Nachtrag.

Eine ausgezeichnete, von Schell herrührende Nachschrift der letzten großen, in Berlin gehaltenen Wintervorlesung Jacobis über die Theorie der krummen Flächen und Kurven doppelter Krümmung, welche durch Formvollendung und Reichhaltigkeit des Inhaltes die früheren Vorlesungen über diesen Gegenstand weit übertrifft, ist mir erst nachträglich bekannt geworden.

Eine kurze einleitende Skizzierung der Arbeiten Eulers und Monges schließt Jacobi mit den Worten:

„Außer den Krümmungslinien entdeckte auch Monge die Konstruktion der partiellen Differentialgleichungen und die Erzeugung der Flächen durch Bewegung von Kurven, die während dieser ihre Elemente ändern; diesen geometrischen Bewegungen entsprechen analytische bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen. Überhaupt sind solche Analogien sehr lehrreich. Von einem gewissen Standpunkte aus verschwinden die einzelnen Disziplinen. Operationen in der Algebra, Geometrie, Mechanik gehen in einem allgemeineren Gedanken auf. Dieser Gedanke leitete zuerst Lagrange, als er versuchte, alle mathematischen Wissenschaften aus einem Prinzipe abzuleiten. Jeder Fortschritt der einen Wissenschaft ist dann bei einem solchen Ineinandergreifen zugleich ein Fortschritt der übrigen Disziplinen. Die Wissenschaft darf keine Quelle verschmähen, aus der sie schöpfen kann. Will man als Analyst reden, so muß man sagen, daß die Stärke der Mathematik in der Symbolik bestehe, indem man damit ein ganzes System von Gedanken durch ein Zeichen fixiert, um mit dem Erblicken dieses Zeichens sogleich an diese Gedankenreihe erinnert zu werden, ohne nötig zu haben, sie noch einmal durchzudenken";

er geht nun zur Auseinandersetzung der Grundzüge des geometrischen Differentiierens über: „Wenn die Analysis alle Verhältnisse der Lage und Figur seit Descartes auf

Größenverhältnisse zurückführt, so führt sie etwas außerhalb des Problems Liegendes ein, denn die Koordinatenachsen müssen wieder herausfallen. In besonderen Fällen kann man zwar deren Lage so bestimmen, daß sie ein Teil des Problems werden, dann nähern sich die analytischen Betrachtungen den geometrischen. Die Bedeutung einer Formel zu erkennen, dafür gibt es keine Regeln, und es bleiben daher oft einfache Resultate in den Formeln verborgen. Die geometrische Betrachtung lehrt die Formeln deuten, sie bleibt immer in der Figur, und jedes Resultat ist gerade so ausgedrückt, wie es der Gegenstand fordert. Hat man eine oder mehrere Größen durch andere ausgedrückt, die völlig bestimmt sind, so kann man untersuchen, wie jene sich ändern, wenn die Bestimmungsstücke sich ändern; man nimmt die Änderungen so klein an, daß man analytisch nach Potenzen entwickeln kann. Die geometrische Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten anzugeben, ist sodann die Aufgabe des geometrischen Differentiierens."

Die Differentiation des sphärischen Dreiecks liefert ihm den berühmten Legendreschen Satz, daß, wenn man die Winkel eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten berechnet, als wären diese Seiten eines ebenen Dreiecks, und dann $^1/_3$ des sphärischen Exzesses zu jedem der gefundenen Winkel hinzuaddiert, man die Winkel des sphärischen Dreiecks bis auf Größen der 4. Ordnung genau erhält, und ähnlich ergeben sich die von Bessel und Gauss gegebenen Erweiterungen.

Nachdem er nun ähnlich wie in früheren Vorlesungen über diesen Gegenstand allgemeine Betrachtungen über Berührungen verschiedener Ordnung von Kurven und Flächen angestellt, geht er zunächst zur Behandlung der Wendepunkte ebener Kurven über, die er auf der Entwicklung der Kurvengleichung nach der Taylorschen Reihe basiert, beweist auf Grund einer genauen Behandlung der Diskriminante und des invarianten Charakters derselben seinen Satz von der Anzahl der Doppeltangenten, den er bald darauf im Crelleschen Journal veröffentlichte, und schreitet von diesen Betrachtungen aus zur Einteilung der Flächen in konkav-konkav- und konkav-konvex-Flächen. Es folgt die Aufstellung der Differentialgleichungen für die abwickelbaren und windschiefen Flächen, die Diskussion der Rotationsflächen und eine eingehende Behandlung des Berührungskegels mit Anwendung auf viele einzelne Probleme, wobei er die Methoden von Joachimsthal und Hesse, um zur Gleichung des Tangentenkegels zu gelangen, nach verschiedenen neuen Gesichtspunkten entwickelt.

Nunmehr macht er den Übergang zur allgemeinen Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variabeln, bespricht die Methode von Lagrange und geht sodann nach Behandlung der Theorie der Mongeschen Charakteristiken zu seinen eignen Methoden für die Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen über, wobei er das Problem, welches, geometrisch aufgefaßt, aus der Lage der Tangentialebene die Natur der Flächen finden will, von den verschiedensten Gesichtspunkten aus behandelt. Bei der Besprechung des Pfaffschen Problems setzt er seine Methode auseinander, bei welcher man durch Einführung der Anfangswerte als willkürliche Konstanten dazu gelangt, mit der Integration eines einzigen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems auszureichen; „Cauchy hatte schon 20 Jahre früher dasselbe gefunden, allein an einem so obskuren Ort (Bulletin de la société philomatique) 1819 bekannt gemacht, daß diese Entdeckung ihm selbst entschwunden war.“ Es folgt eine ausführliche Theorie der Enveloppen und die Behandlung der Mongeschen Wendekurve.

Elegante Entwicklungen für die Theorie der Krümmungsebenen, Normalebenen und Evoluten der räumlichen Kurven bilden die Grundlage für die Theorie der kürzesten Linien auf Flächen, deren Eigenschaften und Differentialgleichung, unter Hervorhebung des Unterschiedes zwischen der kürzesten oder geodätischen Linie von der in der Geodäsie ebenso benannten Kurve; er behandelt die kürzesten Linien auf Umdrehungs- und abwickelbaren Flächen, und gibt sehr interessante Ausführungen der von ihm früher veröffentlichten Sätze über von drei Kurven im Raume gebildete Dreiecke, von denen der bekannte Gausssche Satz von der curvatura integra eines von drei geodätischen Linien einer Fläche gebildeten Dreiecks nur ein spezieller Fall ist. „Man sieht, daß dieser Satz kein den Flächen inhärierender ist, sondern ein Satz von Kurven. Den sphärischen Raum nennt Gauss quadratura integra des Teiles der Fläche, der von den Kurven der Fläche eingeschlossen ist. Man sieht, daß dieser Raum gar nichts mit der Krümmung der Fläche zu tun hat. Ja man kann die Kurven im Raume ganz auseinander nehmen, sie brauchen sich gar nicht zu schneiden. Es kommt dies bei dem Satze gar nicht in Anwendung; es müssen die Kurven nur so beschaffen sein, daß der Krümmungshalbmesser am Endpunkt der ersten Kurve dieselbe Richtung hat wie der am ersten Punkte der zweiten Kurve; ob die Kurven aneinander stoßen oder nicht, darauf kommt es gar nicht an.“

Nach Behandlung der Krümmungslinien und der Krümmung der Flächen werden die Theorie der Indikatrix und die Eulerschen Sätze über die Krümmung der Normalschnitte auf rein geometrischem Wege entwickelt, und nach Anwendung dieser Sätze auf die Oberflächen 2. Ordnung die Beziehung zwischen dem Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes und dem des zugehörigen Normalschnittes ermittelt. Seine Untersuchungen über die Anwendung der Krümmungslinienkoordinaten deutet er nur flüchtig an, indem er sie als „mehr der Integralrechnung angehörig“ bezeichnet, und geht dann ausführlich auf die Dupinschen Sätze von den drei Scharen senkrecht sich schneidender Flächen ein, wodurch er zu einer eingehenden Darstellung der Theorie der elliptischen Koordinaten veranlaßt wird. Jacobi faßt den größten Teil der Sätze über konfokale Flächen 2. Ordnung in dem Hauptsatz zusammen, den er schon früher angedeutet, daß, wenn man aus einem beliebigen Punkt im Raume an die drei Systeme konfokaler Flächen die Berührungskegel legt, diese nicht nur dieselben Hauptachsen, sondern auch die beiden Brennlinien gemein haben, welch letztere die beiden geraden Linien des einflächigen konfokalen Hyperboloides sind, welches durch den gegebenen Punkt des Raumes geht.

In sehr einfacher und interessanter Weise wird die Theorie der Nabelpunkte dargelegt und sodann die Theorie der Krümmungslinien und kürzesten Linien an den Umdrehungsflächen erläutert.

„Um alle Fragen wenigstens anzudeuten, möge hier noch eine sehr berühmte Betrachtung folgen, welche in der Attraktion der Ellipsoide eine große Rolle spielt, und die für die Kegelschnitte von Maclaurin angestellt und später von Ivory auf die Flächen ausgedehnt worden ist, nämlich die Theorie der konjugierten Punkte zweier konfokalen Flächen“, und nun entwickelt er die Sätze, welche er schon früher Steiner mitgeteilt hatte, und welche eine Fläche 2. Grades als geometrischen Ort einer Pyramidenspitze definierten, deren Entfernungen von den Eckpunkten eines Dreiecks gleich sind den Entfernungen eines im Innern eines anderen Dreiecks liegenden Punktes von den Eckpunkten dieses. „Merkwürdigerweise hat man von dem Ivoryschen Satze, obgleich er schon seit 1808 bekannt ist, bis jetzt noch keine geometrische Anwendung gemacht“; nur andeutungsweise berührt er die Anwendung aller dieser Sätze auf die Theorie der Anziehung der Ellipsoide.

Allgemeine Formeln über den Inhalt von Oberflächen und die Kubatur krummer Räume, welche auf geometrischen Betrachtungen über die Funktionaldeterminante beruhen, beschließen die Vorlesung, die er vor elf Zuhörern in Berlin vom 29. Oktober 1849 bis zum 13. März 1850 gehalten.