

In dem ersten an Humboldt gerichteten Briefe heißt es:

„Die Babylonier und Ägypter haben durch langjährige Beobachtungen einige empirische Kenntniß der Astronomie gewonnen, von denen wohl die bedeutendste war, daß die Elongation von Mercur und Venus eine gewisse Gränze nicht überschreiten, und diese beiden Planeten daher Trabanten der Sonne sind. Vom Bedürfniß des praktischen Lebens getrieben, haben vielleicht die Phönicier empirische Regeln der Rechenkunst behufs des Handels, die Ägypter empirische Regeln der Geometrie behufs der Ländervermessungen ausgedacht. Eine mathematische Wissenschaft haben sie nicht gehabt, oder es ist doch den Hellenen niemals etwas davon bekannt geworden. Diesen bleibt der große Ruhm, diese Wissenschaft von ihren ersten Grundlagen in die Höhe geführt zu haben, unverkürzt und ungetheilt. Denn wenn Thales, der vor andern auf langjährigen Reisen fremde Weisheit gelernt haben soll, noch die ägyptischen Priester lehren konnte, daß die Höhen der Pyramiden ihrem Schatten gleich sind, wenn er zu derselben Zeit gemessen wird, wo ein senkrechter Stab dem seinigen gleich wird, und er für die Erfindung, ein gleichseitiges Dreieck in einen Kreis einzuschreiben, den Musen ein Dankopfer brachte, so haben die Griechen sicher von vorn angefangen. Der Bau mathematischer Wissenschaft, den sie so in der Zeit von Thales bis zur Gründung der alexandrinischen Schule von seinen ersten Fundamenten aufgeführt, gehört zu den größten Thaten des menschlichen Geistes . . . Abgesehen von den besonderen Erfindungen des Pythagoras schrieb man ihm im Alterthum den Ruhm zu, daß er die Mathematik zur reinen Wissenschaft erhoben, welche ihr Interesse nicht in ihrer Brauchbarkeit für außer ihr liegende Zwecke hat, sondern sich selbst Zweck ist und nichts anderes anstrebt, als in den Gegenständen ihrer Betrachtung eine vollkommene Einsicht zu gewinnen. Als solche erschien dem Pytha-

goras die Mathematik das geeignetste Mittel, den menschlichen Geist daran zu gewöhnen, sich an der reinen Erkenntniß zu erfreuen und ihn hiedurch über die Befriedigung des sinnlichen Bedürfnisses zur höheren, seiner allein würdigen Bildung zu erheben. Er machte sie deßhalb zur Grundlage in seinem großen Erziehungssystem. Seine Entdeckung der rationalen Verhältnisse in der Tonscala ist, ohne wesentlich weiter geführt zu werden, der Gegenstand überaus zahlreicher Arbeiten griechischer Mathematiker gewesen, von denen sehr viele auf uns gekommen sind, welche wir gern mit andern verlorenen mathematischen Schriften vertauschten. Da dieser Stoff keine innere Entwicklung fand, wurde er zu eitlen Analogieen verbraucht. Das einzige mathematische Naturgesetz, das man erkannt hatte, sollte den Pythagoräern und Plato dazu dienen, den ganzen Kosmos zu construiren. Es wurde dem bessern Wissen Gewalt angethan, alles beliebig umgestellt, ein Himmelskörper, der Antichthon, ersonnen, bloß um die 7 Töne der Octave herauszubringen. Diese Verirrungen haben für alle Zeiten ein gefährliches Beispiel gegeben, wie Aristoteles sagt, nicht das Philosophem der Beobachtung, sondern die Beobachtung dem Philosophem unterzuordnen . . . Wenn Plato's Verdienst gerühmt wird, daß er den Astronomen empfohlen, alle bemerkten Abweichungen der Planeten von der gleichförmigen Kreisbewegung wieder durch Kreise zu construiren, und dadurch den Anstoß zu den von Apollonius erfundenen Epicyclen gegeben habe, so ging dieser Rath bei ihm nicht aus einer wissenschaftlichen Einsicht hervor, sondern aus der Vorstellung, daß der Welterschöpfer alles am vollkommensten gemacht und der Kreis die vollkommenste Figur sei. Wie ernstere und tiefere Naturbetrachtung zeigt die Lehre des Anaxagoras, von der wir nicht ohne Staunen vernehmen, und die er fast mit dem Leben gebüßt hätte, daß der Mond, wenn seine Schwungkraft aufhörte, zur Erde fallen würde, wie die Steine einer

Schleuder! Aber jener supranaturalistische Exceß Plato's hatte andererseits bei der abgöttischen Verehrung, welche er genoß, den Erfolg, ein Gegengewicht gegen die Verflachung durch eine breite Empirie zu bilden. Dem 16. Jahrhundert wurde er so ein treuer Bundesgenosse bei Wiedererringung der Freiheit der Speculation in den Naturwissenschaften, und seine Träume begleiteten Keppler bei der harten Arbeit, mit der er uns die wahren Harmonieen der Planeten erschloß . . .“

Der erste Brief geht nun ausführlicher auf die mathematischen Resultate ein, welche von Euklides, Plato, Eudoxus und anderen griechischen Mathematikern herrühren, und zeigt, wie die Sätze des letzteren vom Inhalt der Pyramide oder des Kegels nicht ohne diejenigen Prinzipien bewiesen werden konnten, die unserer heutigen Integralrechnung zugrunde liegen, und daß die Alten selbst schon sich der Neuheit und des Transzendenten dieser Prinzipien bewußt gewesen.

Der Anfang des zweiten Briefes lautet:

„Die Leistungen der Mathematiker in der Zeit von Hippocrates bis Euclid werden nach drei Richtungen unterschieden, je nachdem sie nämlich den wissenschaftlichen Stoff durch Erfindung von Theoremen oder Lösung von Problemen vermehrten, die wissenschaftliche Form durch Strenge der Beweise vervollkommneten, endlich aus dem gesammten Erwerb der Wissenschaft dasjenige, was am häufigsten und immer wieder bei den mathematischen Untersuchungen zur Anwendung kam, in einem System von Elementen zusammenstellten, aus denen sich die Wissenschaft gewissermaßen wie die Sprache aus Buchstaben oder Silben zusammensetzen sollte . . . Die einfachsten Größenvorstellungen bieten die ganze Zahl und die gerade Linie; von diesen beiden sahen die alten Philosophen mit Recht die ganze Zahl als das einfachere an, weil sie nicht wie die Linie gesetzt zu werden brauchte, und die Lehrsätze,

welche die ganzen Zahlen betreffen, wurden für mehr elementar und für evidenter als die geometrischen gehalten. In der That kann man in der Arithmetik die den geometrischen Elementen unentbehrlichen Axiome, welche immer noch eine Anschauung voraussetzen, gänzlich entbehren. Aber die gerade Linie hat vor den ganzen Zahlen das voraus, daß sie das Irrationale, oder wie die Griechen sagen, das Unaussprechbare selbst zur Anschauung und zur Erscheinung bringen und wirklich darstellen kann, was die Arithmetik nur näherungsweise vermag . . . Die Theorie der Multiplication ganz allgemeiner abstracter Größen bietet, wie jeder weiß, der heute Elemente zu schreiben hat, ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten dar, und ist weit davon entfernt, den Charakter derjenigen Evidenz und des Elementaren an sich zu tragen, welche die vier ersten Bücher des Euclides noch beabsichtigten.“

Aus all diesen Aufzeichnungen treten uns die langjährigen und tiefen Studien entgegen, welche Jacobi der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmet hat.

Auch für den Sommer 1847 war Jacobi noch durch sein Befinden verhindert, eine Vorlesung anzukündigen, und zu seinem leidenden Zustande gesellten sich bei der großen Familie, für deren sieben minderjährige Kinder er ein liebevoller und aufopfernder Vater war, noch schwere materielle Sorgen. Er wandte sich deshalb an Humboldt in der Hoffnung, daß dessen Unterstützung beim Könige ihm eine Erleichterung seiner Lage verschaffen könnte; in der That kam ihm dieser wie immer lebenswürdig und hilfsbereit entgegen und schrieb ihm im März 1847:

„Bei der Bewunderung Ihrer Geistesgaben, bei der Freundschaft, die ich Ihnen so unverbrüchlich gewidmet habe, setzt mich Ihr Brief in eine schmerzliche Aufregung. Es ist so traurig, Sie mit 7 Kindern in diesem mit jedem Tage theureren Orte bekümmert, in großen Arbeiten gestört

zu wissen, es ist aber auch traurig, eine Verantwortlichkeit eines Gelingens übernehmen zu sollen . . . Der König beendigt in Geldsachen nichts für sich, Versprechungen, die man ihm sehr leicht ablockt, verhallen spurlos . . .“

Aber Jacobi blieb bis zum Ende des Sommers ohne jede Nachricht über den Erfolg der Bestrebungen Humboldts.

In dieser Zeit hatte er auf Veranlassung Schumachers, der Dinge persönlicher Natur ihm gegenüber zur Sprache brachte und auch über einige Punkte aus der Zahlentheorie um Belehrung bat, den Briefwechsel mit demselben wieder aufgenommen und diesem im April einige interessante Mitteilungen gemacht, welche Früchte seiner historisch-mathematischen Studien waren. Nach den auf ein bestimmtes Vorkommnis bezüglichen Worten: „... Es dürfte genügen, wenn man weiß, daß jeder wirklich große Mann keinen besonderen Werth auf Titel und Auszeichnungen legt, und sie nur, wie jede andere ihm erzeugte Höflichkeit freundlich annimmt, ohne sich z. B. mit den Orden zu behängen, wo hergebrachte Sitte (wie bei Hofe in Gala) es nicht ausdrücklich verlangt . . .“, gibt Jacobi einige wissenschaftliche Auseinandersetzungen, von denen Schumacher am 12. April Gauss Kenntnis gibt:

„... Jacobi bemerkt in diesem Briefe in Bezug auf die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen, daß freilich die Relation $(\sum x^1)^2 = \sum x^3$ isolirt stehe, daß aber die Summe von zwei oder mehreren dieser Reihen mit bestimmten Coefficienten multiplicirt gleich einer Potenz einer einzelnen sein könne, z. B. $\frac{1}{2}(\sum x^7 + \sum x^5) = (\sum x^3)^2 = \sum x^4$. Daß $(\sum x^1)^2 = \sum x^3$, sagt Jacobi, stehe schon in Luca di Burgos Summa Arithmetica. Aus einem Neuplatoniker theilt er mir noch einen eleganten Satz mit über die Erzeugung der Cuben (nicht allein der Quadrate) aus der Summation der ungraden Zahlen, wenn man bei den Cuben immer die folgenden ungraden Zahlen nimmt, statt

wie bei den Quadraten immer von vorn anzufangen, $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, . . .; $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, . . .“

Eine unverkennbare, durch Krankheit und Sorgen herbeigeführte geistige Depression gestattete ihm nicht, größere Untersuchungsreihen zur Publikation auszugestalten, und außer einer am 3. Juli in der Akademie gelesenen, aber nicht veröffentlichten Note „Über die Resultate einer Abzählung der Primzahlen, welche um 2 oder 4 verschieden sind“, erschien im Crelleschen Journal nur die eine Arbeit „Über die unmittelbare Verifikation einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Funktionen“, deren Inhalt er am 10. Juni der Akademie unter dem Titel „Über einen elementaren Beweis einer Fundamentalformel der elliptischen Funktionen“ vorlegte. Aus der in den Fundamenten hergeleiteten Relation $S = 1 - q(z + z^{-1}) + q^4(z^2 + z^{-2}) - \dots = \Pi = (1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^z)(1 - q^3z) \dots (1 - qz^{-1})(1 - q^3z^{-1}) \dots$, folgt $\frac{\partial S}{\partial q} = S \frac{\partial \log \Pi}{\partial q}$, $\frac{\partial S}{\partial z} = S \frac{\partial \log \Pi}{\partial z}$, und diese beiden identischen Beziehungen verifiziert nun Jacobi direkt, indem er zeigt, daß es nur nötig und ausreichend ist, zu beweisen, daß, wenn m alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ , p alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞ , $\psi(m)$ die Faktorensomme von m , i alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bezeichnet, für jeden Wert von i

$$2 \sum \psi(m) q^{2m} + \sum \Sigma (-1)^m p q^{m(m+p-2i)} + \sum \Sigma (-1)^m p q^{m(m+p+2i)} = -i^2 \text{ und } \sum \Sigma (-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \sum \Sigma (-1)^m q^{m(m+p+2i)} = -i \text{ wird.}$$

Während sich nun der Beweis des zweiten Satzes leicht gestaltet, wird der erste auf das Theorem zurückgeführt, daß, wenn man eine gegebene gerade Zahl auf alle mögliche Arten in zwei Faktoren zerfällt, von denen der eine ungerade, der andere gerade ist, die Summe der geraden weniger der Summe der ungeraden Faktoren gleich ist der Faktorensomme der Hälfte

der gegebenen Zahl. „Es ist aber von besonderem Interesse, alle solche Formeln der Theorie der elliptischen Functionen hervorzuheben, welche sich auf Identitäten zurückführen lassen, die unmittelbar, d. i. ohne Hülfe anderweitiger analytischer Sätze, eingesehen werden können, indem man dadurch ein Mittel erhält, neue Methoden zu gewinnen.“

Borchardt, der jetzt auf einer größeren Reise sich in Frankreich und England aufhielt, und dem die gedruckte Stimmung Jacobis sowie die Veranlassung zu derselben wohlbekannt war, sucht ihn durch ausführliche Reisebeschreibungen zu zerstreuen: „Er habe in Paris Hermite kennen gelernt“, schreibt er ihm aus Oxford am 24. Juni; „er hat sich mit den Modulargleichungen der elliptischen Functionen beschäftigt und die von Galois angekündigten Sätze bewiesen, nämlich daß die Modulargleichungen 6., 8., 12. Grades resp. für die Transformation 5., 7., 11. Ordnung sich auf Gleichungen vom 5., 7., 11. Grade zurückführen lassen. Für die Transformation 5. Ordnung ist die Modulargleichung die Reducirte einer Gleichung 5. Grades. Diese Gleichung 5. Grades läßt sich also umgekehrt durch elliptische Functionen auflösen. Hermite hat sich die Aufgabe gestellt, ob alle Gleichungen 5. Grades sich auf diese Form reduciren lassen, was sehr wahrscheinlich ist, da sie eine willkürliche Constante enthält...“

Jacobi verkehrte in dieser Zeit nur mit seinen intimsten Freunden; wenn er auch jetzt schon milder über Eisenstein dachte, der sich ihm auf jede mögliche Weise zu nähern suchte, so wollten sich doch erquickliche Beziehungen zwischen beiden nicht herausbilden. „Mein Verhältniß zu den hiesigen Gelehrten“, schreibt Eisenstein im Sommer 1847 an Stern, „ist noch immer beim Alten; auch würde mir eine Annäherung nichts nutzen, da jene ihren Stolz und ihr aristokratisches Benehmen gegen mich nie ablegen werden. Ich stehe also ganz allein.“

Da die Verwendung Humboldts für Jacobi keinen

Erfolg hatte, entschloß sich dieser am 5. Juli, auf Grund der in der letzten Kabinettsorder verheißenen Unterstützung, „wenn sich seine Vorlesungen wider Erwarten nicht glänzend gestalten sollten“, sich in einer Immediateingabe an den König zu wenden und zugleich Humboldt davon in Kenntnis zu setzen. „Im Sommer 1845“, sagt er in seiner Bittschrift, „begann ich meine Vorlesungen und setzte sie durch drei Semester fort, war aber schon im letzten genöthigt, sie meiner Gesundheit wegen fast zur Hälfte auszusetzen. Das Honorar dafür betrug zusammen 287 r 15 sgr., indem andere 255 r gestundet werden mußten. Es wurde also eine namhafte pecuniäre Einnahme durch meine Vorlesungen nicht erreicht. Ich habe dem Befehl meines Arztes gemäß seit Michaelis vorigen Jahres meine Vorlesungen aussetzen müssen und weiß nicht, ob ich sie diesen Winter werde aufnehmen können.“

Schon zwei Tage darauf, am 7. Juli, schreibt ihm Humboldt aus Potsdam:

„Ich habe, theuerster College, gestern Ihren theuren Brief empfangen; gestern schon, da die wohlwollendsten Worte verhallen, den Auftrag vom Könige bekommen, Ihren Antrag zu commentiren, und heute morgen um 8 Uhr hat der König, vor dem Vortrag, schon Ihren Brief und meinen officiellen (2 Folio-Seiten) erhalten. Ich habe um so mehr geeilt, als der König Sonnabend oder Montag die Königin nach Dresden bringt und mehrere Tage abwesend ist. Ich habe gezeigt, daß außerordentliche Geschenke ganz unzumuthbar sind, daß der Gehalt, wie es Anfangs die Absicht war, bis 3000 r erhöht werden muß, daß, was Leonhard Euler unter Friedrich dem Großen und später Lagrange war, Sie unter des jetzigen Königs ruhmvoller Regierung uns sind, daß Sie mehr zum Glanze der Akademie der Wissenschaften als für die Universität berufen sind, daß man Ihnen vor allem Gemüthsruhe verschaffen muß, daß 333 r , die Ihrem Gehalte für jetzt fehlen, was doch nicht

eine nombre limité für Ihre Zukunft sein darf, ein minimum ist für die Ersparniß, welche nach dem gewöhnlichen Lauf der Dinge die Casse bald bei dem Einsturz von zwei sehr durch Alter delabirten Häusern, einem kosmischen und einem poetischen, machen wird, anspielend auf mich selbst und den gestieften Kater, beide der Casse zusammen über 8000 π ersparend. Ich habe hinzugefügt, daß ich die Fundamente dieser delabirten Häuser kenne. Ich hoffe, Ernst und Scherz, der auch bald ernst wird, müssen helfen.“

Am 20. November erhielt Jacobi ein Gnadengeschenk von 500 Talern.

Mit Beginn des Monats Juli war nach seinen eigenen Mitteilungen wieder eine Besserung in seinem Gesundheitszustande eingetreten, und sogleich bot er der wissenschaftlichen Welt auch wieder eine erstaunliche Fülle neuer und wichtiger Arbeiten. Zunächst vollendete er am 10. Juli 1847 die mit der Theorie der elliptischen Functionen in engster Verbindung stehende Abhandlung „Über eine partiikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ “.

Wenn $\varphi(x, y, z) = \varrho$, $\varphi_1(x, y, z) = \varrho_1$, $\varphi_2(x, y, z) = \varrho_2$ die Gleichungen dreier orthogonaler Flächensysteme sind, so wird, wenn $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 = h^2$, $\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2 = h_1^2$, $\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right)^2 = h_2^2$ gesetzt und die cosinus der Winkel, welche die an den drei Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt errichteten Normalen mit den drei Koordinatenachsen bilden, mit α, β, γ ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet werden, für eine beliebige Function V $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = h^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 + h_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)^2$, $\sum \pm \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = h h_1 h_2$, und $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{h^2} d\varrho^2 + \frac{1}{h_1^2} d\varrho_1^2 + \frac{1}{h_2^2} d\varrho_2^2$ sein. Jacobi zeigt nun zunächst, daß, wenn

in eine Function F von $x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ für x, y, z drei andere Variable u, u_1, u_2 eingeführt werden sollen, sich aus der Gleichung $\iiint F dx dy dz = \iiint F \mathcal{A} du du_1 du_2$, in welcher $\mathcal{A}$ die Funktionaldeterminante bedeutet, mit Hilfe der Variation der beiden gleichen Integrale, Reduktion unter dem Integral mittels partieller Integration auf die Variation selbst und Identifizierung der Koeffizienten dieser Variation

$$\mathcal{A} \left\{ \frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial V} - \dots \right\} = \mathcal{A} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) \right) - \dots$$

folgt, worin die eingeklammerten Größen als Functionen von $u, u_1, u_2, V, \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial u_1}, \frac{\partial V}{\partial u_2}$ zu betrachten sind, und leitet daraus die Lamésche Transformation der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ in die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{h_1}{h_2 h} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{h_2}{h h_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} = 0$$

unmittelbar her; zugleich findet er, daß der transformierte Ausdruck des Quadrates des Linienelementes $dx^2 + dy^2 + dz^2$ allein hinreicht, um sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ zu erhalten, und leitet durch Einführung von Polarkoordinaten die Laplace-

sche Transformation derselben in $\sin u_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\sin u_1}{\partial u_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} + \frac{1}{\sin u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0$ ab.

Durch Einführung der elliptischen Koordinaten und Substitution von $\frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} = du$ und die ähnlichen ergibt sich die Lamésche Form $(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (\varrho^2 - \varrho_2^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + (\varrho^2 - \varrho_1^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0$, von welcher $V = f(u + u_1 i + u_2) + f_1(u +$

$u_1 i - u_2) + f_2(u - u_1 i + u_2) + f_3(u - u_1 i - u_2)$, worin f, f_1, f_2, f_3 willkürliche Funktionen sind, eine partikuläre Lösung darstellt. Mit Hilfe des Abelschen Theorems gelingt es nun Jacobi, die willkürlichen Funktionen in andere zu verwandeln, deren Argumente algebraische Funktionen von x, y, z sind; er beweist den Satz, daß, wenn die Größe σ durch x, y, z mittels der Gleichung $1 = \frac{\sigma}{bc}x + \frac{i\sqrt{\sigma^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}y + \frac{i\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}z$ bestimmt wird, in welcher b und c beliebige Konstanten bedeuten, jede Funktion dieser Größe $V = f(\sigma)$ der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ genügt, und allgemein, daß, wenn eine Größe σ als Funktion von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, in welcher die Funktion Π der partiellen Differentialgleichung $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0$ Genüge leistet, und man außerdem $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0$ hat, eine willkürliche Funktion von σ wiederum eine Lösung der partiellen Differentialgleichung in V sein wird. Die Frage, wie die Werte der Funktion V auf allen Punkten zweier der konfokalen Ellipsoide gegeben sein müssen, damit dieselbe die oben angegebene Form annimmt, beantwortet er endlich mit Hilfe des Satzes, daß durch die Substitution

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} v_1}{\sin \operatorname{coam}(v_2, \kappa')} = \frac{\sin \operatorname{am} v_1 \operatorname{am}(v_2, \kappa')}{\cos \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am}(v_2, \kappa')},$$

$e^{-\vartheta_1} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_2, \kappa')}{1 + \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_2, \kappa')}}$ die partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta_1^2} = 0$ ineinander übergehen, und die Funktion $V = \Pi(\vartheta + \vartheta_1 i) + \Pi_1(\vartheta - \vartheta_1 i)$, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0$ genügt, muß sich somit als die Summe zweier Funktionen von $v_1 + v_2 i$ und $v_1 - v_2 i$ darstellen lassen, was mit Hilfe der elliptischen Funktionen auch direkt gezeigt wird.

Am 15. Juli las Jacobi in der Akademie eine nicht veröffentlichte Arbeit „Über die Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion“, über welches sich eine Aufzeichnung in seinen hinterlassenen Papieren vorfindet, welche seine schon mehrfach erwähnte Darstellung desselben näher ausführt und mit den nachfolgenden Worten eingeleitet wird:

„Das Integral $v = \int_{t_0}^t \Sigma m(x'x' + y'y' + z'z')dt$, welches

Hamilton mit dem Namen der Aktion oder auch der aufgehäuften lebendigen Kraft bezeichnet, hat schon früher die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich gezogen. Wenn Hamilton durch seine partiellen Differentiationen die Integralgleichungen der Bewegung darstellt, so hatte man früher aus der Betrachtung der Variation desselben Integrals die Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet. Der Verfasser bemerkt, wie es interessant sei zu sehen, wie die in verschiedenem Sinne genommenen unendlich kleinen Änderungen des nämlichen einzigen Ausdruckes das eine Mal die Differentialgleichungen des Problems, das andere Mal die vollständigen Integralgleichungen geben. Das erstere Verfahren hat man zu einem Grundsatz der Mechanik gemacht, dem sogenannten Prinzip der kleinsten Wirkung; der Hamiltonsche Satz verdient mit gleichem Recht als ein Prinzip der Mechanik betrachtet zu werden. Beide beruhen auf einer ähnlichen Analyse; auch scheint es, daß der Verfasser bei Gelegenheit seiner Arbeiten in der Theorie des Lichtes, in welcher ein häufiger Gebrauch von dem Prinzip der kleinsten Wirkung gemacht war, auf sein neues Prinzip gekommen ist. Es wird daher nicht am unrechten Orte sein, über das Prinzip der kleinsten Wirkung hier einige allgemeine Bemerkungen beizubringen.

Euler beschließt seine 1744 erschienene berühmte Schrift 'methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti' mit einem Abschnitt: de motu pro-

jectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando. In diesem Abschnitt findet sich bekanntlich zuerst das Prinzip der kleinsten Wirkung aufgestellt und wird dort für den Fall bewiesen, in welchem die Geschwindigkeit des Körpers bloß von seinem Orte abhängt, so daß, wenn er zu demselben Orte wiederkehrt, er auch dieselbe Geschwindigkeit wiedererlangt, welcher Fall, wie Euler bemerkt, eintritt, so oft der Körper nach einem oder mehreren festen Zentren mit Kräften gezogen wird, welche irgendwelchen Funktionen der Entfernungen von diesen Zentren proportional sind. Auf den Fall, wo der Punkt sich auf einer Fläche oder Kurve bewegen muß, dehnt er das Prinzip nicht aus. Auch wird in den Eulerschen Beweisen immer nur die Bahn in einer Ebene betrachtet; dagegen bemerkt er schon, daß sein Beweis nur erfordere, daß man den Ausdruck $Tdx + Vdy$, wo T , V die Seitenkräfte bedeuten, integrieren kann. Euler sagt zwar am angeführten Orte, daß T und V beliebige Funktionen von x , y sein können, aber aus dem übrigen Zusammenhange geht hervor, daß er diese Bedingung stillschweigend verstanden. Auch bemerkt er schon, daß dasselbe Prinzip bei der Bewegung mehrerer Punkte, die auf irgendeine Weise auf sich gegenseitig einwirken, gelte. Aber wenn er noch es für zu schwierig hält, dieses durch den Kalkül nachzuweisen, und daher zu metaphysischen Prinzipien seine Zuflucht nehmen will, so sehen wir nicht gar lange darauf Lagrange im 2. Bande der *Miscellanea Taurinensia* diesem Prinzip seine ganze Allgemeinheit geben. Es befinden sich nämlich in diesem Bande die beiden berühmten, miteinander zusammenhängenden Abhandlungen 'Essai sur une nouvelle méthode etc.' und 'Application de cette méthode etc.', von denen letzteren eine neue Epoche für die Mechanik anhebt, und die weit ihrer Zeit vorausgeeilt sind. Denn in diesen Abhandlungen leitet Lagrange bereits die Differentialgleichungen für alle Pro-

bleme der Dynamik mit einer einzigen Formel her, zuerst für die Bewegung irgendeines Systems isolierter Punkte, auf welches irgendwelche Kräfte wirken, und zwischen deren Koordinaten irgendwelche Bedingungsgleichungen gegeben sind, wendet dann die allgemeine Methode auf die Schwingungen eines mit einer endlichen oder unendlichen Zahl Körper beladenen elastischen oder unelastischen Fadens an, sei es daß der Faden an einem oder an beiden Enden fest, daß er mit einem oder beiden längs irgendeiner festen Kurve gleiten kann, oder beide Enden verknüpft, so daß der Faden in sich zurückkehrt, ferner auf die Bewegung eines Körpers von irgendwelcher Figur, auf den irgendwelche Kräfte wirken, sei es daß der Körper ganz frei oder daß er sich um einen festen Punkt oder um eine feste Achse drehen, oder einer seiner Punkte auf einer gegebenen Fläche bleiben muß, oder er selber während seiner Drehung auf irgendeiner Fläche, die er fortwährend berührt, frei gleitet; dann leitet er aus derselben Formel die Gesetze der Bewegung der nicht elastischen Flüssigkeiten, auf welche irgendwelche Kräfte wirken, und die ganz eingeschlossen oder ganz oder zum Teil frei sind, her und schließt die Abhandlung mit der Herleitung der Gesetze der Bewegung elastischer Flüssigkeiten aus derselben Formel. Wenn das Detail der späteren *Mécanique analytique* mancherlei Veränderungen fähig ist, aber die ewige Größe dieses Werkes darin besteht, die gesamten Probleme der Statik und Dynamik vermittels einer einzigen Formel in Probleme der reinen Analysis zu übertragen — eine Konzeption, welche an die Grenze des menschlichen Abstraktionsvermögens zu reichen scheint — so finden wir bereits in dieser Arbeit jenen kühnen Gedanken gleich in fertiger Vollendung aus dem Kopfe hervorgehen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung, von welchem Lagrange ausging, erstreckt sich nicht auf so allgemeine Untersuchungen. Aber es gab ihm für die Differentialglei-

chungen eine Form, welche mit Leichtigkeit auf die Fälle ausgedehnt werden konnte, in welchen jenes Prinzip nicht mehr stattfindet. Nachdem Lagrange in der ersten der beiden angeführten Abhandlungen den Algorithmus des Variationskalküls zur allgemeinen Lösung aller Aufgaben, welche die Erforschung der größten oder kleinsten Werte von Integralformeln zum Zwecke haben, erfunden hatte, wendete er ihn sogleich auf das Integral an, von dem Euler bemerkt hatte, daß die Bedingungen, daß es ein Minimum würde, zugleich die Differentialgleichungen der Bewegung für einen sehr ausgedehnten Fall wurden, und auf diesem Wege wurde der Algorithmus der Variationsrechnung in die Mechanik eingeführt, durch welche allein jene abstrakteste Allgemeinheit erreicht werden konnte, die in einem symbolischen Ausdruck eine ganze Welt umfaßte, und ein für allemal die Arbeit des Verstandes vollstreckte, welche früher bei jedem besonderen Problem angewendet werden mußte. Der Weg, den ihn sein Genius führte, war also nicht der, welchen später die systematische Darstellung der *Mécanique analytique* erforderte; er hat nicht zuerst aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten eine allgemeine Formel für die Statik abgeleitet und dann vermittels des d'Alembertschen Prinzips aus dieser die allgemeine Formel für die Dynamik. Vielmehr geschieht in jener Abhandlung, in welcher wir bereits die Substanz der ganzen M. A. vorfinden, des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten noch mit keinem Worte Erwähnung. Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt ihn ohne statische Vorbetrachtungen sogleich in die Dynamik und gibt ihm eine Formel, welche er durch eine Divination auf alle Probleme der Dynamik ausdehnt. Denn im ungestümen Vorwärtsdringen ist weder von einem Beweise der allgemeinen Formel die Rede, noch läßt er sich, einige Fälle ausgenommen, darauf ein, die Übereinstimmung der aus ihr abgeleiteten Resultate mit den Differentialgleichungen, wie

man sie aus den anderen Prinzipien der Mechanik in jedem besonderen Falle erhalten kann, zu beweisen.

Wenn aber Lagrange und die Wissenschaft dem Prinzip der kleinsten Wirkung so viel verdankt, so ist es bemerkenswert, daß dasselbe von ihm, sowie in den meisten Lehrbüchern ungenau, ja man kann sagen falsch definiert wird. Ich will die in der M. A. gegebene Definition hersetzen: 'Wenn auf irgendeines Systemes Körper Kräfte wirken, welche sie zueinander oder nach festen Punkten ziehen und irgendwelchen Funktionen der Entfernungen proportional sind, so müssen die von den verschiedenen Körpern beschriebenen Kurven und ihre Geschwindigkeiten so beschaffen sein, daß die Summe der Produkte jeder Masse in das Integral ihrer mit dem Elemente der Kurve multiplizierten Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum ist, wenn man die Anfangs- und Endpunkte jeder Kurve als gegeben ansieht, so daß die Variationen ihrer Koordinaten Null sind.' Wenn man auch aus dem von diesem Prinzip gegebenen Beweise leicht erkennt, was es besagen soll, so ist es doch unmöglich, mit der so gestellten Definition irgendeinen präzisen Sinn zu verbinden. Unser Verfasser hat alle Mängel der angeführten Definition wohl gefühlt, und um sie zu vermeiden, dieses Prinzip sehr vorsichtig bezeichnet. Das in Rede stehende Integral nennt er *action*, und seine Eigenschaft drückt er mit folgenden Worten aus: 'Denken wir uns, die Körper des Systems bewegen sich von gegebenen Anfangspositionen nach gegebenen Endpositionen, nicht wie es mit den allgemeinen Sätzen der Dynamik oder den Differentialgleichungen der Bewegung verträglich oder nach denselben möglich ist, jedoch so, daß weder die etwa vorausgesetzten geometrischen Verbindungen der Körper noch die eine dynamische Relation zwischen den Geschwindigkeiten und den Konfigurationen, welche das Gesetz der lebendigen Kraft ausmacht, verletzt werden, und setzen wir ferner, diese geometrisch denkbare, aber

dynamisch unmögliche Bewegung sei nur unendlich wenig von der zwischen den gegebenen Endpunkten wirklich stattfindenden (durch die gegebenen Kräfte hervorgebrachten) Bewegung des Systems verschieden, so wird der Wert des mit dem Namen action bezeichneten Integrales oder die angehäuften lebendige Kraft des Systems in der so fingierten Bewegung von dem wirklichen Werte des Integrals unendlich weniger verschieden sein, d. h. die Differenz wird eine unendlich kleine Größe der 2. Ordnung oder die erste Variation Null sein.'

Lagrange sagt in der Einleitung zur Dynamik, daß, wenn man das Prinzip der kleinsten Wirkung mit dem Prinzip der lebendigen Kraft kombiniert, man daraus die Differentialgleichungen der Bewegung ableiten kann. Aber er mußte, wie Hamilton getan hat, diese Kombination schon in seine Definition aufnehmen. Der Sinn dieses Prinzips, wie man ihn aus den von demselben gegebenen Beweisen abnehmen kann und wie man ihn in dem angeführten Eulerschen Werke für den Fall nur eines Körpers klar ausgesprochen findet, erfordert, daß man aus der zu integrierenden Funktion das Zeitelement mittels des Satzes von der lebendigen Kraft fortgeschafft hat. Der Satz von der lebendigen Kraft gibt $\frac{1}{2} \sum m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = U - H$, wo ds das Bahnelement, U die Kräftefunktion, H die willkürliche Konstante bedeutet. Setzen wir nun $\sqrt{\sum m ds^2} = dS$, so ist das Prinzip der kleinsten Wirkung, daß $\int \sqrt{U - H} \cdot dS = \int \sqrt{U - H} \cdot \sqrt{\sum m ds^2}$ für gegebene Anfangs- und Endwerte der Koordinaten sämtlicher Körper ein Minimum wird. Wenn dieses wirklich überall nur die Meinung war, so wäre es wünschenswert, wenigstens zum Nutzen der Anfänger, daß dieses in den Lehrbüchern auch deutlich gesagt und das Prinzip nur auf diese Weise definiert werde.

Ich weiß nicht, ob es jemand befremdet hat, daß man eine Weisheit oder eine Ökonomie der Natur darin gesetzt hat, daß sie eine kleinste Wirkung hervorbringt, denn unter den Prinzipien der Mechanik würde man ein Prinzip der größten Wirkung oder ein Prinzip der kleinsten Mittel erwarten. Aber das Prinzip, daß das Integral $\int \sqrt{U - H} \cdot dS$ ein Minimum werde, widerspricht in der Tat solchen Erwartungen, die wir von der Natur hegen, keineswegs. Das Element dS bezieht sich auf die Bahnelemente der Körper, der Faktor $\sqrt{U - H}$ auf die wirkenden Kräfte; wenn die Natur streben muß, das System aus einer Lage in die andere auf den kürzesten Bahnen und mit dem geringsten Kraftaufwand zu bringen, so bietet der Ausdruck $\int \sqrt{U - H} \cdot dS$, dessen Summe ein Minimum werden soll, eine einem solchen Zwecke entsprechende Kombination. Daß es aber wirklich Eulers Meinung war, indem er das Integral als Wirkung oder als angehäuften lebendigen Kraft bezeichnete, daß die Natur durch ihre Kräfte eine möglichst kleine Wirkung hervorbringe, geht deutlich aus seinen eignen Worten hervor. 'Weil die Körper', sagt er a. a. O., 'wegen der Trägheit jeder Veränderung ihres Zustandes widerstreben, so werden sie den sollicitierenden Kräften, wenn sie frei sind, so wenig wie möglich gehorchen, wodurch bewirkt wird, daß in der erzeugten Bewegung der von den Kräften herrührende Effekt kleiner sein muß, als wenn auf irgendeine andere Art der oder die Körper bewegt würden.' Wenn man auch, fährt er fort, die Kraft dieser Schlußfolge noch nicht ganz einseht, so zweifle er doch nicht, daß, da sie mit der Wahrheit übereinstimmt, sie mit Hilfe der Prinzipien einer gesunden Metaphysik zu größerer Evidenz erhoben werden könne, was er jedoch den Metaphysikern von Profession überlassen wolle. Diese Argumentation von seiten Eulers ist um so auffallender, als die Grundsätze einer gesunden Metaphysik sowohl, auf die er provoziert, als auch der

gemeine Menschenverstand, endlich, wie ich oben bemerkt habe, auch die Beschaffenheit des Integrales selber das Gegenteil erheischen. Will man dem Integral und dem Satze einen Namen beilegen, so würde man das Integral vielleicht den Kraftaufwand und den Satz das Prinzip vom kleinsten Kraftaufwand nennen können. Der von Lagrange vorgeschlagene Name des Prinzips der kleinsten lebendigen Kraft leidet an denselben Gebrechen, wie der Name des Prinzips der kleinsten Wirkung und rührt ebenfalls davon her, daß er das Integral $\int dt \Sigma m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ betrachtet hat, ohne die unumgänglich nötige Elimination des Zeitelementes unter dem Integralzeichen vorzunehmen, wodurch die lebendige Kraft ganz herausgeht . . .“

Die folgenden Auseinandersetzungen geben die Durchführung des Prinzips der kleinsten Wirkung im wesentlichen in der Form, wie sie aus den durch Clebsch veröffentlichten Vorlesungen Jacobis bekannt geworden.

Am 25. Juli schließt er eine kleinere Arbeit „De seriebus ac differentiis observatiunculae“ ab, in der er zunächst zeigt, daß, wenn man aus einer Reihe $A_0, A_1, A_2, \dots$ nacheinander die Differenzenreihen bildet und das $n+1$. Glied der m . Differenzenreihe mit $\Delta^m A_n$ bezeichnet, aus jeder identischen Gleichung zwischen den Größen A und $A-1$, als lineare Gleichung zwischen den Ausdrücken $A^n(A-1)^m$ betrachtet, eine Differenzenformel entsteht, wenn statt der einzelnen Glieder $A^n(A-1)^m$ die Ausdrücke $\Delta^m A_n$ substituiert werden. Ferner folgt aus jeder linearen Relation zwischen den Differenzen $\Delta^m A_n$ eine andere, wenn an Stelle eines jeden Ausdruckes $\Delta^m A_n$ der Ausdruck $(-1)^{m+n} \Delta^n A_m$ gesetzt wird, woraus sich die elementaren Beziehungen $\Delta^m A_0 = A_m - m A_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} A_{m-2} - \dots \pm A_0$ und $A_m = \Delta^m A_0 + m \Delta^{m-1} A_0 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{m-2} A_0 + \dots + A_0$ ergeben; endlich bleibt z. B. noch jede lineare Gleichung zwischen Größen

der Form $A^n(A-1)^m$ richtig, wenn an Stelle derselben die Größen $\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\dots(\beta-\gamma-m+1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+m+n-1)}$ substituiert werden. Nach einfachen, auf diesen Hilfssätzen beruhenden Beweisen der beiden Eulerschen Theoreme, daß, wenn $x = \frac{y}{1+y}$ ist, $A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + \dots = A_0 y + \Delta A_0 y^2 + \Delta^2 A_0 y^3 + \dots$, und wenn $f(x) = a + bx + cx^2 + \dots$, $S = a A_0 + b A_1 x + c A_2 x^2 + \dots$ ist, S in $A_0 f(x) + \Delta A_0 \cdot x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2!} \Delta^2 A_0 \cdot x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots$ übergeht, behandelt Jacobi noch einige Anwendungen auf Funktionalreihen.

In dieser Zeit entstand auch eine vom Juli datierte Arbeit, welche Borchardt aus den hinterlassenen Papieren Jacobis unter dem Titel „Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten und zu Koeffizienten Polynome eines niederen Grades haben“ veröffentlichte. Wenn P eine Funktion n . Grades $p + p_1 x + \dots + p_n x^n$ und $f(x) = \alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \dots$, worin die α Konstanten bedeuten, so erhält die Funktion $f(x)$, wenn man für x die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = b$ einsetzt, n Werte, und es wird nur einer derselben mit dem Werte $\alpha + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \dots$ übereinstimmen; sind aber die α Polynome $n-1$. Grades von x , so kann die Entwicklung von $f(x)$ für alle n Werte von x gelten, welche demselben Werte von P entsprechen. Setzt man nämlich $P = y$, so kann man die vorgelegte Entwicklung von $f(x)$ in die Form einer ganzen Funktion von x vom $n-1$. Grade bringen, deren Koeffizienten nach ganzen positiven Potenzen von y aufsteigende Reihen darstellen, und diese Entwicklung soll nunmehr gültig bleiben, wenn man für denselben Wert von y statt der Größe x jede Wurzel $X_1, X_2, \dots, X_n$ der Gleichung $P = y$ setzt. Zunächst wird eine ganze Funktion $n-1$. Grades von x zu bestimmen sein, welche für $X_1, X_2, \dots, X_n$ die Werte $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ annimmt, und

die auf bekannte Art hergestellten Koeffizienten sind dann mittels der Gleichung $P = y$ nach ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln. Aus der Gleichung $P - y = p + p_1 x + \dots + p_n x^n - y = p_n (x - X_1)(x - X_2) \dots (x - X_n)$ folgt aber $\frac{P-y}{x-X_1} = p_1 + p_2 x + \dots + p_n x^{n-1} + X_1(p_2 + p_3 x + \dots + p_n x^{n-2}) + X_1^2(p_3 + \dots + p_n x^{n-3}) + \dots + p_1 X_1^{n-1}$, und somit vermöge des Lagrangeschen Interpolationsproblems jene zu bestimmende ganze Funktion in der Form $(p_1 + p_2 x + \dots + p_n x^{n-1}) \left\{ \frac{f(X_1)}{P'(X_1)} + \frac{f(X_2)}{P'(X_2)} + \dots + \frac{f(X_n)}{P'(X_n)} \right\} + (p_2 + p_3 x + \dots + p_n x^{n-2}) \left\{ \frac{X_1 f(X_1)}{P'(X_1)} + \dots + \frac{X_n f(X_n)}{P'(X_n)} \right\} + \dots + p_n \left\{ \frac{X_1^{n-1} f(X_1)}{P'(X_1)} + \dots + \frac{X_n^{n-1} f(X_n)}{P'(X_n)} \right\}$, in welcher nur noch die Klammern nach positiven ganzen Potenzen von y zu entwickeln sind; wenn $\int x^{n-1} f(x) dx = \psi_n(x)$, und $\psi_n(X_1) + \psi_n(X_2) + \dots + \psi_n(X_n) = Y_n$ gesetzt wird, so erhält man $f(x) = (p_1 + p_2 x + \dots + p_n x^{n-1}) \frac{dY_1}{dy} + (p_2 + p_3 x + \dots + p_n x^{n-2}) \frac{dY_2}{dy} + \dots + p_n \frac{dY_n}{dy}$, worin jeder der einzelnen Terme $\psi_n(X_1), \psi_n(X_2), \dots, \psi_n(X_n)$ mit Hilfe der Lagrangeschen Reihe aus der Gleichung $P - y = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von y entwickelt werden kann. Es werden hiervon Anwendungen auf rational gebrochene Funktionen, auf gebrochene Potenzen rationaler Funktionen, auf allgemeine irrationale, logarithmische-, Exponentialfunktionen und auf eine durch eine Quadratur definierte Funktion gemacht, und die Untersuchung noch auf den Fall ausgedehnt, daß P gleiche Faktoren besitzt.

Eine andere von Jacobi ebenfalls im Sommer 1847 entworfene Arbeit wurde aus dessen hinterlassenen Papieren von Borchardt unter dem Titel „Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen“ veröffentlicht, und dadurch festgestellt, daß Jacobi das von Sylvester im Jahre 1852 aufgestellte Trägheitsgesetz der quadratischen Formen schon damals bekannt war.

Man kann den Satz, daß, wenn man eine homogene reelle quadratische Funktion auf unendlich viele Arten als ein lineares Aggregat von Quadraten reeller linearer Funktionen darstellt, in allen die Anzahl der positiven sowie die Anzahl der negativen Quadrate dieselbe bleibt, auch so fassen, daß, wenn $r_1, r_2, \dots, r_i, s_1, s_2, \dots, s_x$ und $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ zwei Systeme voneinander unabhängiger reeller linearer homogener Funktionen darstellen, zwischen deren Quadraten die lineare Gleichung $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \dots - s_x^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \dots - v_n^2$ identisch stattfindet, dann notwendig $i = m, x = n$ ist. Den Beweis dieses Satzes führt nun Jacobi unmittelbar auf das fast selbstverständliche Lemma zurück, daß, wenn eine Anzahl voneinander unabhängiger homogener linearer Funktionen die Anzahl anderer homogener linearer Funktionen übertrifft, man immer bewirken kann, daß diese letzteren verschwinden, ohne daß zugleich auch die ersteren alle verschwinden, und daß somit jener Satz die einfache Form annimmt, daß, wenn $r_1, r_2, \dots, r_i, s_1, s_2, \dots, s_x$ voneinander unabhängig sind, die obige identische Gleichung niemals bestehen kann, wenn $m < i$ oder $n < x$ ist. An diesen Satz schließt sich eine Reihe von Anwendungen, wonach die Gleichung eines Kegelschnittes oder einer Fläche 2. Grades immer von derselben Art bleibt, das Koordinatensystem mag ein rechtwinkliges oder beliebiges schiefwinkliges sein, und andere, die später nach Mitteilungen Jacobis von Borchardt angegeben wurden.

Die für Humboldt angefertigten historischen Notizen hatten Jacobi veranlaßt, seine in Rom vorgenommenen Diophant-Studien zusammenzustellen und dieselben am 5. August 1847 der Berliner Akademie unter dem Titel „Über die Kenntnisse des Diophantus von der Zusammensetzung der Zahlen aus zwei Quadraten nebst Emendation der Stelle Probl. arith. V. 12“ vorzulegen. Diophant verlangt in der 12. Aufgabe des so reichen 5. Bandes der arithmetischen Probleme, die Einheit in zwei solche Stücke zu

teilen, daß, wenn man zu ihnen dieselbe gegebene Zahl addiert, die beiden Summen Quadrate werden, oder daß, wenn a diese Zahl ist, $2a + 1$ die Summe zweier Quadrate wird. Die Bestimmung der gegebenen Größe, welche nötig ist, damit die Aufgabe möglich werde, fügt Diophant nicht hinzu, spricht aber ganz deutlich an anderer Stelle den Satz aus, daß Zahlen, welche die Summe zweier Quadrate sein sollen, weder selbst noch einer ihrer Faktoren die Form $4n - 1$ haben dürfen, wie man aus einer nur unbedeutenden Änderung in dem jetzigen Texte erkennen kann; Jacobi zeigt nun, wie Diophant diesen Satz mit den elementaren Mitteln, welche ihm zu Gebote standen, beweisen konnte, und sucht die Einzelheiten dieser Schlußfolgerungen durch streng philologisch-kritische Untersuchungen und anscheinend sicher begründete Konjekturen im Diophant selbst zu finden.

Seine auf 33 Oktavblättern unter dem Titel „Varianten der sechs im Vatican befindlichen Codices des Diophant“ zusammengestellten Resultate befinden sich in der Handschriftenabteilung der Königl. Bibliothek zu Berlin, ebenso wie ein Exemplar der Fermatschen Ausgabe des Diophant und einer deutschen Übersetzung desselben mit handschriftlichen Randbemerkungen Jacobis.

Erst in den Ferien fand Jacobi Zeit, dem von Crelle nach dem im März dieses Jahres erfolgten Tode Goepels ausgesprochenen Wunsche, diesem genialen Mathematiker einige Worte des Andenkens zu widmen, nachzukommen; am 22. September verfaßte er für das Journal eine „Notiz über A. Goepel“, in der er den ausgezeichneten Leistungen dieses jungen Gelehrten gerecht wurde. Nachdem er seine früheren Arbeiten besprochen, geht er genauer auf dessen letzte und bedeutendste Leistung ein: „Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstrakten Teil der Analysis und gibt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die

umgekehrten Funktionen der ersten Klasse der Abelschen Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäße Art die einfachen Reihen Θ , auf welche ich die elliptischen Funktionen zurückgeführt habe, und findet, daß diese verallgemeinerten Reihen die Koeffizienten der quadratischen Gleichung geben, deren beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Funktionen die simultanen Umkehrungsfunktionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplikation zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Funktionen Θ selbst im 3. Bande des mathematischen Journals p. 305 angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Komplikation, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt... Vielleicht finden sich noch Untersuchungen in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, daß eine ähnliche Methode sich auf alle Transzendenten erstreckt, welche aus der Integration algebraischer Größen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Funktion den sechsten Grad übersteigt, da bei ihnen die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Konstanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und Abelschen Integralen der ersten Klasse, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt...“

Wahrscheinlich zum Zwecke der Abfassung dieser Notiz über Göpel hatte Jacobi eine ausführlichere Aufzeichnung „Zur Geschichte der elliptischen und Abelschen Transzendenten“ entworfen, welche Weierstrass, von der Hand Jacobis geschrieben, in den hinterlassenen Papieren Borchardts auffand, der außerdem noch eine zum Druck be-

stimmte Abschrift angefertigt hatte. Die Aufzeichnung ist nicht nur vom allergrößten Interesse wegen des Überblickes, den Jacobi über seine und der anderen ausgezeichneten Analysten Leistungen gibt, sondern auch weil sie uns scharf die Grenze kennzeichnet, bis zu welcher Jacobi in jener Zeit bei der Erforschung der Lehre von den Transzendenten gelangt ist, und die er in den wenigen folgenden Lebensjahren auch nicht mehr überschritten hat. Sie mag deshalb unverkürzt hier eine Stelle finden:

„Die elliptische Funktion $x = \sin am u$, welche Abel und ich in die Analysis eingeführt haben, wird durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$$

definiert. Diese Funktion $x = \sin am u$ hat einen einzigen vollkommen bestimmten Wert, welcher durch eine lineare Gleichung

$$Ax + B = 0$$

gegeben wird, in der A und B Reihen bedeuten, die für jeden reellen oder imaginären Wert von u konvergieren.

Wollte man in die Analysis eine Funktion $x = A(u)$ einführen, in welcher

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2)}},$$

so würde keine Analogie dieser Funktion mit der elliptischen Funktion $\sin am u$ mehr stattfinden, indem eine solche Funktion $A(u)$ für jedes u nicht bloß mehrere Werte erhält, sondern gänzlich unbestimmt wird, wofern nämlich zur Definition des Integrals bloß seine Grenzen angewandt werden, der Weg aber, welchen die Variable durch reelle oder imaginäre Werte hindurch von der einen Grenze zur anderen einschlägt, willkürlich bleibt. Denn man kann einen Wert gänzlich unbestimmt nennen, wenn er, wie es in diesem

Fall geschieht, jedem reellen oder imaginären gegebenen Werte so nahe kommen kann, daß der Unterschied weniger als jede gegebene noch so kleine Größe beträgt.

Goepel tadelt es, daß ich diese Funktionen absurd genannt habe, welche die Analysis der Zukunft durch Einführung transzendenter statt der algebraischen Formeln ähnlich wie die elliptischen zu behandeln wissen werde. Bis dahin hat Goepel den anderen Funktionen, welche ich als diejenigen bezeichnet habe, zu welchen man von den elliptischen fortzuschreiten hat, seine Bemühungen gewidmet, und es sind dieselben von dem glänzendsten Erfolge gekrönt worden.

Die von mir in die Analysis eingeführten hyperelliptischen Funktionen sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

in welcher A, B, C Funktionen zweier Variablen u und v sind, welche mit diesen beiden Wurzeln, die ich x_1 und x_2 nennen will, durch die beiden Gleichungen

$$u = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$v = \int_0^{x_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}}$$

verbunden sind, wo der Kürze halber

$$(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2) = X$$

gesetzt ist. Die Koeffizienten A, B, C der quadratischen Gleichung sind vollkommen bestimmte, nicht mehrdeutige Funktionen der Variablen u und v , und ihre Verhältnisse haben in bezug auf diese beiden Variablen vier unabhängige Simultanperioden. Dieses neue Prinzip der Simultanperiodizität besteht darin, daß eine Funktion zweier oder mehrerer Variablen ungeändert bleibt, wenn sich die Variablen gleichzeitig und um Gleichvielfache gegebener Konstanten verändern, und es liegt in demselben die Lösung der Para-

doxen, welche die durch eine vierfache Periodizität entstehende Unbestimmtheit darbietet.

Die Analysten begrüßten mit Teilnahme die neue Ansicht über die in der Theorie der Abelschen Transzendenten einzuführenden Funktionen. Die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften wünschte dieselbe auf alle Integrale algebraischer Funktionen ausgedehnt zu sehen, auf welche Abel sein Theorem ausgedehnt hatte. Es ist hieraus eine schätzenswerte Arbeit von Broch und die preiswürdige Abhandlung von Minding hervorgegangen, denen später noch die Arbeit von Rosenhain folgte. Die nach einem Intervalle von 15 Jahren endlich in den *Mémoires des savants étrangers* erschienene Abhandlung, welche von Abel im Jahre 1826 der Pariser Akademie überreicht worden war, und durch ihre erschöpfende Allgemeinheit zu den bewunderungswürdigsten Leistungen gehört, würde, wenn sie früher erschienen wäre, diesen Mathematikern den größten Teil ihrer Arbeit erspart haben. Seitdem hat Hermite dem Abelschen Werke eine neue Form gegeben, wie sie fast allen Arbeiten dieses großen Genies zu wünschen ist, wenn ihre tiefen Gedanken klarer hervortreten sollen. Aber am wünschenswertesten mußte es immer erscheinen und am meisten den Analysten daran gelegen sein, die neuen Funktionen wenigstens zunächst für die erste und einfachste Klasse der Abelschen Integrale wirklich dargestellt zu sehen, und es wählte daher die Berliner Akademie der Wissenschaften die Darstellung dieser Funktionen zum Gegenstand einer außerordentlichen Preisfrage. Ungeachtet eines Termins von 3 Jahren blieb die Frage unbeantwortet. Wenn wir nicht aus der Einleitung der Goepelschen Abhandlung ersähen, daß er bereits in dieser Zeit die Grundidee seiner Arbeit gefaßt hatte, so könnte in der Tat die Aufgabe zu frühzeitig gestellt scheinen, da es kaum andert-halb Dezennien waren, daß die hier vorkommenden Integrale zum ersten Male von Abel betrachtet worden waren, und

die Elemente ihrer Theorie noch bei weitem nicht die Durcharbeitung erfahren hatten, wie die der elliptischen Funktionen zu der Zeit, als Abel und ich unsere Arbeiten über dieselben begannen. Auch konnte die Methode, durch welche wir, von dem Integral ausgehend, zu den dem trigonometrischen Sinus und Kosinus entsprechenden Funktionen gelangt waren, keine Anleitung geben. Denn dieselbe beruhte wesentlich auf der Eigenschaft der rationalen Funktionen einer Variablen, daß zur Darstellung derselben die Kenntnisse der Werte, für welche sie verschwinden und unendlich werden, hinreicht, was für rationale Funktionen zweier Variablen nicht mehr der Fall ist.

Es wäre der Weg übrig geblieben, die Transformation der Abelschen Integrale, welche Herr Professor Richelot nach einer von mir angegebenen Substitution aufgestellt hat, unbestimmt zu wiederholen, und die analytische Natur dieser Transformation so zu ergründen, daß man das durch ihre unbestimmte Wiederholung erhaltene Resultat hätte darstellen können; ferner durch eine komplementäre Transformation die Vervielfachung durch eine Potenz von 2 zu gewinnen, und dann endlich die für eine unendliche Multiplikation verschwindender Integrale stattfindende Grenze zu untersuchen. Aber bei Ermangelung der hierzu nötigen Vorarbeiten konnte man ein günstiges Gelingen nur von einer glücklichen Divination hoffen, und hierzu bot die neue Transzendente Θ , auf welche ich die elliptischen Funktionen schließlich zurückgeführt hatte, einen willkommenen Anknüpfungspunkt.

Die elliptischen Funktionen waren zunächst in Form eines Bruches gefunden worden. Erst durch die besondere Betrachtung des Zählers und Nenners dieses Bruches ist ihre Theorie in sich abgeschlossen und auf ihre wahre Grundlage zurückgeführt worden. Wie bei der trigonometrischen Tangente bilden diese dieselbe Funktion für verschiedene Argumente, nur daß hier noch eine einfache

Exponentialgröße als Faktor hinzutritt. Auf dieselbe Transzendente war bereits die 3. Gattung der elliptischen Integrale zurückgeführt worden. Konnte man aus der wirklichen Darstellung der elliptischen Funktion den Zähler und Nenner durch den bloßen Anblick entnehmen, so war man andererseits dahin gelangt, diese Scheidung auch durch analytische Operationen zu erhalten, und so einen Zyklus von Operationen aufzustellen, nach welchen man zu der elliptischen Funktion zurückkehrt. Die elliptische Funktion quadriert und zwischen zwei Grenzen integriert, welche um einen halben Index der Periode verschieden sind, gibt den Logarithmus der elliptischen Funktion. Durch diesen Zyklus lassen sich fast alle über die elliptischen Funktionen angestellten Betrachtungen hindurchführen und erhalten dann erst ihre Vollständigkeit.

Es wurde gezeigt, daß die Transzendente für jeden aliquoten Teil des Index einer Periode durch bloßes Wurzelausziehen aus elliptischen Funktionen erhalten werden kann; daß dasselbe von dem Quotienten zweier Transzendenten gilt, deren Argumente um einen aliquoten Teil des Index einer Periode verschieden sind, und daß sich aus diesen Wurzelgrößen die Teilungsformeln der elliptischen Integrale zusammensetzen.

Die neue Transzendente selbst wird durch eine Reihe von der höchsten Einfachheit dargestellt, welche immer und zwar mit solcher Schnelligkeit konvergiert, daß sie für praktische Anwendung wie ein endlicher Ausdruck betrachtet werden kann. Das allgemeine Glied dieser Reihe hat die Form e^{az^2+bi} , in welcher i eine ganze Zahl, a und b beliebige Größen sind, nur daß die Größe a oder, wenn sie imaginär ist, ihr reeller Teil negativ sein muß. Die Größe a bestimmt den Modul des elliptischen Integrals, während dieses selbst der Größe b proportional ist.

In meinem Werke über die elliptischen Funktionen wird der Weg gezeigt, welcher von dem elliptischen Inte-

gral bis zu der neuen Transzendenten zurückzulegen ist. Einmal auf dieser Höhe angelangt, gewinnt man eine Übersicht über diese ganze Theorie, welche derselben eine Klarheit und, ich möchte sagen, Durchsichtigkeit gibt, die man vorher nicht ahnen konnte. Es gibt sehr viele Arten, wie man mit großer Leichtigkeit und durch die elementarsten Prozesse von dieser neuen Transzendenten aus zu allen Eigenschaften der elliptischen Funktionen gelangt. Die erste, welche ich in dem 3. Bande des Crelleschen Journals p. 305 angegeben habe, beruht auf der Multiplikation zweier Transzendenten, welche verschiedene Amplituden, aber denselben Modul haben. Da das Produkt auf einfache Art wieder durch dieselben Transzendenten ausgedrückt wird, die sich aber auf einen transformierten Modul beziehen, so habe ich später in meinen Vorlesungen diesen Weg verlassen und bin von der Multiplikation von vier Transzendenten mit beliebigen Argumenten und demselben Modul ausgegangen, durch welche man einen linearen Ausdruck von Produkten aus vier Transzendenten derselben Natur mit unverändertem Modul erhält. Eine einzige Formel, in welcher man nur spezielle Werte zu substituieren hat, gibt ohne weitere Rechnung das ganze System der Formeln für die Addition der drei Gattungen der elliptischen Integrale sogar auf drei Argumente ausgedehnt. Es ist hierbei nicht nötig, zuerst aus der periodischen Natur der Transzendente die allgemeine Form anzugeben, und dann durch die Substitution partikularer Werte für jede der Hauptformeln die Werte der in dieselben eingehenden zuerst unbestimmt angenommenen Konstanten zu ermitteln, sondern die eine Formel gibt zugleich mit der Form auch diese Werte. Da sich jedoch unter denjenigen Papieren, welche einen zweiten Teil der Fundamenta Nova zu bilden bestimmt waren, noch ein fertiger Aufsatz findet*), in welchem

*) Von diesem Aufsatz haben sich im Nachlasse Jacobis nur einzelne Blätter vorgefunden.