comparable, le test d'identifiabilité est en général plus facile, phénomène qui reste à interpréter.

Bien entendu, comme pour l'identifiabilité, un résultat positif par cette méthode est absolument certain, tandis qu'un résultat négatif ne l'est que si le domaine des paramètres admissibles de M' est égal à $\mathbf{C}^{r'}$. Autrement, une discussion plus approfondie reste encore nécessaire. Théoriquement, la méthode de décomposition algébrique cylindrique permet de répondre de manière complète si l'espace des paramètres est semi-algébrique : mais on est sans doute encore loin de pouvoir l'appliquer sur de tels problèmes.

§ 6. STRUCTURES NON-LINÉAIRES

1. Structure avec conditions initiales génériques

On tente ici d'appliquer les résultats d'algèbre différentielle obtenus au cours des chapitres précédents, pour obtenir des résumés exhaustifs. L'utilisation de l'algèbre différentielle en automatique, pour laquelle M. FLIESS a joué un rôle d'initiateur, est de nature à fournir à la fois un langage et des techniques de calcul appropriées, conjointement à l'emploi du calcul formel. On pourra se reporter à [Fl], ou à la thèse de Sette DIOP [Di] pour une vue plus large de ces possibilités.

On considère une structure définie par un système d'équations d'état comme dans la déf. 1.2.1, où les fonctions f , g et h sont des polynômes ou des fractions rationnelles. Soit k , le corps engendré par les coefficients des équations définissant la structure, considéré comme un corps différentiel ordinaire avec une dérivation triviale. On prend comme corps de base le corps $\mathcal{F} = k\langle t, \theta, u \rangle$ où (t, θ, u) est une solution générique de l'idéal $[t' = 1, \theta'_i = 0]$. Le système d'équations d'état définit un idéal différentiel premier (cf. rem. IV.2.3.1 p. 94) \mathcal{I} de dimension 0, et g une application rationnelle de $V(\mathcal{I})$ dans \mathbf{A}^p .

On se restreint à des structures satisfaisant les trois conditions suivantes.

A) La classe des commandes admissibles ne contient que des fonctions différentiellement transcendentes sur k ⁽¹¹⁾, l'ensemble des paramètres admissibles ne contient que des constantes transcendentes sur k .

Remarque 1. — C'est une restriction que je n'ai pas su éviter, mais qui est acceptable d'un point de vue pratique. Les fonctions de commande ont, en pratique, peu de chance d'être exactement des solutions d'équations différentielles à coefficients constants, et la définition des propriétés structurelles suppose implicitement qu'on s'attend à trouver des valeurs génériques des paramètres.

On pourrait d'ailleurs généraliser en supposant u ou θ solutions génériques d'un idéal premier \mathcal{J} , *a priori connu*, pourvu qu'on ait un test effectif d'appartenance à \mathcal{J} , comme c'est le cas s'il est donné par un ensemble caractéristique ou une base standard finie — ce sera toujours le cas pour les paramètres puisqu'ils sont constants. Les développements sont aisés, mais je préfère laisser pour l'instant cette piste en suspens.

B) Pour u et θ génériques, l'unique solution du système d'état correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = h_i(\theta)$ est générique.

Remarque 2. — C'est une condition plus restrictive, car il existe de mauvais cas. Par exemple, $x' = x$, $x(0) = 0$ définit la solution $x = 0$, qui n'est pas un zéro générique de $[x' - x]$. Cet exemple est trivial, mais on peut compliquer en prenant $x'' = x$, $x(0) = \theta$, $x'(0) = \theta$, dont la solution θe^t est un zéro générique de $[x' - x]$. En général, cette condition semble difficile à tester, mais elle est impliquée par la condition plus forte suivante, susceptible elle d'un test effectif.

B') Les conditions initiales $h_i(\theta)$ sont telles que $K(h_i(\theta))$ est une extension transcendante pure de degré de transcendance n de K , où K désigne l'extension de k engendrée par les coefficients en θ intervenant dans les polynômes f et g .

Remarque 3. — Ceci est vrai en particulier si $h_i = \vartheta_i$ où les ϑ_i sont des paramètres tous distincts et n'intervenant pas dans les polynômes f_i et g_i .

C) Les fonctions mesures y ne sont pas singulières en $t = 0$, c'est à dire que si y_i est solution générique du polynôme $R(y)$, le séparant de ce polynôme ne s'annule pas en $t = 0$.

Remarque 4. — Il est vraisemblable que ce cas est peu fréquent et devrait être totalement exclu par des hypothèses raisonnables sur la structure, mais que je n'ai pas su définir. En tout état de cause, la régularité est facile à tester. D'autre part, il est manifeste que la condition B') implique la condition C).

⁽¹¹⁾ Ceci n'exclut pas qu'il puisse ne pas y avoir d'entrée, on prend alors un ensemble de commandes vide.

Pour θ générique fixé, on sait que y est une solution générique de l'idéal $\mathcal{J}(\theta)$ définissant l'image de l'application rationnelle mesure g . Un ensemble caractéristique normalisé $\mathcal{A}(\theta)$ de cet idéal peut être obtenu en utilisant le graphe de g selon la technique décrite au chapitre IV § 2 n° 4 th. 3 p. 98. Comme $\mathcal{I}(\theta)$ est de dimension différentielle 0, $\mathcal{J}(\theta)$ est aussi de dimension différentielle 0. En effet, pour tout zéro générique η de $\mathcal{I}(\theta)$, $g(\eta)$ est un zéro générique de \mathcal{J} . Comme l'extension de corps engendrée par $g(\eta)$ est trivialement incluse dans celle engendrée par η , il suffit d'utiliser la prop. I.4.2.8. p. 19.

On en déduit que $\mathcal{A}(\theta)$ est de la forme $\{A(\theta)_1, \dots, A(\theta)_p\}$ où $v_{A_i(\theta)} = y_{i,(\epsilon_i)}$. On peut obtenir de manière simple des conditions initiales $y_{i,(j)}(0) = H(\theta, u(0), u'(0), \dots, u^{r_{i,j}}(0))$, pour i variant de 1 à n et j variant de 1 à ϵ_i , en déterminant la valeur des dérivées successives des x_i en 0 à partir des équations d'état. Ces conditions initiales définissent y de manière unique, *pourvu que les séparants des polynômes $A_i(\theta)$ ne s'annulent pas en 0*. Ceci est toujours vrai sous les hypothèses de la condition B'), et plus généralement si y est régulière en 0. En effet, on peut alors calculer à partir de \mathcal{A} et des conditions initiales le développement en série formelle de y .

L'application qui à θ associe le couple $(\mathcal{J}(\theta), H(\theta))$ est donc un résumé exhaustif du comportement entrée-sortie de la structure.

Les θ_i étant supposés génériques, la structure est structurellement globalement identifiable ssi cette application est injective. Reste à tester l'injectivité.

On note $\rho(\theta)$ le vecteur des coefficients en θ de tous les polynômes $H_i(\theta)$.

Remarque 5. — Cette notation n'est pas mensongère, puisqu'il s'agit bien d'un résumé, même s'il n'est pas exhaustif. On pourrait poursuivre le développement en série, ce qui donnerait un résumé exhaustif de taille infinie. Par noetherianité, on sait qu'on obtiendrait un résumé exhaustif fini, en tronquant ce développement à un certain ordre. Malheureusement, on ne sait pas en général déterminer cet ordre. Le but de la suite est de remédier à cet inconvénient.

On ne connaît pas directement $\mathcal{J}(\theta)$, mais on connaît $\mathcal{A}(\theta)$. Malheureusement, un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel n'est pas unique en général. Cependant, on peut tester que deux ensembles caractéristiques définissent le même idéal par le lemme suivant, donné à titre d'exercice dans [Ko2 chap. IV § 9].

Lemme 1. — Soient \mathcal{A} et \mathcal{A}' des ensembles caractéristiques des idéaux premiers \mathcal{I} et \mathcal{I}' de $\mathcal{F}\{n\}$, alors \mathcal{I} est égal à \mathcal{I}' ssi

- i) $H_{\mathcal{A}} \notin \mathcal{I}'$, $H_{\mathcal{A}'} \notin \mathcal{I}$, en notant ainsi les produits des initiaux et séparants de \mathcal{A} et \mathcal{A}' ,
- ii) \mathcal{A} réduit à 0 tous les éléments de \mathcal{A}' et \mathcal{A}' réduit à 0 tous les éléments de \mathcal{A} .

PREUVE. La condition est manifestement nécessaire. Si elle est vérifiée, on a $\mathcal{I} = \subset \mathcal{I}' = [\mathcal{A}'] : H_{\mathcal{A}'}^\infty$ puisque \mathcal{A}' réduit à 0 tous les polynômes de \mathcal{A} et $H_{\mathcal{A}'} \notin \mathcal{I}$. Par symétrie, on a l'inclusion inverse, d'où l'égalité. ■

Pour tous θ et θ' , comme $\mathcal{A}(\theta)$ et $\mathcal{A}(\theta')$ ont même rang et que θ est supposé générique, il est manifeste que les initiaux et séparants de $\mathcal{A}(\theta)$ sont irréductibles et non nuls, donc qu'il n'appartiennent pas à $\mathcal{J}(\theta')$. L'égalité entre $\mathcal{J}(\theta)$ et $\mathcal{J}(\theta')$ est donc équivalente au fait que les polynômes de $\mathcal{A}(\theta)$ sont réduits à 0 par θ' et réciproquement. On pose $\mathcal{A}(\theta) = \{\mathcal{A}(\theta)_1, \dots, \mathcal{A}(\theta)_\ell\}$. On effectue la réduction formelle de $\mathcal{A}(\theta)_i$ par $\mathcal{A}(\theta')$. On trouve un polynôme $R(\theta, \theta')_i$ dans $k\langle \theta, \theta', t, u \rangle[y]$, en général non nul et irréductible par

$\mathcal{A}(\theta')$. Chassant les dénominateurs, l'égalité à 0 est équivalente au fait que les coefficients $\varrho_{i,j}(\theta, \theta')$ sont tous nuls.

On peut maintenant utiliser le fait que \mathcal{A} est supposée normalisée. En effet, ceci implique que l'initial de tout polynôme A de \mathcal{A} ne contient aucune dérivée dominante d'un polynôme de \mathcal{A} . Pour réduire $A(\theta')$ par $\mathcal{A}(\theta)$, la première étape consiste nécessairement à le réduire en

$$I_{A(\theta)}A(\theta') - I_{A(\theta')}A(\theta),$$

qui est alors irréductible par $\mathcal{A}(\theta)$. On en déduit que

$$\frac{A(\theta)}{I_{A(\theta)}} = \frac{A(\theta')}{I_{A(\theta')}},$$

donc que $A(\theta)$ et $A(\theta')$ doivent coïncider à un coefficient près, d'où le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit M une structure satisfaisant les conditions A), B), et C) et $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in [1, n]\}$ un ensemble caractéristique normalisé de l'idéal \mathcal{J} dont la sortie y est solution générique. On peut supposer que A_i appartient à l'anneau $k(\theta)\{y, t, u\}$, en chassant éventuellement les dénominateurs en u et t . Choisissons alors un ordre total sur les monômes de $k(\theta)\{y, t, u\}$, et en prenons $A_i(\theta)$ tel que son monôme dominant apparaisse avec coefficient 1.*

Sous ces hypothèses, les coefficients $\mu_{i,j}(\theta)$ apparaissant dans $A_i(\theta)$ sont tels que

$$\theta \mapsto (\mu_{i,j}(\theta), \rho(\theta)),$$

où ρ est le résumé donné par les conditions initiales, forme un résumé exhaustif de la structure M . ■

Remarque 6. — Pour toute structure, même si elle ne satisfait pas les conditions A) et B), on peut calculer un ensemble caractéristique normalisé \mathcal{A} de l'idéal \mathcal{J} et des conditions initiales H_i . Il suffit alors qu'elle vérifie la condition C), c'est-à-dire que séparants ne s'annulent pas quand on y substitue les conditions initiales, pour que la donnée de \mathcal{A} et des H_i détermine la solution de manière unique. Ceci signifie qu'on peut de manière plus générale conclure à la non-identifiabilité. Car si $\rho(\theta) = \rho(\theta')$ et $\mu(\theta) = \mu(\theta')$ n'impliquent pas l'égalité de θ' et θ , la structure n'est certainement pas identifiable.

Donnons un exemple.

Exemples. — 1) Considérons la structure définie par

$$\begin{aligned} x_1' &= -(\theta_1 + \theta_2)x_1 + (\theta_5 u + \theta_3)x_2, \\ x_2' &= \theta_2 x_1 - (\theta_3 + \theta_4)x_2, \\ y &= x_1, \\ x_1(0) &= \theta_6, \\ x_2(0) &= \theta_7, \end{aligned}$$

qui provient de l'article [LLW], donnant des exemples de structures non linéaires et non identifiable non triviale dont l'existence était, faute d'exemples et surtout de technique pour tester la non identifiabilité, mise en doute au moment de sa publication. On a cependant modifié l'exemple, de manière à le faire entrer dans notre cadre, en rendant les conditions initiales génériques. Comme $y = x_1$, il suffit d'éliminer x_2 dans les deux premières équations. On prend donc un ordre tel que x_2 et toutes ses dérivées soit plus grand que x_1 et ses dérivées.

Réduisant la seconde équation par la dérivée de la première, on obtient

$$(-\theta_5 u' + (\theta_3 + \theta_4)(\theta_5 u + \theta_3))x_2 + x_1'' + (\theta_1 + \theta_2)x_1' - \theta_2(\theta_5 u + \theta_3)x_1.$$

Enfin, réduisant ce polynôme par la première équation, on trouve

$$\begin{aligned} P = & (\theta_5 u + \theta_3)x_1'' \\ & + (-\theta_5 u' + \theta_5(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)u + \theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4))x_1' \\ & + (-\theta_5(\theta_1 + \theta_2)u' - \theta_5^2\theta_2u^2 + \theta_5((\theta_3 + \theta_4)(\theta_1 + \theta_2) - 2\theta_2\theta_3)u + (\theta_3 + \theta_4)\theta_3(\theta_1 + \theta_2) - \theta_2\theta_3^2)x_1, \end{aligned}$$

qui forme précisément un ensemble caractéristique normalisé de l'idéal premier définissant l'image — les conditions données au chapitre IV § 2 n° 3 th. 2 p. 94 sont trivialement satisfaites.

Les conditions initiales s'obtiennent facilement :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \theta_6 \\ x_1'(0) &= \theta_5\theta_7u(0) - (\theta_1 + \theta_2)\theta_6 + \theta_3\theta_7. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème 1 ci-dessus. Divisant par θ_5 , on obtient un résumé exhaustif en prenant les coefficients de P , et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} & \theta_3/\theta_5, \\ & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4, \\ & \theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)/\theta_5, \\ & \theta_1 + \theta_2, \\ & \theta_5\theta_2, \\ & (\theta_3 + \theta_4)(\theta_1 + \theta_2) - 2\theta_2\theta_3, \\ & ((\theta_3 + \theta_4)(\theta_1 + \theta_2)\theta_3 - \theta_2\theta_3^2)/\theta_5, \\ & \theta_6, \\ & \theta_5\theta_7, \\ & (\theta_1 + \theta_2)\theta_6 + \theta_3\theta_7, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que la structure n'est pas identifiable, puisque les 3^e, 6^e, 7^e et 10^e équations sont impliquées par les autres. Il ne reste alors au plus que 6 conditions indépendantes pour 7 variables. Si l'on prend $\theta_6 = 1$ et $\theta_7 = 0$, on retrouve le modèle exact considéré dans l'article. Évaluant θ_6 et θ_7 dans le résumé exhaustif ci-dessus, on retrouve bien un système équivalent au résultat donné dans l'article. Comme le séparant de P ne s'annule pas en 0, même après cette substitution, on peut utiliser la remarque 6 ci-dessus et retrouver le résultat précis de l'article. En revanche, si la structure avait été identifiable, on n'aurait guère pu conclure qu'avec des conditions initiales génériques.

2) On va donner un exemple d'application à la discernabilité. Considérons la structure M définie par

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x'' + \theta_1x' + \theta_2x = 0, \\ x(0) &= \theta_3, \\ x'(0) &= \theta_4, \\ y &= x, \end{aligned}$$

et la structure M' définie par

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x' + \vartheta_1 x = 0, \\ x(0) &= \vartheta_2, \\ y &= x. \end{aligned}$$

Il est manifeste que $\theta_1, \dots, \theta_4$ forme un résumé exhaustif de M et $\vartheta_1, \dots, \vartheta_2$ un résumé exhaustif de M' . Toutefois, ces résumés peuvent pas être comparés directement, car les ordres de P_1 et P_2 ne coïncident pas. Une condition nécessaire et suffisante pour que M puisse être discernée de M' est que y ne soit pas solution de $P'(y) = 0$ ou ne soit pas solution de $y(0) = \vartheta_2$. Ceci est manifeste, car l'ordre de P_2 est strictement inférieur à celui de P_1 et y est un zéro générique de P_1 .

Réciproquement, pour tester si M' est discernable de M , on peut d'abord réduire $P_1(y)$ par $P_2(y)$, ce qui donne un reste

$$R(y) = (\vartheta_1^2 - \theta_1 \vartheta_1 + \theta_2)y,$$

qui doit être identiquement nul. D'autre part, on doit avoir

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \theta_3, \\ -\vartheta_1 \vartheta_2 &= \theta_4. \end{aligned}$$

Il est immédiat de voir que pour ϑ générique, ce système admet la solution

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \vartheta_1, \\ \theta_2 &= 0, \\ \theta_4 &= \vartheta_1 \vartheta_2, \\ \theta_3 &= \vartheta_2, \end{aligned}$$

Ce qui montre que M' est indiscernable de M .

La simplicité de cet exemple cache une difficulté majeure. En effet, on a pu raisonner de la sorte car les initiaux et séparants de P_1 et P_2 valent 1. Dans le cas général, on est amené à exprimer algébriquement l'inclusion de deux variétés algébriques différentielles. Or, à ma connaissance, on ignore comment tester algorithmiquement l'inclusion de deux variétés.

Exemple 3. — Considérons les variétés algébriques différentielles V_1 , V_2 et V_3 qui sont les composantes générales des polynômes premiers $P_1 = (y')^2 - 4y$, $P_2 = (y')^2 - y^3$ et $P_3 = y$. La variété V_3 n'est pas incluse dans V_1 , mais elle est incluse dans V_2 . Cependant, P_3 réduit à 0 P_1 et P_2 . L'ambiguïté vient du fait qu'il réduit aussi à 0 S_{P_1} et S_{P_2} . Dans un cas, $V(P_3)$ est une composante isolée de $V(P_1)$, distincte de sa composante générale, tandis que $V(P_2)$ n'a qu'une composante contenant $V(P_3)$. On se reportera à [Ri2 chap. III § 2] pour plus de détails.

2. Possibilités d'emploi et d'extension

On a pu donner ici une méthode, théoriquement utilisable pour toute structure générique. Deux problèmes se posent. Est-elle praticable ? Que faire si la structure n'est pas générique ?

En ce qui concerne le premier problème, on ne peut comparer que par rapport aux techniques existantes, applicables à tout coup sur une large classe de structure, donc principalement les méthodes calculant un résumé exhaustif par la matrice de transfert ou les paramètres de Markov dans le cas des SLSCIN. Or, précisément, notre technique a un champ d'application orthogonal à celui des méthodes précédentes, puisqu'elles supposent des conditions initiales nulles, alors qu'il nous faut des conditions génériques. Ceci n'interdit pas de comparer les performances relatives pour des structures linéaires de même taille.

Un certain nombre d'exemples me donnent l'espoir de pouvoir traiter des structures plus complexes qu'avec les résumés classiques.

Exemple 1. — Si l'on considère une structure linéaire telle que les matrices A et B soient génériques, et la matrice C égale à l'identité. Dans un tel cas, le calcul d'ensemble caractéristique consiste uniquement à substituer les y aux x . On retrouve alors un résultat bien connu : la structure est identifiable, et le coût des calculs est dérisoire.

En revanche, le calcul de la matrice de transfert ou des paramètres de Markov serait désastreux avec des matrices génériques pleines.

La portée d'un tel exemple est bien sûr très relative. Il montre cependant comment notre algorithme parvient à déjouer quelques pièges grossiers.

La question de la généricité pose d'autres problèmes. Il faudrait disposer d'un test effectif qui retourne, si la solution n'est pas générique, un idéal plus petit la définissant. On pourrait alors se ramener au cas générique et traiter potentiellement des exemples quelconques.

On peut enfin remarquer qu'on n'a aucune raison de se limiter à des structures polynomiales ou rationnelles. Plus précisément, si les fonctions sont solutions d'équations différentielles simples, on peut se ramener au cas polynomial.

Exemple 2. — Considérons la structure :

$$\begin{aligned}x'' &= -\theta_1 \sin x + \theta_2 u, \\y &= \cos(x), \\x(0) &= \theta_3, \\x'(0) &= \theta_4.\end{aligned}$$

Elle se ramène simplement à la structure équivalente :

$$\begin{aligned}x'_2 &= -x' x_3, \\x_3^2 + x_2^2 &= 1, \\x'' &= -\theta_1 x_3 + \theta_2 u, \\y &= x_2, \\x(0) &= \theta_3, \\x'(0) &= \theta_4, \\x_2(0) &= \cos(\theta_3), \\x_3(0) &= \sin(\theta_3).\end{aligned}$$

Les variables x_2 et x_3 représentent respectivement $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Bien sûr, ceci ne peut qu'accroître le coût des opérations, mais une approximation n'est peut-être pas toujours suffisante, et peut surtout modifier les propriétés structurelles. Il est donc intéressant de savoir qu'on *pourrait* le faire, au moins dans certains cas. Ici, les calculs sont assez simples pour être traités à la main. On trouve que y est solution de

$$\begin{aligned}P(y) &= (1 - y^2)^2 (y'')^2 + 2(y(y'))^2 + \theta_1 y^2 - \theta_1 (1 - y^2) y'' \\&\quad + y^2 (y')^4 - 2\theta_1 (1 - y^2) y (y')^2 + \theta_1^2 y^8 \theta_2^2 u^2 y^6 + \dots, \\y(0) &= \cos(\theta_3), \\y'(0) &= -\theta_4 \sin(\theta_3), \\y''(0) &= \theta_1 \sin^2(\theta_3) - \theta_2 u(0) \sin(\theta_3) - \theta_4^2 \cos(\theta_3),\end{aligned}$$

où les coefficients de P sont fonctions de θ_1 et θ_2^2 .

On peut se convaincre assez aisément que la structure est générique. Cependant, il faut être prudent, car cela n'aurait pas été le cas si l'on avait modélisé $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en posant :

$$\begin{aligned}x'_2 &= -x' x_3, \\x'_3 &= x' x_2.\end{aligned}$$

D'autre part, les calculs seraient devenus bien plus compliqués. À partir de la solution donnée, il est clair que θ_1 , $|\theta_2|$, $|\theta_4|$, $\cos(\theta_3)$ et $|\sin(\theta_3)|$ sont structurellement globalement identifiables. En outre, on connaît le signe de $\theta_2 \sin(\theta_3)$ et de $\theta_4 \sin(\theta_3)$; il n'y a donc que deux solutions possibles pour θ_1 , θ_2 et θ_4 , ainsi que pour la valeur de θ_3 à 2π près.

Une difficulté théorique profonde limite tout de même les possibilités d'applications effectives. En effet, si le traitement du système d'équations différentielles est résolu de manière totalement algorithmique par la méthode du chap. IV § 2, la difficulté vient des conditions initiales, puisqu'on est conduit à résoudre un système non algébrique, hors de portée des méthodes algorithmiques actuelles, bien qu'il puisse être ici aisément traité à la main.