De la recherche de l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires quelconque

Publié par C.W. Borchardt* d'après les manuscrits posthumes de l'ill. C.G.J. Jacobi.
(Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd 64, p. 297-320)†

24 mai 2006

1.

La recherche est ramenée à la résolution d'un problème d'inégalités

Un système d'équations différentielles ordinaires est non canonique[1] si les plus hautes dérivées des variables dépendantes apparaissent dans les équations de telle manière qu'on ne puisse en déduire leur valeur. Ce qui fait que chaque fois l'on trouve des équations indépendantes de ces dérivées les plus hautes, soit dans le système lui-même, soit à partir de lui par élimination. *Dans ce cas, le nombre de constantes arbitraires que fait intervenir une intégration complète — soit l'ordre du système — est toujours inférieur à la somme des ordres les plus hauts jusqu'où montent les dérivées de chacune des variables dans le système considéré.*[2] On connaît l'ordre du système, si on arrive par différentiations et éliminations à une forme canonique équivalente, de sorte que l'on puisse revenir du système canonique au système considéré. Car la somme des ordres les plus hauts jusqu'où montent dans le système canonique les dérivées de chaque variable dépendante sera aussi l'ordre du système non canonique. Mais pour trouver cet ordre, la réduction à une forme canonique n'est pas nécessaire : la chose peut aussi être résolue par les considérations suivantes.

Supposons que l'on ait entre la variable indépendante t et les n variables dépendantes x_1, x_2, …, x_n, n équations différentielles

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_n = 0, \tag{1}$$

***S. Cohn* s'était déjà consacré à cet article de l'ill. *Jacobi*, mais emporté par une mort prématurée, il ne laissa pas de manuscrit prêt pour l'impression. [Note non reproduite dans les œuvres complètes. N.d.T.]

† « De investigando ordine systematis aequationum differentialum vulgarium cujuscunque », reproduit dans *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, fünfter Band*, herausgegeben von K. Weierstrass, Berlin, Bruck und Verlag von Georg Reimer, 1890, p. 193-216, traduit du latin par F. Ollivier (CNRS, LIX UMR CNRS 7161, École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, mél. francois.ollivier@lix.polytechnique.fr) avec l'aide d'Alexandre Sedoglavic (LIFL, UMR CNRS 8022, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX, mél. sedoglav@lifl.fr). (N.d.T.)

[1] Le système que l'on appelle ici canonique ou en forme canonique est le même qui dans « Theoria novi multiplicatoris » est dit mis en forme normale (J. de Crelles tome 29 p. 369, *cf. C.G.J. Jacobi gesammelte Werke*, vol. 4, p. 501) mais diffère entièrement de celui que Jacobi qualifie de canonique dans « Nova methodus aeq. diff. partiales primi ordinis integrandi » (J. de Crelles tome 60 p. 122, *cf Jacobi, g. Werke*, vol. 5 p. 128). B.

[2] On reconnaît ici ce que Ritt désignait comme « l'analogue différentiel du théorème de Bézout ». N.d.T.

et que

$$h_k{}^{(i)}$$

soit l'ordre le plus haut jusqu'où montent dans l'équation $u_i = 0$ les dérivées de la variable x_k. J'observe d'abord que la question peut être ramenée à celle plus simple où les équations différentielles considérées sont linéaires. En effet, en différentiant les équations (1) nous obtenons un système d'équations différentielles *linéaires*

$$v_1 = 0,\ v_2 = 0, \ldots,\ v_n = 0, \tag{2}$$

entre les différentielles :

$$\delta x_1 = \xi_1,\ \delta x_2 = \xi_2, \ldots,\ \delta x_n = \xi_n, \tag{3}$$

et $h_k{}^{(i)}$ sera de nouveau l'ordre le plus haut jusqu'où montent les dérivées de $\xi_k = \delta x_k$ dans l'équation $v_i = \delta u_i$[3]. On donnera de ces équations différentielles linéaires (2) une intégration complète si pour les valeurs $k = 1, 2, \ldots, n$ on pose

$$\xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \ldots, \tag{4}$$

où nous désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les constantes arbitraires qui apparaissent dans les valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au sein d'une intégration complète du système (1) et par $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les constantes arbitraires induites par l'intégration du système (2). Ce qui fait que le nombre de constantes arbitraires dans l'intégration complète du système considéré (1) et du système linéaire (2) est le même, ou encore que les deux systèmes ont le même ordre.

En recherchant l'ordre du système d'équations différentielles linéaires (2), on peut supposer que les coefficients sont constants[4]. Dans ce cas, on obtient une intégration complète par une méthode bien connue, sans faire aucune réduction en forme canonique. Nous désignons par le symbole :

$$(\xi)_m$$

une expression[5]

$$A_0\xi + A_1\frac{d\xi}{dt} + A_2\frac{d^2\xi}{dt^2} + \cdots + A_m\frac{d^m\xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

dans laquelle $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des constantes ; les équations (2), si nous supposons leurs coefficients constants, auront cette forme :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 = & (\xi_1)_{h'_1} + (\xi_2)_{h'_2} + \cdots + (\xi_n)_{h'_n} & = 0, \\ v_2 = & (\xi_1)_{h''_1} + (\xi_2)_{h''_2} + \cdots + (\xi_n)_{h''_n} & = 0, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ v_n = & (\xi_1)_{h_1^{(n)}} + (\xi_2)_{h_2^{(n)}} + \cdots + (\xi_n)_{h_n^{(n)}} & = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Je pose dans ces équations

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t},$$

[3]Il s'agit de ce que nous appellerions les différentielles de Kaehler : $\delta u = \sum_i \partial u/\partial x_i \delta x_i$, qui donnent le linéarisé tangeant. N.d.T.

[4]Cette affirmation ne peut tenir que pour le cas générique ; encore est-elle loin d'être immédiate. N.d.T.

[5] Cette notation désigne la forme de l'expression et non sa valeur particulière. Ainsi, les coefficients A_i sont *a priori* différents dans $(\xi_i)_k$ et $(\xi_{i'})_{k'}$ intervenant dans v_j et $v_{j'}$ avec $j \neq j'$, me si $i = i'$ et $h = h'$. N.d.T.

où C_k et λ désignent des constantes ; (5) devient

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 = & C_1[\lambda]_{h_1'} + C_2[\lambda]_{h_2'} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n'}, \\ 0 = & C_1[\lambda]_{h_1''} + C_2[\lambda]_{h_2''} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n''}, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = & C_1[\lambda]_{h_1^{(n)}} + C_2[\lambda]_{h_2^{(n)}} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n^{(n)}}, \end{array}\right. \tag{6}$$

où

$$[\lambda]_m$$

désigne[6] une fonction entière d'ordre $m^{\text{ième}}$ de la quantité λ.

Éliminant $C_1, C_2, \ldots, C_n$, on obtient une équation algébrique dont les racines produisent les valeurs que peut prendre λ, et à chaque racine ou valeur de λ correspond un système de valeurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on peut toutes multiplier par une même constante arbitraire. En sommant les valeurs de chaque variable ξ_k correspondant à toutes les racines, on obtient sa valeur complète, et comme les valeurs de chaque variable ainsi obtenues sont pourvues des mêmes constantes arbitraires, l'intégration complète de l'équation (5) induit autant de constantes arbitraires qu'il y a de valeurs de λ. Donc, l'ordre du système d'équations linéaires (2), ou celui du système différentiel considéré (1) sont égaux au degré de l'équation algébrique qui définit λ. On peut représenter cette équation de la manière suivante

$$0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h_1'}[\lambda]_{h_2''} \cdots [\lambda]_{h_n^{(n)}}, \tag{7}$$

et le degré du déterminant de droite sera égal au maximum des $n!$ sommes de la séquence

$$h_1' + h_2'' + \cdots + h_n^{(n)}$$

en faisant varier les indices supérieurs et inférieur de toutes les manières. Nous avons donc obtenu cette proposition :

Proposition I. *Soient n équations différentielles entre la variable indépendante t et les variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$*

$$u_1 = 0, \;\; u_2 = 0, \;\; \ldots, \;\; u_n = 0,$$

et soit

$$h_k^{(i)}$$

l'ordre maximal de la variable x_k dans l'équation $u_i = 0$. Alors, si on appelle

$$H$$

le maximum des sommes

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)},$$

que l'on obtient en sommant pour des indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tous entre eux différents parmi les indices $1, 2, \ldots, n$; H sera l'ordre du système d'équations différentielles considéré, ou encore le nombre de constantes arbitraires que fait apparaître son intégration complète.

[6] Même remarque pour $[\lambda]_m$ qu'à la note 5 pour $(\xi)_m$.

Dans ce qui précède, j'appelle maximum une valeur non inférieure à celle d'aucune autre somme, de sorte que plusieurs maxima égaux entre eux peuvent avoir lieu correspondant à divers indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ du système.

Le degré de l'équation algébrique (7) ne diminue pas, sauf si dans le déterminant de droite le coefficient de la plus grande puissance de la quantité λ s'annule.

Nous obtiendrons d'autre part le coefficient de la plus haute des puissances de λ si, en formant le déterminant, nous substituons à chaque fonction rationnelle entière $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$ le coefficient de la plus haute, c'est-à-dire de la $h_k^{(i)\text{ième}}$ puissance que je désignerai par

$$[c]_{h_k^{(i)}}$$

et que de tous les termes du déterminant

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\ldots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

nous ne conservons que ceux dans lesquels la somme d'indices

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}$$

atteint la valeur maximale H. Car jamais la réduction du degré n'aura lieu, sinon dans les cas où pour deux ou plus des indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ du système, la somme précédente atteint une même valeur et la somme des produits

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\ldots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

correspondant à ces ensembles d'indices sommés avec les mêmes signes s'annule. Dans ce qui précède, $[c]_{h_k^{(i)}}$ sera égal au coefficient du terme $\delta\,\frac{d^{h_k^{(i)}}x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}$ provenant de la variation de la fonction u_i, c'est-à-dire qu'on posera

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial\,\dfrac{d^{h_k^{(i)}}x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}}.$$

Si nous en tenons compte, apparaît la proposition suivante qui complète la première.

Proposition II. *On appelle $u_k^{(i)}$ la dérivée partielle de u_i prise selon la plus haute des dérivées de x_k que contient la fonction u_i (i.e. d'ordre $h_k^{(i)}$). De tous les termes du déterminant*

$$\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}$$

on ne retient que ceux des $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \ldots u_n^{(i_n)}$ dans lesquels la somme des ordres des dérivées de chaque variable selon laquelle dans chaque

$$u_1^{(i_1)}, u_2^{(i_2)}, \ldots, u_n^{(i_n)}$$

la différentiation partielle est faite, atteint la valeur H. Alors, si la somme des termes restant du déterminant est notée de cette façon par un signe déterminant entre parenthèse

$$\left(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}\right)$$

l'ordre du système d'équations différentielles

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_n = 0,$$

sera inférieur à la valeur de ce maximum H seulement si l'on a

$$\left(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}\right) = 0,$$

parce que, où l'égalité n'a pas lieu, l'ordre du système est toujours égal à la valeur maximale H.

Nous obtenons par ce qui précède un nouveau genre de formules, les déterminant *tronqués*

$$\left(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}\right).$$

L'annulation de cette quantité est le signe que l'ordre du système d'équations différentielles

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_n = 0,$$

diminue[7], du fait de la nature particulière de ces équations.

En cherchant l'ordre d'un système d'équations différentielles quelconques, une voie consiste à trouver une méthode par laquelle leur réduction en forme canonique puisse être effectuée[8]. Mais dans cet article, qu'il nous suffise de rechercher avec soin la nature du maximum dont il est question et comment on peut le trouver aisément.

2.

De la résolution du problème d'inégalité qui apparaît dans la recherche de l'ordre d'un système d'équations différentielles quelconques. Ayant considéré un tableau, on définit un canon. Un canon quelconque étant donné, on en trouve un le plus simple.

Par ce qui précède, la recherche de l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires est ramené au problème d'inégalités suivant, également digne d'être considéré pour lui-même :

Problème.

On dispose nn quantités quelconques $h_k^{(i)}$ en un tableau[9] carré de sorte que l'on ait n séries horizontales et n séries verticales dont chacune a n termes. Parmi ces quantités, en choisir n transversales, c'est-à-dire disposées dans des séries horizontales et verticales toutes différentes, ce qui peut se faire de $1.2 \ldots n$ façons ; parmi celles-ci, rechercher celle qui fournit le maximum de la somme des n nombres choisis.

[7] Jacobi se montre ici plus précis que dans la proposition II, puisqu'il affirme que l'ordre est toujours inférieur à H si le déterminant s'annule. Ritt semblait douter que cette borne soit valable en dehors du cas générique où le déterminant est non nul (*cf* J.F. Ritt, *Differential algebra*, AMS, New York, 1950, p. 136), mais l'exemple de Ritt (*loc. cit.* p. 140) prend pour hypothèse l'ordre de deux composantes et non l'ordre des polynômes qui les définissent. La borne de Jacobi demeure toutefois conjecturale. N.d.T.

[8] Voir « De aequationum differentialum systemate non normali ad formam normalem revocando », publié par A. Clebsch, *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, fünfter Band*, herausgegeben von K. Weierstrass, Berlin, Bruck und Verlag von Georg Reimer, 1890, p. 485-513. N.d.T.

[9] Nous dirions sans doute aujourd'hui *matrice*, mais le terme n'a été introduit qu'en 1850 par Sylvester, c'est-à-dire approximativement au moment de la rédaction de cet article posthume, Jacobi étant mort en 1851 (*cf* Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1978, p. 96. N.d.T.

Les quantités $h_k^{(i)}$ étant disposées en une figure carrée

$$\begin{matrix} h'_1 & h'_2 & \dots & h'_n \\ h''_1 & h''_2 & \dots & h''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \dots & h_n^{(n)}, \end{matrix}$$

j'appellerai leur système *tableau proposé*. J'appellerai *tableau dérivé*, tout tableau qui en est issu en ajoutant la même quantité à chacun des termes de la même série horizontale. Soit

$$l^{(i)}$$

la quantité à ajouter aux termes de la $i$ème série horizontale ; ce faisant, chacun des $1.2\dots n$ sommes transversales parmi lesquelles il faut trouver un maximum est augmentée de la quantité

$$l' + l'' + \dots + l^{(n)} = L,$$

parce que pour former chaque somme, il faut choisir un terme de chacune des séries horizontales. De sorte que si nous posons

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

et que la somme transversale maximale des termes $h_k^{(i)}$ est

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)} = H,$$

cela fait que la valeur de la somme maximale formée des $p_k^{(i)}$ est

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)} = H + L,$$

et réciproquement. De sorte que trouver le maximum pour les quantités $h_k^{(i)}$ ou $p_k^{(i)}$ est équivalent.

Faisons en sorte que les quantités l', l'', ..., $l^{(n)}$ soient ainsi déterminées, que les quantités $p_k^{(i)}$ étant disposées en carré de la même manière que les quantités $h_k^{(i)}$ et que choisissant un maximum dans chaque série verticale, ces maxima se trouvent dans des séries horizontales toutes différentes. Si on appelle $p_k^{(i_k)}$ le maximum des termes

$$p'_k, p''_k, \dots, p_k^{(n)},$$

la somme

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)}$$

sera le maximum parmi toutes les sommes transversales formés à partir des quantités $p_k^{(i)}$. Dans ce cas, en effet, on a sans peine la somme transversale maximale formée des quantités proposés $h_k^{(i)}$

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)}.$$

On résoud donc le problème proposé, dès lors que l'on trouve les quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$ satisfaisant la condition dite.

Par brièveté, j'appellerai canon une figure carrée dans laquelle les maxima des diverses séries verticales sont dans des séries horizontales toutes différentes. Il est clair que dans un tel *canon*, on peut augmenter ou diminuer tous les termes d'une même quantité, d'où il s'en suit que parmi les quantités $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ une ou plusieurs peuvent être rendues égales à 0, les autres étant positives. Si $l_i = 0$, la séries $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}$ est la même que la série d'origine $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots, h_n^{(i)}$, c'est pourquoi j'appellerai série *inchangée* une série du canon qui correspond à une quantité l nulle. Parmi toutes les solutions, il y en aura une la plus simple, en ce sens que les quantités $l^{(i)}$ prendront des valeurs minimales, de sorte qu'on n'en trouvera pas d'autre pour laquelle certaines des quantités $l^{(i)}$ prendront des valeurs inférieures, les autres restant inchangées. J'appellerai le canon correspondant à cette solution un *canon le plus simple*. Il en sera question dans ce qui suit.

À un tableau carré quelconque, j'associe les dénominations suivantes, qui sont à bien retenir : par *série*, j'entendrai toujours une série *horizontale* ; s'il s'agit d'une série verticale, cela sera précisé. Par *maximum*, j'entendrai toujours un terme maximal parmi tous ceux de la même *verticale*, ou qui n'est inférieur à aucun autre. J'appellerai donc *maximum d'une série*, un terme d'une série horizontale qui est maximal parmi tous ceux placés dans la même verticale que lui. Il peut arriver qu'une série n'ait aucun maximum ou plusieurs différents entre eux. Et si la figure est constituée comme un canon, chaque série jouit assurément d'un maximum, car si plusieurs sont présents dans la même série, on peut toujours sommer de manière que tous les maxima des diverses séries appartiennent à des verticales différentes, c'est-à-dire qu'ils forment un *système complet de maxima transversaux*. Nous considérons dans le canon le plus simple le système de ces maxima, et s'il s'en présentent plusieurs de cette sorte, nous en choisissons un quelconque. Nous distribuons alors toutes les séries en deux parties : les séries J et les séries K, de telle sorte qu'aucune des séries de K ne soit inchangée, c'est-à-dire qu'aucune des quantités l qui correspondante aux séries K ne s'annule. Je dis qu'on a

Théorème I. *Dans le canon le plus simple, au moins l'un des maxima des séries K est égal à un terme situé dans la même verticale et appartenant à une série J.*

Autrement, on pourrait diminuer toutes les quantités l relatives aux séries K d'une même quantité jusqu'à ce que l'une des quantités l s'annule ou que l'un des maxima des séries K égale un terme placé sur la même verticale et appartenant à une série J. En effet, jamais ainsi les maxima des diverses séries ne cesseront d'être des maxima, ni la structure du canon ne sera perturbée. Alors, les quantités l proposées ne seraient pas des valeurs positives minimales ni le canon le plus simple.

Si les séries K se résument à une seule série, le théorème précédent implique cet autre.

Théorème II. *Dans un canon le plus simple, le maximum d'une série non inchangée est égal à un autre terme de la même verticale*

Étant donné un canon le plus simple, nous choisissons de nouveau un système complet de maxima transversaux. Dans une série α_1 quelconque, à laquelle correspond une quantité l non nulle, se trouve un *maximum* auquel est égal selon II un terme dans la même verticale appartenant à une série α_2 où se trouve de nouveau un *maximum* qui est égal à un terme de la même verticale d'une série α_3, et ainsi de suite. Si à un *maximum* donné sont égaux plusieurs termes de la même verticale, le processus décrit peut être mené de plusieurs manières mais on a

Théorème III. *Dans le canon le plus simple, parmi les diverses manières d'aller d'une série donnée à une autre par le processus décrit, il s'en trouve toujours une par laquelle on parvient à une série inchangée i.e. une série à laquelle correspond la valeur $l = 0$.*

Car, si le théorème III n'a pas lieu, on divise les séries du canon en deux ensembles[10] dont le premier contient toutes les séries qu'on peut atteindre par le processus donné et le second toutes celles qu'on ne peut pas atteindre, de sorte que les séries inchangées sont toutes dans le second ensemble. Ce faisant, on peut prendre le premier ensemble pour les séries K et le second pour les séries J du théorème I. Donc, selon le théorème I, on peut aller d'une série du premier ensemble à une série du second, ce qui est contre l'hypothèse. D'où l'absurdité de la supposition que le théorème III n'a pas lieu.

Par brièveté, j'appellerai par la suite canon $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$ un canon quelconque où les quantités $m', m'', \ldots, m^{(n)}$, que je suppose toujours positives ou nulles, prennent respectivement la place de $(l', l'', \ldots, l^{(n)})$. Ceci défini, nous aurons à propos de ces deux canons le

Théorème IV. *Deux canons étant donnés, le premier $(f', f'', \ldots, f^{(n)})$, le second $(g', g'', \ldots, g^{(n)})$, il y aura toujours un autre canon $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$ tel que l'une quelconque des quantités $m^{(i)}$ soit inférieure ou égale à la plus petite de $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$.*

Il s'en suit le corollaire :

Le canon le plus simple est unique, ou encore il existe un unique système de quantité l', l'', $\ldots$, $l^{(n)}$ qui donnent un canon le plus simple.

Soient les quantités $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$, $g^{(n)}$ respectivement plus grandes que $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, $\ldots$, $f^{(n)}$ et g', g'', $\ldots$, $g^{(\alpha)}$ respectivement inférieures ou égales à f', f'', $\ldots$, $f^{(\alpha)}$. Nous appelons respectivement $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ les quantités qui constituent le premier et le second canon, avec

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

et soit de nouveau le système des maxima transversaux dans le premier canon

$$q_1^{(i_1)}, q_2^{(i_2)}, \ldots, q_n^{(i_n)},$$

où tous les $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont différents entre eux ; dans le second canon

$$r_1^{(i_1)}, r_2^{(i_2)}, \ldots, r_n^{(i_n)},$$

sera aussi un système de maxima transversaux. En effet, toutes les sommes transversales du second canon diffèrent des sommes correspondantes du premier de la même quantité

$$g' + g'' + \cdots + g^{(n)} - \left\{ f' + f'' + \ldots + f^{(n)} \right\},$$

donc comme la somme

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \cdots + q_n^{(i_n)}$$

est maximale, la somme

$$r_1^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \cdots + r_n^{(i_n)}$$

doit l'être aussi. Et comme dans tout canon on a par définition une somme transversale maximale, dont chaque terme est maximal parmi tous ceux de sa verticale, les termes

$$r_1^{(i_1)}, r_2^{(i_2)}, \cdots, r_n^{(i_n)}$$

[10] Malgré son anachronisme, « ensemble » a été utilisé pour traduire *complexus*. N.d.T.

doivent être égaux respectivement aux maxima des première, seconde, ..., $n^{\text{ième}}$ verticales, pour que leur somme puisse être maximale. Donc, comme $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont tous différents entre eux, ces termes constituent eux-mêmes un système de maxima transversaux. C.Q.F.D.

Comme les quantités $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ..., $g^{(n)}$ sont respectivement plus grandes que $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, ..., $f^{(n)}$ quantités elles-mêmes toutes supposées positives ou nulles, les quantités $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ..., $g^{(n)}$ sont toutes positives. J'observe alors qu'il ne peut se faire que dans les séries $\alpha+1$, $\alpha+2$,..., n du canon (g', g'', ..., $g^{(n)}$) on trouve un maximum égal à un terme placé dans la même verticale, mais appartenant à l'une des séries restantes. Soit en effet ce maximum dans la série i_k et le terme qui lui est égal dans la série i, de sorte que

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

où i est l'un des nombres $1, 2, \ldots, \alpha$ et i_k l'un des nombres $\alpha+1$, $\alpha+2$, ..., n : on aura, d'après la formule donnée ci-dessus,

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

où selon la supposition faite $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ et $g^{(i)} - f^{(i)} \leq 0$. D'où

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

ce qui est absurde car $q_k^{(i_k)}$ est un maximum parmi les termes de la même verticale (q'_k, q''_k, ..., $q_k^{(n)}$). Alors, comme dans le second canon, un maximum placé dans la $(\alpha+1)^{\text{ième}}$, $(\alpha+2)^{\text{ième}}$,..., $n^{\text{ième}}$ série ne peut pas être égal à un terme de la même verticale situé dans l'une des séries restantes, les quantités $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ..., $g^{(n)}$ peuvent toutes êtres diminuées d'une même quantité, les autres restant inchangées, jusqu'à ce que dans l'une des séries $(\alpha+1)$, $(\alpha+2)$, ..., n on trouve un maximum qui ne soit pas plus grand que la valeur d'un autre terme situé dans la même verticale, appartenant à une série restante ou que l'une des quantités $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ..., $g^{(n)}$ ne s'annule. Par cette diminution, aucun maximum, ni donc la nature du canon ne sera détruit. Si par ce moyen, on obtient

$$\left(g', g'', \ldots, g^{(\alpha)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots, g_1^{(n)}\right)$$

et que parmi les quantités $g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots, g_1^{(\beta+1)}, g_1^{(\beta+2)}, \ldots$ sont plus grandes que les quantités correspondantes $f_1^{(\beta+1)}, f_1^{(\beta+2)}, \ldots$, on obtient par la même méthode un nouveau canon dans lequel ces quantités subiront de nouveau une diminution et l'on peut continuer ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un canon

$$\left(m', m'', \ldots, m^{(\alpha)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \ldots, m^{(n)}\right)$$

où toutes les quantités incluses sont inférieures ou égales aux quantités correspondantes $f', \ldots$ et $g', \ldots$ C.Q.F.D.

Il découle du théorème IV

Théorème V. *Il n'y a pas de canon pour lequel l'une des quantités $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ prenne une valeur plus petite que pour le canon le plus simple.*

Supposons donné un tel canon, par la méthode précédente on pourrait en obtenir un autre pour lequel l'une au moins des quantités $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ prendrait une valeur plus petite que pour le canon le plus simple, les autres n'étant pas plus grandes, ce qui est contraire à la définition d'un canon le plus simple. Comme la valeur la plus petite que peuvent prendre les quantités $l', \ldots$ est 0, il découle de la proposition V le corollaire

Théorème VI. *Une série qui est inchangée dans un canon quelconque l'est aussi dans le canon le plus simple.*

Pour savoir si un canon quelconque est ou non le plus simple, on peut ajouter cette proposition

Théorème VII. *Un canon étant donné, et ayant choisi un système de maxima transversaux, on note d'abord A les séries inchangées, puis ensuite B les séries dont les maxima sont égaux à un terme d'une série de A situé dans la même verticale, puis C les séries dont les maxima sont égaux à un terme d'une série de B situé dans la même verticale, et ainsi de suite. Si, poursuivant ce processus, on épuise toutes les séries du canon, le canon sera le plus simple.*

Les quantités $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ se rapportent au canon proposé et les quantités l'_1, l''_1, …, $l_1^{(n)}$ à un autre canon. Nous supposons choisi le même système de maxima transversaux que dans le théorème considéré, auquel répond un système de maxima transversaux dans l'autre canon.

Si $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, le maximum de la série γ dans l'autre canon possédera une valeur plus petite que dans le canon proposé. Si la série γ appartient à l'ensemble C, de sorte que, dans le canon proposé, le maximum de la série γ soit égal à un terme de la série β appartenant à l'ensemble B, on doit alors avoir $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$. Appelant en effet $p_k^{(i)}$ les termes du canon proposé et $q_k^{(i)}$ ceux de l'autre, on aura

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\beta)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)},$$

d'où, si $p_k^{(\gamma)} = p_k^{(\beta)}$ est le maximum de la série γ, on aura

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\beta)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} = q_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} - \left\{l_1^{(\gamma)} - l^{(\gamma)}\right\}.$$

Donc, comme $q_k^{(\gamma)}$ est le maximum de la $k^{\text{ième}}$ verticale et que par conséquent $q_k^{(\gamma)} \geq q_k^{(\beta)}$ et $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, on doit avoir $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$.

Ensuite, dans le canon proposé, le maximum de la série β est égal à un terme de la série α appartenant à l'ensemble A et l'on montre de la même manière que l'on doit avoir $l_1^{(\alpha)} < l^{(\alpha)}$, ce qui est absurde puisque, selon la supposition faite, $l^{(\alpha)} = 0$ et $l'_1, l''_1, \ldots, l_1^{(n)}$ sont positives ou nulles. La réduction à l'absurde procède de la même manière, à quelqu'ensemble $A, B, C, D, \ldots$ qu'appartienne la série γ à laquelle correspond dans l'autre canon la quantité $l_1^{(\gamma)}$ inférieure à celle du canon proposé $l^{(\gamma)}$. Donc, si le canon est tel qu'on le suppose dans VII, les valeurs l ne peuvent prendre pour aucun autre des valeurs inférieures ; c'est-à-dire que le canon proposé est le plus simple.

Ce qui précède contient aussi la solution du problème *étant donné un canon quelconque, en trouver un le plus simple.* On peut supposer que dans le canon donné, l'une au moins des séries est inchangée ; s'il ne s'en trouve pas, on en obtiendra une en diminuant tous les l de la même quantité. Comme dans le théorème VI nous appelons A l'ensemble des séries inchangées, et construisons les ensembles $B, C, \ldots$ qui y sont définis. Si par ce procédé on épuise toutes les séries, le canon, selon VII, est déjà le plus simple. Supposons qu'il reste des séries dépourvues de tels *maxima*, auxquels soient égaux des termes de la même verticale appartenant aux ensembles formés. Alors les termes des séries restantes (ou les quantités l qui se rapportent à ces séries) peuvent toutes être diminuées d'un même quantité jusqu'à ce que l'une de leurs quantités l

ne s'annule ou que l'un de leurs *maxima* ne décroisse jusqu'à égaler un terme situé dans la même verticale et appartenant aux ensembles formés. Ceci fait, on obtient un nouveau canon, dans lequel le nombre des séries appartenant aux ensembles fomés selon la règle indiquée est augmenté. Si toutes les séries entrent dans ces ensembles, le canon obtenu sera le plus simple. Sinon, de nouveaux canons sont à construire en répétant la même méthode, toujours moins de séries restant en dehors des ensembles qui peuvent être formés, jusqu'à ce que l'on parvienne à un canon dans lequel ces ensembles épuiseront toutes les séries et qui est le canon le plus simple cherché.

Exemple.

Tableau proposé.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	3	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon proposé.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	24	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon dérivé I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon dérivé II.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon le plus simple.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

À partir du tableau proposé, en ajoutant aux termes des différentes séries les nombres respectifs 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0, on obtient un nouveau tableau, dans lequel des termes maximaux parmi tous ceux de leur verticale sont dans des séries horizontales différentes, ce qui est la propriété caractéristique d'un canon.

On se propose de rechercher un canon le plus simple. La série VII constitue dans le canon donné l'ensemble A. Je soustrais l'unité des termes des autres séries, ce qui produit le canon dérivé I.

Dans le canon dérivé I, les séries IV et VII constituent l'ensemble A, la série I l'ensemble B. Je soustrais 2 des autres termes, ce qui produit le canon dérivé II.

Dans le canon dérivé II, les séries III, IV, VII constituent l'ensemble A, les séries I et VI l'ensemble B ; je soustrais l'unité des deuxième et cinquième séries, ce qui produit le dernier canon ou canon le plus simple, qui correspond aux valeurs de l 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. En ajoutant celles-ci aux termes des diverses séries du tableau proposé, on obtient le canon le plus simple. Les séries III, IV, VII constituent l'ensemble A, les séries I, II, V, VI l'ensemble B ; nous voyons que ces ensembles épuisent toutes les séries, ce qui est la propriété caractéristique du canon le plus simple.

Si on ne donne pas de canon mais seulement les termes du tableau proposé qui constituent une somme transversale maximale, on parvient au canon le plus simple en ajoutant à chaque série la quantité minimale pour que le terme de cette série appartenant à la somme transversale maximale soit rendu égal au maximum de sa verticale. Ayant appliqué ce procédé à chaque série et l'ayant répété si nécessaire, on doit parvenir à un canon qui sera le plus simple, puisqu'on n'ajoute pas d'incrément aux séries qui soit plus grand que ce qui est nécessaire pour que les termes donnés soient rendus maximaux dans leurs verticales respectives.

Exemple.

Tableau proposé.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Tableau dérivé.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon le plus simple.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Les termes notés d'un astérisques forment une somme transversale maximale, il apparaît que j'ai tiré le tableau proposé du canon précédent en changeant les séries horizontales en verticales et les verticales en horizontales ; ce faisant, les mêmes termes constituent une somme transversale maximale, mais le tableau cesse d'être un canon.

Au séries

$$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V},$$

j'ajoute respectivement selon la règle énoncée

$$8, 6, 8, 2, 7,$$

ce qui fournit le tableau dérivé.

Aux séries

$$\mathrm{I}, \mathrm{II},$$

j'ajoute respectivement

$$6, 4$$

ce qui produit le canon le plus simple recherché, dans lequel les séries III, IV, V, VI, VII demeurent les mêmes que dans le tableau dérivé. Dans le canon obtenu, les séries VI et VII constituent l'ensemble A, les séries III, IV, V l'ensemble B, les séries I, II l'ensemble C, comme ces ensembles contiennent toutes les séries nous obtenons la preuve que le canon est le plus simple. —

Comme, étant donné un canon, on connaît aussi une somme transversale maximale du tableau proposé, on peut ramener au problème résolu par ce qui précède cet autre problème, *étant donné un canon quelconque, rechercher le plus simple.* Celui-ci aura donc deux solutions, l'une par soustractions successives, comme plus haut, l'autre procédant par additions successives, à savoir que si nous tirons du canon donné une somme transversale maximale du tableau proposé, nous appliquons, celle-ci connue, la méthode précédente.

3.

On termine d'exposer la solution du problème d'inégalité considéré au paragraphe précédent. Un tableau étant donné, on trouve un canon.

Il nous reste à montrer comment trouver un canon quelconque ; en ayant trouvé un, nous avons vu diverses manières d'obtenir le plus simple. Nous proposons donc le problème d'inégalités suivant que nous devons avoir pour point de départ.

Problème.

Étant données nn quantités $h_k^{(i)}$ *où les indices* i *et* k *prennent les valeurs* $1, 2, \ldots, n$*, trouver* n *quantités minimales positives*

$$l', l'', \ldots, l^{(n)}$$

telles que, ayant posé

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

et ayant choisit pour chaque k *un maximum parmi les termes*

$$p_k', p_k'', \ldots, p_k^{(n)},$$

qui soit

$$p_k^{(i_k)},$$

les indices

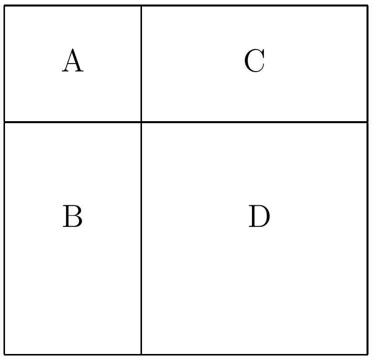
$$i_1, i_2, \ldots, i_n$$

soient tous différents entre eux.

Solution.

Une opération première et en quelque sorte préparatoire consiste, s'il y a dans le tableau des séries dans lesquelles ne se trouvent aucun *maximum*, de les augmenter de la quantité minimale qui fasse que l'un de leurs termes devienne égal à un *maximum* placé dans la même verticale. On obtient ainsi un nouveau tableau que j'appelle *tableau préparatoire* et dans lequel chaque série jouit d'un ou plusieurs maxima. Il n'est pas obligatoire que tous les maxima des diverses séries du tableau préparatoire appartiennent à des verticales différentes. Mais au minimum on aura *deux* séries dont les maxima appartiennent à deux verticales, ce qui ne se produit que dans le cas limite où tous les maxima se trouvent dans une même série et où tous les termes d'une même verticale sont égaux entre eux ; autrement, le nombre de maxima transversaux est toujours > 2. Si $n = 2$, le problème est résolu par cette première opération.

Dans le tableau préparatoire, je cherche le nombre maximal de maxima transversaux, quand il y a plusieurs choix possibles, il suffit d'en considérer au moins un. Ce choix fait, je résouds le problème proposé en augmentant successivement le nombre de maxima transversaux jusqu'à ce qu'on obtienne un tableau doté d'un système complet de maxima transversaux qui sera le canon recherché. Il suffit donc de démontrer qu'on peut accroître d'une unité le nombre de maxima transversaux par une augmentation idoine des séries.



Je divise le tableau préparatoire en quatre parties comme dans la figure ci-contre. Nous supposons que les maxima transversaux choisis sont tous dans la partie A, de sorte que les séries où sont ces maxima occupent les parties A et C ; les verticales auxquelles ils appartiennent occupent les parties A et B. J'appelle *supérieures* les séries occupant les parties A et C et *inférieures* celles occupant les parties B et D. J'appelle ensuite *gauches* les verticales occupant les parties A et B et *droites* les verticales occupant les parties C et D. Dès lors, dans la partie D ne se trouve aucun maximum. Sans quoi, le nombre de maxima transversaux serait augmenté, contredisant l'hypothèse que l'on en a choisi un nombre maximal. Les verticales droites ont donc leurs maxima en C ; les termes maximaux dans leurs verticales des séries inférieures seront en B, et chacun d'eux sera égal à un maximum de la même verticale placé en A, puisque dans l'espace A se trouvent les maxima de toutes les verticales de gauche de même que de toutes les séries supérieures.

Ceci posé, je partage toutes les séries en trois classes qui sont définies comme suit.

Je choisis celles des séries supérieures qui, outre des maxima en A, en possèdent même d'autres placés en C, de telle sorte qu'une au moins de ces séries existe. Supposons que l'un des maxima de ces séries placé en A soit égal à un autre terme de la même verticale ; on recherche un maximum placé dans la même série que ce terme et s'il est égal à un autre terme dans la même verticale, nous cherchons de nouveau un maximum placé dans la même série que ce terme, et ainsi de suite. Toutes les séries auxquelles on peut parvenir par ce moyen, depuis les séries de départ, constituent la *première classe*.

Je dis que, parmi les séries de la première classe, ne se trouvent pas de série inférieure, ni de série supérieure à partir de laquelle on puisse parvenir à une série inférieure par le moyen indiqué. En effet, étant parti d'une série qui, outre un maximum en A en possède un ailleurs en C, on considère un système de maxima placés en A auxquels on est parvenu par la méthode indiquée, dont le dernier, si cela se peut, est égal à un terme de la même verticale placé en B. Tous ces maxima placés en A sont, par hypothèse, transversaux et on obtiendra à leur place un autre système de maxima transversaux si l'on substitue à chacun d'entre eux un terme égal placé sur la même verticale. De la sorte, on substitue au dernier maximum le terme placé en B, sans plus utiliser la première série, dont nous sommes parti. En adjoignant le *maximum* de cette série placé en C pour former un nouveau système de maxima, le nombre des maxima transversaux augmente d'une unité, ce qui contredit la supposition que ce nombre était maximal.

Les séries supérieures qui n'appartiennent pas à la première classe et à partir desquelles on ne peut parvenir par le moyen indiqué à une série inférieure appartiennent à la *seconde classe*. Il peut se faire que cette classe soit vide.

Appartiennent enfin à la *troisième classe* toutes les séries inférieures et les séries supérieures à partir desquelles la méthode décrite donne accès aux séries inférieures. *Donc, si un terme d'une série inférieure est égal à un maximum d'une série supérieure sur la même verticale — ce qui est toujours le cas — cette série supérieure appartiendra à la troisième classe.* La troisième classe, sauf si le tableau est déjà un canon, contient au moins deux séries, l'une inférieure, l'autre supérieure.

J'exprimerai de nouveau ce que j'ai démontré au sujet de la première classe en disant que, *parmi les séries supérieures de la troisième classe, il ne s'en trouve aucune qui possède un maximum placé en C*. J'utiliserai par la suite cette forme de la proposition.

Les observations faites à cette occasion produisent en même temps une méthode pour faire apparaître le nombre maximal de maxima transversaux dans le tableau préparatoire. En effet, ayant posé un tel système de maxima transversaux, s'offrant de prime abord, cette classification des séries indique si leur nombre peut être augmenté.

La classification ainsi décrite étant faite, *toute la troisième classe est augmentée d'une quantité identique et la plus petite qui fasse qu'un terme des séries de cette classe atteigne un terme maximal placé sur la même verticale appartenant à une série de la première ou de la seconde classe.*

Ainsi, si le maximum appartient à la première classe, le nombre de maxima transversaux peut être augmenté. Soit en effet une série supérieure qui possède, outre un maximum en A, un autre en C et d'où l'on puisse aller par le moyen indiqué à une série inférieure. Cette série est à compter au nombre des séries supérieures tandis qu'on doit augmenter celui des verticales de gauche par la verticale de droite dans laquelle se trouve ce maximum placé en C. Si le terme d'une série de la troisième classe, égal à un maximum d'une série de la première, se trouve en D, les maxima transversaux restent inchangés, il suffit d'ajouter ce terme. Si encore ce terme se trouve en B, il faut changer tous les maxima formant cette chaîne par laquelle on descend jusqu'à la série inférieure depuis la série contenant le maximum en C. À savoir que chacun de ces maxima transversaux est à remplacer par le terme de la même verticale qui lui est égal, le dernier donc par ce terme en B, de nouveaux maxima transversaux apparaissant ainsi en ajoutant au début le terme de la première série[11], comme je l'ai fait remarquer au sujet de la première classe.

Si le maximum auquel est égal un terme de la troisième classe se trouve dans une série de la seconde, rien ne change, sinon que ces séries passent dans la troisième classe en même temps que toutes les séries restantes de la seconde classe à partir desquelles, par la chaîne indiquée, on

[11]Celle contenant le maximum en C. N.d.T.

atteint cette série. Répétant cette opération de nouveau, ou on augmente le nombre de maxima transversaux, ou on diminue celui des séries de la seconde classe, à moins qu'avant que le nombre de maxima transversaux ne soit augmenté on ne parvienne à un tableau privé des séries de la seconde classe, parce que toutes seront passées dans la troisième. Mais alors, par l'opération mentionnée, on obtiendra assurément une augmentation des maxima transversaux. Y étant parvenu, il faut, dans les différents cas qui peuvent se produire et qu'il serait long d'énumérer, effectuer une nouvelle répartition des maxima transversaux en les trois classes assignées et, ceci fait, répéter l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un canon dans lequel les séries inférieures seront toutes devenues supérieures et les verticales de droite devenues de gauche.

Et par la méthode précédemment décrite, on obtient non seulement un canon, mais un canon le plus simple. Pour le prouver, je démontrerai que les quantités dont sont augmentées les séries sont minimales, parce qu'elles sont exigées pour produire tout canon. Tout d'abord, en ce qui concerne l'opération préparatoire, j'observe que chaque terme du canon est supérieur ou égal au terme correspondant du tableau donné, comme le canon est obtenu en ajoutant à chaque série du tableau uniquement des quantités positives ou nulles. Donc, le maximum dans chaque verticale du canon est supérieur ou égal au maximum dans la même verticale du tableau donné. Or, dans les canons, se trouve dans chaque série un maximum, donc un terme qui est supérieur ou égal au maximum du tableau donné placé dans la même verticale ; nous devons donc augmenter chaque série du tableau donné privé de maximum d'une quantité telle que l'un de ses termes devienne supérieur ou égal au maximum de la même verticale. Si alors nous considérons les quantités dont diffèrent chaque terme d'une série des maxima de la même verticale, la quantité dont la série doit être augmentée ne doit pas être inférieure au minimum de ces quantités. Ainsi donc, en augmentant chaque série privée de maximum de la quantité minimale qui rendra l'un de ses termes égal au maximum de la même verticale, ces séries ne sont certainement pas augmentée de quantités plus grandes que ce qui est exigé pour former le canon.

La préparation faite, si elle fournit déjà par elle-même un canon, celui-ci est certainement le plus simple ; nous avons vu en effet que des quantités positives, minimales pour fournir un canon, sont ajoutées aux séries du tableau proposé. Mais si un canon n'est pas encore apparu, il a fallu procéder à la distribution des séries en trois classes. Je vais maintenant démontrer que pour produire un canon, *il ne peut se faire que l'une des séries de la troisième classe demeure inchangée.*

Dans la démonstration, j'appellerai S le tableau préparatoire, K le canon obtenu. Je suppose toujours que la classification des séries a nécessité de considérer en S un certain système de maxima transversaux dans l'espace A, de sorte que s'il se trouve plusieurs systèmes de la sorte en A, l'un quelconque d'entre eux doive être choisi. De même dans K, je suppose, si plusieurs systèmes de maxima transversaux se présentent, que l'on en a choisi un.

Nous considérons en S, s'il s'en présente, l'ensemble de toutes les séries supérieures de la troisième classe inchangées, c'est-à-dire celles auxquelles nulle quantité n'est ajoutée pour former le canon K, ou encore qui sont en S et K identiques. Nous appelons H l'ensemble de ces séries et nous considérons des maxima transversaux de celles-ci choisis dans S et K. Je dis que *les systèmes de ces maxima dans S et K seront dans les mêmes verticales.* Soit en effet M l'un de ces maxima dans K placé dans une série inchangée, il lui correspond dans S un terme égal de la même série et lui-même maximal dans sa verticale. Car, comme on passe de C à K par additions positives, les termes de cette verticale en S sont inférieurs ou égaux aux termes correspondants de K ; donc si leur maximum en K est égal à un terme de S dans la même verticale, celui-ci doit être *à plus forte raison* maximal parmi les termes de la même verticale dans S. Le terme M doit appartenir à l'espace A car, selon les propriétés des classes, une série supérieure de la troisième classe n'a pas de terme maximal dans sa verticale placé en C. Nous appelons V l'ensemble des verticales dans lesquelles sont les maxima des séries de H dans S et nous supposons que la verticale dans laquelle est M n'appartient pas aux verticales de V. Il existera en S dans cette verticale un maximum $N = M$ appartenant aux maxima transversaux choisis dans l'espace A et c'est pourquoi ce maximum N sera placé dans une série qui ne fait pas partie de celle de H. Les maxima transversaux choisis dans les séries H sont eux-mêmes dans les verticales de V, alors que N est supposé être dans une verticale n'appartenant pas à V. Cette nouvelle série[12] doit être une série supérieure appartenant à la troisième classe ; le maximum N appartient en effet à l'espace A et il résulte de la définition des classes donnée que si, dans la même verticale, se trouvent des termes maximaux tous égaux entre eux, les séries dans lesquelles ils ont placés appartiennent à la même classe. Alors, si pour former le canon K, on ajoutait à cette série une quantité non nulle, le terme de K correspondant à N se trouverait plus grand que N, et donc aussi plus grand que le terme M placé dans la même verticale, ce qui ne peut pas se produire puisque M est maximal dans sa verticale. Cette série doit donc elle-même être inchangée, ce qui est aussi absurde car on a supposé que les séries de H sont *l'ensemble de toutes* les séries inchangées de la troisième classe. Donc M lui-même se trouve nécessairement dans une verticale de V ; comme ceci vaut pour chacun des maxima, il s'ensuit que le système des maxima transversaux des séries de H choisis dans K sont dans les mêmes verticales que le système des maxima transversaux de ces mêmes séries choisis dans S ; C.Q.F.D.

Si l'on prend dans S des termes correspondants et égaux aux maxima des séries de H dans K, ceux-ci formeront dans S un autre système de maxima transversaux qui sont dans les mêmes séries horizontales et verticales. Ce qui ne peut se faire, à moins que les termes des deux systèmes placés dans les mêmes verticales ne soient égaux entre eux. D'où provient ce corollaire : *si l'on prend dans S, dans une série inchangée de la troisième classe, un maximum, on aura dans K un maximum égal, dans la même verticale, dans une série supérieure de la même classe.* Je suppose toujours que les maxima dans S ou dans K sont pris dans les systèmes choisis de maxima transversaux.

Pour le reste, la proposition précédente se démontre de la même manière si H désigne l'ensemble des séries inchangées de la seconde classe ; c'est en revanche seulement pour celles-ci que la proposition possède force et signification. En effet, les séries inchangées de la troisième classe n'existent absolument pas.

Il apparaît d'abord *qu'on n'a pas de séries inférieures inchangées.* Si en effet, il y a une série inférieure inchangée, soit M son maximum dans K, tiré du système de maxima transversaux choisis ; ce même terme sera en S maximal parmi tous ceux de la même verticale et pour cela est égal à un maximum d'une série de la troisième classe placé dans la même verticale et appartenant aux maxima transversaux[13]. Mais, selon le corollaire précédant, il doit se trouver dans K dans la même verticale un maximum d'une série supérieure appartenant aux maxima transversaux, d'où l'on aura dans K, dans la même verticale, deux maxima transversaux, l'un dans une série supérieure, l'autre M dans une inférieure, ce qui est contraire à la notion de

[12]Contenant N. N.d.T.

[13]Voir ci-dessus la définition de la troisième classe page 15.

maxima transversaux.

Je vais maintenant démontrer que, *s'il y a une série la troisième classe supérieure inchangée, il y en a une inférieure inchangée*; comme c'est impossible, il sera prouvé qu'il n'y a de série inchangée de la troisième classe, ni inférieure ni supérieure.

Supposons donnée une série supérieure inchangée de la troisième classe que je désigne par s. Selon la définition de la troisième classe, on aura des séries s, s_1, s_2, $\ldots$, s_{m-1} telles que leurs maxima $M, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$ qui sont tirés du système de maxima transversaux choisis, ont chacun dans la même verticale un terme égal N_i dans la série suivante, le dernier M_{m-1} étant égal à un terme N_{m-1} de la même verticale dans une série inférieure, de sorte que N_i et M_{i+1} sont tout deux dans la même série, et que M_i et N_i sont tous deux égaux et dans la même verticale. Alors, si une série supérieure s de la troisième classe est inchangée, on aura selon le corollaire précédent un maximum dans K égal à M lui-même et placé dans la même verticale ; d'où il sera impossible pour former le canon d'augmenter la série s_1, sans quoi, en effet, on augmenterait le terme N et le maximum M lui-même, placé dans la même verticale, disparaîtrait. La série s_1 doit donc elle aussi être inchangée, et l'on prouve de même que chacune des séries $s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}$, ainsi que la série inférieure s_m, sont inchangées, ce que nous avons vu être impossible.

Comme, pour former le canon, aucune série de la troisième classe ne peut rester inchangée, soit f la plus petite des quantités par lesquelles ces séries doivent être augmentées pour que, étant toutes augmentées de f, il s'en trouve dans le nouveau tableau au moins une, qui pour former le canon ne doive pas être augmentée davantage, mais demeure *inchangée*. Soit g la quantité minimale dont on augmente une série S de la troisième classe pour que l'un de ses termes devienne égal au maximum d'une série de la première ou de la seconde classe placé dans la même verticale. Si $f < g$[14] et que toutes les séries de la troisième classe S sont augmentées de f[14], nous voyons que dans le nouveau tableau la répartition des séries en classes n'est pas modifiée, et que chacune appartient à la même classe que dans S. Il ne pourra donc y avoir $f < g$; sinon en effet, on aurait un tableau dans lequel se trouveraient des séries inchangées de la troisième classe, ce qui ne peut être. Nous voyons de là que la quantité minimale dont les séries de la troisième classe doivent être augmentées pour que l'un de leurs termes atteigne un maximum d'une série de la première ou de la seconde classe placé dans la même verticale et inférieur ou égal à la plus petite des quantités dont les séries de la troisième classe doivent être augmentées pour former le canon. D'où il procède que, par la règle énoncée, on n'effectue jamais d'additions supérieures à ce qui est nécessaire pour former un quelconque canon et à cause de cela, *le canon obtenu par notre règle sera le plus simple.*

[14] Le texte d'origine comporte ici f' au lieu de f, ce qui ne fait pas sens : une probable erreur typographique. N.d.T.

Exemple.

Tableau proposé.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Tableau préparatoire.

$\underline{19}^*$	15	14	12	14	12	19	t
17	$\underline{18}^*$	17	17	9	17	18	t
15	$\underline{18}$	22	21	16	13	15	t
$\underline{19}$	10	16	25	11	12	22	t
$\underline{19}$	16	16	21	25	10	25	t
10	$\underline{18}$	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Tableau dérivé I.

$\underline{20}^*$	16	15	13	15	13	20	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	t
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{20}$	11	17	26	12	13	23	
$\underline{20}$	17	17	22	26	11	26	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Tableau dérivé II.

$\underline{21}^*$	17	16	14	16	14	21	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{21}$	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{21}$	18	18	23	27	12	27	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Tableau dérivé III.

$\underline{22}^*$	18	17	15	17	15	22	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	t
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{22}$	$\underline{19}$	19	24	28	13	28	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Canon le plus simple.

$\underline{25}^*$	21	20	18	20	18	25
21	$\underline{22}^*$	21	21	13	21	22
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24
$\underline{25}$	$\underline{22}$	22	$\underline{27}$	$\underline{31}^*$	16	31
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$

Dans le tableau proposé, les trois premières series et la cinquième n'ont pas de termes maximaux. Il faut ajouter respectivement à ces séries les nombres minimaux 8, 6, 7, 1, par lesquels on peut faire que l'un de leurs termes devienne maximal. Dans le tableau ainsi préparé, j'ai souligné tous les termes maximaux de chaque verticale et mis une étoile en exposant aux maxima transversaux choisis (noté par un astérisque). Enfin, j'ai noté d'un t les séries de la troisième classe que l'on trouve ainsi. D'abord, y appartiennent toutes les séries α qui n'ont pas de terme étoilé, que j'ai appelées ci-dessus inférieures ; ensuite les séries β qui ont un terme étoilé dans une verticale où a déjà été souligné un terme d'une série α ; si, outre les termes étoilés, les séries β ont d'autres termes soulignés, on cherche dans les mêmes verticales de nouveaux termes étoilés, qui appartiennent aux séries γ, et ainsi de suite : toutes les séries α, β, γ etc. aisément trouvées forment la troisième classe. Il apparaît aussi que pour appliquer la règle jusqu'au bout, il faut seulement demander de connaître les séries de la troisième classe et que la répartition en première et seconde classe est inutile. La règle en effet n'exige rien d'autre que d'augmenter ensemble toutes les séries de la troisième classe d'une quantité minimale qui fasse que l'un de leurs termes devienne égal à l'un des termes maximaux étoilés des autres séries, situé dans la même verticale. Tout le travail consiste en effet en cette augmentation des séries, le choix de maxima transversaux et la détermination des séries de la troisième classe, après laquelle une augmentation est de nouveau effectuée. Ce qui doit être continué jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de séries de la troisième classe, auquel cas on est parvenu au canon le plus simple.

On peut, par divers artifices, s'épargner la tâche de réécrire tout le tableau après un changement quelconque. À savoir que pour passer d'un tableau au suivant, il n'est pas nécessaire d'avoir d'autres termes sous les yeux que ceux qui sont maximaux dans chaque verticale et ceux immédiatement inférieurs, et qu'il suffit d'écrire ceux-ci. Ensuite, il n'est pas nécessaire de respecter l'ordre des séries, il suffit de rayer les séries à augmenter et de les réécrire en dessous de celles qui n'ont pas été changées. Mais ces moyens et d'autres qui sont commodément employés pour une grande masse de nombres sont laissés au choix de chacun.