

jene frühere Methode näher auseinandergesetzt wird, so wird vielleicht deshalb auch die Mitteilung dieser Arbeit nicht ohne Interesse sein, weil sie als Einleitung und Vorstudium zu der Goepelschen Abhandlung dienen kann, in welcher eine ähnliche Methode, aber bei einem viel komplizierteren Gegenstande befolgt ist. Einen verschiedenen Weg scheint Cauchy in seinen in den Comptes rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Noten eingeschlagen zu haben, indem er von dem unendlichen Produkte ausgeht, durch welches ich die neue Transzendente ebenfalls dargestellt habe. Endlich haben Liouville und Hermite in Arbeiten, von welchen nur kurze Andeutungen veröffentlicht sind, sich der bloßen periodischen Eigenschaften der Transzendenten Θ bedient, um alle Resultate über Addition, Multiplikation, Transformation, Teilung abzuleiten, indem ihnen diese periodischen Eigenschaften der Transzendenten a priori die Form der Resultate, partikuläre Betrachtungen dann die darin noch unbestimmt gelassenen Werte geben. Man wird es hiernach gewiß gerechtfertigt halten, wenn ich durch den Titel meines Werkes behauptet habe, die neuen wahren Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen gefunden zu haben. Außer der Leichtigkeit, mit welcher man auf denselben das ganze Gebäude aufführen kann, gewähren sie noch den Vorteil einer größeren Strenge und Klarheit, als bis jetzt in derjenigen Behandlung, welche von den Integralen ausgeht, möglich gewesen ist. Denn die Theorie der imaginären Werte der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale ist noch nicht ausgebildet genug, um die Betrachtung solcher Integrale für den ganzen Umfang aller reellen und imaginären Werte der darin eingehenden konstanten und veränderlichen Größen mit gleicher Evidenz zum Grunde zu legen, welche die immer konvergierenden Reihen gewähren. Dieser Mangel ist aber nicht der Methode immanent, deren ich mich in den Fund. Nov. bedient habe, und rührt nur von einer in den allgemeinen

Elementen der Analysis noch bestehenden Lücke her. Der Verfasser eines Aufsatzes im 27. Bande des mathematischen Journals scheint mir daher, wenn er meiner ihm bekannt gewordenen früheren und neueren Methode, von den unendlichen Reihen auszugehen, seinen Beifall schenkt, doch jene erste Methode, die zu so fruchtbaren Entdeckungen geführt hat, zu streng zu beurteilen.

Legendre hat sich mit Schnelligkeit und Kraft in dem höchsten Menschenalter der neuen Idee zu bemächtigen gewußt, welche die Theorie, die eine der Hauptbeschäftigungen seines Lebens ausgemacht hatte, umgestaltete. Als ich ihm aber meinen Gedanken mitteilte, wie man die neue Transzendente zum Ausgangspunkt aller Untersuchungen über die elliptischen Funktionen machen könnte, hat er sich von demselben als zu heterogen mit den ihm gewohnten Betrachtungen abgewendet. Ich möchte nicht vergessen, schrieb er, daß die größte Schönheit und Vollkommenheit meiner Theorie in der Anwendung rein algebraischer Ausdrücke und geschlossener endlicher Formeln bestände.

Die Betrachtung der Additionsformeln für die 3. Gattung der elliptischen Integrale hatte mich darauf geführt, dieselben auf ein anderes geschlossenes Integral zurückzuführen, welches ein Argument weniger enthält, und es fand sich, daß dieses Integral der Logarithmus der Transzendente sei, welche naturgemäß den Zähler und Nenner der elliptischen Funktionen bildet. An dem geschlossenen Integral selber konnte gezeigt werden, daß die beiden Größen, deren Quotient zu bilden ist, keinen gemeinschaftlichen Faktor haben und für keinen endlichen Wert des Intervalles unendlich werden können. Es ist zu erwarten, daß, nachdem man sich für die erste Klasse der Abelschen Integrale mit der 3. Gattung dieser Integrale mit Erfolg beschäftigt haben wird, auch deren Reduktion auf ein neues geschlossenes Integral gelingen wird, in welchem sich, wie in der Theorie der elliptischen Integrale, die Argumente mit dem Para-

meter vereinigen. Es ist ferner zu erwarten, daß dies Integral dann diejenige Transzendente sein wird, welche die drei Koeffizienten der quadratischen Gleichung gibt, deren Wurzeln die Intervalle der beiden durch Addition zu vereinigen- den Abelschen Integrale sind. Die so erhaltenen Resultate werden sich durch folgerechte Schlüsse aus dem Abelschen Additionstheorem ergeben. Will man aber die wirkliche Darstellung und, sozusagen, die sichtbare Gestalt der so gefundenen Transzendente haben, so ist hierfür noch keine aus der Theorie der elliptischen Funktionen durch Analogie entnommene Methode vorhanden, und es bleibt nur der Versuch übrig, die Reihe

$$\sum e^{az+bi}$$

auf eine Weise zu verallgemeinern, bei welcher die Methoden, durch die man von dieser Reihe aus zu den Resultaten der Theorie der elliptischen Funktionen gelangen kann, noch anwendbar bleiben. Herr Goepel unternimmt in der Abhandlung „*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio*“ diese Verallgemeinerung, indem er die Doppelreihe

$$\sum \sum e^{a^2z + b^2ik + c^2k^2 + di + ek}$$

betrachtet, in welcher beiden Indizes i und k die Werte aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu geben sind. Wie dort der Koeffizient von i^2 den Modul, der Koeffizient von i die Amplitude gab, so haben wir hier drei Koeffizienten der Terme der 2. Dimension, zwei Koeffizienten der Terme der 1. Dimension der Indizes i und k , und in der Tat hat die 1. Gattung der Abelschen Integrale drei Moduln, und in der von mir aufgestellten Theorie wurden zwei Argumente als notwendig verlangt. Die vierfache Simultanperiodizität ergab sich auf den ersten Blick, die Multiplikation zweier Reihen dieser Art ergab ebenfalls ganz auf ähnliche Art, wie bei den Funktionen Θ , ein

lineares Aggregat von Produkten zweier ähnlichen Reihen, und so mochte allerdings Goepel sogleich im ersten Augenblick bereits vor 7 bis 8 Jahren die Überzeugung erlangt haben, daß die analoge Transzendente und die wahre Grundlage der Theorie der hyperelliptischen Funktionen gefunden war, wenn er vielleicht auch erst später die Schwierigkeiten, welche sich noch bis zum wirklichen Herabsteigen zu den von mir aufgestellten Differentialgleichungen zeigten, überwunden hat, wie es in der genannten Abhandlung geschehen ist. Goepel kombiniert die beiden Methoden der Multiplikation zweier Transzendenten und derjenigen, welche bloß aus ihrer periodischen Natur die Form der Resultate ableitet. Er wäre etwas kürzer zum Ziele gelangt, wenn er ähnlich, wie es am angeführten Orte des 3. Bandes des mathematischen Journals für die elliptischen Funktionen geschehen ist, zwei Reihen mit ganz beliebigen d und e , aber denselben a, b, c multipliziert hätte. Aber es kam zunächst darauf an, auf irgendeinem Wege die Gewißheit der Richtigkeit der gewagten Divination zu erlangen. Jedenfalls aber war man sicher, zu merkwürdigen Resultaten zu gelangen, und eine Transzendente zu untersuchen, welche die merkwürdigsten Eigenschaften besaß.

Die Verallgemeinerung der Funktion Θ ist eine zu natürliche, als daß es zu verwundern ist, daß dieselbe auch von einer andern Seite her gemacht worden ist. In der Tat sind mir die von Goepel gefundenen Resultate und in größerer Vollständigkeit und Allgemeinheit bereits seit fast drei Jahren durch die Arbeiten eines meiner Schüler bekannt geworden, welche seit dem Oktober v. J. einer berühmten Akademie zur Beurteilung vorliegen, und deren Veröffentlichung nur durch das Gesetz der Akademie einen Aufenthalt erfährt, nach welchem die Gelehrten maskiert konkurrieren müssen. Es wird hierdurch die frühere Arbeit später zu erscheinen genötigt, was ein Übelstand ist, wenn- gleich die Prioritätsrechte durch die akademische Autorität

gerettet werden. In diesen beiden gänzlich voneinander unabhängigen Untersuchungen wird derselbe Gegenstand auf zwei verschiedene Arten behandelt, indem mein verehrter Schüler und Freund sich derselben Methode der Multiplikation von vier Transzendenten mit beliebigen Argumenten bedient hat, auf welche ich in meinen Vorlesungen die Theorie der elliptischen Funktionen gegründet habe. Diese Verschiedenartigkeit der Behandlung muß den Mathematikern um desto willkommener sein, weil sie geeignet ist, Licht auf einen so neuen und schwierigen Gegenstand zu werfen.

Herr Goepel bemerkt, daß seine Betrachtungen sich auch auf eine größere Zahl Variablen ausdehnen lassen. Aber es tritt hier, wie auch mein geehrter Freund gesehen hat, ein schwieriges Paradoxon ein.

Wenn in dem Abelschen Integral die Funktion unter dem Quadratwurzelzeichen auf den $(2m+3)$. oder $(2m+4)$. Grad steigt, so sind nach der von mir aufgestellten Theorie Transzendenten mit $2m+1$ Moduln und $m+1$ Variablen zu betrachten. Nach der Analogie der elliptischen und der auf sie zunächst folgenden hyperelliptischen Funktionen hängt die Theorie dieser Integrale mit Reihen zusammen, in welchen die Exponenten Funktionen von $m+1$ Indizes vom 2. Grade sind; die Koeffizienten der Terme der 2. Ordnung müßten wieder den Moduln und die der 1. den Variablen entsprechen. Aber wenn die Zahl der letzteren Koeffizienten $m+1$ wie die der Variablen ist, so ist die Zahl der ersteren $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, welche nur für $m=0$ und $m=1$ oder für die elliptischen und die 1. Klasse der hyperelliptischen Funktionen mit der Zahl der Moduln $2m+1$ übereinstimmt, in allen übrigen Fällen aber sie übertrifft.

Die vorstehende Betrachtung, nach welcher im allgemeinen die Reihe $\frac{1}{2}m(m-1)$ Konstanten mehr enthält, als es Moduln gibt, zeigt, daß von der Ausdehnung auf Werte

von m , welche größer als 1 sind, neue merkwürdige Aufschlüsse in dieser Theorie zu erwarten sind.“

Noch vor Beginn des Wintersemesters schloß Jacobi am 2. Oktober eine kurze Arbeit ab, betitelt: „Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Funktionen Genüge leisten“.

Um zu der bekannten partiellen Differentialgleichung für die ϑ -Funktionen zu gelangen, will Jacobi nicht von der Reihenentwicklung für dieselben ausgehen, sondern legt für die Herleitung solcher Differentialgleichungen auch für kompliziertere Transzendenten statt des elliptischen Integrales ein allgemeineres zugrunde, für welches, wenn

$$Y = \int_0^t t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-rt)^{-\alpha} dt, \quad y = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \cdot$$

$$(1-rt)^{-\alpha} dt, \quad \lambda = \int r^{\gamma-1} (1-r)^{\gamma-\alpha-\beta-1} y^{-2} dr, \quad v = \frac{Y}{y} \text{ ist, wo-}$$

rin α und β zwischen 0 und 1 liegen, $\gamma > \beta$ ist, die Funktion $V = \frac{1}{2} r^{\gamma} (1-r)^{\alpha+\beta-\gamma+1} \left(Y \frac{\partial y}{\partial r} - y \frac{\partial Y}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \alpha t^{\beta} \cdot$

$$(1-t)^{\gamma-\beta} \int r^{\gamma-1} (1-r)^{\alpha+\beta-\gamma} (1-rt)^{-\alpha-1} y dr, \text{ von } v \text{ und } \lambda$$

abhängig betrachtet, der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \lambda} - 2V \frac{\partial V}{\partial v} + r^{\gamma-1} (1-r)^{\alpha+\beta-\gamma} t^{2\beta-1} (1-t)^{2\gamma-2\beta-1}$$

$$(1-rt)^{-2\alpha+1} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \text{ genügt. Für den Fall des elliptischen}$$

Integrales ist $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ zu setzen, wonach sich die

partielle Differentialgleichung für $l = c\lambda$ in $\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{c} \frac{\partial V^2}{\partial v}$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \text{ verwandelt. Für } \int V dv = W, \text{ und } \Omega = e^{-W} \text{ folgt}$$

$$-c \left(\frac{\partial \Omega}{\partial l} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2}, \text{ worin für } l = -\frac{1}{\pi} \log q, \quad c = -\pi \Omega \text{ nur}$$

um einen konstanten Faktor von der ϑ -Funktion verschieden ist, und Jacobi folgert daraus, daß man aus der Definition der Funktion ϑ durch geschlossene Integralausdrücke auch umgekehrt die Reihenentwicklungen dieser Transzendenten

mittels allgemeiner Methoden, ohne einen der Theorie der elliptischen Funktionen eigentümlichen Satz zu kennen, ableiten kann.

Für den Winter 1847/48 hatte er, da sein Gesundheitszustand bis zur Mitte des Sommers ein recht bedenklicher gewesen, gar keine Vorlesungen angekündigt, zeigte aber beim Beginne des Semesters, da er sich seit einigen Monaten wieder arbeitskräftig fühlte, noch nachträglich eine Vorlesung über analytische Mechanik auf den 25. Oktober an, die er auch vor 17 Zuhörern hielt und von der wir eine sorgfältige Nachschrift von Scheibner besitzen. Nachdem er einige Worte über den Zweck seiner Vorlesung, ähnlich wie sie in der früheren Borchardtschen Nachschrift sich finden, vorausgeschickt, sagt er: „Ich will nun die allgemeinen dynamischen Differentialgleichungen zuerst in irgendeiner Form aufstellen, und dann die mannigfachen Umformungen dieses Systems angeben. Es wird hier zunächst darauf ankommen, daß Sie die Resultate klar fassen, Beweise gibt es eigentlich nicht, sondern man kann diese Sätze nur plausibel machen; in allen Beweisen, welche man hat, wird immer mehr oder weniger vorausgesetzt; denn die Mathematik kann die Art, wie die Beziehungen eines Systems von Punkten Abhängigkeiten veranlassen, sich nicht aus den Fingern saugen, sondern es wird hier wieder eine Konvention in Form eines allgemeinen Prinzips eintreten. Man kann die Forderung stellen, daß die Form dieses Prinzips möglichst einfach und plausibel sei. Ich gebe es zunächst in solcher Form, wie es analytisch am klarsten sich darstellt, später kann die Diskussion über die ganze Bedeutung desselben eröffnet werden, und wie diese Bedeutung diejenige Eigenschaft hat, welche mit Naturgesetzen verbunden zu sein pflegt. Sie werden in allen Lehrbüchern mit Beweisen dieses Prinzips betrogen, und oft ist es schwer, den Punkt zu finden, wo dem rein mathematischen Raisonement etwas Äußerliches untergeschoben ist“

Die Vorlesung selbst hat nun zuerst einen elementarereren Charakter als die von Clebsch edierte; ziemlich ausführlich behandelt er die Beweise von Lagrange für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und streut überall allgemeine, sehr interessante Bemerkungen ein: „Lagrange hat in der 2. Ausgabe seiner *Mécanique analytique* Betrachtungen angestellt, die einen Beweis enthalten sollen. Ich werde die betreffende Stelle diktieren und dazu kritische Bemerkungen machen; wegen der Bedeutung und Autorität des Buches kann man sich verleiten lassen, Dinge für wahr und streng zu halten, die es in der Tat nicht sind. Überhaupt ist die analytische Mechanik ein Buch, vor welchem man in einiger Beziehung warnen muß, es enthält vieles, was mehr divinatorisch ausgesprochen als streng bewiesen ist, so daß man es mit Vorsicht gebrauchen muß, um sich nicht täuschen zu lassen, und zu dem Wahne verführen, man hätte etwas bewiesen, was nicht bewiesen ist. Es sind wenige Punkte, die nicht große Schwierigkeiten darbieten; ich habe Schüler gehabt, die die *Mécanique analytique* besser verstanden haben als ich; aber es ist manchmal kein gutes Zeichen, wenn man etwas versteht.“ Indem er zeigt, daß der Lagrangesche Beweis sich im glücklichen Falle nur auf das stabile Gleichgewicht beziehen würde, sagt er: „Mein verstorbener Freund Bessel trug immer in seinen Vorlesungen diesen Beweis von Lagrange vor. Bessel meinte, er reiche deshalb hin, weil das ständige Gleichgewicht der einzige Fall sei, der in der Natur vorkommt. Denn da immer unendlich viele kleine Kräfte in der Natur herumschwirren, von denen uns die meisten entgehen, so würde das nicht ständige Gleichgewicht für keine Dauer sich bilden können. Es könnte also scheinen, daß ohne mathematische Fiktion die Betrachtung des ständigen Gleichgewichts ausreiche...“

Sehr ausführlich erörtert Jacobi in dieser Vorlesung den Fall der Bedingungsungleichheiten und entwickelt die

bekannte Zeichenbestimmung der Multiplikatoren; bevor er zur Dynamik übergeht, beschäftigt er sich mit der Theorie der linearen Gleichungen und der Determinanten, und nun entwickelt er die dynamischen Prinzipien ähnlich wie früher, nur daß er bei der Anwendung derselben auf das Welt-system interessante kritische Bemerkungen über die in-zwischen von den Astronomen erhaltenen Resultate über die Bewegung der Fixsterne und die Existenz der Zentral-sonne hinzufügt, und bei der Besprechung des Prinzips der kleinsten Wirkung ausführlicher als früher auf die Be-tätigung Maupertuis' bei der Aufstellung desselben eingeht. In der 49. Vorlesung beschließt er mit der Störungstheorie seine Vorträge über Mechanik.

„Ich lese in diesem Semester“, schreibt ihm Riche-lot, „zum ersten Male Elementar-Mechanik. Als mir Joachimsthal erzählte, daß Sie Mechanik lesen, wäre ich am liebsten zu Ihnen gekommen, um bei Ihnen zu hören. Ihre Vorträge hierüber von 1837 sind mir von unendlichem Nutzen, wie alles, was ich von Ihnen gelernt... Eisen-stein hat behauptet, daß die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade auf die Auflösung der Gleichung $x^5 + x + \lambda = 0$ zurückkommt; ist dies richtig und von ihm? ...“

Während er sich nun im Winter mit der Fertig-stellung seiner großen Arbeit über die Rotation beschäftigte, wurde er auf einige Resultate in der Theorie der ellip-tischen Funktionen geführt, die er in mehreren kleineren Abhandlungen zusammenstellte, von denen die erste vom 10. November 1847 datiert unter dem Titel „Über die Diffe-rentialgleichung, welcher die Reihen $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \dots$, $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots$ Genüge leisten“ veröffentlicht wurde. Trotz der Einfachheit der Reihe $y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$ gibt es kein Mittel, um aus der Natur derselben zu erkennen, ob sie einer algebraischen Differentialgleichung genügt; Ja-cobi geht nun zur Herstellung derselben von den beiden Be-

ziehungen $y = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ und $\log \frac{1}{q} = \frac{\pi K'}{K}$ aus, zeigt, daß K' und K derselben Differentialgleichung 2. Ordnung mit der unabhängigen Variablen x genügen, und drückt sodann den Differentialquotienten $\frac{d \log q}{dx}$ durch y und x aus, wodurch es möglich wird, in der zwischen y und x stattfindenden Diffe-rentialgleichung 2. Ordnung die nach x genommenen Diffe-rentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Dadurch gewinnt er eine Gleichung, aus welcher man x durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differential-quotienten bestimmen kann, und durch eine neue Differen-tiation mittels Elimination von x eine bloß zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten statt-findende Gleichung 3. Ordnung und 2. Grades, welche die verlangte Differentialgleichung darstellt, die in bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die 14. Dimension steigt. Bedeutet y eine der obigen drei Reihen, so findet somit, wenn $d \log q$ als das konstante Differential angenommen ist, zwischen y und q die Differentialgleichung 3. Ordnung und 2. Grades statt

$$\{y^2 d^3 y - 15 y d y d^2 y + 30 d y^3\}^2 + 32 \{y d^2 y - 3 d y^2\}^3$$

 $= y^{10} \{y d^2 y - 3 d y^2\}^2 (d \log q)^2$, und er folgert leicht aus der Transformationstheorie, daß, wenn $q = e^{\pi \varrho}$ gesetzt wird, das vollständige Integral jener Differentialgleichung in der Form $y = \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + \dots}{\sqrt{a' + ib\varrho}}$ dargestellt wird, wenn $r = \frac{a\varrho + ib'}{a' + ib\varrho}$, und a, a', b, b' willkürliche Konstanten bedeuten, für welche $aa' + bb' = 1$ ist. Zum Schlusse wird noch als zur Kon-vergenz der ϑ notwendig gezeigt, daß, wenn der reelle Teil von ϱ negativ ist, auch für beliebige reelle Werte der will-kürlichen Konstanten a, a', b, b' der reelle Teil von r immer negativ sein wird.

Eine zweite in dieser Zeit entstandene Notiz über elliptische Funktionen, welche Borchardt aus den hinter-

lassenen Papieren unter dem Titel „Darstellung der elliptischen Funktionen durch Potenzreihen“ publizierte, will die vier Funktionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ nach Potenzen von x entwickeln, und zwar mittels der Beziehungen, die aus der partiellen Differentialgleichung, welcher diese genügen, hergeleitet werden. Man erhält mit Benutzung bekannter Relationen der elliptischen Funktionen untereinander und des Moduls zu den Perioden, für $\vartheta_3(x)$, wenn man A , B , a , b durch $A = \frac{2K}{\pi}$, $B = \frac{2E}{\pi} - x'^2 \frac{2K}{\pi}$, $a = 4(1 - 2x^2)$, $b = 2x^2 x'^2$ definiert — und ähnlich für $\vartheta_2(x)$ und $\vartheta(x)$ bei anderer Definition von A , B , a , b — die Entwicklung $\sqrt{A} e^{-\frac{1}{2}ABx^2} \left(1 + r_2 \frac{A^4 x^4}{\Pi 4} - r_3 \frac{A^6 x^6}{\Pi 6} + r_4 \frac{A^8 x^8}{\Pi 8} - \dots \right)$, worin r_i rationale ganze Funktionen von a und b sind, und zwar, wenn man der Größe a eine, der Größe b zwei Dimensionen beilegt, homogene Funktionen der i^{ten} Dimension. Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\vartheta_1(x)$.

Endlich stellte er im Laufe des Winters noch eine große und wichtige Arbeit fertig, die er unter dem Titel „Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind“ im Crelleschen Journal veröffentlichte, und welche wesentlich neue Anwendungen der Analysis der elliptischen Funktionen auf die Arithmetik zum Gegenstande hat, und zwar auf die Simultanformen des 2. Grades, in denen gewisse Zahlenklassen immer enthalten sind. Die von Gauss und Dirichlet hergeleiteten Theoreme, daß z. B., wenn eine Primzahl p von der Form $8i + 1$ durch die beiden quadratischen Formen $(4m + 1)^2 + 16n^2$ und $(4m' + 1)^2 + 8n'^2$ dargestellt wird, die beiden Zahlen $m + n$ und n' immer gleichzeitig gerade oder ungerade sind, ließen sich nach Jacobi aus den Reihenentwicklungen der Theorie der elliptischen Funktionen herleiten, und um nun die allgemeinen hierher gehörigen Sätze zu erforschen, geht er von der

Fundamentalformel in der Theorie der elliptischen Transzendenten aus: $(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - qz)(1 - q^3z) \dots (1 - qz^{-1})(1 - q^3z^{-1}) \dots = 1 - q(z + z^{-1}) + q^4(z^2 + z^{-2}) - q^9(z^3 + z^{-3}) + \dots$; aus dieser für jeden Wert von z und für q , deren Modul < 1 , gültigen Beziehung werden nun, indem man q^m für q , wenn m eine beliebige positive Größe, und gleichzeitig $+q^{\pm n}$ oder $-q^{\pm n}$ für z setzt, die Formeln abgeleitet:

$$\Pi(1 - q^{2mi+m-n})(1 - q^{2mi+m+n})(1 - q^{2mi+m}) = \Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni}$$

$$\Pi(1 + q^{2mi+m-n})(1 + q^{2mi+m+n})(1 - q^{2mi+2m}) = \Sigma q^{mi^2+ni},$$

worin i unter dem Zeichen Π die Werte $0, 1, 2, \dots, \infty$, unter dem Zeichen Σ die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ annimmt.

Wenn nun von den unendlichen Produkten, welche für spezielle Werte von m und n hervorgehen, irgendwelche zwei miteinander multipliziert werden, so erhält man ein neues unendliches Produkt, in dessen Reihenentwicklung nur solche Glieder vorkommen, deren Exponenten in einer bestimmten quadratischen Form zweier Variabeln enthalten sind; so oft daher ein solches unendliches Produkt noch durch die Multiplikation zweier anderer in jenen Ausdrücken enthaltener unendlicher Produkte entstehen kann, werden durch die Entwicklung desselben Reihen erhalten, in denen die Exponenten der Glieder in zwei bestimmten quadratischen Funktionen zugleich vorkommen. Zufolge ihrer Entstehungsart können diese Reihen durch zwei verschiedene Doppelsummen ausgedrückt und daher nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildet werden. Nach dem einen erhalten die Exponenten der einzelnen Glieder eine andere quadratische Form als nach dem andern; wenn man aber in jeder Doppelsumme alle Glieder, in deren Exponenten die quadratische Form denselben Wert erhält, zusammenfaßt, müssen beide Bildungsgesetze zu demselben Resultate führen, und daher sowohl nach dem einen als nach dem andern die

Koeffizienten aller Glieder, in welchen die Exponenten nicht zugleich in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, verschwinden. Wenn man hingegen die Koeffizienten der Glieder, deren Exponenten in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, wie sie aus den beiden verschiedenen Bildungsweisen hervorgehen, miteinander vergleicht, erhält man jedesmal einen ähnlichen arithmetischen Satz wie für die beiden Zerfällungen der Primzahlen von der Form $8i + 1$, wonach bei der Darstellung einer Primzahl von der Form $8i + 1$ durch die beiden quadratischen Formen $a^2 + 2b^2$ und $c^2 + d^2$, wo d die Wurzel des geraden Quadrates sein mag, immer gleichzeitig a die Form $8i \pm 1$ und d die Form $8i$, oder a die Form $8i \pm 3$ und d die Form $8i + 4$ hat. Aber man erhält, wie Jacobi hervorhebt, durch arithmetische Herleitung und durch eine solche aus der Theorie der elliptischen Funktionen die Sätze in wesentlich verschiedener Fassung und nach der letzteren Methode von allgemeinerem Charakter. Schon früher hatte er gezeigt, daß der Satz, wonach für jede Zahl P , die nur Primzahlen von der Form $4i + 1$ zu Teilern hat, die Gleichung $x^2 + y^2 = P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werten von x und y zuläßt, als die vierfache Anzahl der ungeraden Faktoren von P beträgt, sich aus der Theorie der elliptischen Funktionen in der allgemeineren Fassung ergibt, daß für jede beliebige Zahl P die Gleichung $x^2 + y^2 = P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werten von x und y gestattet, als der vierfache Überschuß der Anzahl der Faktoren der Zahl P von der Form $4i + 1$ über die Anzahl ihrer Faktoren von der Form $4i + 3$ beträgt, und so wird auch der oben angeführte Gauss-Dirichletsche Satz durch die Theorie der elliptischen Funktionen in der allgemeineren Fassung gefunden, daß für jede beliebige Zahl P der Überschuß der Anzahl der Lösungen der Gleichung $P = (4m + 1)^2 + 16n^2$, in welchen $m + n$ gerade, über die Anzahl der

Lösungen, in welchen $m + n$ ungerade ist, ebensoviel beträgt als der Überschuß der Anzahl der Lösungen der Gleichung $P = (4m' + 1)^2 + 8n'^2$, in welchen n' gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen n' ungerade ist, so daß die nur für eine besondere Klasse von Zahlen geltenden Sätze durch andere ersetzt werden, welche auf alle Zahlen Anwendung finden. Bemerkenswert ist, daß bei mehreren der hier behandelten Reihenentwicklungen aus der Theorie der elliptischen Transzendenten die Vorzeichen der Glieder durch Größen ausgedrückt werden können, welche von den biquadratischen Charakteren der Zahlen abhängen.

Aus den Ausdrücken für $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{x'}$ durch q , sowie aus den Transformationsformeln und den zugehörigen Modulargleichungen werden die mannigfachsten Beziehungen zum Zwecke der oben erwähnten Folgerungen aufgestellt; dem bekannten Satze für dreieckige Zahlen analog wird gefunden, daß, wenn man von den fünfeckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(3i - 1)$, welche durch 5 dividiert, 1 übrig lassen, die Einheit abzieht, der Rest nicht bloß durch 5, sondern auch durch 25 aufgeht, und daß man nach Division mit 25 wieder fünfeckige Zahlen erhält, und ähnliche Sätze für m -eckige Zahlen, wenn die i te m -eckige Zahl durch $M = \frac{i}{2}[(m - 2)(i - 1) + 2]$ definiert ist. Die Arbeit ist noch überaus reich an Einzelresultaten, die alle aus den in den Fundamenten begründeten Formeln hergeleitet sind.

Als nach dem plötzlichen Tode Galois' am 30. Mai 1832 dessen berühmte, ein Jahr zuvor geschriebene Arbeit „Mémoire sur les conditions de resolubilité des équations par radicaux“ im Jahre 1846 im Liouvilleschen Journal veröffentlicht wurde, wandte sich Jacobi an dessen Bruder Alfred, um zu erfahren, ob in den nachgelassenen Papieren sich etwa Aufzeichnungen zur Theorie der Transzendenten vorfinden, und erhielt am 17. November 1847 die Antwort: „... Ainsi on n'a rien retrouvé concernant les fonctions

elliptiques et abéliennes; on voit seulement, qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondi des vos ouvrages . . . quant à la théorie des équations monsieur Liouville et les autres géomètres, que j'ai consultés, m'affirment que son mémoire contient les bases d'une doctrine très féconde et une application importante de cette doctrine. 'Ce travail', me disaient ils, 'assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des mathématiques.' Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de belles paroles: si votre précieuse suffrage qu' Evariste aurait ambitionné par dessus tout venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation, il deviendrait pour notre Evariste un gage d'immortalité et je croirais enfin, que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe."

Noch im November dieses Jahres fand zwischen Jacobi und Hansen ein interessanter Briefwechsel in bezug auf Dase statt, der damals großes Aufsehen erregte und die Veranlassung gab zu bedeutungsvollen und charakteristischen Meinungsäußerungen von Gauss und Jacobi.

Am 1. Januar 1847 hatte Schumacher von neuem Gauss auf Dase aufmerksam gemacht, und daran anknüpfend schrieb er ihm am 7. April 1847: „Das sonderbare Rechengenie, der junge Dase, wünscht Ihnen, mein theuerster Freund, seine Aufwartung in Göttingen zu machen, damit er ein so wichtiges Zeugniß, als das Ihrige, über seine Leistungen erhalten kann . . . Er ist wirklich eine psychologische Merkwürdigkeit, die Sie, eben der Seltenheit wegen, interessiren wird, und die man gesehen haben muß, um an ihre Möglichkeit zu glauben. Er ist so bornirt, daß man mit ihm eine starke Brandmauer einlaufen könnte, kann nicht die ersten Elemente der Mathematik begreifen — wie denn der gute Petersen vor seiner i. e. Dase's Reise sich 6 Wochen umsonst gequält hat, ihm nur die ersten Anfangsgründe beizubringen — aber die Fertigkeit im nume-

rischen Rechnen setzt jetzt in Erstaunen. Ich sage jetzt, denn vor seiner Reise, etwa vor 4 oder 5 Jahren, wollte er mir ein specimen seiner Kunst geben, das aber nicht besonders ausfiel, was er auf heftige Kopfschmerzen, vielleicht mit Recht, schob. Er multiplicirt im Kopfe 2 Zahlen, jede von 20 Ziffern in 6 Minuten, jede von 40 Ziffern in 40 Minuten, jede von 100 Ziffern in $8\frac{3}{4}$ Stunden. Quadratwurzeln mit 60 Decimalstellen zieht er in unglaublich kurzer Zeit aus."

Gauss wünschte nun nicht, daß Dase ihn besuche, da er in Göttingen nicht auf seine Kosten kommen würde; er schreibt am 10. April an Schumacher: „Was durch Briefe oder öffentliche Blätter zu meiner Kenntniß gekommen ist, enthält eigentlich noch gar kein Zeugniß für eine ganz außerordentliche Rechnensfähigkeit. Man muß hier zwei Dinge unterscheiden, ein bedeutendes Zahlengedächtniß und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz von einander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtniß haben, ohne gut rechnen zu können, umgekehrt kann jemand eine superioren Rechnensfähigkeit haben, ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtniß. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel im eminenten Grade; ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Werth legen kann. Rechnensfertigkeit kann nur danach taxirt werden, ob jemand auf dem Papier ebensoviel oder mehr leistet als andere. Ob dies bei Herrn Dase der Fall ist, weiß ich nicht; nur wenn er, um 2 Zahlen, jede von 100 Ziffern mit einander im Kopfe zu multipliciren, $8\frac{3}{4}$ Stunden bedarf, so ist dies doch am Ende eine thörichte Zeitverschwendung, da ein einigermaßen geübter Rechner dasselbe auf dem Papier in viel kürzerer, in weniger als der halben Zeit würde leisten können. Als Beweis eines stupenden Zahlengedächtnisses — aber hat man denn die Richtigkeit dieser Rechnung controllirt? — ist allerdings

jene Leistung etwas außerordentliches, aber psychologisch recht interessant würde es erst dadurch werden können, wenn man sich ein ganz adäquates Bild von dem, was dabei in seinem Geiste vorgeht, machen könnte. Schwerlich wird Herr Dase die uns dazu nöthige Erklärung geben können, worüber ich aber weit entfernt sein würde, ihm einen Vorwurf zu machen. Denn in der That, ich habe bei mir selbst manche Erfahrungen gemacht, die mir selbst räthselhaft bleiben. Eine davon ist folgende: Ich fange zuweilen, indem ich zu Fuß einen gewissen Weg mache, an, in Gedanken die Schritte zu zählen (beiläufig immer taktmäßig zu gehen, so: 1111111111 ... 22222 etc.), so zähle ich fort bis 100 und fange dann wieder von 1 an. Aber alles dies thue ich, wenn es einmal eingeleitet ist, unbewußt von selbst, ich denke an ganz andere Dinge, beachte allerlei mir auffallendes mit Aufmerksamkeit — nur sprechen darf ich nicht dazwischen — und nach einiger Zeit werde ich erst wieder gewahr, daß ich noch immer im Tact fortzähle, und immer richtig, natürlich aber ohne zu wissen, ob oder wie oft ich durch hundert gegangen bin. Aehnliches gilt beim Secundenzählen, auch hier kann ich an ganz andere Dinge denken, beobachten, schreiben, auf- und abgehen — nur nicht sprechen! Übrigens hat, wenn ich nicht irre, diese Fähigkeit Lalande von jedem praktischen Astronomen verlangt, auch ohne das Sprechen auszuschließen. So, kann, wie gesagt, ich es nicht. Ich weiß auch Niemand, der es kann. Hier erwähne ich der Sache nur, weil das Zählen bei mir durchaus unbewußt sein kann.“

Schumacher erwidert Gauss am 12. April 1847: „... Übrigens hat Dase auch eine außerordentliche Rechnungsfertigkeit, wenn er auf dem Papier rechnet. Er hat, wie Encke mir schrieb, die Rechnungen zur Ausgleichung der Preußischen Dreiecke in unbegreiflich kurzer Zeit vollführt und die hyperbolischen Logarithmen bis über 100000

berechnet...“, worauf ihm Gauss am 16. April entgegnet: „Dase hätte sich ja in Berlin von Jacobi Beschäftigung geben lassen können, da dieser ja früher, wenn ich mich recht erinnere, Clausen als Rechenknecht engagiren wollte und nachher, wenn ich nicht irre, den Pastor Lehmann zugeordnet erhalten hat, um Planetenstörungen zu berechnen, mit Königlicher Bezahlung.“

So endete auch hier wieder, wie schon öfter, der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher mit gereizten Bemerkungen von der einen oder der anderen Seite über Jacobi, dessen Charakter auch Gauss so wenig zu verstehen vermochte.

In ganz anderer Weise interessierte sich Jacobi für Dase; er schrieb an Hansen, welcher diesem ein sehr günstiges Zeugnis ausgestellt, am 23. November 1847:

„Es ist jetzt im Werke, den Dase hier etatsmäßig zu fixiren und soll ich einen umständlichen Bericht über Dase an den Unterrichtsminister machen, welchen derselbe seinem Vortrage beim Könige zum Grunde legen will. Ich erlaube mir daher Sie zu fragen, was das für Tafeln sind, welche Sie meinen, und ob Sie vielleicht geneigt wären, erforderlichen Falls die zur Berechnung der astronomischen Tafeln nöthigen besten Elemente anzugeben. Was die bei Dase nöthige mündliche Instruction und Einübung betrifft, würde ich dann gern, soweit ich kann, übernehmen... Als ersten Versuch, ob Dase zu wissenschaftlichen Arbeiten zu brauchen ist, habe ich ihn zur Auflösung linearer Gleichungen anzuweisen gesucht. Da er auch nur mit plus und minus gerechnet hatte, so kostete es eine vierwöchentliche Mühe, ihm die Sache beizubringen. Hernach aber zeigte sich diese Mühe sehr lohnend; denn er löste mit großer Schnelligkeit 47 Gleichungen auf, in denen freilich immer nur höchstens 12 Unbekannte vorkamen. Es waren dies die Preußische Gradmessung betreffende Gleichungen, welche mir Obristlieutenant Bayer mitgetheilt hatte, und die Auflösungen

besaßen eine absolute Genauigkeit. Später hat Bayer ihn die vollständigen Gleichungen, welche die ganze Messung von Lübeck bis zur Weichsel betreffen, aufzulösen gegeben. Es waren 83 Gleichungen, die in der Regel über 30 Unbekannte enthielten. Er hat dazu 4 Monate anhaltende Arbeit gebraucht, vorzüglich aber wegen der vielfachen Kontrollen, weil bei so vielen Unbekannten leicht eine Kontrolle zufällig stimmen kann. Weil er nicht mit Logarithmen rechnet, so hatte ich für ihn ein besonderes Schema entworfen. Es hat vorzüglich hierbei das Raumersparniß bewirkt, daß ich jede Gleichung nur von der Diagonale an schreiben ließ, aber von Anfang der Zeile an, indem die Unbekannten durch überschriebene römische Zahlen, um Mißverständnisse zu verhüten, bezeichnet wurden. Die Gleichungen wurden besonders geschrieben und unter jede die aus ihr durch Elimination abgeleiteten, bis zu der, welche selbst zur Elimination benutzt wurde... Ganz außerordentlichen Nutzen hat von Dase Prof. Dove für seine meteorologischen Arbeiten gezogen, indem er mit seiner Hülfe Arbeiten in zwei Monaten gemacht hat, wozu er sonst mehrere Jahre gebraucht hätte. Er hat ihn auch zur Anschließung der Bb. der mittleren Temperatur an eine periodische Formel gebrauchen können... Zu Tafeln natürlicher Logarithmen, die Dase von vielen Seiten angerathen worden, findet sich kein Verleger; auch hat man in der That nicht das Bedürfnis empfunden, die alten wieder aufzulegen; Primzahl- oder vielmehr Factorentafeln für die 4, 5, 6. Millionen liegen hier ungedruckt; ein Herr K. hat sich sogar mir erboten, sie bis 25 Millionen auszurechnen, ohne Entschädigung, wenn sie nur gedruckt würden. Ich selbst habe Dase abzählen lassen, wie oft 2 Primzahlen nur die Differenz 2 oder 4 haben, was einmal Gauss wünschte; auch die kleinste Anzahl Cuben, aus welchen jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann. Bei letzteren hat sich der merkwürdige Umstand gezeigt, daß nur 2 Zahlen, 23 und

239, 9 Cuben erfordern, nur im 1. Tausend noch Zahlen vorkommen, bei denen man 8 braucht und vom 4. Tausend an nur eine Zahl sich findet, die aus nicht weniger als 7 Cuben zusammengesetzt wird; die Zahlen, die 6 Cuben erfordern, werden immer dünner, so daß es scheint, daß von einer hohen Gränze an, alle Zahlen die Summe von 5 oder weniger Cuben sind.“

Erst im Januar 1848 kommt Jacobi in dem Briefwechsel mit Hansen wieder auf Dase zurück:

„Dirichlet, Encke und ich sollten dem Minister einen Bericht über Dase machen; leider aber hat Encke ein Separatvotum gemacht, worin er sich gegen Dases Anstellung unter dem Vorwand erklärt, daß sich keine Arbeit für ihn finden würde. Er hat eine eigne Antipathie gegen ihn, die der Empfindung des Arbeiters gegen eine Dampfmaschine gleicht, die ihm zum Bewußtsein bringt, daß seine Thätigkeit auch nur eine mechanische war. Indessen glaube ich doch, daß hinlängliches für Dase geschehen wird, um ihn zu veranlassen, sich hier zu fixiren... Bei den von Ihnen vorgeschlagenen Tafeln dürfte bei weitem die Hauptschwierigkeit sein, einen Verleger zu finden oder die Kosten des Druckes zu bestreiten. Können Sie hierfür Rath wissen, so glaube ich, würden die Berechnung und die Kosten dafür ohne Schwierigkeit beschafft werden können... Ganz vorzüglich würde ich mich aber dafür interessiren, Dase für Ihre Mondörter und Ephemeriden zuzurichten. Wenn Sie Tafeln anlegen wollen, um die von einem Winkel abhängenden Coefficienten einer nach den cosinus und sinus eines anderen Winkels fortschreitenden Reihe zu geben, was, wie mir scheint, eine Vorarbeit für Ephemeriden aller Zeiten gäbe, so würde er sich gewiß zu deren Berechnung auch qualificiren. Ferner zur Berechnung der Coefficienten durch doppelte Quadraturen. Es brauchten nur die natürlichen cosinus und sinus der beiden excentrischen Anomalieen gegeben zu werden. Man muß freilich die Formeln zur

Berechnung der Entfernung zweier Planeten besonders für ihn zustutzen; ich habe mir aber das schon überlegt. Auch zu Entwicklungscoefficienten von $(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{-n}$ durch einen von hinten zu berechnenden Kettenbruch. Wenn Sie mir in Mondssachen das, was Sie gerechnet wissen wollen, genau specificiren wollten, so wäre jetzt eine günstige Zeit sogleich anzufangen, da er grade jetzt eine andere Arbeit fertig hat. Sie haben nur von allen zum Grunde gelegten Winkeln die natürlichen cosinus und sinus anzugeben, und alle Constanten selbst, nicht ihre Logarithmen. Ganz vorzüglich scheint mir Dase brauchbar, wenn man einige Rechnungen mit mehr als 7 Stellen führen will, weil das ihm verhältnißmäßig viel weniger Mühe macht als wenn man 10stellige Tafeln statt 7stelliger braucht... Für die elliptischen Functionen und gewiß auch in andern Fällen kann man eine Tafel sehr gut brauchen, welche das Verhältniß des arithmetischen und geometrischen Mittels zweier Zahlen gäbe... Ich komme jetzt zu einer ganz andern Sache, welche mir sehr am Herzen liegt. Die Königsberger Sternwarte hat das doppelte Unglück gehabt, Bessel zu verlieren, und daß Sie sie abgelehnt haben. Es war indessen Hoffnung vorhanden, daß die dort mit den großen Instrumenten ausgeführten Beobachtungen und Messungen noch eine lange Reihe von Jahren zum nicht geringen Nutzen der Astronomie so würden fortgeführt werden können, wie es Bessel eingerichtet hatte... Encke will seinen jetzigen Gehülfen Galle als Director anbringen, ohne für Busch sich auch nur im Geringsten zu verwenden, um ihm eine Anerkennung oder höhere Stellung dort zu verschaffen. Ich habe die Vorstellung, daß die Berliner Sternwarte, was die Schärfe der Bb. betrifft, eine Sternwarte zweiten Ranges ist; ein berühmter Beobachter hat geäußert, daß die Berliner Sternwarte sich glücklich schätze, mittelmäßige Beobachtungen zu machen. Encke's fortwährende Rede ist, das Unglück für die Astronomie wären die großen Instrumente;

sein Bestreben geht durchweg dahin, alles, was damit von andern geleistet ist, zu verkleinern. Ich habe nun noch nie gesehen, daß einer die Bedeutung dessen, worin er sich auszeichnet, herabsetzt, sondern man pflegt nur das, was man nicht versteht, als von geringerer Wichtigkeit nachweisen zu wollen... Galle hat sich durch Dinge ganz anderer Art ausgezeichnet; er hat in das Cometenentdecken neuen Schwung gebracht und zuerst den Leverrier'schen Stern gesehen, nicht daß er ihn aus eigem Antriebe gesucht hätte, sondern von Leverrier aufgefordert und angewiesen... Da ich dort so lange in der Nähe der Sternwarte gelebt und ein Attachement an sie gewonnen habe, thut mir dies schmerzlich leid... Obgleich es fast zu spät und unmöglich schien, noch etwas zu ändern, habe ich doch das meinige thun wollen, und mich sehr stark gegen den Minister und den König selbst darüber ausgesprochen, und mußte bei dem Dringenden der Sache dieses leider thun, ohne von Freunden, die competente Richter sind, mich zuvor belehren lassen zu können. Jetzt aber ist es ein doppeltes Bedürfniß für mich zu erfahren, ob die Vorstellungen, die ich mir als Laie über diese Dinge gebildet und die ich Ihnen im Obigen auseinanderzusetzen versucht habe, richtig sind, oder es nicht sind, und daher ergeht meine inständige Bitte an Sie, mich darüber aufzuklären. Ich bitte Sie dabei die Gewalt der Abstraction zu brauchen, daß Sie garnicht daran denken, was Sie aus dieser Sternwarte würden haben machen können; es kann von zwei Größen eine ein sehr großes Vielfaches der andern sein, wenn sie auch beide gegen eine dritte gänzlich vernachlässigt werden können... Daß Ihre letzten Mißverhältnisse mit Bessel auf Ihr Urtheil keinen Einfluß haben werden, darf ich wohl annehmen...“

In der Angelegenheit des von Bessel stets ausgezeichneten Schülers und Assistenten der Sternwarte Busch wendet sich Jacobi auch am 15. Januar 1848 an Gauss:

„Sie werden sich wundern, daß ich Ihnen in einer Angelegenheit der praktischen Astronomie schreibe. Aber was ich hier um mich vorgehen sehe, scheint mir der Art, daß selbst das steinerne Herz eines Mathematikers darüber schreien muß ... Es handelt sich darum, daß Encke seinen Gehülfen Galle Busch als Director vorsetzen will ... Als ich Encke vorstellte, daß Busch bei solcher Kränkung nach 17jähriger Arbeit an der Sternwarte gezwungen werden würde, ein anderes Unterkommen zu suchen, sagte er mit unglaublicher Kälte 'laß ihn gehen', und manifestirte dadurch, daß es ihm garnicht unangenehm sein würde, einen so störenden Vergleichungspunkt wie die Königsberger Sternwarte darbietet, los zu werden, wie es denn überhaupt sein Geschäft ist, da er sich selbst nicht erheben kann, jedes Große in den Staub zu ziehen ...“

Auch Leverrier hatte er in dieser Angelegenheit um seine Meinung gefragt, und dieser am 24. Januar 1848 in einem ausführlichen Briefe die verschiedenen Verdienste von Galle und Busch abgewogen, zugleich aber auch einige allgemein interessante Bemerkungen hinzugefügt:

„J'ai reçu avec un grand bonheur la lettre, que vous avez bien voulu m'adresser sur l'observatoire de Königsberg. Habitué que je suis à ne pas compter dans vos mémoires les grands événements qui nous imposent la douce obligation de vous admirer, j'ai lu avec respect ces pages de notre grand géomètre, pages que je destine à mes archives de famille. Ce n'est pas non plus sans émotion que je puis jouir ces détails empruntés à l'intimité de l'illustre Bessel et dans lesquels respirent à la fois et votre entier dévouement à la science et les sentiments de l'amitié. Que ne puis-je vous donner un avis sur la haute question, que vous soulevez? Mais je ne suis que astronome calculateur; et en pareille matière on tiendrait sans doute peu de compte de mon opinion. Je suis loin de dire qu'on aurait tort; Struve, Encke, Airy sont nos maitres et je dois m'en rap-

porter à leur témoignage ... La science ne s'inquiète en aucune façon, que les observations, qui lui serviront de base, soient anglaises, prussiennes, russes ou françaises. Il n'y a que leur exactitude, qui lui importe. Et je ne crois pas me tromper en prédisant que dans un avenir éloigné, lorsque les intérêts particuliers auront disparu, il ne survivra réellement que le mémoire d'un établissement représentant à chaque époque le degré d'avancement de la science d'observation. Ce sera l'observatoire de Maskeline à la fin de dernier siècle, celui de Bradley en 1760, celui de Bessel vers 1820, celui de ... permettez de ne pas poursuivre cette énumération ...“

Noch Ende Januar traf die gutachtliche Äußerung Hansens ein, dem Jacobi am 27. Februar antwortet:

„Ich kann Ihnen nicht sagen, welch' eine Wohlthat Sie mir durch Ihren Brief erwiesen haben; auch hat er einen sehr großen Erfolg gehabt ... Mit Encke habe ich mich lange bemüht, ein freundschaftliches Verhältniß zu unterhalten, was mir auch wegen der litterarischen Verbindungen, die er als Director einer Sternwarte und Secretär einer Akademie haben muß, bequem ist. Aber er hat einen wenig angenehmen Charakter, dem rein menschliches interesseloses Wohlwollen fremd zu sein scheint; man kann es sich kaum denken, daß er etwas aus edlen Motiven thut. Ich weiß nicht, ob er früher so war, denn es ist wohl möglich, daß durch das unangenehme Gefühl, seine Stellung nicht so ausfüllen zu können, wie er es wohl möchte, sein Charakter verdorben worden ist ...“

Jacobis Gesundheitszustand war seit dem Sommer wieder ein besserer geworden, nicht bloß die alte Arbeitslust und Arbeitskraft waren wiedergekehrt, er hatte auch wieder Freude an all den Beweisen der Hochschätzung und Bewunderung seiner unvergleichlichen Leistungen, nahm mit Befriedigung seine Wahl zum auswärtigen korrespondierenden Mitglied der Madrider Akademie und zum Mitgliede

der Wiener Akademie auf, welche letztere sehr bald für die Gestaltung seines weiteren Lebens von so großer Bedeutung werden sollte, und war hocherfreut durch die seinen mächtigen wissenschaftlichen Einfluß betonenden Worte, welche ihm ein Brief von Fuss aus Petersburg vom 9/21. Januar brachte: „Mit meinen besten Wünschen zum neuen Jahr schicke ich Ihnen heute p. Post den eben fertig gewordenen ersten Band der *Opera arithmetica*; Titelblatt und Vorrede fehlen, weil ich diesen Band noch nicht zu emittieren gesonnen bin. Sie aber haben ein Recht darauf, ihn früher als andere zu besitzen und werden mir Ihre etwaigen Bemerkungen darüber nicht vorenthalten... Sie erinnern sich, daß, als die Aussicht auf eine Unterstützung vom Staate zu einer Gesamtausgabe von Euler's Schriften zwar der Akademie nicht benommen, aber doch in's Unbestimmte hinausgeschoben war, und man geduldig abwarten zu wollen schien, ein Brief von Ihnen den Ausschlag gab, und die Akademie veranlaßte, aus eignen Mitteln wenigstens zu beginnen...“

Sogleich machte er sich an die Durchblätterung der 100 Abhandlungen von Euler, welche der erste Band enthielt und „durch welche Euler die heutige höhere Zahlenlehre geschaffen hat“, und aus dem Anfang des Jahres 1848 stammt offenbar auch die kurze Aufzeichnung, die er bei der Lektüre einer dieser Arbeiten gemacht und die Kortum aus seinem Nachlasse unter dem Titel „Bemerkungen zu einer Abhandlung Eulers über die orthogonale Substitution“ veröffentlicht hat, in welcher er zeigt, daß die von Euler in seiner Abhandlung „*Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*“ durch sukzessive Transformationen von immer nur zwei Variablen gelöste Aufgabe, auf die allgemeinste Weise n lineare Funktionen von n Variablen anzugeben, deren Quadratsumme der Quadratsumme der Variablen selbst gleich wird, die später von andern für $n=3$ und $n=4$ entwickelten Formeln sämtlich schon als spezielle Fälle in sich schließt.

Noch vor Ende des Jahres 1847 hatte Jacobi am 9. Dezember der Akademie eine Note „Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Kuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Kubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12 000 zusammengesetzt werden kann“ vorgelegt, die erst vier Jahre später publiziert wurde, und in welcher er auf eine schon früher veröffentlichte Tabelle zurückkam, durch welche der Satz von Waring, daß jede ganze Zahl die Summe von 9 oder weniger ganzen positiven Kuben ist, bestätigt, und wahrscheinlich gemacht war, daß alle ganzen Zahlen, welche eine gewisse Grenze übersteigen, aus 6 oder weniger ganzen positiven Kuben zusammengesetzt sind. Jacobi hatte jetzt die Rechnung durch Dase ausführen lassen, und es ergab sich als sehr wahrscheinlich, daß alle Zahlen, welche die Zahl 8042 an Größe übertreffen, die Summe von 6 oder weniger Kuben sind; zugleich lieferte er eine praktische Konstruktion zur Anlegung von Tafeln, welche für jede Zahl die kleinste Anzahl der Kuben angeben. In der von Jacobi veröffentlichten Tabelle fanden sich später vielfache Rechenfehler vor, die nach einer genauen Revision berichtigt wurden.

Da traten plötzlich die gewaltigen politischen Umwälzungen im März 1848 ein, und Jacobi, der eine feste Stellung an der Universität nicht innehatte und dem bei gewaltsamen Umgestaltungen der staatlichen Verhältnisse jeden Augenblick ein großer Teil seines Gehaltes entzogen werden konnte, mußte im Interesse seiner zahlreichen Familie bestrebt sein, ein festes Ordinariat an der Universität zu erhalten und vor allem auch eine streng geregelte, verantwortungsvolle und den andern Gelehrten koordinierte Stellung einzunehmen.

„In den jetzigen Zeitverhältnissen“, schreibt er am 18. April an den Minister, „ist es mir Bedürfnis, mich an eine Corporation anzuschließen, und bitte ich daher Ew. Excellenz, mich an der hiesigen Universität zum ordentlichen

Professor zu ernennen, damit ich an dem unter Ihrer Leitung bevorstehenden Reorganisationswerk der Universitäten nach meinen Kräften und meinen Erfahrungen Antheil nehmen kann . . . Meine Gehaltsverhältnisse können ganz ungeändert bestehen bleiben . . . Ich gebe daher mit dem gegen Sie, Herr Graf, soeben ausgesprochenen Wunsche eine schöne Freiheit und eine Ausnahmestellung auf. Aber ich habe geglaubt, daß der Staat jetzt alle Kräfte braucht, und daß jede Kraft nach allen Richtungen, in denen sie wirken zu können glaubt, sich ihm zur Verfügung stellen muß.“

Es war Jacobi wesentlich darum zu tun, bei den politischen Wirren, die auch ihn nicht unberührt lassen konnten, den weiteren Ereignissen sorglos entgegensehen zu können; einige Tage nach dem Zeughaussturme in Berlin schrieb er an seinen Bruder in Petersburg:

„ . . . Um nun auch die nächste Vergangenheit zu berühren, soweit sie mich persönlich betrifft, so bin ich einigemal, wie Du vielleicht auch aus der Spener'schen weißt, als Redner aufgetreten. Die erste Schuld trägt mein Arzt. Obgleich die politischen Aufregungen meiner Gesundheit eher genützt als geschadet haben, so mußte ich doch vielfach noch immer meine abgespannten Nerven, die mir im Winter die Schwäche häufig bis zum Schwindel steigerten, durch Chinin und undere remedia unterstützen. Mein Arzt meinte nun, ich könnte das Chinin durch die Aufregungen ersetzen, die mir das Besuchen des damals von Crelinger geleiteten constitutionellen Clubs verursachen würde, und so ließ ich mich überreden, einige Mal hinzugehen, was auch die beabsichtigte Wirkung hatte. Da kam es einen Freitag vor, daß dort mehrere ihr Glaubensbekenntniß ablegten, um sich als Deputirte zu empfehlen, bei welcher Gelegenheit mich Dove als Comitémitglied im Vorbeigehen aufforderte, auch zu sprechen, und als ich nicht abgeneigt war, dies sogleich von der Tribüne verkündete. So von der Nothwendigkeit gepackt, hielt ich aus dem Stegreif eine Rede,

wie ich sie vielleicht nicht wieder halten werde. Eine dreimal wiederholte Salve endlosen Beifalls ertönte am Schluß; dreimal mußte ich vom Platz aufstehen und wie ein Comödiant mich nach allen Seiten verbeugen. Schelling sagte mir, sein Sohn, der viel die alten griechischen Redner studirt, habe ihm gesagt, daß sie die größten Muster erreichte. Zwölf Buchhändler schrieben mir sogleich wegen des Druckes, aber ich wußte durchaus nicht mehr genau, was ich gesagt, ja nicht einmal den Faden, zumal da wohl keiner darin war. Aber die Sache sollte ein Ende mit Schrecken nehmen. In der nächsten Sitzung (Sonabend), der ich nicht beiwohnte, da ich nur sehr unregelmäßig hinging, wurde ungestüm der Druck meiner Rede verlangt. Da stürzte Crelinger vor, der eine absolute Gewalt über die Gesellschaft ausübte. 'Meine Herren', rief er, 'was thun Sie, bedenken Sie, was Sie thun. Sie lassen sich von einer Rede hinreißen, die doch nur aus glänzenden Aphorismen, aus Phrasen aus der griechischen und römischen Geschichte bestand. Kennen Sie denn die politischen Antecedenzen dieses Mannes?' Als großer Beifall seinen Worten folgte, sagte er, 'gestern schenken Sie diesem Redner einen Beifall, der nie enden wollte, heute wieder mir — ich will Ihren Beifall nicht, wenn Sie so inconsequent sind.' Mir war gleich nach meiner Rede etwas bange geworden, und ich hatte das unbestimmte Gefühl, daß eine große Anstrengung dagegen gemacht werden würde. Crelinger stand mit dem Ministerium in Verbindung; er ließ sich zuweilen Anträge von dem constitutionellen Club machen, um für das, was es beabsichtigte, einen Anknüpfungs- und Anhaltspunkt zu haben. Meine Rede war vollkommen unabhängig gewesen. Sie rühmte die Minister als edle und ehrliche Männer, im Finanzfach ausgezeichnet, wünschte aber, daß sie sich durch einen Politiker ergänzten. Bedenklicher war noch ein anderer Punkt, zumal ich wohl in der Hast der Improvisation den Gedanken nicht ganz klar ausgesprochen haben mag. Wie ich ihn

später entwickelte, war er so: Ich wäre zwar für eine constitutionelle Monarchie, lege aber auf die Verfassungen überhaupt nicht den großen Werth. Absolute Monarchien hätten Großes für die Völker geleistet, aber auch bei dem Namen Republik überliefe mich keine Gänsehaut; es käme immer am meisten auf den patriotischen Sinn des Volkes an. Diese Gänsehaut — das pommersche Bild, wie Prutz sagte — ist so famos geworden, wie früher meine wirklichen, aber nicht vernünftigen Geheimräthe. Da jetzt jeder Reactionär oder Republikaner heißt, so bin ich dadurch, ich weiß nicht wie, in die letztere Klasse geworfen worden. Das Ministerium oder Auerswald, der einen Studenten an der Hand hatte, der ihm immer rapportiren mußte, scheint Crelinger aufgefordert zu haben, zumal bei dem bedenklichen Beifall, zu reagiren, was dieser denn auf die angegebene Art that ...“

und am 20. Juni meldet Jacobi weiter:

„Von dem hinter meinem Rücken gegen mich gerichteten Attentat wurde ich unterrichtet, und es bildete sich in einer Weißbierkneipe um mich eine immer größer werdende Partei, mit der die zu ergreifenden Maßregeln verabredet wurden. In der nächsten Sitzung Sonntag interpellirte ich Crelinger über Äußerungen, die er über meine Rede und Person gemacht haben sollte. Er redete sich heraus, er habe gar nichts gegen mich persönlich gesagt, sondern nur den allgemeinen Grundsatz aufgestellt, nicht bloß nach einer Rede zu urtheilen, sondern man müsse die ganze Vergangenheit untersuchen. Ich wollte mich schon zufriedengestellt erklären, da trat Prutz auf und erzählte, was ihm Crelinger privatim über mich gesagt. Ich gab die nöthigen Erklärungen, aber nach einander fiel nun alles über mich her, um mich todt zu hetzen. Es war ein furchtbarer Sturm, die höchste Aufregung. Denke Dir immerfort gleichzeitig 300 klatschen und 300 trommeln, und den Präsidenten mit dem Hammer die Tribüne zer-

klopfen, um Ruhe zu schaffen. Gleichwohl wurde auch von den wüthendsten Gegnern immer meiner Rede, deren Eindruck mir noch heute unerklärlich ist, mit einer Art Bewunderung gedacht. 'Diese glänzende Rede', sagte Crelinger, 'und weil glänzend, desto gefährlicher, also diese gefährliche Rede...' 'Das sei der Mann', sagte ein anderer, 'der in dem Moment, wo in Frankfurt vielleicht alles auf dem Spiele stände, durch die Gewalt seiner Rede alles in den Verderben bringenden Abgrund mit sich fortreißen könnte' usw. Ich stand unter dreierlei Anklage 1) früher gegen den König zu untertänig gewesen zu sein und nun eine plötzliche Schwenkung gemacht zu haben, 2) von jeher ein eingefleischter Jacobiner gewesen zu sein und 3) von Crelinger, der als kluger Mann allein das Richtige traf, des politischen Indifferentismus. Du siehst, da hieß es, incidit in Scyllam, qui vult vitare Charybdin; es war unmöglich, sich gegen eine Anklage zu vertheidigen, ohne der andern Recht zu geben. Die Wuth meiner Freunde ging so weit, daß sie einen Artikel der Magdeburger Zeitung vorbrachten, wo auf die Wichtigkeit der moralischen Unbescholtenheit der Clubsprecher hingewiesen wurde. Crelinger hatte sich nämlich früher als Assessor Vergehen zu Schulden kommen lassen und mußte deßhalb aus dem Justizdienst scheiden. Die Waffe war etwas unwürdig, aber die rücksichtslose, heftige, ja niederträchtige Art, wie ich von fast sämtlichen Comitémitgliedern angegriffen wurde, hatte meine Partei erbittert. Die Sache wurde den Abend nicht beendet, sondern auf die nächste Sitzung Donnerstag verschoben. Im Ganzen war die Strömung gegen mich die vorherrschende geblieben, auch mußte ich zweimal zu heftige oder unparlamentarische Ausdrücke zurücknehmen, ich war ermüdet, und durch die Menge, die über mich herfiel, etwas verwildert. Den Dienstag, wo Marie und Therese der Sitzung beiwohnten, ging es besser; der Zudrang von Menschen war ungeheuer, es hatten sich zu dieser Sitzung allein 200 neue