# Rückblick.

Nachdem wir die Lebensschicksale Jacobis im einzelnen verfolgt und in der erstaunlich großen Zahl seiner wissenschaftlichen Arbeiten dessen geniale Schöpfungen auf allen mathematischen Gebieten kennen gelernt, nachdem wir da, wo seine Untersuchungen in der Theorie der Transzendenten denen Abels parallel liefen, die Priorität der Entdeckungen abzugrenzen und festzustellen gesucht haben, da, wo Gauss mit einer Genialität ohnegleichen ein Vierteljahrhundert zuvor in der Analysis wie in der Zahlentheorie die schöpferischen Gedanken vorweg genommen, Jacobi mit nie rastender und unendlich fruchtbarer Arbeit alles dies nacherfinden und nachentdecken gesehen haben, den Blick stets pietätvoll auf den größten Meister des Jahrhunderts gerichtet, erübrigt uns noch, ein Gesamtbild von dem zu entwerfen, was er mit gleicher schöpferischer Kraft wie Euler und Lagrange erfunden, erdacht, geschaffen, und was durch ihn allmählich die Basis unserer modernen Wissenschaft geworden — wir haben ihn aber auch noch als Leiter und Lehrer der mathematischen Jugend zu charakterisieren und von den Erfolgen seiner Dozentenwirksamkeit zu sprechen, wie sie uns jetzt, 50 Jahre nach seinem Tode, erscheint, zu einer Zeit gewaltigsten Aufschwunges der mathematischen Wissenschaften.

Werfen wir einen Blick auf die Entwicklung der Mathematik der damaligen Zeit. Die Reihen der großen französischen Mathematiker, welche neben Euler und den



Bernoullis in für alle Zeiten unvergänglichen Schriften die moderne Analysis und Geometrie aufgebaut, die analytische Mechanik begründet und die Grundlagen der mathematischen Physik geschaffen, begannen am Anfange des 19. Jahrhunderts sich zu lichten, doch ließen noch einzelne, wie Poisson, Fourier, Legendre und vor allem der unermüdliche und auf allen Gebieten durch tiefe und weittragende Entdeckungen hervorragende Cauchy noch bis weit über das erste Viertel des Jahrhunderts hinaus durch geniale Schöpfungen den Ruhm ihrer Namen immer von neuem erglänzen — aber wie ganz anders sah es damals in Deutschland, in der ganzen übrigen Welt mit dem Fortschritt der mathematischen Wissenschaften aus! Gauss war nicht bloß der vornehmste Repräsentant exakter Forschung, sondern ziemlich der einzige Schöpfer mathematischer Wahrheiten und Mehrer mathematisch-physikalischer Forschung, ebenbürtig Newton und den größten französischen Mathematikern des 18. Jahrhunderts; schon am Ende dieses Jahrhunderts, kaum 20 Jahre alt, hatte er mit staunenswerter Tiefe eine neue Zahlenlehre geschaffen, deren abstraktesten Teile mit der Transzendentenlehre verknüpft, die wesentlichsten Eigenschaften der lemniskatischen und allgemeinen elliptischen Funktionen erforscht, die Funktionentheorie begründet, die jetzige Potentialtheorie aufgebaut, eine Flächenlehre geschaffen, welche den abstraktesten geometrischen Wahrheiten eine Form gab, wie sie der Mechanik und mathematischen Physik adäquat war, und in der Physik und Astronomie Altes ausgebaut und völlig Neues und Unerwartetes ergründet, kurz nach einem schöpferischen Wirken ohnegleichen seinen Namen bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts in ungeschwächtem Glanze erhalten. Am Ende des ersten Viertels dieses Jahrhunderts zieht der norwegische Mathematiker Abel wie ein glänzendes Meteor über die mathematische Welt hin, unvergängliche Spuren seines Erscheinens hinterlassend, neben ihm ein wenig jünger regt Jacobi seine

Schwingen, um sich in kürzester Zeit zu dem nächst Gauss größten Mathematiker zu erheben. Niemand war noch im Anfange des Jahrhunderts imstande gewesen, den Untersuchungen von Gauss zu folgen, niemand hatte es gewagt, seinen Forschungen sich anzuschließen und sie fortzuführen, und so waren auch noch Abel und Jacobi gezwungen, mit der riesigsten Anstrengung des Geistes und dem ganzen moralischen Mute wissenschaftlicher Bahnbrecher den Boden mathematischer Arbeit in Deutschland fruchtbar zu machen, in stetem Hinweis auf den großen Göttinger Meister. Wie Jacobi es bis zu seinem Ende getan, so verehrte auch Abel in Gauss das unerreichbare mathematische Genie, aber sein Herz wendet sich ab von der Strenge und verschlossenen Natur dieses mächtigen Geistes, denn impulsiv ist Abels Gemüt und Verstand, wie es auch die Natur Jacobis gewesen; gewiß würden diese beiden jungen Forscher, die zwei Jahre hindurch im ernstesten Ringkampf auf demselben Gebiete die Palme des Sieges sich streitig machten, bei persönlicher Berührung, wie Jacobis Beziehungen zu Bessel es gezeigt, in hingebender Begeisterung für ihre Wissenschaft und nur von dem Streben beseelt, der Wahrheit zu dienen, sich eng aneinander geschlossen haben, wenn nicht der frühzeitige Tod Abels es verhindert hätte, daß diese beiden Mathematiker in der Vollkraft ihres Schaffens, in der Mitte der 20er Jahre stehend, die Berliner Universität zum Mittelpunkte mathematischen Lebens und Forschens gemacht, und durch Gründung eines, wie es vom Könige und dem Minister geplant war, großen, mit verhältnismäßig reichen Mitteln ausgestatteten Seminars eine neue Generation schaffensfreudiger und arbeitskräftiger junger Mathematiker heranbildeten. Abel starb 27 Jahre alt, Jacobi erreichte noch nicht das 48. Lebensjahr, Gauss, der sie beide überlebte, wurde 78 Jahre alt. Als ausgezeichnete Forscher und Lehrer traten sehr bald an die Seite Jacobis Dirichlet und Steiner, doch haben beide stets die große



Überlegenheit Jacobis in der Tiefe der Forschung nicht nur sondern vor allem auch in dem weiten Gesichtskreise auf dem Gebiete mathematischer, mechanischer und philosophischer Spekulation sowie in der unvergleichlichen Kraft anerkannt, mit welcher Jacobi die Begeisterung der nachwachsenden mathematischen Welt wachzurufen und dieselbe zu harter, schwieriger und gewissenhafter Arbeit heranzuziehen wußte.

Überall, wohin Jacobi seinen Scharfsinn lenkte, schuf er Bleibendes, und wurden seine Entdeckungen die Basis für die weitere Entwicklung der Wissenschaft. Als die Hauptgebiete, die er zum Teil neu geschaffen oder wenigstens durch seine genialen Gedanken völlig umgestaltet und in neue Bahnen gewiesen hat, müssen die Theorie der Transzendenten, die Lehre von den totalen und partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die analytische Mechanik bezeichnet werden; aber auch in der Algebra, der Theorie der Reihen und Integrale und der Anwendung dieser auf die Probleme der Astronomie, in der Zahlentheorie wie in der Geometrie, überall finden wir Jacobische Sätze von der weittragendsten Bedeutung, und alles mit einer Klarheit und Durchsichtigkeit aufgebaut und getragen von einer Kenntnis der historischen Entwicklung der Probleme, wie wir sie wohl sonst kaum wiederfinden.

Überblicken wir zunächst die letzteren Gebiete, so tritt uns schon in der Dissertation, mit welcher der zwanzigjährige Jacobi in die mathematische Welt eintrat, das Streben entgegen, die Probleme, welche er bei der Lektüre der Werke von Euler und Lagrange durch wechselnde, den einzelnen Aufgaben angepaßte Methoden gelöst fand, durch einheitliche und der Ausdehnung auf allgemeinere Probleme derselben Art fähige Methoden zu ersetzen. Die Einführung unendlicher Reihen in das Problem der Partialbruchzerlegung und die Darstellung der Koeffizienten der letzteren, unabhängig von dem Grade der Vielfachheit der Lösungen des Nenners der Funktion, als Entwicklungskoeffizienten von Reihen um singuläre Punkte derselben, bringt in einer noch frühen Zeit ein funktionentheoretisches Element in die algebraischen Untersuchungen, welches ihm gestattet, die Zerlegung auch auf solche Partialbrüche auszudehnen, deren Nenner für mehrere der Unendlichkeitspunkte der gegebenen Funktion zugleich verschwinden. Seine hier gewählten Bezeichnungen wurden später in allen denjenigen Untersuchungen beibehalten, welche sich auf die Partialbruchzerlegung der eindeutigen Funktionen überhaupt beziehen, und die in seiner Dissertation zur Transformation der Reihen angewandten Prinzipien wurden teils noch von ihm selbst, teils von späteren Funktionentheoretikern zu grundlegenden analytischen Betrachtungen verwertet.

Wie in seiner ersten Arbeit bleibt es charakteristisch für alle späteren Schöpfungen Jacobis, daß in ihnen stets das Bestreben in den Vordergrund tritt, nicht ein einzelnes, wenn auch noch so schwieriges, algebraisches oder zahlentheoretisches, analytisches oder geometrisches Problem zu lösen, sondern überall zeigt sich der umfassende und geniale Überblick über alle mathematischen Disziplinen, überall ist es Ziel und Zweck, den innern Zusammenhang zwischen all den verschiedenen mathematischen Wahrheiten aufzudecken.

Als besonders weitgreifende Leistungen in der Algebra dürfen seine Untersuchungen über die Eliminationstheorie bezeichnet werden, welche den wahren Inhalt des Bézoutschen Verfahrens aufdeckten und die spätere Cayleysche Methode vorzeichneten, und wiederum seinen fundamentalen Sätzen über die Schnittpunktsysteme algebraischer Kurven, über die Anzahl der auf einer gegebenen Kurve willkürlich wählbaren Punkte für den Durchschnitt mit einer Kurve anderer Ordnung, für die Anzahl der Doppeltangenten einer algebraischen Kurve und die Präzisierung der Plückerschen



Formeln, sowie all den ähnlichen Sätzen für die Zusammenstellung algebraischer Flächen ihre Entstehung gaben. Der strenge und systematische Aufbau der Determinantenlehre, die für die ganze Entwicklung der Algebra und Geometrie fundamentale Einführung der Funktionaldeterminanten und die vollständige Darlegung ihrer Eigenschaften und ihrer Bedeutung für die Algebra und Analysis fixierte die Richtung für die ganze nachfolgende Entwicklung der Eliminationstheorie und analytischen Geometrie. So waren auch seine geometrischen Arbeiten meist analytischer und algebraischer Natur, die interessanten synthetisch geometrischen Spekulationen traten gegen diese in ihrer Bedeutung sehr zurück und waren meist wohl aus Anregungen entstanden, die von dem ihm eng befreundeten genialen Geometer Steiner ausgingen. Aber von weittragendster Bedeutung waren wieder seine tiefen zahlentheoretischen Forschungen, die ihm von Jugend auf einen Lieblingsgegenstand zur Bekundung seines Scharfsinns boten, und die sich den besten Arbeiten seines Freundes Dirichlet an die Seite stellen dürfen. Seine Sätze über die Theorie der Kreisteilung, welche, auf den Disquisitiones arithmeticae aufgebaut, den Gaussschen Sätzen eine ungeahnte Erweiterung gaben, und welche schon in seinen ersten Vorlesungen eingehend dargestellt wurden, während sie in seinen Veröffentlichungen darüber nur in ihren Resultaten bekannt wurden, gaben die Basis für die späteren Forschungen Kummers, und seine Reziprozitätsgesetze für kubische Reste gehören zu seinen ersten zahlentheoretischen Entdeckungen, die er in einem Alter von kaum mehr als 20 Jahren gemacht, geraume Zeit bevor er Kenntnis erhalten von den berühmten Forschungen Gauss' über das biquadratische Reziprozitätsgesetz und dessen für alle Folgezeit fundamental gewordener Einführung der komplexen Zahlen in die Zahlentheorie. Wie ihn eine wunderbare Divination zur Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Formen für eine negative Determinante geführt, so waren es nach Dirichlets Zeugnis noch viele andere verborgene Eigenschaften der Zahlen, die er erschlossen und seinen Freunden mitgeteilt hatte, ohne daß diese in konsequenter Durchführung der mathematischen Welt zugänglich wurden, abgesehen von den Zahlengesetzen, welche er ursprünglich aus den Produkt- und Reihenentwicklungen der elliptischen Funktionen hergeleitet, und für die er dann auch ausführliche und interessante rein arithmetische Darstellungen veröffentlicht hat.

Umfangreich und in alle mathematischen Disziplinen eingreifend sind seine Arbeiten über unendliche Reihen und bestimmte Integrale, deren Untersuchungen eng verknüpft sind mit seinen algebraischen Forschungen, und in denen er häufig, ausgehend von speziellen Resultaten, die Euler durch jedesmal dem Problem angepaßte Kunstgriffe entwickelt hatte, große und allgemeingültige Theoreme über die Transformation der einfachen und mehrfachen Integrale, über die Ermittelung der Werte derselben, die schwierigeren Teile der Theorie der Kugel- und Besselschen Funktionen und die Anwendung derselben auf interessante und wichtige Probleme der Oberflächenbestimmung und der Attraktionstheorie der Ellipsoide herleitete.

Endlich wollen wir noch auf die vielen Arbeiten astronomischer Natur hinweisen, welche — abgesehen von den allgemeinen Störungsuntersuchungen, welche der analytischen Mechanik angehören — wie bei Gauss nur ermöglicht waren durch seine staunenswerte Gabe, die kompliziertesten Größenverbindungen ihrer wahren Bedeutung gemäß übersichtlich zu gestalten und, wie er selbst sagt, aus den gewonnenen Resultaten der Buchstabenrechnung den naturgemäßen Weg zu erkennen, wie die Entwicklung anzustellen gewesen; so sehen wir ihn, wetteifernd mit den unermüdlichen Anstrengungen und endlosen Entwicklungen eines Laplace und Lagrange, für die rein numerische Rechnung im Verein mit Hansen der Astronomie Methoden zuführen,



welche die ermüdende Tätigkeit durch ungewöhnlich genaue Resultate und allgemeine Erfolge belohnten.

Aber all diese gewaltigen Leistungen in der Algebra und Zahlentheorie, in der Geometrie und der Integralrechnung, in der Reihentheorie und in der Astronomie, von denen Dirichlet mit Recht sagt, daß jede einzelne genügt hätte, um seinen Namen mit der Wissenschaft unvergänglich zu verknüpfen, sie treten zurück gegen das, was die Transzendentenlehre, die Theorie der Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die analytische Mechanik ihm verdanken.

In der Variationsrechnung handelt es sich zwar um die Lösung eines bereits bestimmt formulierten Problems, aber freilich von überaus großer Schwierigkeit, an dessen Lösung Lagrange verzweifelte. Wenn schon die Integration der Hauptgleichung der Variation eines bestimmten Integrales fast in jedem einzelnen Falle die Kräfte der Analysten überstieg, so war doch wenigstens die Aufgabe stets auf die Ermittlung einer Beziehung zurückgeführt, welche in endlichen Größen einer Differentialgleichung genügen sollte, und diese Differentialgleichung hatte doch für alle Probleme eine einheitliche, feste und übersichtliche Form; die Frage jedoch, wie sich der Wert der 2. Variation unter Voraussetzung der bereits gefundenen Lösung der Hauptgleichung gestalte, ob derselbe für ein Maximum oder Minimum oder nur für einen Grenzwert entscheide, das verlangte nicht nur in jedem Falle Transformationen analytischer Ausdrücke verschiedener Natur, sondern es häuften sich noch die Schwierigkeiten, welche schon die 1. Variation bot, indem, wie es wenigstens schien, die Integration neuer Differentialgleichungen notwendig wurde. Die große Entdeckung Jacobis, welche das leistete, was in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima durch die Kriterien für die stets positiven oder negativen Werte der höheren totalen Differentialien erreicht war, ohne neue Gleichungen auflösen zu müssen, wie es für das erste totale Differential zur Ermittlung der Werte der Variabeln notwendig ist, bestand nun in dem Nachweis, daß die Integration der durch die Betrachtung der 2. Variation gelieferten Differentialgleichungen durch die Integration der Hauptgleichung und durch Anwendung der Methode der Variation der Konstanten bereits implizite vollzogen war; um nun mit Hilfe der gefundenen Integrale der Hauptgleichung die 2. Variation so umzugestalten, daß nur das Vorkommen eines Quadrates unter dem Integral die Entscheidung unmittelbar treffen läßt, wird Jacobi zu einer eigentümlichen Klasse totaler Differentialgleichungen geführt, welche sich durch gewisse Transformationen immer in ein vollständiges Differential eines Differentialausdruckes derselben Form transformieren lassen und später zu den verschiedenartigsten andern Untersuchungen Veranlassung gegeben haben. Die scheinbar vereinzelt stehende Frage der Variationsrechnung hatte Jacobi den Anlaß zu ganz allgemeinen Untersuchungen von größter Tragweite gegeben; die Theorie der Variation einfacher Integrale war durch seine und die sich daran knüpfenden Untersuchungen von Hesse abgeschlossen und bewegte sich nur noch um eine feinere Ausarbeitung für spezielle Probleme oder um funktionentheoretische Überlegungen, wie sie Weierstrass begründete.

Weiter und umfassender noch sind seine Untersuchungen in der Theorie der totalen und partiellen Differentialgleichungen. Nachdem er schon in einer seiner ersten Arbeiten die Pfaffsche Methode für die Integration einer totalen Differentialgleichung mit beliebig vielen Variabeln in eleganter und symmetrischer Form entwickelt und den innern Konnex zwischen dessen berühmter Arbeit und den Untersuchungen von Lagrange festgestellt, vor allem schon damals jene merkwürdige Erweiterung des Lagrangeschen Integrationsverfahrens für eine lineare partielle Differentialgleichung auf ein simultanes lineares System dargelegt, welches in jeder Differentialgleichung nur die partiellen Differentialquotienten einer Variabeln, in den verschiedenen Gleichungen aber dieselben Koeffizienten der nach derselben unabhängigen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten besitzt, wird er auf Grund der schon hierbei angestellten Betrachtungen zur Ausdehnung der Methode von Lagrange für die Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit drei Variabeln auf solche mit beliebig vielen Variabeln geführt. Von größter Bedeutung wurde seine Vereinfachung der Methode für die Integration einer Pfaffschen Gleichung zum Zwecke der Integration einer partiellen Differentialgleichung, indem er zeigt, daß es für diesen Fall genügt, das erste totale Pfaffsche Differentialgleichungssystem aufzustellen und zu integrieren, und daß sich daraus dann sämtliche weiteren Hilfsgleichungen unmittelbar bilden lassen, welche Pfaff für die Integration seiner totalen Differentialgleichung nötig hatte. Jacobi greift aber auch direkt mit seinen so berühmt gewordenen Methoden die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung an, indem er durch mannigfache Gestaltung der Integrabilitätsbedingungen für ein Differential von beliebig vielen Variabeln mit Hilfe der Benutzung und Umformung des Poissonschen Symbols das Problem auf die Integration eines durch diese Symbole darstellbaren gleichzeitigen linearen partiellen Differentialgleichungssystems zurückführt und zeigt, wie man durch seine Methode der sukzessiven Integration durch eine endliche Anzahl von Operationen und Integrationen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme, welche den Charakter der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen tragen, stets die Integration leisten kann. Diese Untersuchungen bilden das Fundament, auf welchem die ganze neuere Theorie der partiellen Differentialgleichungen aufgebaut ist, in der Jacobi noch bis heute unerreicht dasteht.



Von diesen Untersuchungen sind seine Arbeiten auf dem Gebiete der analytischen Mechanik nicht zu trennen. Wie er zu jenen Forschungen über partielle Differentialgleichungen durch die Hamiltonschen Arbeiten über die Bewegungsgleichungen veranlaßt worden, so führten ihn seine Arbeiten über Differentialgleichungen zu einer Erweiterung der Hamiltonschen Untersuchungen und dadurch wieder tiefer in die großen Probleme der Mechanik, und schon allein die Erkenntnis der Äquivalenz einer der beiden Hamiltonschen Differentialgleichungen mit dem totalen dynamischen Differentialgleichungssysteme würde seinen Namen auch mit diesem Gebiete eng verknüpft haben. Aber Jacobi ging weiter — seine algebraischen Untersuchungen über die Funktionaldeterminanten hatten ihn allmählich zu einem neuen Prinzip der Mechanik geleitet, dem Prinzip vom letzten Multiplikator, das die Integration der dynamischen Differentialgleichungen um einen bedeutenden Schritt weitergeführt und das letzte Integral bei der Kenntnis aller übrigen stets von einer Quadratur abhängig gemacht hat. Dieses Prinzip, die merkwürdige Deutung des Poissonschen Satzes zum Zwecke der sukzessiven Auffindung von Integralen mechanischer Probleme und die Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung, zum erstenmal in strenger Form entwickelt, gehören zu den bahnbrechenden und größten Arbeiten, deren sich auf dem Gebiete der analytischen Mechanik das vorige Jahrhundert rühmen kann. Wie viele und schwierige Fragen er auf diesem Gebiete sowie auf dem der Differentialgleichungen sonst noch angegriffen, erörtert und erledigt hat, wie die Einführung der elliptischen Koordinaten in die Mechanik, die Theorie der vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichungen, die Untersuchung der überflüssigen Konstanten, die Bestimmung der Ordnung der Differentialgleichungssysteme usw., haben wir früher eingehend dargelegt. Aber weit über die Mechanik hinausgreifend gestaltet er die Hamiltonschen Prinzipien um, indem er statt der Summe der lebendigen Kraft und der Kräftefunktion unter dem Integral eine willkürliche Funktion substituiert und für die so definierte neue charakteristische Funktion die partielle Differentialgleichung findet, welche statt des Energievorrates eine ähnlich gestaltete, aber allgemeinere Funktion einführt, und aus dem vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung in genau derselben Weise, wie es Hamilton getan, die Integrale der entsprechenden totalen Differentialgleichungssysteme entwickelt. Hier wies er Helmholtz den Weg, um die mechanischen Prinzipien zu physikalischen umzugestalten. Was Jacobi von dem beherrschenden Einfluß des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Mechanik wiederholt ausgesprochen, sucht Helmholtz 50 Jahre später zu Grundmaximen der Physik zu machen, und in seinen glänzenden, aber überaus schwierigen und zum Teil unvollendet gebliebenen Untersuchungen als Leitfaden für die physikalische Forschung hinzustellen. „Jacobi eliminiert", sagt Helmholtz, „das Differential der Zeit und damit die Zeit aus dem zu variierenden Integrale; physikalisch ist Jacobis einschränkende Bedingung für ein vollständig bekanntes und in sich abgeschlossenes Körpersystem stets als gültig anzusehen. Hamiltons Form dagegen erlaubt die Bewegungsgleichungen auch für unvollständig abgeschlossene Systeme durchzuführen, auf welche veränderliche äußere Einflüsse wirken, die von einer Rückwirkung der bewegten Systeme unabhängig angesehen werden können."



Wir kommen endlich zu Jacobis größten und umfassendsten Leistungen, zu seinen Verdiensten um die Schaffung der Transzendentenlehre, durch die er in den Kreisen der mathematischen Welt erst wahrhaft populär geworden. Wenn Legendre in der Einleitung zu seinem traité von dem größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts sagen durfte:

„Euler par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hazards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître, trouva l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle composée de deux termes séparés, mais semblables, dont chacun n'est intégrable que par des arcs de sections coniques. Cette découverte importante donna lieu à son auteur de comparer d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait avant lui, non-seulement les arcs d'une même ellipse, d'une même hyperbole, ou d'une même lemniscate, mais en général toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{P dx}{R}$, où $P$ est une fonction rationelle de $x$, et $R$ la racine quarée d'un polynome en $x$ du quatrième degré",

so muß man auch in den ersten Arbeiten von Jacobi über die Transformation der elliptischen Integrale und Funktionen die Divination bewundern, die ihn aus der Existenz der unendlich vielen Modulnketten die Form, Periodizität und all die andern Eigenschaften der eindeutigen Umkehrungsfunktion der elliptischen Integrale 1. Gattung vermuten ließ. Bei ihm wie bei Abel, unabhängig voneinander, entsprang dieser Gedanke aus einer genialen Intuition, genau so wie uns später die Einführung der $\vartheta$-Funktion als Fundamentaltranszendente in der Theorie der elliptischen Funktionen fast unvermittelt entgegentritt, und sogleich in einer Form, welche nicht bloß die Möglichkeit einer solchen Einführung als analytische Tatsache hinstellt, sondern, geleitet von einem die gesamte Theorie der Transzendenten und ihrer Anwendungen umfassenden Blicke, in ihr den Grundstein erkennen läßt, auf dem sich die Theorie der elliptischen Funktionen elegant und einheitlich mußte aufbauen lassen.

Inwieweit seine Arbeiten auf diesem Gebiete bis zum Jahre 1829 von den großen Schöpfungen Abels beeinflußt waren, ist oben in allen Einzelheiten festzustellen versucht worden; aber so wie Abel, wenn auch Jacobi nicht mit in den Wettkampf getreten wäre, gewiß durch all seine tiefen und genialen Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Funktionen, die neuen und ungeahnten Wege eröffnet hätte, die er uns in Wirklichkeit gewiesen, so dürfen wir uns gleichfalls der Überzeugung nicht verschließen, daß Jacobi auch allein auf diesem Gebiete alles das geschaffen hätte, was er von 1827 an in der Theorie der elliptischen Transzendenten in Wirklichkeit schöpferisch gestaltet hat. Ob er aber auch ohne die Vorarbeiten Abels den Weg gefunden hätte, um in das Gebiet der höheren Transzendenten einzudringen? Jedenfalls können wir diese Frage nicht definitiv bejahend beantworten. Wir sahen, daß er schon auf der Höhe seiner ruhmvollen produktiven Tätigkeit stehend immer und immer wieder sich mit der Frage der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale beschäftigte, durch seine Untersuchungen über die Existenz von Funktionen einer Variabeln mit mehr als zwei Perioden zu bedeutsamen, aber immer doch nur negativen Resultaten gekommen war, daß ihm aber der durch eine wunderbare Divination geglückte Ansatz für die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale oder die Einführung von Funktionen von so viel unabhängigen Variabeln, als es der algebraischen Irrationalität zugehörige Integrale 1. Gattung gibt, kaum gelungen wäre, wenn nicht Abel durch sein die ganze Theorie der Integrale algebraischer Funktionen beherrschendes Theorem der Mathematik für alle Zeiten die Wege gewiesen hätte, auf welchen ein weiterer Ausbau der Transzendentenlehre und eine naturgemäße Fortführung all der tiefen Gedanken der großen Analytiker sich ermöglichen ließ. War doch offenbar auch ein Größerer als Jacobi an diesem Problem gescheitert!



In den Jahren 1796—97 sehen wir Gauss bereits im Besitz aller wesentlichen Eigenschaften der lemniskatischen Funktionen; in seinen Notizbüchern aus diesen Jahren, welche uns einen wahren Schatz für die historische Forschung bieten, finden wir für die Umkehrungsfunktion der lemniskatischen Integrale das Additionstheorem entwickelt, sie selbst als Quotienten zweier als selbständige Funktionen in die Theorie eingeführter Transzendenten dargestellt, und ihre Reihen- und Produktentwicklungen gegeben; auf die Beziehung des vollständigen lemniskatischen Integrales zum arithmetisch-geometrischen Mittel aufmerksam geworden, wurde er zur analogen Frage für das allgemeine vollständige elliptische Integral 1. Gattung geführt, und noch vor Ablauf des Jahrhunderts sehen wir ihn wiederum in seinen Tagebüchern bereits im Besitze der wesentlichsten Eigenschaften der elliptischen Funktionen. Erst im Jahre 1818 gibt ihm die Veröffentlichung seiner berühmten Arbeit „Determinatio attractionis etc.“ eine Veranlassung, die Mathematiker einen Blick in seine Arbeitsstätte werfen zu lassen: „der Verfasser hat indessen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines neuen Algorithmus zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transzendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird“, und er deutet an, daß er längst im Besitze einer umfangreichen Theorie der elliptischen Transzendenten sei, von der die Untersuchungen Lagranges und Legendres nur die Anfänge bilden. Fast alle Resultate der ersten Arbeiten Abels und Jacobis waren wahrscheinlich schon vor Beginn des 19. Jahrhunderts im Besitze von Gauss; „il (Abel) vient d'enfiler précisement la même route, dont je suis sorti en 1798“, schreibt er an Crelle, und Jacobis grundlegende Entdeckung von der Einführung der Fundamentaltranszendenten $\vartheta$, sowie die Lösung des Teilungsproblems für 3, 5, 7 nimmt er fast 50 Jahre früher vorweg. Die reelle und selbst die komplexe Multiplikation der elliptischen Transzendenten, die einfachsten Transformationen der $\vartheta$-Funktionen, die Additionstheoreme der lemniskatischen Integrale 2. Gattung mit Hilfe der zugehörigen $\vartheta$-Funktion



kennt Gauss schon 1817, und nach dem Erscheinen des zweiten Briefes von Jacobi an Schumacher entwickelt er bereits im August 1829 die Beziehungen zwischen der transformierten und ursprünglichen $\vartheta$-Funktion für den Nullwert des Arguments, und stellt die Modulargleichung für die Transformation 5. Grades auf einem Wege her, wie er erst geraume Zeit später von den Mathematikern wieder betreten wurde. Aber ihm so wenig wie Jacobi hatte sich ein Ausblick auf den Weiterbau im Felde der Transzendenten eröffnet, auch ihm blieb es versagt, die Existenz des großen Abelschen Theorems zu ergründen, und gewiß war dies für ihn, der gewohnt war, alles in fertiger, abgeschlossener, in seinem Fundament wie in seinem Aufbau unverrückbarer Form den Mathematikern vorzuführen, auch der Grund, weshalb von der Fülle seiner Entdeckungen auf diesem Gebiete während seines Lebens nie der mathematischen Welt Kunde geworden.

Wenn aber auch für Jacobi die Kenntnis des Abelschen Theorems durchaus notwendig gewesen, um zu seinem Ansatz für die Definition der Abelschen Funktionen zu gelangen, so gehört doch diese Definition allein schon zu seinen glänzendsten Entdeckungen, und wir finden keinen Anhaltspunkt für die Annahme, daß etwa Abel, der viele vergebliche Versuche zur Umkehrung der hyperelliptischen Integrale gemacht, trotz langer und eingehender Beschäftigung mit seinem Theorem auf den Gedanken der Einführung von Funktionen mehrerer Variabeln gekommen ist.

Die Genialität Jacobis ließ ihn aber nicht bloß der rein abstrakten mathematischen Forschung auf dem Felde der analytischen Funktionen immer weitere Kreise ziehen; wenn auch, wie er an Legendre schrieb, in seinen Augen eine Frage der Zahlentheorie denselben Wert hat als eine Frage des Weltsystems, so war es trotzdem immer sein Bestreben gewesen, alle Resultate abstrakter Natur in speziellen Fällen der Anwendung zu verifizieren und die Brauchbarkeit seiner

Transzendenten für die schwierigsten Probleme der Geometrie und Mechanik nachzuweisen. Seine Behandlung des Rotationsproblems wird mustergültig bleiben für alle Zeiten, und sie wäre es, wie aus seinen Aufzeichnungen hervorgeht, noch in viel höherem Grade geworden, wenn ihn nicht der Tod so plötzlich aus der staunenswerten Menge der umfangreichsten und genialsten Arbeiten gerissen hätte.

Aber nicht bloß die Verschiedenartigkeit und Fülle der Jacobischen Forschungen und Entdeckungen lassen ihn uns als einen der ersten Leiter und Führer in dem Fortschritt der mathematischen Wissenschaften des vorigen Jahrhunderts rühmen. An der Hand der Mitteilungen seiner Schüler und Freunde, sowie auf Grund seiner amtlichen Berichte über die jungen Mathematiker, welche er herangebildet, liegt es uns auch ob, den großen Lehrer zu würdigen.

Man vergegenwärtige sich den damaligen Zustand des mathematischen Studiums an deutschen Universitäten. Der princeps mathematicorum, angestaunt und bewundert von allen, welche sich mathematischen Studien widmeten, dozierte an einer kleinen Universität vor wenigen Zuhörern; freilich war alles neu, was er gab, von genialer Originalität, jede mathematische Darlegung bot wichtige und unerwartete Gesichtspunkte, alles war exakt im Inhalt, präzis in der Form, aber es fehlte Gauss die auch äußerlich sich kundgebende Wärme und Begeisterung, welche dem mathematischen Lehrer notwendig eigen sein muß, wenn die zum Teil so trockenen und nüchternen Wahrheiten, falls sie nicht gerade als Anwendungen auf die Erscheinungswelt sich kundgeben, selbst einen empfänglichen Geist befruchten, wenn die Ideen auf einem noch jugendlichen Resonanzboden einen Wiederhall finden sollen. Und auf dem Katheder all der andern deutschen Universitäten stand in dem 2. Dezennium des vorigen Jahrhunderts weder ein bedeutender Lehrer noch ein hervorragender Forscher. Als Dirichlet den Trieb in sich fühlte, der mathematischen Wissenschaft sich zu



widmen, da konnten ihm die Vorlesungen über die Elemente der synthetischen und analytischen Geometrie, über die Anfangsgründe der Algebra und über die alles beherrschende Kombinatorik an deutschen Universitäten ein Genüge nicht bieten, und er wandte sich nach Paris, um von den großen französischen Forschern an deren berühmter Hochschule Wissenschaft und zugleich Methode, Vertiefung und zugleich Klarheit und Durchsichtigkeit der Darstellung zu lernen. Wenn dann auch Dirichlet selbst in Breslau, Berlin und später in Göttingen einen großen Kreis von Zuhörern um sich versammelt, alles mit vollendeter Klarheit und Eleganz seinen Schülern geboten, und auf verschiedenen, überaus schwierigen Gebieten einzelne junge Mathematiker, auf welche eine spätere Generation mit Stolz als Zierden deutscher Wissenschaft blickte, zu eignen Arbeiten begeisterte, so hat er doch nie eine eigentliche Schule begründet, wie Jacobi es getan, der von Anbeginn seiner Lehrtätigkeit schon als 22jähriger Dozent in Königsberg und dann in Berlin seine Zuhörer nicht bloß in den Bann seiner Vorstellungen zwang, nicht nur eine Fülle von Kenntnissen ihnen überlieferte und neue Gesichtspunkte eröffnete, sondern auch durch die glückliche Art der Verbindung der historischen Entwicklung der Probleme mit den mannigfachsten Lösungen derselben, welche den scheinbar heterogensten Disziplinen mathematischer Wissenschaft entnommen und kritisch beleuchtet wurden, das Interesse seiner Zuhörer dauernd fesselte. Durch den Hinweis auf stets sich ihm bietende neue Probleme, die er immer wieder zu bewältigen wußte, trieb er auch seine Schüler dazu, ihre Kräfte selbständig zu versuchen an der Fortführung und Erweiterung der Wissenschaft, und rief ihren Ehrgeiz wach, sich selbst zu fühlen als eine neue Generation von Mathematikern, schaffensfreudig und arbeitslustig, aber bescheiden und nicht polternd mit wissenschaftlichem Geklingel — denn neben ihnen stand ihr Meister, unerreichbar, der große Mathematiker, freilich seiner Kraft sich wohl bewußt und in seiner steten Wahrheitsliebe auch nie es verleugnend, daß er zu den hervorragendsten Mathematikern seiner Zeit gehörte, aber trotzdem stets bescheiden gegen wirklich große Menschen, human und anerkennend gegen jedes aufstrebende Talent. Und so mußte eine Schule entstehen von jugendlichen Forschern, welche auf den Gebieten mathematischer Wissenschaft, auf denen er sich schöpferisch betätigt — und es waren dies alle Gebiete —, weiter arbeiteten und lehrten, und die deutschen Universitäten allmählich zu Pflanzstätten mathematischer Wissenschaft machten.

„Es war nicht seine Sache", sagt Dirichlet, „Fertiges und Überliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfaßten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechselung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armut oft zuteil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zugrunde liegen, darzustellen, und indem er alles, was den Schein der Künstlichkeit an sich trug, entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäß vor seinen Zuhörern, daß diese Ähnliches schaffen zu können die Hoffnung fassen konnten. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wußte, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermutigen, daß sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden. Der Erfolg einer so ungewöhnlichen Lehrart, wie sie nur einem schöpferischen Geiste zu Gebote steht, war wahrhaft außerordentlich. Wenn jetzt in Deutschland die Kenntnis der Methoden der Analysis in einem Grade verbreitet ist wie zu keiner früheren Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft nach



allen Richtungen erweitern und bereichern: so hat Jacobi an einer so erfreulichen Erscheinung den wesentlichsten Anteil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rat, seine aufmunternde Teilnahme gefehlt . . . . ."

Und nicht anders haben seine Kollegen Bessel und Neumann, seine Schüler Richelot, Borchardt, Hesse, Heine u. a. über seine einzig dastehende Dozententätigkeit geurteilt; wie er im Gegensatze zu Dirichlet auch zu einem ganz unentwickelten mathematischen Verstande sich herabzulassen die Fähigkeit hatte und in sokratischer Weise durch die einfachsten Fragen von unten auf allmählich bei der Schwierigkeit, um die es sich handelte, anlangte und sie löste, darüber liegt ein interessantes Zeugnis eines mathematischen Laien und nahen Verwandten Dirichlets vor.

Wie aber seine Worte zündeten und die Begeisterung der Hörer anfachten, so erweckten auch seine Schriften steten und lauten Nachhall in den Köpfen der neuen Generation von Mathematikern, und in diesem Sinne müssen wir auch Hermite und Weierstrass, die beiden vornehmsten Repräsentanten mathematischer Forschung in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, zu seinen Schülern zählen.