an E. Exc. und an den Herrn Ministerpräsidenten geschrieben und sei ebenfalls ohne Antwort geblieben, mußte ich meinen Verhandlungen mit dem Wiener Ministerium ihren ungehemmten Verlauf lassen. Bei meiner Rückkehr von Gotha, wo ich die Weihnachtszeit bei meiner Familie zugebracht, erhielt ich das erste Zeichen, daß diese Sache von Seiten des Königl. Cabinets an E. Ex. abgegeben worden war, indem E. Exc. mir eröffnen ließ, daß Sie bedingungsweise meinen Wunsch, womöglich im Vaterlande zu bleiben, befürworten würden, daß aber auch dann diese Angelegenheit noch **sehr** große Schwierigkeiten haben würde. Ich erfüllte die mir auferlegte Bedingung, weil sie mir nichts zu enthalten schien, was meinen Gesinnungen widerstrebte, konnte aber aus solcher mir gemachter Eröffnung keinen Anlaß entnehmen, den Gang der Wiener Unterhandlungen aufzuhalten. Auch erschien es mir aus mehreren Gründen zweifelhaft, ob diese Angelegenheit hier zu einem ersprießlichen Resultate würde geführt werden können. Es war mein sehnlicher Wunsch zwar, in meinem Vaterlande zu bleiben, dem ich ein Vierteljahrhundert lang mit allen Kräften, welche mir Gott verliehen, mich hingegeben; aber ich durfte dies doch nur wollen, wenn es mit Ehren geschehen könnte. Wenn Sn. Majestät geruht hätten, ein Wort des Wunsches auszusprechen, daß ich in Preußen bliebe, so hätte ich augenblicklich alle andern Unterhandlungen abgebrochen und alles der Gnade Sr. Majestät anheimgestellt. Es ist dieses aber bis jetzt nicht geschehen, und mir auch kein beruhigendes Anzeichen irgend einer Art kundgeworden, daß schließlich Sn. Majestät auch nur auf den Antrag Ew. Excellenz eingehen würden. Auch konnte ich mich der Besorgniß nicht entschlagen, daß dies unter Formen geschehen könnte, welche doch mir die Annahme unmöglich gemacht hätten. Als eine wesentliche Bedingung meines Hierbleibens betrachtete ich ferner die freiwillige Erstattung der Geldstrafe, mit welcher ich gewissermaßen belegt worden

war. Auch über eine solche Absicht war mir keine Kunde geworden. Und doch schien mir die Nothwendigkeit hiervon so selbstredend und einleuchtend, daß ich selber darüber keinen Antrag bilden konnte. Es mußte dies aber auch, so war meine Meinung, ganz unabhängig von jeder anderweitigen Verhandlung über mein Hierbleiben geschehen. Denn abgesehen davon, ob überhaupt vom privatrechtlichen Standpunkt aus jene Entziehung geschehen durfte, und ob nicht die Motive derselben jetzt vollständig fortgefallen sein mußten, so wäre es doch jedenfalls etwas sehr trauriges, wenn ich aus einer langjährigen Laufbahn, in der ich fortwährend von der freundlichsten Theilnahme des ganzen Auslandes begleitet worden bin, von der Regierung meines Vaterlandes mit einem solchen Schlusse entlassen würde. Aus diesen Gründen und Befürchtungen, welche auszusprechen mir jetzt erst durch das Schreiben Ew. Exc. Gelegenheit geworden ist, habe ich die unter dem 19. Januar an mich ergangene förmliche Vocation an die Wiener Universität, obgleich sie mir keine namhaften pecuniären Vortheile bietet, angenommen. Seitdem bin ich durch ein Handbillet des Ministers des Innern Graf **Leo Thun** vom 5. h. benachrichtigt worden, daß die K. Resolution über meine dortige Anstellung bereits bei demselben eingegangen sei, und mein Anstellungsdecret sofort ausgefertigt werden solle. Ich vermuthe, daß die Antrittszeit meines dortigen Amtes auf den 1. April h. bestimmt werden wird, in welchem Falle ich wahrscheinlich Ende April dorthin übersiedeln müßte. Nachdem diese Sache soweit gediehen ist, könnten nur triftige Anlässe es rechtfertigen, wenn ich gegen die dortigen Behörden den Wunsch ausspräche, meiner dort eingegangenen Verbindlichkeit enthoben zu werden. Obgleich für mich wenig Grund zu der Annahme ist, als könnte die diesseitige Regierung zur Bietung solchen Anlasses bereit sein, so will ich doch nicht unterlassen auszusprechen, was mir zur Veranlassung eines dergl. Schrittes genügend erscheinen könnte. Es wären dies Maßnahmen, welche mich ganz in dieselbe Lage setzen, als wenn mir die bei meiner Übersiedlung nach Berlin verheißene, wegen meiner zahlreichen Familie an diesem theuren Orte unentbehrliche, auf Veranlassung Sr. Majestät Selbst von den beiden betheiligten Ministern beantragte, und später von dem hohen Unterrichtsministerium auf's neue lebhaft befürwortete, feste Besoldung von jährlich 3000 ₰ nicht auf eine allen Theilen unerwartete Art um 333 ₰ verkürzt worden wäre ... Ew. Excellenz bitte ich, Vorstehendes nicht als ein Gesuch oder als einen Antrag ansehen zu wollen, sondern nur als eine ausgesprochene Ansicht, in welchem Falle ich glaube, meiner gegen die oesterreichische Regierung eingegangenen Verbindlichkeit enthoben werden zu können."

Nun aber traten die Freunde Jacobis mit aller Kraft dafür ein, daß ihm alles, was er verlangte, bewilligt werde; Johannes Schulze, der überall erklärte, er wolle alle fortlassen, nur Jacobi nicht, der sei eine Naturkraft, schrieb an den König, er habe sich aus den Akten überzeugt, daß man ihm damals unrecht getan, als man ihm bei seiner Übersiedelung die versprochenen 3000 Taler nicht gegeben, und wieder war es die Hochherzigkeit des Königs, die alles in die gewünschten Wege leitete. Schon am 20. Februar schrieb der Minister an Humboldt: „Um Ew. Excellenz in einem wünschenswerthen Zusammenhange mit den Verhandlungen zu erhalten, welche hinsichtlich des Akademikers Prof. Dr. Jacobi noch gegenwärtig stattfinden, halte ich mich verpflichtet, Ew. Excellenz unter Bezugnahme auf das verehrliche Schreiben vom 28. v. M. in der Anlage Abschrift meines unter dem 11. d. M. an Jacobi gerichteten Erlasses und seine Antwort vom 16. d. M. zur geneigten Kenntnißnahme ganz ergebenst mitzutheilen. Durch die in der Antwort Jacobi's angeführten Umstände bin ich bestimmt worden, Allerhöchsten Orts auf Gewährung eines Jahrgehaltes von 3000 ₰ vom 1. October v. J. ab für Jacobi

anzutragen und den Herrn Finanzminister zu ersuchen, sich diesem Antrage anzuschließen."

Humboldt, von der Bereitwilligkeit des Königs unterrichtet, meldet sogleich Dirichlet: „... je crois cependant, que nous n'aurons pas à déplorer une perte si cruelle", und durch Kabinettsorder vom 5. März 1850 werden Jacobi „zu der Besoldung von 1667 ₰ der früher neben seinem Gehalt genossene, durch Meinen Erlaß vom 18. Juli v. J. entzogene Zuschuß in einem um 333 ₰ erhöhten Betrage, also mit 1333 ₰ vom 1. October vorigen Jahres ab wieder bewilligt und genehmigt, daß diese Summe so lange, bis sie für das Jahr 1851 etatmäßig gemacht werden kann, aus Meinem Dispositionsfonds gezahlt werde."

Am 20. März teilt Jacobi seinem Schwager, dem Chefpräsidenten von Wißmann in Frankfurt a. O., mit, daß alles erledigt sei; „während der Geldpunkt zwischen S. M. und dem Minister augenblicklich geordnet war, so wollte doch weder die vom Minister verfaßte Cabinetsordre der König unterzeichnen, noch die vom Cabinet ausgegangene der Minister mir praesentiren. Man hatte S. M. die Meinung beigebracht, ich hätte im Sommer 1848 gegen ihn und sein Haus declamirt, was mir natürlich nie eingefallen war. So waren 3 Cabinetsordres ent- und verworfen worden, bis dann endlich der Minister selbst eine vereinbarte, die alle befriedigte. Schulze brachte mir die Ordre vom König unterzeichnet, aber noch nicht vom Minister contrasignirt, ging sie genau mit mir durch und erklärte, der Minister würde sie nur contrasigniren, wodurch sie erst Gültigkeit bekäme, wenn ich mich mit der Fassung einverstanden und bereit erklärte, in Wien ablehnen zu wollen, was ich denn that. Ich kriege mein altes Gehalt, in einem um 333 ₰ erhöhten Betrag vom 1. October v. J. an, von wo die Entziehung datirte, wieder, als Gehaltszuschuß und nicht mehr wie früher als Unterstützung. Dies geschah am 8. Maerz ... Marie wird gewiß noch den Sommer über in Gotha bleiben, wahrscheinlich auch den Winter, und es ist nicht unmöglich, daß auch ich den ganzen Winter über mich dort aufhalte, behufs einer bestimmten mathematisch-astronomischen Arbeit, zu der ich den dortigen Astronomen Hansen brauche."

Jacobi erklärte nun dem österreichischen Ministerium, daß er unter den obwaltenden Umständen sein Vaterland nicht verlassen könne, und schlug statt seiner in Wien Rosenhain und Eisenstein vor, unbekümmert darum, daß letzterer nicht immer Jacobi gegenüber die schuldige Pietät bewiesen und den großen Mathematiker mit Unrecht stets als seinen Gegner betrachtet hat. So blieb denn Jacobi Deutschland, seinen Freunden und seinen Schülern erhalten, aber er ging aus dieser schweren Zeit an Geist und Körper gebrochen hervor. „1850 erging an Jacobi ein Ruf an die Universität Wien", lautet die nur aus wenigen Zeilen bestehende Aufzeichnung seiner Frau. „Er meldete dem Preuß. Ministerium seinen Beschluß, daß er diesen Ruf nur ausschlagen könne, wenn er wieder in sein früheres Gehalt zurückversetzt würde. Das Ministerium, in seiner nachhaltigen Verstimmung, wollte nicht gleich in sein Verlangen eingehen, und konnte andererseits einen Mann von Jacobi's Bedeutung nicht ohne Blame vor der allgemeinen wissenschaftlichen Welt fahren lassen. Es zögerte ohne Ende mit der Entscheidung, bis Jacobi — von Wien aus gedrängt — die Hoffnung aufgab, bleiben zu können, wie sein dringender Wunsch war, den Ruf nach Wien annahm, die Kisten zur Bibliothek bestellte und den Reisepaß nach Wien löste, der sich noch unter seinen Papieren findet. Da endlich — und entschieden zu spät — lief der Ministerial-Beschluß ein, der Jacobi nicht allein in sein früheres Gehalt zurückversetzte, sondern dasselbe noch um 300 ₰ erhöhte. Jeder Andere hätte es wohl unmöglich gefunden, sich aus dieser Situation noch herauszuziehen, aber Jacobi's großer Wunsch, im Vaterlande zu bleiben, wie in seinen wissenschaftlichen Verbindungen bewog ihn, es noch durchzusetzen. Hieraus folgten natürlich höchst widerliche Verhandlungen mit dem nun beleidigten Wiener Ministerium, was sein Anrecht an Jacobi nun nicht wieder aufgeben wollte, und nur mit unendlicher Mühe war das Ziel zu erreichen. Alle diese Unruhen und gespannten Stimmungen mußten natürlich Jacobi's schon leidende Gesundheit schwächen; Leonhard's Abgang vom Gymnasium in Gotha mußte ohnehin bis zum Frühjahr 1851 abgewartet werden. Es wurde beschlossen, daß nach demselben Jacobi noch mit den Seinigen ein paar Monate in Thüringen zu seiner Stärkung zubringen, und dann gegen den Herbst 1851 die ganze Familie wieder nach Berlin zurückziehen sollte."

Humboldt waren in seiner eximierten Stellung beim Könige natürlich alle diese mit Jacobi geführten Verhandlungen im höchsten Grade peinlich, und wenn er auch das mögliche getan, um ihn in Berlin zu halten — „drei Monate habe ich für ihn gearbeitet" —, so hatte er doch schon im Jahre 1848 die politische Parteinahme des „rötlichen Mathematikers" nicht billigen können, und konnte sich, auch noch in den letzten Monaten nicht imstande, sich in den Geistes- und Gemütszustand des durch schwere Sorgen um die Existenz seiner Familie tief gedrückten Jacobi zu versetzen — freilich in der Annahme, daß seine Mitteilungen streng privater Natur bleiben — nicht enthalten, Schumacher gegenüber einige scharfe Bemerkungen über Jacobi zu machen, welche letzterer aber bei seiner steten Gereiztheit dem großen Mathematiker gegenüber sogleich Gauss mitteilte. Während Jacobi Eisenstein an seiner Stelle in Wien vorgeschlagen, schreibt Schumacher an Gauss am 31. März: „Dr. Friedländer aus Berlin erzählte mir, Eisenstein sei allerdings Mitglied eines demokratischen Clubs gewesen, mit Jacobi ist er nach F.'s Aussage ganz zerfallen . . ." Und wie wenig stimmen alle diese Mitteilungen und Verdächtigungen mit dem wahren Tatbestande! Das erste Schriftstück, welches Jacobi in seiner neuen festen Position am 27. März 1850 an den Minister richtete, lautete:

„... ich bitte, die Existenz des hiesigen Privatdocenten Dr. Eisenstein durch eine mit einem auskömmlichen Einkommen versehene Anstellung sicher zu stellen ... ich muß auch meinerseits — wie es schon Humboldt und Gauss gethan — gegen E. E. aussprechen, daß E. E. durch diese Fürsorge für die Erhaltung eines mathematischen Genies, das durch seine Leistungen bereits einen sehr ehrenvollen Platz unter den ersten jetzt lebenden Mathematikern einnimmt, der Wissenschaft einen wesentlichen Dienst leisten, und die Genugthuung erlangen werden, eine mathematische Professur in einer so ausgezeichneten Weise zu besetzen, wie sich E. E. nur selten dazu die Gelegenheit darbieten wird ... Gleichzeitig mit dem Dr. Eisenstein erlaube ich mir Ew. Exc. noch das Schicksal eines anderen bedeutenden Mathematikers dringend an's Herz zu legen, des Privatdocenten an der Breslauer Universität, Dr. Rosenhain, welcher neuerdings die Auszeichnung erfahren hat, daß eine seiner Arbeiten von der Pariser Academie d. W. durch ihren großen mathematischen Preis von 3000 frs. gekrönt worden ist. Diese Arbeit ist ebenso durch Tiefe wie durch einen fast colossalen Umfang ausgezeichnet und wird einen bleibenden Platz in der Wissenschaft einnehmen. Da sie zugleich eine von unserer Academie vorlängst bei einer feierlichen Gelegenheit gestellte Preisfrage erledigt, so wird wahrscheinlich auch die Berliner Academie d. W. dieselbe Arbeit, sobald ihr ein Preis zur Verfügung steht, mit demselben belohnen. Es ist daher eine Pflicht für mich, zu welcher ich aber noch ausdrücklich durch die Bitte des Prof. Kummer in Breslau aufgefordert werde, Ew. Exc. hohes Augenmerk auf die dringende Nothwendigkeit der Anstellung des Dr. Rosenhain zu richten ... Der mathematische Universitätsunterricht kann, wenn er nicht hinter

der Zeit zurückbleiben soll, von einem einzigen Docenten unmöglich bestritten werden. Für die dazu durchaus nothwendigen zwei Ordinarien oder einem Ordinarius und Extraordinarius ist eine Summe von 2000 ℛ erforderlich, wofür in diesem Augenblicke, der vielleicht bald vorübergeht, das Fach der Mathematik mit 2 Professoren besetzt werden kann, welche mit dem heutigen Zustande der Wissenschaft vertraut sind, zu ihrer Entwicklung beitragen und sich bereits einen Namen erworben haben. Oft müssen, wenn ein solcher Zeitpunkt versäumt wird, später größere Summen für weniger bedeutende, ruhm- und namenlose Subjecte aufgewendet werden. Wenn man von Berlin absieht, so ergiebt eine kurze Rundschau über die andern preußischen Universitäten, daß dort für den mathematischen Unterricht kaum die Hälfte von jener mäßigen Summe aufgewendet wird. In Königsberg, wo durch Richelot und Hesse der mathematische Unterricht vollkommen auf seiner früheren Höhe erhalten wird, von denen der erstere Correspondent unserer Academie d. W. ist, und auch der andere in einigen Theilen der Mathematik den ersten Rang behauptet und deßhalb, besonders von englischen Mathematikern, häufig mit Auszeichnung genannt wird, hat der erstere 700 ℛ, der andere 300 ℛ Gehalt. In Breslau bedarf die große und segensreiche Wirksamkeit des alleinigen Professors Kummer einer nothwendigen Ergänzung, zu der sich Rosenhain's Talent und Gelehrsamkeit auf glückliche Weise darbietet. Wie schwach in Halle für Mathematik gesorgt ist, ist Ew. Exc. bekannt; hier ist die nothwendige Stelle für Dr. Eisenstein, der diese Universität aus ihrem mathematischen Dunkel erlösen kann. In Bonn besteht die Abnormität, daß für Mathematik und Physik zusammen nur ein einziges Ordinariat da ist. Der höhere mathematische Unterricht liegt in den Händen des Professor Heine, der ohne Gehalt ist ... Nach dieser Sachlage erscheinen die Zustände des mathematischen Unterrichts auf diesen Universitäten, so wie die persönlichen Verhältnisse der betreffenden Docenten einer Abhülfe bedürftig, von der zu wünschen ist, daß sie nicht zu lange beanstandet werde, da sie grade jetzt auf eine im Verhältniß zu den aufzuwendenden Mitteln sehr günstige Art geleistet werden kann. Schließlich bemerke ich, daß die im Vorstehenden von mir ausgesprochenen Ansichten ganz diejenigen meines hochgeehrten Collegen, des Professor Dirichlet, sind . . ."

Nachdem Jacobi noch am 10. Januar eine nicht veröffentlichte Note „Über die Entwicklung des inversen Quadrats der Entfernung zweier in derselben Ebene befindlichen Planeten" in der Akademie gelesen und im Februar derselben eine „Mittheilung über einen Codex der Ptolemäischen Optik im Besitze der Königl. Bibliothek zu Berlin" vorgelegt, welcher, eine lateinische Übersetzung aus dem Arabischen, wie Jacobi glaubte, Pertz aber später bestritt, seit unbestimmter Zeit im Besitze der Königl. Bibliothek befindlich, erst neuerdings wieder aufgefunden sein sollte, machte er noch in demselben Monat der Akademie eine „Vorläufige Mittheilung über den von Lagrange behandelten Fall der Rotation eines schweren Körpers. Angabe des Resultats, daß sich diese Rotation durch die gegenseitige Lage zweier rotirender Körper darstellen läßt, welche gar keiner beschleunigenden Kraft unterworfen sind", und sandte die teilweise Ausführung dieser Arbeit, datiert vom 17. März 1850 aus Berlin Hôtel de Londres, wo er seit der Trennung von seiner Familie wohnte, unter dem Titel „Sur la rotation d'un corps" an die Pariser Akademie, welcher dieselbe am 30. Juli vorgelegt wurde.

Das Problem der Rotation eines beliebigen festen Körpers, der keiner beschleunigenden Kraft unterworfen ist, kann, wie Jacobi findet, mittels der Funktionen $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x \ldots$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x$

$+ \cdots$ in eleganter Form dadurch gelöst werden, daß sich mit Hilfe derselben die neun cosinus durch die Zeit ausdrücken lassen, und zwar findet man, wenn x proportional der Zeit ist, die cosinus der Winkel, welche in jedem Augenblick die Lage der Hauptachsen des Körpers bestimmen, Brüchen gleich, welche die Funktion Θ zum gemeinsamen Nenner haben, während die neun Zähler, von konstanten Faktoren abgesehen, dieselbe Funktion Θ sind, in welcher nur x um eine imaginäre Konstante vermehrt ist, und zwar setzt sich die in Frage stehende Rotation aus zwei periodischen Rotationen zusammen, deren Perioden im allgemeinen untereinander inkommensurabel sind. Um eine klare Vorstellung von der Bewegung zu geben, läßt Jacobi die Achsen x und y in der unveränderlichen Ebene eine gleichförmige Rotationsbewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit vollziehen und bezieht die Lage des Körpers auf diese beweglichen Achsen und die feste z-Achse, welche perpendikulär zur unveränderlichen Ebene ist. Setzt man nun $x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$, $y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$, $z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'$, worin die Achsen der x', y', z' die Hauptachsen des Körpers sind, seien h die lebendige Kraft, l das Rotationsmoment in der unveränderlichen Ebene, A, B, C die drei Trägheitsmomente in bezug auf die Achsen der x', y', z', setzt man ferner voraus, daß man für das mittlere Moment B $Bh > l^2$, $A > B > C$, und $Bh < l^2$, $A < B < C$ habe, sei der Modul der in die Formeln eintretenden elliptischen Transzendenten $\varkappa = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}}\sqrt{\frac{l^2 - Ch}{Ah - l^2}}$, werde endlich a durch die Gleichung definiert $\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\operatorname{am}(K' - a, \varkappa')$, oder wenn $\sin\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}$ gesetzt wird, durch

$$a = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\beta}},$$

und die Zeit t durch $u = nt + \tau$ ersetzt, worin τ eine willkürliche Konstante, so erhält man, wenn $n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$, $\Theta_1(u) = \Theta(K-u)$, $H_1(u) = H(K-u)$, für die neun Größen $\alpha, \beta, \ldots$ die einfach periodischen Funktionen der Zeit

$$\alpha = -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},$$

$$\gamma = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta(u)},$$

und ähnliche Ausdrücke für die sechs anderen cosinus, während die Rotationsgeschwindigkeiten um die Achsen der x, y, z, wenn $f = n\sqrt{\varkappa\varkappa'}\,.\,\Theta_1(0)$, durch die Ausdrücke bestimmt sind

$$-\frac{f[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta(u)}, \quad \frac{f[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)}, \quad \frac{h}{l}.$$

Für die Achsen der x und y, welche in der unveränderlichen Ebene eine gleichförmige Rotationsbewegung um den festen Punkt in dem Sinne des zuerst auf den Körper ausgeübten Stoßes haben, wird der der Zeit proportionale Winkel, welchen sie in dem Zeitintervalle t beschreiben, $nn't$ sein, worin

$$n' = \frac{1}{A-C}\left(C\frac{d\log H(ia)}{da} - A\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right)$$

ist. Indem er ferner die Hermite schon früher mitgeteilten Formeln zugrunde legt

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\frac{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H(ia)\Theta(u)} = \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}$$

$$-2(q^{-\frac{1}{2}b} - q^{\frac{1}{2}b})\left(\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}\right.$$

$$\left.+\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\cdots\right),$$ und ähnliche, welche, wie er früher nachgewiesen, am direktesten zur inversen Transformation und der Division der elliptischen Funktionen führen, leitet er analoge Fouriersche Reihenentwicklungen für die Werte der sechs Größen $\frac{\alpha}{\alpha''}, \frac{\alpha'}{\alpha''}, \frac{\beta}{\beta''}, \frac{\beta'}{\beta''}, \frac{\gamma}{\gamma''}, \frac{\gamma'}{\gamma''}$ oder für die Tangenten der Winkel her, welche die Projektionen der Achsen x', y', z' auf den Ebenen der xz und der yz mit der Achse der z bilden. Jacobi bemerkt noch, daß die Formeln des Rotationsproblems als Ausgangspunkt dienen können, um die Fragen zu beantworten, welche analog denen sind, die Gauss in der theoria motus in bezug auf die elliptische und hyperbolische Bewegung behandelt hat.

Nachdem er in den Osterferien wieder einige Wochen bei seiner Familie in Gotha verweilt, wo er mit Hansen gemeinsam unternommene mathematisch-astronomische Arbeiten weiter ausführte, kehrte er mit Beginn des Sommersemesters nach Berlin zurück, um am 30. April die angekündigte Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Anwendung auf die Kreisteilung zu beginnen, die er auch bis zum 14. August vor zwölf Zuhörern fortsetzte.

Kaum hatte Jacobi seine Vorlesungen begonnen, als er in den ersten Tagen des Mai durch den Besuch von Rosenhain überrascht wurde, den man seiner politischen Bestrebungen wegen aus Breslau ausgewiesen hatte; es bedurfte des ganzen Einflusses von Jacobi, dem man jetzt in Regierungskreisen sehr freundlich entgegenkam, um auszuwirken, daß Rosenhain einige Tage zu einer wissenschaftlichen Konferenz mit ihm in Berlin sich aufhalten durfte.

Jacobi nahm nun in diesem Sommer, durch seinen Briefwechsel mit Hesse veranlaßt, frühere Untersuchungen über algebraische Kurven wieder auf und unterbreitete der Akademie am 13. Juni den „Beweis des Satzes, daß eine Kurve n^{ten} Grades im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat". Poncelet hatte den Grund eines Paradoxons, welches die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Kurven bietet, in den Doppeltangenten und Wendepunkten einer Kurve n. Ordnung erkannt, denen die Doppelpunkte und

Rückkehrpunkte ihrer Polarkurve entsprechen. Wenn im allgemeinen die Anzahl der Doppeltangenten der Kurve n. Grades α, die Anzahl der Wendepunkte β ist, so war zur Beseitigung des Paradoxons zu zeigen, daß $2\alpha + 3\beta = n^3(n-2)$ ist; da nun einzelne Sätze vermuten ließen, daß die Kurven n. Grades im allgemeinen — wenn sie keine Doppelpunkte besitzen — $3n(n-2)$ Wendepunkte haben, so erfüllte Plücker diese Gleichung durch die Annahme der Werte $\alpha = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$, $\beta = 3n(n-2)$ und erwies später die allgemeine Richtigkeit des Wertes von β; Jacobi will nun auch den 1. Teil bewahrheiten, daß die Kurven n. Ordnung im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten besitzen. Nachdem er den bereits früher entwickelten Satz von neuem bewiesen, daß, wenn h die Wurzel einer Gleichung m. Grades $0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m$ ist, deren Koeffizienten rationale ganze Funktionen von x und y sind, und $B_0, B_1, \ldots B_m$ resp. die daß diese Gradzahlen dieser Funktionen bedeuten, für den Fall, Zahlen eine arithmetische Reihe bilden, die Bedingungsgleichung, welche erforderlich ist, damit die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, auf den Grad $(m-1)(B_0 + B_m)$ steigt, indem er zeigt, daß die Diskriminante $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ eine von allen überflüssigen Faktoren freie, rationale ganze homogene Funktion von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$, von der $2m-2$. Dimension ist, stellt er den invarianten Charakter der Diskriminante durch den Nachweis fest, daß, wenn eine gegebene Gleichung m. Grades $0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_m h^m$ durch die Substitution $h = \frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$ in die Gleichung $0 = (\gamma + \delta g)^m \cdot F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \cdots + \beta_m g^m$ transformiert wird, hierdurch die Bedingungsgleichung $\Delta = 0$, welche zwischen den Koeffizienten der gegebenen Gleichung stattfinden muß, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, keine weitere Veränderung erleidet, als daß der Ausdruck Δ mit $(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m}$ multipliziert wird, oder daß $\Delta(\beta_0, \beta_1, \cdots) = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m} \cdot \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ ist. Um nun die Anzahl der Doppeltangenten einer Kurve n. Ordnung zu finden, die er auf die homogene Form $f(x, y, z) = 0$ bringt, worin z eine beliebige Konstante oder die Einheit bedeutet, stellt er dieselbe mit der Gleichung der Tangente zusammen und fragt, wann zwei der weiteren $n-2$ Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve zusammenfallen, die Tangente also Doppeltangente wird. Das Problem führt unmittelbar auf die für die Diskriminante entwickelten Hilfssätze, und es ergibt sich leicht, daß die Kurven n. Grades im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten haben, und ebenso einfach folgt, daß eine Kurve n. Grades mit der erwähnten Einschränkung im allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepunkte besitzt; was endlich noch die Frage nach der Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kurven m. und n. Ordnung betrifft, so ergibt sich mit Hilfe ähnlicher Schlüsse für dieselbe $mn(m-1) \cdot (n-1)$, was auch aus der Theorie der Polarkurven gefolgert werden kann.

Die Aufregungen des letzten Jahres hatten Jacobis Gesundheit derart erschüttert, daß er den Anstrengungen der wissenschaftlichen Arbeit und der Lehrtätigkeit nicht gewachsen zu sein fürchtete, und deshalb für den Winter keine Vorlesung ankündigte; er schrieb im Juni seiner Frau, daß er beabsichtige, in der ersten Hälfte des August nach Gotha zu kommen, um dort bis zum 14. Oktober zu bleiben, später sie wieder zu ihrem Geburtstag bis zum 17. Januar zu besuchen und „sodann bis Pfingsten in Berlin zu bleiben, um mich dann den ganzen nächsten Sommer Thüringen zu weihen — doch hängt alles von dem Fortgange des Druckes des zweiten Bandes meiner Abhandlungen ab“.

Als Jacobi nach Ablauf der Herbstferien aus Gotha nach Berlin zurückgekehrt war, legte er am 11. November der Akademie eine Note vor „Über ein neu aufgefundenes

Manuskript von Leibniz, nebst Bemerkungen über die Schrift: opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant", in der er Mitteilungen macht über einen Bericht des Dr. Gerhardt, der in Hannover die verloren gegangene 20jährige Korrespondenz von Leibniz mit dem älteren Bernoulli wieder aufgefunden, aus der ersichtlich, daß das Zeichen $\int$ von Leibniz und nicht von dem jüngeren Bernoulli herrührt, ohne daß jedoch Leibniz zu der Funktion unter dem Zeichen das Inkrement der Variable hinzufügt. Jacobi bespricht außerdem die oben betitelte, in seinem Besitze befindliche und im Jahre 1503 gedruckte kleine Schrift opusculum etc., worin schon die Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln gegeben werden.

Die nahen Beziehungen zu Hansen, dessen Familie mit der Jacobis in Gotha eng befreundet war, hatten eine äußerst rege Korrespondenz über die ausgezeichneten Störungsuntersuchungen dieses Astronomen zur Folge. Am 13. November schreibt Jacobi an Hansen:

„Meinen größten Dank für Ihre gütige Mittheilung, durch welche mir und, will's Gott, vielen andern das Leben wesentlich erleichtert wird, indem man nun zu der neuen Form Ihrer Störungsgleichungen auf eine ebenso einfache und klare als naturgemäße Weise, und nicht mehr mit verbundenen Augen gelangt . . . Vielleicht erlauben Sie mir, die Stelle desjenigen zu übernehmen, der von einer herrlichen Statue den Staub abwischt, damit sie in ihrer ganzen Schönheit erscheint. Es soll nichts so die Unbefangenheit des Beobachters stören, als wenn er zuvor das Resultat kennt; aehnliche Gefahr bietet die Kenntniß des Resultats auch dem Mathematiker bei seinen Schlüssen. Ich will Ihnen im Folgenden einige Bedenken unterbreiten, die mir aufgestoßen sind; sie sind rein formeller Natur und tangiren den Gang des Ganzen nicht im Mindesten. Nur scheint mir, muß einiges in der Art auf den Kopf gestellt werden, daß Folge Ursache und Ursache Folge wird . . . Mit dieser kleinen Aenderung scheint mir jetzt die Sache ganz vollkommen und in der Form, in welcher sie in der Wissenschaft bleiben wird. Wenn diese Aenderung nicht zu machen wäre, hätte ich Sie gern um die Vergünstigung gebeten, Ihren Brief hier abdrucken lassen zu dürfen, um mich damit prahlen zu können, daß eine so capitale Sache, wie diese Ableitung, mir zuerst mitgetheilt worden ist . . . Anfangs des nächsten Monats hoffe ich Sie wiederzusehen, und brenne danach, weiter zu sehen, wie Sie diese Form der Differentialgleichungen anwenden. Ich schreibe jetzt an einer zweiten Abhandlung über die Rotation . . . Übrigens bin ich durch dieses alles wieder auf meine Differentialgleichungen des Problems der drei Körper aufmerksam geworden, die ich wohl zu sehr vernachlässigt habe . . ."

Die 2. Abhandlung über die Rotation, von welcher Jacobi in diesem Briefe spricht, wurde in der Tat von ihm im Laufe des Jahres 1850 nahezu vollendet, aber nicht mehr veröffentlicht; erst im Jahre 1891 gab Lottner dieselben aus seinem Nachlasse unter dem Titel „Fragments sur la rotation d'un corps" heraus, eine schwierige Arbeit, welche der Herausgeber, der sich selbst schon früher eingehend mit diesem Probleme beschäftigt hatte, überaus befriedigend durchgeführt hat. In dem ersten Abschnitte „Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices" leitet Jacobi zunächst nach Entwicklung einiger Hilfsformeln aus der Theorie der Transformation 2. Grades der elliptischen Funktionen und auf Grund der in dem ersten Mémoire über die Rotation entwickelten Formeln den Satz her, daß, wenn wieder A, B, C die Hauptträgheitsmomente, l das Rotationsmoment in der unveränderlichen Ebene, h die lebendige Kraft, und man auf die unveränderliche Ebene die drei Trägheitsachsen der x', y', z' und die augenblickliche Drehungsachse projiziert, zwischen der Zeit t und jeder der Winkelgeschwindigkeiten S dieser vier Projektionen dieselbe Differentialgleichung

$$dt = \frac{\pm dS}{2\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}}$$

bestehen wird, wobei die Integralwerte von S, welche zwischen $\frac{l}{A}$ und $\frac{l}{B}$ liegen, die Winkelgeschwindigkeiten der Projektionen auf die unveränderliche Ebene von der Achse der z' und der momentanen Drehachse, die, welche zwischen $\frac{l}{C}$ und $\frac{h}{l}$ liegen, die Winkelgeschwindigkeiten der Projektionen auf dieselbe Ebene von den Achsen der x' und y' darstellen. Aus dem elliptischen Integral werden Grenzen für die Oszillationsdauer und Beziehungen zwischen den Bewegungen des Körpers hergeleitet für den Fall, daß die Konstanten oder die Anfangsdaten der Bewegung in bestimmten Beziehungen zueinander stehen. Bezeichnet man eine zweite Rotation als die konjugierte, wenn diese von denselben Größen $\frac{l}{A}, \frac{l}{B}, \frac{h}{l}, \frac{l}{C}$ abhängt, aber in umgekehrter Ordnung, so wird die, welche belebt ist von einer größeren lebendigen Kraft, auch in jedem Zeitmoment eine größere Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Drehachse haben, und ähnliche Eigenschaften, welche aus der Natur des elliptischen Integrales entspringen. Es werden sodann die bekannten Ausdrücke der neun cosinus α, β, γ, ... durch drei Winkel ψ, ψ_1, ψ_2 hergeleitet, und diese mit Hilfe von ϑ-Funktionen durch die Zeit ausgedrückt. Ein Supplement zu diesem Mémoire ist betitelt „Expressions elliptiques des cosinus des angles, qu'un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobile fait avec les axes des x, y, z fixes dans l'espace", und enthält Formeln, welche mit Hilfe der früheren durch Koordinatentransformation und die Relationen zwischen Produkten von vier ϑ-Funktionen hergeleitet sind.

Der zweite und dritte Abschnitt, den Jacobi nach Lottners Ansicht zu einem einzigen Mémoire zum Zwecke

der Entwicklung der gesamten Theorie von Lagrange vereinigen wollte, sind betitelt: „Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe" und „Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe."

In dem ersten Teile der Arbeit war der Winkel ψ durch ein elliptisches Integral 3. Gattung ausgedrückt, und sein Wert als Funktion der Zeit durch $\psi = -n'u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$ dargestellt; doch wäre die Lösung des mechanischen Problems, wie Jacobi hervorhebt, unvollkommen geblieben, wenn man nicht den Umstand benutzt hätte, daß der Divisor des Logarithmus den besonderen Wert $2i$ hat, „on aurait fait tort à l'analyse des fonctions elliptiques"; dadurch erhielt man, wenn $\psi + n'u = \psi'$ gesetzt wurde,

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\operatorname{tg}\psi'}{1-i\operatorname{tg}\psi'} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

und somit $\operatorname{tg}\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}$. Jacobi wirft nun die Frage ganz allgemein auf, wann ein Integral 3. Gattung auf Θ-Funktionen reduziert für den $\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$ den Faktor $\frac{1}{2i}$ liefern wird, und spricht den Satz aus, daß, wenn $F(x)$ eine ganze Funktion von x vom 4. Grade, a und m Konstanten sind, das auf ein elliptisches Integral 1. Gattung und den Logarithmus des Quotienten von zwei ϑ-Funktionen reduzierte elliptische Integral 3. Gattung $\int\frac{m\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$ zum Multiplikator des Logarithmus den konstanten Faktor $\frac{m}{\sqrt{F(a)}}$ hat. Es muß also der „Faktor des elliptischen Integrales 3. Gattung" $\frac{m}{\sqrt{F(a)}} = \frac{1}{2i}$ sein, wenn die Lösung des Problems so soll vervollkommnet werden können, wie es bei der Rotation eines Körpers ohne sollizitierende Kräfte der Fall ist.

Dirichlet hatte ferner Jacobis Aufmerksamkeit darauf gelenkt, zu untersuchen, wie es bei dem von Lagrange behandelten Falle sich verhalte, wo für den Fall der Rotationsbewegung eines schweren Umdrehungskörpers um einen beliebigen Punkt seiner Achse die Winkel, welche die Schnittlinie des beweglichen Äquators des Körpers und der festen Horizontalebene mit zwei festen Graden in diesen Ebenen macht, resp. der Summe und Differenz von zwei elliptischen Integralen 3. Gattung gleich sind, und Jacobi findet, daß die Faktoren der beiden elliptischen Integrale ebenfalls $\frac{1}{2i}$ sind, daß also auch hier die obenbezeichnete Durchführung des Problems möglich ist. Indem Jacobi aber diese Betrachtung auch auf diejenigen elliptischen Integrale anwendet, durch welche Lagrange die Rotation eines durch die Schwere bewegten Körpers bestimmt hat, in welchem der feste Punkt auf einer der Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes gelegen ist, und die Trägheitsmomente in bezug auf die beiden anderen Hauptachsen einander gleich sind, zeigt er zunächst, daß, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei ganze Funktionen, bei denen der Grad von $\varphi(x)$ den von $f(x)$ nicht übersteigt, und $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, das Integral $\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)\sqrt{F(x)}}$ die Summe von mehreren elliptischen Integralen 3. Gattung, und daß der Faktor eines jeden einer Wurzel a entsprechenden Integrales $\frac{\varphi(a)}{f'(a)\sqrt{F(a)}}$ ist. Daraus folgt aber wieder unmittelbar, daß in dem von Lagrange behandelten Falle die Faktoren der Integrale 3. Gattung, durch welche sich die Winkel ψ_1 und ψ_2 ausdrücken, $\pm\frac{1}{2i}$ sind, und es daher auch hier gelingt, die neun cosinus als einfache algebraische Funktionen der ϑ-Transzendenten auszudrücken.

Mit Hülfe dieser Formeln leitet nun Lottner den hier von Jacobi ohne Beweis ausgesprochenen Satz her, daß die Rotation eines schweren Umdrehungskörpers um einen beliebigen Punkt seiner Achse ersetzt werden kann durch die relative Bewegung zweier Körper, welche beschleunigenden Kräften nicht unterworfen sind, welche sich um ein und denselben festen Punkt bewegen und in ihren Rotationsbewegungen dieselbe unveränderliche Ebene und dieselbe mittlere oszillatorische Bewegung besitzen. Auch mit Hilfe dieses Satzes kann wieder der schon oben behandelte Fall auf ϑ-Funktionen zurückgeführt werden.

Auf den Brief, in welchem er Hansen von seinen Aufzeichnungen über das Rotationsproblem berichtete, antwortet ihm dieser bezüglich der Verbesserungen seiner Störungsformeln: „Sie haben zu den vielen Belehrungen, die ich Ihnen verdanke, durch Ihre letzte Mittheilung eine neue und wichtige hinzugefügt, und mich dadurch wieder unendlich erfreut. Indem Sie bloß das bescheidene Amt des Reinigers einer Statue übernehmen zu wollen versicherten, nahmen Sie den Meißel in die kunstgeübte Hand, meißelten die unschönen Stellen derselben ab und verhalfen ihr dadurch zu schönen dauernden Formen." Als Frucht dieser Korrespondenz veröffentlicht Hansen im Crelleschen Journal den „Auszug eines Schreibens des Herrn Direktor P. A. Hansen an Herrn Professor C. G. J. Jacobi", in welchem er auf Jacobis Vorschlag alle Systeme von Koordinaten, welche die Eigenschaft besitzen, daß ihre ersten Differentiale in bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten, als ideale Koordinaten bezeichnet und folgert, daß, wenn L eine Funktion bloß von idealen Koordinaten ist, ohne deren Differentiale oder die veränderlichen willkürlichen Konstanten sonst zu enthalten, und Λ die Funktion bedeutet, in die L übergeht, wenn man darin τ statt t substituiert, insofern die Zeit t nicht in den, in den Ausdrücken für x, y, z enthaltenen veränderlichen willkürlichen Konstanten vorkommt, dann in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung $\frac{dL}{dt} = \overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}}$

ist, wo der Strich über der Funktion bedeutet, daß man nach der Differentiation τ in t verwandeln soll.

Aber nicht bloß mit Hansen stand Jacobi in dieser Zeit in reger Korrespondenz, auch Richelot, Rosenhain, Heine und Hesse teilten ihm stets die Resultate ihrer Arbeiten mit und suchten bei ihm Belehrung; so schreibt ihm Hesse am 27. November: „Der Grad der Gleichung der Schmiegungsebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischer Oberflächen, läßt sich immer um 2 Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunktes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren ...“ Für den Satz, den ihm Hesse mitteilt, daß $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} : \cdots = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} : \cdots$, wenn u eine homogene Funktion von x, y, z, ferner $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, und v die Determinante der 2. Differentialquotienten ist, liefert ihm Jacobi umgehend einen einfachen Beweis mit Hilfe der Eulerschen Relationen für homogene Funktionen.

Nachdem er noch am 9. Dezember der Akademie eine nicht veröffentlichte Note „Über die Zusammensetzung der Zahlen durch Potenzen“ vorgelegt, beendet er am 15. Dezember eine größere Arbeit über die Fragen, welche in der letzten Zeit den Gegenstand seiner Korrespondenz mit Hansen gebildet hatten, und veröffentlicht dieselbe unter dem Titel „Auszug zweier Schreiben des Prof. C. G. J. Jacobi an Herrn Direktor P. A. Hansen“ im Crelleschen Journal. Jacobi bezeichnet als veränderliche willkürliche Konstanten oder Elemente in der Theorie der Störungen gewisse Funktionen der Koordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung einer willkürlichen Konstante gleich werden oder deren Differential durch die Substitution der Differentialgleichungen des ungestörten Problems identisch verschwindet,

und diese Funktionen haben die Eigenschaft, daß sie in der gestörten Bewegung von wirklichen Konstanten nur um kleine Größen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden bleiben. Indem er nun die Funktion der Koordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit, welche einem Elemente gleich ist, die Bedeutung dieses Elementes nennt, hat jedes Element in der gestörten Bewegung dieselbe Bedeutung wie in der ungestörten. Da die sechs Elemente denselben Funktionen der drei Koordinaten, ihren ersten Differentialquotienten und der Zeit im gestörten und ungestörten Problem gleich sind, so werden auch umgekehrt die drei Koordinaten und ihre ersten Differentialquotienten im gestörten wie im ungestörten Problem denselben Funktionen der sechs Elemente und der Zeit gleich sein, und hieraus der bekannte Satz folgen, der auch zur Definition der veränderlichen Elemente zu dienen pflegt, daß in den ersten Differentialen der Ausdrücke der Koordinaten durch die Elemente und die Zeit der aus der Veränderlichkeit der Elemente hervorgehende Teil verschwindet. Da nun allgemein folgt, daß keine Funktion der Elemente und der Zeit, welche sich nicht auf eine Funktion der Koordinaten und der Zeit reduzieren läßt, die Eigenschaft der Koordinaten haben kann, daß ihr erster Differentialquotient im gestörten Problem durch dieselbe Funktion der Elemente und der Zeit ausgedrückt wird wie im ungestörten, so ist damit eine frühere Behauptung von Hansen widerlegt. „... Es wird zwar insgemein angenommen, daß man bei einem vorgelegten System von Differentialgleichungen dahin trachten müsse, die Ordnung des Systems zu verringern; wie es z. B. gelungen ist, das Problem der drei Körper, welches ursprünglich von der Integration eines Systems von Differentialgleichungen der 18. Ordnung abhängt, welche 18 willkürliche Konstanten fordert, auf ein System von Differentialgleichungen der 6. Ordnung zurückzuführen, dessen vollständige Integration nur sechs willkürliche Konstanten fordert. Aber andererseits hat man doch auch früher bisweilen kein Bedenken getragen, die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung absichtlich sogar zu erhöhen; z. B. wenn man sie dadurch linear machen konnte. In dem vorliegenden Störungsproblem kann aber diese Erhöhung der 6. Ordnung des Systems von Differentialgleichungen auf die 7. am allerwenigsten Bedenken erregen, wenn man dadurch andere Vorteile erreicht. Denn überall, wo bei dem zur angenäherten Integration eines gegebenen Systems von Differentialgleichungen eingeschlagenen Verfahren die Annäherung nach den Potenzen einer kleinen Konstante geschieht, welche die Differentialgleichungen selbst enthalten, führt man eigentlich unendlich viele voneinander unabhängige willkürliche Konstanten ein, indem jede neue Annäherung neue Integrationen fordert und diese ebensoviel neue willkürliche Konstanten zulassen . . .“ Schließlich beweist Jacobi noch die Verallgemeinerung des obigen Satzes, daß man nämlich von jeder Gleichung zwischen den Koordinaten, den Elementen und der Zeit, $u = 0$, welche gleichzeitig im gestörten wie im ungestörten Problem gilt, das erste Differential so nehmen kann, als wären die Elemente konstant, und daß in du der von der Veränderlichkeit der Elemente, soweit sie in u explizite vorkommen, herrührende Teil besonders verschwindet.

In den Weihnachtsferien reiste er wieder zu seiner Familie nach Gotha und traf bei Hansen mit Scheibner zusammen, der uns darüber berichtet:

„Ich muß dabei eines Weihnachten 1850 zu Gotha mit Jacobi geführten Gespräches gedenken, in welchem er gegen mich etwa äußerte, er sei auf dem Gebiete der Störungstheorie im Besitze einer wichtigen und höchst merkwürdigen Methode, welche Ausdrücke liefere, die für gewisse Werte der darin enthaltenen Größen das Problem lösten, während die Formeln eine ganz abweichende Bedeutung erhielten, sobald jene Größen die ihnen vorgeschriebenen

Grenzen überschritten. Er habe mit Erfolg numerische Rechnungen nach der bezeichneten Methode anstellen lassen durch N. N. in Danzig, doch nannte er den Namen nicht, auch deutete er nicht auf einen Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen hin.“ Hansen bestätigte später, daß Jacobi ihm von der Anwendung einer Formel aus seinen „Fundamentis“ zu ähnlichem Zwecke gesprochen, daß er sich jedoch dieser Formel nicht mehr entsinne.

Was die Störungsrechnungen selbst betrifft, so sagt Scheibner: „Bei einer andern Gelegenheit erzählte mir Hansen, daß Jacobi ihm eine vorteilhafte Entwicklung der Störungsfunktion vorgelegt und ihn gebeten habe, die Anwendbarkeit seiner Formeln numerisch zu prüfen. Dies habe er getan und die betreffenden Resultate Jacobi mitgeteilt. Diese Rechnungen müßten sich unter Jacobis nachgelassenen Papieren befinden, mit Hilfe derselben hoffe er imstande zu sein, das Verfahren zu reproduzieren. Der Versuch, aus dem Nachlasse die Papiere zur Einsicht zu erhalten, gelang indes nicht, da alles auf Astronomie bezügliche Material nach des von den Erben bevollmächtigten Professor Borchardt Angabe Herrn Prof. Luther in Königsberg übergeben worden war.“

In der Sitzung der Berliner Akademie vom 19. April 1852 erstattete auch Luther einen „Bericht über die Störungsrechnungen C. G. J. Jacobi's“, in welchem er bemerkt: „Prof. C. G. J. Jacobi ist nach brieflichen Mitteilungen an mich zu einer neuen Methode, die störenden Kräfte zu entwickeln, gelangt. Diese Methode, die Störungsfunktion zu entwickeln, beruht hauptsächlich auf einer besonderen Darstellung des Quadrats der Entfernung zweier Planeten. Die Endformeln für das Quadrat der Entfernung zweier Planeten sind mir von Jacobi mitgeteilt, damit ich die Konstanten derselben für alle Kombinationen der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Vesta, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun berechnen möchte. Am 18. Januar a. c.

schickte ich der Königl. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin einen Bericht über diesen Gegenstand ein, welcher die Jacobischen Formeln, eine Ableitung derselben und die Resultate der Rechnung enthält. Die von mir gegebene Ableitung dieser Formeln ist von keinem Interesse, da die mir inzwischen von Herrn Professor Dirichlet gütigst anvertrauten Papiere Jacobis eine Herleitung derselben enthalten, welche anderweitig veröffentlicht werden wird. Ich gebe daher, von den Herren Akademikern Dirichlet und Encke aufgefordert, eine Mitteilung für die Monatsberichte der Königlichen Akademie zu machen, in dem Folgenden 1. die Jacobischen Formeln, 2. die Resultate meiner Rechnung, 3. Jacobis Formeln zur Berechnung der sphärischen Dreiecke, deren Eckpunkte die Perihelien zweier Planeten und der Durchschnittspunkt ihrer Bahnen sind, und die Resultate meiner Rechnung." Scheibner hat endlich im Jahre 1882, da die in Aussicht gestellte anderweitige Veröffentlichung nicht stattgefunden hat, die Entwicklung der von Jacobi gegebenen Formel behandelt. Bruns sagt in seinem „Bericht über den astronomischen Nachlaß C. G. J. Jacobis", daß sich in demselben noch Bemerkungen über eine Ausdehnung der Hansenschen Idee vorfinden, die in der Störungstheorie vorkommenden Reihen zu integrieren, ohne die beiden Winkel in andere, der Zeit proportionale zu verwandeln, sondern den Integralen dieselbe Form zu lassen, welche für die Entwicklung der störenden Kräfte passend erschien, und daß Jacobi, während bei Hansen die Winkel aus der exzentrischen Anomalie des einen und der mittleren des anderen Planeten bestehen, den Fall durchzuführen bestrebt war, wo unter dem cosinus- oder sinus-Zeichen sich inkommensurable Vielfache eines elliptischen Integrales und seiner Amplitude befinden.

Unmittelbar vor seiner Abreise aus Gotha wendet sich Jacobi noch am 10. Januar 1851 brieflich an Heine in betreff einer von diesem gegebenen neuen Lösung einer von Lamé

behandelten Aufgabe, und beweist in dem im Crelleschen Journal veröffentlichten „Auszug eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an E. Heine", daß man mit Hilfe der elliptischen Additionsformeln durch einfache Betrachtungen zu dem von Heine gefundenen Ausdrucke für die Lösung der etwas umgestalteten partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1{}^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2{}^2} + n(n+1)(\varDelta^2 \operatorname{am} v_1 + \varkappa'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(i v_2)) X_n = 0$ gelangt, wenn man die alleinige Voraussetzung macht, daß X_n die n. Potenz einer von n unabhängigen Funktion sein soll. Es gelingt ihm dies zu zeigen durch die Substitution $v_1 + i v_2 = w'$, $v_1 - i v_2 = w''$, $X_n = U^{-n}$, aus der unmittelbar zu erkennen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß n aus der Differentialgleichung herausfällt, $\frac{\partial^2 U}{\partial w' \partial w''} = 0$ ist, und also $X_n = (U' + U'')^{-n}$ wird, worin U' nur von w', U'' nur von w'' abhängt. Die transformierte Differentialgleichung $4 \frac{\partial U'}{\partial w'} \frac{\partial U''}{\partial w''} + (U' + U'')^2 (\varDelta^2 \operatorname{am} v_1 + \varkappa'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} i v_2) = 0$ hat zur allgemeinsten Lösung, wenn $e^{i \operatorname{am} w'} = t'$, $e^{i \operatorname{am} w''} = t''$ gesetzt wird, $U = \frac{\beta(t' + t'')}{(t' - \alpha)(t'' + \alpha)}$, worin α und β Konstanten sind; daraus ergibt sich unmittelbar die Lösung von Heine.

Nach Berlin zurückgekehrt, erkrankte er an der Grippe, überwand den Anfall jedoch scheinbar schnell und teilte noch am 20. Januar 1851 Hansen ergänzende Bemerkungen zu seinem letzten veröffentlichten Briefe mit, welche die Aufgabe betrafen, Funktionen der veränderlichen willkürlichen Konstanten und der Zeit zu finden, welche sich durch bloßes Hinzufügen eines Elementes in eine ideale Koordinate verwandeln; er bestimmt die Aufgabe dahin, eine Funktion von t und den sechs veränderlichen willkürlichen Konstanten a, b, c etc. von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihr, in bezug auf die sechs Größen a, b, c etc. genommenes Differential mittels der drei Bedingungsgleichungen $\frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \cdots = 0$, $\frac{\partial y}{\partial a} da + \cdots = 0$, $\frac{\partial z}{\partial a} da + \cdots = 0$ in einen

Differentialausdruck $A da + B db + C dc + \cdots$ verwandelt werden kann, in welchem $A, B, C, \ldots$ bloß Funktionen von $a, b, c, \ldots$ sind, ohne t zu enthalten. „Obgleich es mir nicht gelungen ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, so will ich Ihnen doch in der Kürze die Betrachtungen, die ich darüber angestellt habe, mitteilen." Jacobi deutet jedoch nur einen Weg an, auf dem man zur Lösung dieser Aufgabe gelangen könnte.

„Da er sich schnell erholte", sagt Dirichlet, „und wieder mit großem Eifer zu arbeiten anfing, so durften seine Freunde sich der Hoffnung überlassen, daß er ihnen und der Wissenschaft noch lange erhalten bleiben würde, als er plötzlich am 11. Februar von neuem erkrankte. Sein Zustand erregte sogleich die größten Besorgnisse, und als man nach einigen Tagen erkannte, daß er von den Blattern ergriffen sei, die auf dem durch das alte Übel unterwühlten Boden den bösartigsten Charakter zeigten, schwand jede Hoffnung. Am 18. Februar abends 11 Uhr, acht Tage nach seiner Erkrankung, erlag er ohne Kampf."

Seine Frau wurde durch einen Brief seines Neffen vom 17. an das Sterbelager gerufen, traf ihn jedoch nicht mehr lebend an. Wenige Monate später sollte die Familie nach langer Trennung wieder in Berlin vereinigt sein und auf eine sorglose Zukunft blicken dürfen!

„Noch während seiner Krankheit", sagt Dirichlet, „kaum vier Tage vor seinem Tode, beklagte er das Mißgeschick, welches über vielen seiner größeren Arbeiten gewaltet habe, die Krankheit oder häusliches Unglück unterbrochen habe. Wenn ich dann, setzte er wehmütig hinzu, später an die Arbeit zurückkehrte, habe ich lieber etwas Neues angefangen, als Untersuchungen wieder aufnehmen wollen, die so traurige Erinnerungen in mir erweckten. Aber ich sehe ein, daß ich nicht länger zögern darf, jene älteren Arbeiten, denen ich einen so großen Teil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Öffentlichkeit zu übergeben, wenn sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen. Glücklicherweise bedarf es dazu nur noch sehr kurzer Zeit, die mir ja hoffentlich nicht fehlen wird. Der Tod, welcher ihn zu früh von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft so große Bereicherungen nicht gegönnt."

Überall war die Bestürzung über den frühzeitigen Tod dieses genialen Mathematikers eine große, die Teilnahme eine aufrichtige, überall hatte man das Gefühl, daß jetzt kein anderer neben Gauss treten kann, daß Deutschland seinen größten mathematischen Lehrer verloren; aber nicht bloß der Verlust des großen Forschers und Lehrers wurde betrauert, seine Freunde im In- und Auslande fühlten auch, daß ein Mann ihnen entrissen von reinem und lauterem Charakter, mit einem warmen Herzen für alles Gute und Schöne. So klagt Chelini im Namen der Freunde, die Jacobi in Rom sich gewonnen:

„Se l'annunzio della morte dell' illustre Jacobi, mancato nell' ancor fresca età di 46 anni, ha vivamente afflitto tutti i cultori delle matematiche per essersi estinto, cosi innanzi tempo, il più grande o almeno uno de' più grandi luminari che si avesse la scienza, non è a dire di quanto dolore abbia costernato gli amici suoi, e tutti coloro che hanno avuto l'occasione di ammirarne, insieme coll' altezza dello ingegno, la semplicità et la bontà del cuore. Affabile, cortese, amabile e spiritoso nel conversare, di fede incorrotta, disinteressato, amico leale, sposo tenero e padre eccelente, egli era un vivo spechio, uno splendido esempio di virtù domestiche e cittadine. Ei ci sta tuttora presente (o! dolce rimembranza) con quella sua maestosa persona dalla fronte omerica e dall' occhio vivace e penetrante; . . . . Ancora ci suonano all' orecchio le parole onde egli esternava la sua ammirazione ed il suo affetto per la nostra Roma, che volentieri avrebbe scelta a sua patria seconda; e le parole onde commendava la nostra bellissima lingua nella quale si volle provare di scrivere. E scrisse egli tedesco in italiano, e, chi, lo crederebbe? scrisse non senza grazia, proprietà ed eleganza .... Ma di ciò non è da maravigliare; poichè sappiamo che sino da' più teneri anni ei fè conoscere, simile a Pascal, di qual penetrazione e vastità si fosse la sua mente, accoppiando allo studio delle scienze esatte (delle quali poi ha tanto servito al progresso, versando nelle loro profondità tesori di nuova luce) la coltura delle lettere greche e latine, e delle più nobili tra le moderne, non discaro alle muse avendo più di una volta composto versi nelle lingue di Omero, di Virgilio, e di Klopstock ....“

Am 28. Februar 1851 schrieb Frau Dirichlet:

„An demselben Tage, an dem wir den lieben kleinen Felix begruben, hatten wir noch einen andern harten Verlust zu beklagen. Jacobi ist in der Nacht vom Dienstag zum Mittwoch gestorben und zwar an der furchtbarsten Krankheit, die es nur giebt, den schwarzen Pocken. Ich erlasse Dir und mir alle sonstigen Beschreibungen des Entsetzens dieser letzten Tage, genug, daß er dahin, und die Welt um einen gewaltigen Geist ärmer ist, und daß dieser gewaltige Geist mit allen seinen Fehlern und Tugenden uns nahe stand. Sein Verhältniß zu Dirichlet war gar zu hübsch, wie sie so stundenlang zusammen saßen, ich nannte es Mathematik schweigen, und wie sie sich garnicht schonten, und Dirichlet ihm oft die bittersten Wahrheiten sagte, und Jacobi das so gut verstand und seinen großen Geist vor Dirichlet's großem Charakter zu beugen wußte: Er war ein Mann, nehmt alles nur in allem, Ihr werdet nimmer seinesgleichen sehen.“

Wenige Monate nach seinem Tode schildert sein langjähriger und intimer Freund ihn in schönen und tief empfundenen Worten seinen akademischen Kollegen:

„Soll ich jetzt den Versuch wagen“, sagt Dirichlet in seiner Gedächtnisrede, „ihn zu schildern, wie er außerhalb der wissenschaftlichen Sphäre denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fern stehen, so muß ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, daß er ganz in der Welt der Gedanken lebte und daß in dem Das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen eines besondern Anlaufs bedarf, das Denken, zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Wenn etwas im Leben oder in der Wissenschaft einmal seine Aufmerksamkeit erregt hatte, so ruhte er nicht, bis er es zu eignen Gedanken verarbeitet hatte, und mit dieser ununterbrochenen geistigen Tätigkeit war in ihm ein so seltenes Gedächtnis vereinigt, daß er alles, womit er sich einmal beschäftigt hatte, sich sogleich vergegenwärtigen und darüber verfügen konnte.

Der unerschöpfliche Vorrat an Wissen und eigenen Gedanken, welcher Jacobi jeden Augenblick zu Gebote stand, eine seltene geistige Beweglichkeit, durch die er sich jedem Alter, jeder Fassungskraft anzupassen wußte, und eine eigentümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdrucksweise verliehen dem großen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung, die noch durch die Bereitwilligkeit, wissenschaftliche Fragen aus dem Stegreif zu behandeln, erhöht wurde. Diese Bereitwilligkeit entsprang aus dem innersten Wesen seiner Natur, die in der Überwindung von Schwierigkeiten ihre eigentliche Befriedigung fand, und es lag daher für ihn ein ganz besonderer Reiz darin, wissenschaftliche Ergebnisse durch einfache Betrachtungen selbst solchen verständlich zu machen, denen die dazu scheinbar unentbehrlichen Vorkenntnisse fehlten. Nur mußte er, um einen solchen Versuch anzustellen, die Überzeugung haben, daß die, mit welchen er sich unterhielt, ein wirkliches Interesse an der Sache nahmen. Wo er hingegen gedankenlose Neugier zu bemerken glaubte oder entschiedene Meinungen mit Selbstgefälligkeit von solchen aussprechen hörte, die sich nie die harte Arbeit