zu können, als wenn sie sich aufs neue, wie auch getrennt durch Raum und Zeit, verbrüdern in dem Vorsatze, ihr Ziel wie bisher weiter zu verfolgen, und mit aller Kraft das hier angefangene Werk zu fördern.

Ich ergreife daher mit Dankgefühl, Wehmut und mit Hoffnung dieses Glas und rufe dem scheidenden Meister im Namen aller seiner Schüler ein Vivat zu."

Wenige Wochen später schreibt Hesse an Jacobi: „Es giebt nun keine preußische Universität mehr, deren Lehrer der Mathematik in dem kommenden Monat nicht das Geburtsfest ihres Lehrers und Meisters feiern. Wenn die Wünsche in Erfüllung gehen, die einer derselben im Herzen trägt, so genießen noch viele nach ihm aus derselben Quelle Wohlthaten, die, so lange das Leben dauert, nicht vergessen werden. Preußen bleibt noch lange durch Ihre Thätigkeit die erste Macht des Geistes in Europa."

Jacobi als Mitglied der Akademie in Berlin von Oktober 1844 bis zu seinem Tode am 18. Februar 1851.

Kaum war Jacobi mit seiner Familie nach Berlin übergesiedelt, als Bessel wenigstens am Anfange den gewohnten brieflichen Verkehr wieder aufzunehmen begann, der zunächst Fragen der Störungstheorie zum Gegenstande hatte, welche Jacobi schon seit langer Zeit immer von neuem beschäftigten. „Hier kommt der erste der angedrohten Briefe!", schreibt ihm Bessel am 10. Oktober 1844, „ich habe Ihnen hier gesagt, daß Ihre Umsiedlung Ihnen nicht den Vortheil gewähren würde von den Erzählungen meiner mathematischen Leiden — glücklicherweise selten — frei zu werden."

Bei der zahlreichen Familie Jacobis, der mit fünf minderjährigen Kindern Königsberg verlassen hatte, und dem ungleich teureren Leben in Berlin brachte ihm die Gehaltserhöhung keine wesentliche materielle Verbesserung in seiner Stellung, und er suchte bereits im November um einen Zuschuß von 300 Talern nach zum Ersatz für die in Königsberg verloren gegangenen Naturaleinkünfte, zumal da ihm der vom Könige gewährte Zuschuß von 1000 Talern nicht lebenslänglich gewährt worden sondern jederzeit wieder entzogen werden konnte; in der darauf ergangenen Kabinettsorder heißt es: „Dagegen kann Ich Mich zu einer Erhöhung der demselben für die Dauer seines einstweiligen Aufenthaltes in Berlin gewährten jährlichen Unterstützung nicht bewogen finden", und eigenhändig fügt der König der ihm vorgelegten Kabinettsorder noch hinzu: „Sollte übrigens in Jahr und Tag sich ergeben, daß seine Collegia gegen alle Erwartung ohne brillantes pecuniäres Resultat sein sollten, dann bin ich nicht abgeneigt, ihm durch ein Geldgeschenk zu Hülfe zu kommen."

An die letzten mündlichen Besprechungen und die jetzt fortgesetzte Korrespondenz mit Bessel sich anschließend veröffentlicht Jacobi zunächst in den Astronomischen Nachrichten eine bereits aus Berlin vom 17. November datierte Arbeit „Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen", in welcher er zunächst zeigt, wie man für lineare Systeme, bei welchen die Koeffizienten der Unbekannten sehr klein sind gegen die Koeffizienten derselben in der Diagonale, sehr rasch zu angenäherten Werten für die Unbekannten gelangen kann. Bei den in der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Systemen, bei denen die Koeffizienten symmetrisch zur Diagonale immer gleich sind, werden aber in der Regel mehrere außerhalb der Diagonale befindliche Koeffizienten so bedeutende Werte annehmen, daß der Erfolg der angegebenen Näherungsmethode dadurch vereitelt wird, und er zeigt nun, wie man durch Wiederholung einer leichten Rechnung die Gleichungen in andere umformen kann, in welchen jener Übelstand weniger hervortritt, so daß zuletzt die Gleichungen eine Form erhalten, welche die Anwendung jener Näherungsmethode gestattet; zugleich gibt er eine Substitution an, durch deren Wiederholung immer der einflußreichste von den außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten fortgeschafft wird, und in dem zuletzt erhaltenen Systeme von Gleichungen einerseits die Summe der Koeffizienten in der Diagonale, die Summe der Quadrate aller Koeffizienten und die Summe der Quadrate der ganz konstanten Glieder dieselbe wie in dem ursprünglichen Systeme ist, andererseits die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Koeffizienten vermehrt, die Summe der Quadrate der außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten um dieselbe Größe, nämlich um die doppelte Summe der Quadrate der in den einzelnen Transformationen zerstörten Koeffizienten, vermindert ist. Die Methode wird noch auf solche lineare Gleichungssysteme ausgedehnt, bei denen die symmetrisch gelegenen Koeffizienten nicht einander gleich sind.

Während des Winters hielt Jacobi an der Universität noch keine Vorlesungen, und wenn er auch Dirichlet, der durch Krankheit in Florenz zurückgehalten war, zweimal wöchentin je zwei Stunden an der Kriegsschule vertrat, so gewann er doch freie Zeit zur Fertigstellung einiger längst entworfenen Arbeiten sowie zur Korrespondenz mit seinen Freunden. Am 2. Januar 1845 schreibt er an Bessel: „Sie wissen, daß ich manchmal die müßige Neugierde habe, bei Differentialgleichungen, die man nicht integriren kann, wenigstens wissen zu wollen, wieviel Integrale absolut nöthig sind, um die übrigen durch Quadraturen zu finden. Bei der Bewegung eines Planeten in einem widerstehenden Mittel braucht man nur eines; die drei andern Integrationen kann man dann immer durch Quadraturen abmachen; die Dichtigkeit des Mediums ist hierbei eine beliebige Function der Entfernung von der Sonne, der Widerstand eine beliebige Potenz der Geschwindigkeit oder noch allgemeiner $v^m e^{a v^2}$, wo a eine Constante ist ... Wenn Sie Richelot und Hesse sehen, erzählen Sie ihnen, daß ich neulich wieder einen großen Brief von l'Hermite gehabt, der die von mir vor 16 Jahren im Crelle ohne Beweis mitgetheilten Theilungsformeln der elliptischen Transcendenten endlich bewiesen ..." Auch mit seinem früheren Hausarzte Cruse blieb er in laufender Korrespondenz, da dieser von den „Oscillationen seines Allgemeinbefindens" unterrichtet sein wollte, ihm aber auch, da Jacobi sehr um den immer schlechter werdenden Zustand Bessels besorgt war, regelmäßig Nachrichten über das Befinden seines Freundes zukommen ließ; „bei Bessel", schreibt ihm dieser am 3. Januar, „ist zu den früheren asthmatischen Anfällen jetzt Wassersucht getreten.“

Das Verhältnis Jacobis zu Eisenstein wurde bisweilen durch Eigentümlichkeiten des jungen genialen Mathematikers getrübt und bildete häufig den Gegenstand der Korrespondenz zwischen Gauss und Schumacher; ein Brief von Gauss vom 5. Januar 1845, welcher geflissentlich die Nennung der Personen vermeidet, ist von allgemeinerem Interesse: „Ihre Antwort auf den Vorwurf, daß die Mathematik kein moralisches Element enthalte, nemlich die, daß auch die Moral kein mathematisches habe, ist vortrefflich. Jener Einwurf ist ungefähr ebenso, als wenn man die Malerkunst verwerfen wollte, weil mit dem Pinsel keine Musik gemacht werden könne, wogegen man denn auch mit dem Violinbogen nicht gut malen kann. Übrigens ist der Haß gegen die exacten Wissenschaften bei Personen, die draussen stehen, nichts neues. Ein langes Gebell des Chateaubriand, im Genie du Christianisme, finden Sie im Auszuge in den Göttinger Gelehrtenanzeigen. Es mag wahr sein, daß Menschen, die bloß Mathematiker sind, gewisse specifische Fehler haben; aber das ist nicht Schuld der Mathematik, sondern gilt von jeder exclusiven Beschäftigung ... Man könnte selbst solch' müßigem Hin- und Herreden noch beifügen, daß wenn eine gewisse exclusive Beschäftigung oft mit gewissen specifischen Fehlern verbunden ist, sie dagegen auch fast immer von gewissen andern specifischen Fehlern frei ist.“

Der Winter 1844/45, in dem Jacobis Gesundheitszustand wieder viel zu wünschen übrig ließ, war ganz seiner Störungstheorie und der Fertigstellung der Arbeit über den letzten Multiplikator gewidmet. In den Osterferien, am 22. April 1845, schreibt er an Seidel: „Ich bin jetzt dabei, die Arbeit über die Säcularstörungen, für die ich Ihnen herzlich danke, behufs des Druckes durchzusehen. Es erscheint mir dabei wünschenswerth, noch mehr Zahlen zu

haben, als Sie dort geben, da es bei Erläuterung einer neuen Methode durch ein Zahlenbeispiel zweckmäßig ist, die Hauptresultate auch der Zwischenmomente zu geben ... Mein Gesundheitszustand hat mich diesen Winter sehr melancholisch gemacht. Zu meinem alten nie ganz verschwindenden, wenn auch in mäßigen Schranken gehaltenen Übel kam ein Schwindel, der mich erfaßte, wenn ich auch nur eine Viertelstunde arbeiten wollte, wenn ich mich auch bei gänzlichem Müßiggange vollkommen wohl fühlte. Jetzt mit der eingetretenen warmen Witterung geht es mir viel besser ...“

Aber der Beginn des Semesters, in welchem er über die Fundamente der Theorie der elliptischen Funktionen sowie über Algebra und Einleitung in die Analysis des Unendlichen vor einer relativ großen Zuhörerzahl las, zwang ihn zunächst, die Störungsrechnungen bis zu den Herbstferien zurückzulegen; am 21. Mai schreibt er seinem Freunde Leers in Königsberg: „Ich lechze nach Wärme, leide viel an Kopfschmerzen, lese täglich eine Stunde vor 30 und 40 Zuhörern elliptische Transcendenten und Algebra. Die Zuhörer bezahlen aber nicht, sonst wäre ich ein reicher Mann.“ Jede irgendwie freie Zeit verwendet er auf die große Multiplikatorarbeit, von der er den ersten Teil bereits am Ende 1844 Crelle gegeben, und aus welcher er eine Zusammenstellung der auf dynamische Probleme bezüglichen Resultate unter dem Titel „Nouveau principe de la dynamique“ der Petersburger Akademie überschickte.

Die Korrespondenz mit seinen alten Freunden und Schülern, von denen ihm besonders Hesse lieb und sympathisch war, wurde in ihrem früheren Umfange wieder aufgenommen; Jacobi hatte vor seiner Abreise nach Italien Hesse ein noch nicht druckfertiges Manuskript von etwa 30 Druckbogen, welches seine Untersuchungen über Flächen 2. Grades und die Attraktion der Ellipsoide enthielt, zur endgültigen Ausarbeitung übergeben, konnte aber Hesses sehr gründliche Ausarbeitung des ersten Teiles nicht mehr benutzen, weil er seine Absicht, ein Lehrbuch der analytischen Geometrie zu veröffentlichen, wieder aufgegeben hatte, und wünschte daher, daß Hesse den Inhalt seines Manuskriptes zu einzelnen Aufsätzen verarbeite. Am 29. Mai 1845 schrieb er ihm:

„Vielleicht ginge es, daß Sie aus der Arbeit über Doppelintegrale irgend etwas isoliren, und unabhängig von anderem darstellen können; z. B. die Anziehung des zwischem dem Ellipsoid und einem geraden Doppelkegel enthaltenen Stückes auf die Spitze, oder was Sie sonst meinen. Ich bin jetzt dafür, alles so viel wie möglich in kleine selbständige Abhandlungen zu theilen. So möchte ich in einer Abhandlung nur das zusammenstellen, was zur Anziehung der Ellipsoide in meiner directen Methode oder vielmehr in der Methode, die sich nur einfacher Substitutionen bedient, analytisch und synthetisch nothwendig gebraucht wird, wozu ich auch den Anfang gemacht, was aber wohl noch mehrere Jahre aufgeschoben werden wird. Auch müßte ich das darauf Bezügliche noch aus meinen Manuscripten haben. Schreiben Sie mir doch darüber, ob Sie eine Abhandlung isoliren und so fertig machen zu können glauben, daß ich sie sogleich drucken lassen kann . . .“

Die Herausgeber der Werke Hesses führen weiter aus: „Hesse erklärte sich zur isolierten Bearbeitung jenes speziellen Attraktionsproblems bereit, während er über die Angängigkeit einer ähnlichen Behandlung des allgemeinen Attraktionsproblems der Ellipsoide für einen innern und äußern Punkt und der bezüglichen Doppelintegrale Zweifel äußerte“ — „auch würde ich für die so lehrreichen Behandlungsweisen des Problems der Hauptaxen mit den historischen Notizen . . . nichts aequivalentes an die Stelle zu setzen haben“, schreibt Hesse an Jacobi am 27. Juni 1845. Über das weitere Schicksal des Manuskriptes, das auf Borchardts Veranlassung Hesse im Jahre 1862 an Clebsch

sandte, welcher Hesse dringend zur Herausgabe rät, „um die vielen schönen Gedanken darin zu retten“, ist nichts bekannt.

Der Einfluß Jacobis in den leitenden wissenschaftlichen Kreisen Berlins wurde sehr bald ein ganz bedeutender; überall trat er bei dem Könige und den Ministern für seine ausgezeichneten mathematischen Freunde sowie für die neue Generation jugendlicher mathematischer Kräfte ein; am 8. Juli richtete er an den Minister die Bitte um Erhöhuung des Gehaltes für Steiner:

„Ew. Excellenz erlaube ich mir, einen ganz gehorsamen Antrag in Bezug auf den Professor an hiesiger Universität Jakob Steiner vorzulegen.

Jakob Steiner, Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, einer der ausgezeichnetsten Universitätslehrer und eine der originellsten und bedeutendsten wissenschaftlichen Persönlichkeiten, ist in Utzisdorf im Kanton Bern geboren; drosch, säete und pflügte bis zu seinem 19. Jahre, wie es seine Kräfte erlaubten und sein Stand als Bauer es mit sich brachte, und hatte bis zu diesem Alter nichts als Lesen und den Katechismus gelernt. Da trieb ihn ein unbezwinglicher Wissensdrang zu dem muthigen Entschluß, ohne Mittel und Empfehlungen zu dem ehrwürdigen Pestalozzi zu gehen, der ihn mit gutmüthigem Edelsinn unentgeltlich in seine Anstalt aufnahm und ihn im Schreiben, Rechnen und den Anfangsgründen der Mathematik unterrichtete. Nach dem interessanten Zeugniß Pestalozzis ‘zeigte er dort bald vorzügliche Talente für Mathematik und bahnte sich mit eisernem Fleiße einen Weg zur Selbstbildung für dieses Fach’, und bereits nach anderthalb Jahren konnte er an der Anstalt selbst als Lehrer fungiren. Die in der Pestalozzischen Anstalt in Ausübung gebrachte Methode, die mathematischen Wahrheiten als Gegenstand freier Anschauung zu behandeln, ergriff seine lebhafte Phantasie, und schon damals strebte er in dem jedesmaligen Gegenstande seiner Forschung bis zu dem Grundgedanken vorzudringen, von dem aus sich die

Sache wie von selber entfalten und ihre wahre Synthesis erhalten werden könnte.

Bei dieser Richtung in die Tiefe und auf das Ganze fühlte Steiner bald den Mangel, an dem die Pestalozzische Anstalt unterging; die Freude an der Methode hatte vergessen lassen, daß der wissenschaftliche Stoff fehlte. In der Hoffnung, einen solchen in reichster Fülle überliefert zu erhalten, wandte sich Steiner nach $4^1/_2$ jährigem Aufenthalte bei Pestalozzi nach Heidelberg und von da i. J. 1821 nach Berlin. Aber der mathematische Universitätsunterricht war noch damals in höchst betrübter Verfassung, wenig geeignet, seine Hoffnungen zu erfüllen, und so fand er sich ganz seinem eigenen Genius überlassen, der ihn glücklicher Weise mit Sicherheit zu einem ruhmvollen Ziele führte.

Bei dem Mangel an wissenschaftlichen Hülfsmitteln konnte es nicht fehlen, daß die ersten Resultate von Steiners Forschungen mit bereits bekannten zusammentrafen. Er hatte das ganze in alter und neuer Zeit aufgeführte Gebäude der synthetischen Geometrie aus eigner Kraft zu reproduciren; aber bald ging er über die bekannten Grenzen hinaus, und erst als er überzeugt war, wirklich neues zu geben, trat er damit an die Öffentlichkeit. Bereits seine ersten Publicationen machten großes Aufsehn; sie gingen sogleich übersetzt in die franz. mathem. Zeitschriften über und trugen wesentlich dazu bei, den Ruf des eben (i. J. 1826) gestifteten Crelleschen mathematischen Journals zu begründen, in welchem sie erschienen. In seinem 1832 publicirten Buche „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" war er bemüht, von wenigen räumlichen Eigenschaften aus nach einem einfachen Schematismus über das ganze Heer auseinander gerissener geometrischer Sätze eine klare Übersicht zu gewinnen, jedem seine besondere Stellung im Verhältniß zu den übrigen anzuweisen, in das frühere Chaos Ordnung zu bringen, alle Theile naturgemäß ineinandergreifen und sich zu wohl-

begränzten Gruppen vereinigen zu lassen. Indem er so den Organismus aufdeckte, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind, hat er nicht bloß die geometrische Synthese gefördert, sondern auch für alle anderen Zweige der Mathematik ein Muster einer vollkommenen Methode und Durchführung aufgestellt.

Während dieser ersten Arbeiten hat Steiner hier in Berlin seine Existenz nur mühsam durch Privatstunden fristen können, bis er zuletzt einen sicheren Unterhalt durch eine Lehrerstelle an der Klödenschen Gewerbeschule erhielt. So kostbare Kräfte mußten aber ganz der Wissenschaft erhalten werden. Auf eine an Ew. Excellenz seeligen Vorgänger, Hr. v. Altenstein, von mir gerichtete Vorstellung wurde Steiner mit dem Belaß seines an der Schule bezogenen Gehaltes von 700 ℛ als außerordentlicher Professor an die Berliner Universität versetzt.

Der besondere Bildungsgang Steiners, die dadurch herbeigeführte Combination einer ausgezeichneten pädagogischen Methode mit dem Vollgehalte der Wissenschaft, sein lebendiger und begeisternder Vortrag, befähigten ihn vorzüglich, Lehrer der Mathematik heranzubilden, und so hat er in einer längern Reihe von Jahren segensreich als Universitätslehrer gewirkt. Fortwährend hat er dabei durch zahlreiche, hier und in Frankreich publicirte Arbeiten das Gebiet der synthetischen Geometrie mit neuen Entdeckungen erweitert, und seine Methoden und mit ihnen seinen Ruf immer weiter ausgebreitet. Als ich nach Rom kam, fand ich seine Arbeiten in das Italienische übersetzt. Ich bitte Ew. Excellenz den Schluß des Berichtes hierher setzen zu dürfen, welcher vor 4 Jahren der Pariser Univers. d. Wiss von ihren 3 ausgezeichnetsten Mathematikern, den Hrr. Cauchy, Sturm und Liouville über eine umfassende Schrift Steiners vom Größten und Kleinsten abgestattet wurde. 'Mit gleichem Glück', heißt es, 'behandelt er die zusammengesetztesten Aufgaben; die Verkettung der Sätze ist bei ihm so natürlich, daß es oft genügt, sie bloß auszusprechen, und es unnütz wird, regelrechte Beweise hinzuzufügen. Wie von selber fließen die Theoreme, eines aus dem anderen, so daß man am Ende die schönen, am Schlusse des Werkes zusammengestellten Sätze mit Staunen fast evident vor sich liegen sieht, die auch den geschicktesten Mathematikern, wenn man sie ihnen vom übrigen Werke isolirt darböte, große Schwierigkeiten machen würden. Steiner hat vielleicht in früheren Werken schwerere Probleme gelöst, Theoreme von originellerer Neuheit entdeckt, wie z. B. in seinen schönen Untersuchungen über die Epicycloiden; aber nirgends hat er einfachere, elegantere, besser verkettete Beweise geben können, und sie verdienen, unmittelbar als eine nothwendige Ergänzung in die geometrischen Lehrbücher aufgenommen zu werden.' Ich füge hinzu, daß Steiner in diesen Arbeiten theils der synthetischen Geometrie Gebiete aufschließt, welche bisher nur durch andere Methoden zugänglich schienen, theils aber auch seine Forschungen bis zu Punkten ausdehnt, welche für andre Methoden vorläufig noch unerreichbar sind. Wie bedeutend aber auch die von Steiner publicirten Arbeiten sind, so bilden sie doch nur einen verhältnißmäßig geringen Theil der Resultate, welche er während eines arbeitsamen Lebens in seinen Manuscripten niedergelegt hat, und deren Verarbeitung er noch beabsichtigt.

Zu den 700 ℛ als Professor hat Steiner seit einigen Jahren noch das jährliche Gehalt von 200 ℛ als Akademiker erhalten. Aber die ihm verordnete Pflege seiner Gesundheit macht eine jährlich wiederkehrende, mit Reisen verknüpfte Badekur nöthig, deren Kosten verbunden mit dem theuern Leben in Berlin seine Mittel übersteigen, und durch eine außerordentliche Subvention nur unvollkommen ersetzt würden. In dem Interesse der Wissenschaft erlaube ich mir daher, an Ew. Excellenz den ganz gehorsamen Antrag zu richten:

Ew. Excellenz wolle das Universitätsgehalt des Prof. Steiner hochgeneigtest durch eine Zulage von 300 ℛ auf 1000 ℛ erhöhen.

Die Ertheilung eines angemessenen Gehaltes an einen Universitätslehrer von solcher Genialität, Wirksamkeit und Celebrität ist auch ohne Rücksicht auf seine Gesundheitsverhältnisse nur dem großartigen Schutze entsprechend, welchen durch Ew. Excellenz hohe Vermittlung der preußische Staat den Pflegern wahrer Wissenschaft angedeihen läßt. Unter den genannten Umständen aber habe ich es für meine besondere Pflicht gehalten, Ew. Excellenz diesen Antrag zu unterbreiten, welchen ich Ihnen dringend ans Herz lege, und für dessen hochgeneigte Gewährung die heutigen und kommenden Mathematiker, die von Steiner gelernt haben und von ihm lernen werden, Ihnen Dank sagen werden."

Und ebenso warm vertrat er überall das Interesse Dirichlets.

„Dieses Mißverhältnis der äußern Anerkennung", sagt Kummer, „und der wissenschaftlichen Bedeutung Dirichlets wurde von keinem richtiger erkannt als von Jacobi, und kein anderer war zugleich geschickter und tätiger, dasselbe auszugleichen und seinem Freunde auch in weiteren Kreisen die verdiente Anerkennung zu verschaffen. Seiner Tätigkeit ist es hauptsächlich zuzuschreiben, daß Dirichlet unserer Akademie erhalten wurde, als im Jahre 1846 die Badensche Regierung ihn für die Universität Heidelberg zu gewinnen beabsichtigte. Zwei Briefe, die er in dieser Angelegenheit an Alexander von Humboldt und an Se. Majestät den König gerichtet hat, geben in wenigen starken und treffenden Zügen eine lebendige Darstellung von Dirichlets wissenschaftlicher Größe und von dem unersetzlichen Verluste, welcher die exakten Wissenschaften in Preußen, die Akademie, die Universität und besonders auch ihn selbst treffen würde, wenn Dirichlet unser Vaterland verlassen sollte."

Seinem Einfluß ist es wohl auch wesentlich zu danken, daß Dirichlet im Jahre 1845 für die Wahl zum Ritter des Ordens pour le mérite in Frage kam, da selbst Gauss in einem Briefe vom 9. Juli an Humboldt zwar Dirichlet vorschlägt, aber die Bemerkung hinzufügt, daß, wenn er von allen andern Rücksichten ganz frei wäre, er Eisenstein in dieselbe Linie mit Dirichlet stellen würde.

Endlich vollendete er am 26. Juli 1845 seine große Arbeit, deren ersten Teil er schon vor einem Jahre abgeschlossen, und welche jetzt unter dem Titel „Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi" im Crelleschen Journal erschien.

Jacobi stützt seine Untersuchung auf das Fundamentallemma, daß, wenn $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ die Größen bezeichnen, welche in der Funktionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ resp. mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ multipliziert sind, $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0$, oder die Funktionaldeterminante in der Form darstellbar ist $\frac{\partial (fA)}{\partial x} + \frac{\partial (fA)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (fA)}{\partial x_n}$, und liefert den Beweis für dasselbe in mehrfacher Form. Um die Definition des Multiplikators zu geben, geht Jacobi von der linearen partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ aus, deren voneinander unabhängige Lösungen mit $f_1, f_2, \ldots f_n$ bezeichnet werden; dann existiert immer ein Faktor M von der Art, daß $M\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ ist, und dieser Faktor genügt der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0$, und umgekehrt. M wird der Multiplikator der Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$

oder auch des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$ genannt, und gezeigt, daß, wenn die n Integralgleichungen des totalen Systems in der Form gegeben sind $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_n = 0$, welche von $x, x_1, \ldots x_n$ und den n willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ abhängen, der Multiplikator die Form annimmt

$$M = \frac{1}{X} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n}}$$

Als wesentliche Eigenschaft des Multiplikators wird hervorgehoben, daß, wenn M ein Multiplikator der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ist, die allgemeine Form desselben $\Pi \cdot M$ sein wird, worin Π eine beliebige Lösung der Differentialgleichung bedeutet, daß man somit aus zwei Multiplikatoren durch Division eine Lösung der Differentialgleichung erhält. Setzt man den Multiplikator der Einheit gleich, so folgt aus dem obigen Ausdruck für M, daß, wenn $n+1$ Funktionen $X, X_1, \ldots X_n$ der Gleichung genügen $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$, die $n+1$ Größen $X, X_1, \ldots X_n$ als Partialdeterminanten von bestimmten n Funktionen betrachtet werden können.

Nachdem er gezeigt, wie aus einem bekannten Multiplikator eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems die Determinante der Funktionen hergeleitet wird, welche vermöge der Integralgleichungen in die Anfangswerte der Variabeln übergehen, geht er dazu über, den Multiplikator auch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung $X\frac{d \log \mu}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$ zu definieren, und daraus den Satz herzuleiten, daß nach vollständiger Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\frac{dx_1}{dx} = X_1, \ldots \frac{dx_n}{dx} = X_n$, wenn $x_1, \ldots x_n$

durch x und die willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ausgedrückt sind, $\log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \int \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) dx$ ist, wenn die Größe unter dem Integral selbst durch x und die willkürlichen Konstanten ausgedrückt wird. Wie man nun bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabeln die partiellen Differentialquotienten von dem vollständigen Differential unterscheidet, worin alle Variabeln von einer von ihnen und zwar unbestimmt abhängen, so wird, wenn n Funktionen von $n + m$ Variabeln vorgelegt sind, außer deren Partialdeterminanten, in denen alle Variabeln als unabhängig angesehen werden, die vollständige Determinante in Betracht kommen, indem man die Anzahl m der Variabeln als unbestimmte Funktionen der n übrigen betrachtet, und es gilt dann in dieser Form der Satz, daß die Differentialgleichung $X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = 0$ mit einem solchen Multiplikator versehen werden kann, daß die eine Seite der Gleichung die vollständige Funktionaldeterminante wird oder die Determinante bestimmter n Funktionen der Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$, in denen x als unbestimmte Funktion der Variabeln $x_1, \ldots x_n$ betrachtet wird, und daß daher, wenn für das System $dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$ ein singuläres System von Integralgleichungen existiert, welches $n - 1$ willkürliche Konstanten einschließt, durch Elimination dieser Konstanten aus den n Integralgleichungen eine Gleichung hervorgeht, welche den Multiplikator des Systems der vorgelegten Differentialgleichungen unendlich macht.

Jacobi geht nunmehr zum Gebrauche des neuen Multiplikators zum Zwecke der Integration der Differentialgleichungen und zu dem Prinzip des letzten Multiplikators über, indem er zunächst die Frage nach der Bildung des Multiplikators von Differentialgleichungen, welche durch Transformation aus den vorgelegten abgeleitet sind, aus dem der primären aufwirft,

und zeigt, daß, wenn in die Differentialgleichungen $\frac{dx}{dt} = X$, $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots \frac{dx_n}{dt} = X_n$, worin $X, X_1, \ldots X_n$ beliebige Funktionen von $x, x_1, \ldots x_n$ sind, und für welche M einen Multiplikator bezeichnet, statt $x, x_1, \ldots x_n$ neue Variable $w, w_1, \ldots w_n$ eingeführt werden, ein Multiplikator des transformierten Systems $\frac{dw}{dt} = W, \cdots \frac{dw_n}{dt} = W_n$ durch $\varDelta . M$ dargestellt wird, wenn

$$\varDelta = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \sum \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right),$$

worin die Klammern die Größen x durch die w ausgedrückt andeuten. Hieraus leitet er nun sein Fundamentaltheorem in der Theorie des Multiplikators her: Sei M ein Multiplikator des Systems $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$, und seien m Integrale gefunden $w = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $\ldots w_{m-1} = \alpha_{m-1}$, mit Hilfe deren alle Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ durch die willkürlichen Konstanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ und durch Funktionen $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$ der Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ ausgedrückt werden, so bestehen, wenn man $W_i = X \frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n}$ setzt, zwischen den Variabeln $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$ die Differentialgleichungen $dw_m : dw_{m+1} : \cdots : dw_n = W_m : W_{m+1} : \cdots : W_n$, und deren Multiplikator wird sein $\varDelta . M$, worin $\varDelta = \sum \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w_m}\right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial w_{m+1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_{n-m}}{\partial w_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$. Wählt man $w_m = x$, $w_{m+1} = x_1, \ldots w_n = x_{n-m}$, so folgt, daß, wenn $w = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $\ldots w_{m-1} = \alpha_{m-1}$ m Integrale der Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ und M ein Multiplikator derselben ist, und man aus diesen Gleichungen $x_{n-m+1}, \ldots x_n$ durch $x, x_1, \ldots x_{n-m}, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ ausdrückt, der Multiplikator des reduzierten Systems $dx : dx_1 : \cdots : dx_{n-m}$

$= X : X_1 : \cdots : X_{n-m}$ durch

$$M \cdot \sum \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$
$$= M \left\{ \sum \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \cdots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n} \right\}^{-1}$$

dargestellt ist.

Hieraus ergibt sich nun unmittelbar der Satz vom letzten Multiplikator, nach welchem, wenn M ein Multiplikator des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ ist, und durch Integration und sukzessive Elimination alle Integralgleichungen $\Pi = \alpha$, $\Pi_1 = \alpha_1$, $\ldots \Pi_{n-2} = \alpha_{n-2}$ mit Ausnahme einer gefunden sind, worin Π_i eine Funktion der Variabeln x, x_1, $\ldots x_{n-i}$ und der willkürlichen Konstanten α, α_1, $\ldots \alpha_{i-1}$ ist, die letzte Integralgleichung durch $\int \frac{M(X_1\,dx - X\,dx_1)}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}}$ $=$ cst. dargestellt ist, an welchen Satz sich noch mannigfache Spezialisierungen und Umformungen desselben knüpfen. Es schließt sich hieran die Betrachtung des Multiplikators eines Differentialgleichungssystems beliebiger Ordnung, welches er auf ein simultanes System 1. Ordnung zurückführt; es wird weiter in einfacher Weise gezeigt, daß man für ein lineares Differentialgleichungssystem den Multiplikator stets durch Quadraturen ausdrücken kann, und an Eulersche Beispiele anschließend diejenigen linearen und nicht linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zwischen zwei Variabeln behandelt, deren Multiplikator man finden kann.

Nun geht Jacobi zur Aufstellung derjenigen Sätze über, die er kurz zuvor der Pariser Akademie mitgeteilt hatte; indem er zeigt, wie für ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, welches mit Hilfe der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher die abhängige Variable nicht vorkommt, integriert wird, der Multiplikator gefunden werden kann, und ähnliche Beziehungen für das Pfaffsche Problem erörtert, wird er auf die Differentialgleichungen der Dynamik geführt; er weist nach, daß man für dieselben in der ersten Lagrangeschen Form den Multiplikator finden kann, welcher für die Hamiltonschen Differentialgleichungen den Wert 1 annimmt, und folgert daraus seinen berühmten Satz von der Herleitung des letzten Integrales eines mechanischen Problems. Diesen Satz bezeichnet er als ein neues allgemeines Prinzip der Mechanik, wie er es auch im Bulletin de l'académie impériale de St. Pétersbourg genannt, und wendet dasselbe auf die Bewegung eines nach einem und zwei festen Zentren angezogenen Punktes, auf das Problem von drei auf derselben Geraden sich bewegenden Massenpunkten, welche sich gegenseitig anziehen, und auf die Rotation eines durch einen Stoß angetriebenen Körpers um einen festen Punkt an. Schwieriger, aber doch durchführbar gestaltet sich die Anwendung seines Prinzips auf die Bewegung eines freien Systems materieller Punkte im widerstehenden Medium für ein beliebiges Widerstandsgesetz, wofür er unter anderem findet, daß, wenn die Bewegung in einem homogenen Medium vor sich geht, dessen Widerstandskraft der Geschwindigkeit direkt proportional ist, und die sollizitierenden Kräfte nur von den Koordinaten abhängen, nach Auffindung aller Integrale zwischen den Größen $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$ zuletzt t durch irgendeine Koordinate ohne neue Quadraturen ausgedrückt werden kann; die Anwendung hiervon auf die Bewegung eines Kometen um die Sonne im Widerstand leistenden Äther für schon früher bezeichnete Widerstandsgesetze läßt erkennen, daß, wenn ein Integral bekannt ist, die drei übrigen durch Quadraturen erhalten werden können. Endlich wird noch die Bedeutung des Multiplikators für die isoperimetrischen Differentialgleichungen erörtert, und die Form desselben bestimmt.

In betreff der von ihm in dieser Arbeit gemachten Anwendung auf das Problem von drei in einer Geraden befindlichen sich anziehenden Punkten fand sich noch eine von Wangerin unter dem Titel „Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium“ veröffentlichte Notiz in Jacobis hinterlassenen Papieren, in welcher dieser zeigt, daß das Problem nur von einer einzigen Quadratur abhängt, und diese an sich einfache Zurückführung auf Quadraturen zu einigen allgemeinen Bemerkungen über die Wahl des Zeichens der unter dem Integral vorkommenden Quadratwurzel benutzt.

Mit Beginn der Herbstferien suchte Jacobi nun zunächst die Seidel schon in den Osterferien angekündigte Fertigstellung seiner Störungsarbeit auf Grund der Rechnungen seines ausgezeichneten Schülers zu beenden. Vom 9. August 1845 datiert er seine Arbeit „Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen“ und gibt hierdurch eine Anwendung der Theoreme, die er in seiner letzten Arbeit über die Methode der kleinsten Quadrate auseinandergesetzt hatte.

Es handelt sich hier um ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$\{(a,a)-x\}\alpha+(a,b)\beta+(a,c)\gamma+\cdots+(a,p)\pi=0,$$
$$\cdots(p,a)\alpha+(p,b)\beta+\cdots+\{(p,p)-x\}\pi=0,$$

dessen in Zahlen gegebene Koeffizienten, symmetrisch zur Diagonale gelegen, einander gleich sein sollen, und worin $\alpha, \beta, \ldots \pi$ die Unbekannten darstellen; da nun die Determinante verschwinden muß, so erhält man eine Gleichung n. Grades in x, und zu jeder Lösung derselben sind die Verhältnisse der Größen α, β, ... bestimmt, und die Größen selbst, wenn noch die Bedingung $\alpha^2+\beta^2+\cdots+\pi^2=1$ hinzugenommen wird. Für die zu zwei Lösungen x', x'' zugehörigen Werte α', β', ... α'', β'', ... ergibt sich leicht die Beziehung $\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots+\pi'\pi''=0$, woraus Cauchy gefolgert hat, daß alle Lösungen jener Gleichung n. Grades reell sind. Bildet man die linearen Ausdrücke $p_1=\alpha' q_1+\alpha'' q_2+\cdots+\alpha^{(n)} q_n$, $\ldots p_n=\pi' q_1+\pi'' q_2+\cdots+\pi^{(n)} q_n$, woraus $q_1=\alpha' p_1+\beta' p_2+\cdots+\pi' p_n$, $\ldots q_n=\alpha^{(n)} p_1+\beta^{(n)} p_2+\cdots+\pi^{(n)} p_n$ folgt, so ergibt sich $p_1{}^2+p_2{}^2+\cdots+p_n{}^2=q_1{}^2+q_2{}^2+\cdots+q_n{}^2$ und somit $\alpha'^2+\alpha''^2+\cdots+\alpha^{(n)2}=1$, $\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\cdots+\alpha^{(n)}\beta^{(n)}=0$, und analoge Gleichungen, welche die Beziehung $x' q_1{}^2+x'' q_2{}^2+\cdots+x^{(n)} q_n{}^2=(a,a)p_1{}^2+2(a,b)p_1p_2+2(a,c)p_1p_3+\cdots+(b,b)p_2{}^2+2(b,c)p_2p_3+\cdots+(c,c)p_3{}^2+\cdots$ liefern. Man drückt ebenso leicht die ersten Differentialquotienten aller Wurzeln der Gleichung n. Grades nach den Koeffizienten der linearen Gleichungen genommen durch die Werte der Unbekannten aus, während die Differentialquotienten jeder der Unbekannten nach den Größen (a,b), (b,c), ... sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Größen (a,a), (b,b), ... zusammensetzen lassen. Jacobi stellt nun zunächst die numerischen Gleichungen, von welchen die Säkularstörungen der Exzentrizitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in bezug auf die Diagonale symmetrischen Form auf, und bemerkt, daß im allgemeinen die Zahlenkoeffizienten in der Diagonale beträchtlich größer sind als die übrigen, und daß, wenn dieses nicht der Fall, die Gleichungen auf zweckmäßige Weise transformiert werden können, indem man mittels einfacher linearer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Größen einführt, so daß in jedem nach und nach durch diese Transformation erhaltenen System die Summe der Quadrate der außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Koeffizienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebenen System von Gleichungen, während die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Koeffizienten sich um dieselbe Größe vermehrt hat. Alle einzelnen außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten werden sich daher durch wiederholte Anwendung der angegebenen Transformation unendlich verkleinern lassen. Für den Fall sehr kleiner Größen 1. Ordnung außerhalb der Diagonale erörtert nun Jacobi auf Grund der oben aufgestellten Formeln ein Verfahren für die Auflösung des linearen Systems durch sukzessive Annäherung, ohne jene Gleichung n. Grades bilden und auflösen zu müssen, zeigt, wie die Variationen berechnet werden, welche die Systeme der Werte der Unbekannten durch die Änderung der zugrunde gelegten Werte der Planetenmassen erfahren, und vergleicht endlich alles mit den von Leverrier gefundenen Resultaten.

Seine wissenschaftliche Korrespondenz war in den Herbstferien äußerst rege, und besonders der Briefwechsel mit Hermite und Rosenhain war es, der ihn wieder zu seinen Studien in der Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen zurückführte. Schon in einem Briefe vom Januar 1843 hatte Hermite seine Resultate über die Auflösung der Teilungsgleichungen der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung Jacobi mitgeteilt und in einem weiteren Schreiben vom August 1844 einen Beweis für den von Jacobi aufgestellten Ausdruck von $\sin\mathrm{am}\,(u,\ \varkappa)$ durch $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)$ auf den Charakter der sin am gegründet, durch den Quotienten zweier stets konvergierender Reihen ausdrückbar zu sein, welche unverändert bleiben oder nur einen konstanten Faktor annehmen, wenn das Argument um gewisse konstante Größen vermehrt wird. Hermite gibt endlich noch die von Jacobi schon früher gefundenen Ausdrücke der hyperelliptischen Funktionen von zwei Variabeln durch solche mit einer Variabeln und liefert noch einige von den Jacobischen verschiedene Beweise für die Ausdrückbarkeit der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch das 1. Gattung mit Hilfe von ϑ-Funktionen und Darstellungen von deren Additionstheoremen.

Jacobi teilt ihm am 6. August 1845 mit, daß der in dem Briefe vom August 1844 angedeutete Weg zum Beweise der Formeln für die inverse Transformation genau der

von ihm befolgte sei, und daß er noch einen dritten Beweis in seinen Vorlesungen in Königsberg vorgetragen habe, welcher auf der Zerlegung von $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ in einfache Brüche beruht; auch die Formel für die Entwicklung des Produktes $H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots H(x+a_n)$ habe er ähnlich wie Hermite schon früher gefunden.

„Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'Abel, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques ... En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.“ Jacobi spricht sodann von seiner bekannten Relation zwischen Produkten von vier ϑ-Funktionen, die er in seinen Vorlesungen gegeben, und aus der die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen der drei Gattungen und vieles andere unmittelbar folge; er erwähnt ferner das analytische Faktum, daß man jede ϑ-Funktion auf eine andere reduzieren kann, für welche der Modul von $q < e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$, und geht auf den Satz von der Vertauschung des Argumentes und Parameters für die elliptischen Integrale 3. Gattung ein.

„Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes, par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales Abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par Legendre, ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions Abéliennes et elliptiques ... Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales, qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire, si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconque I et II, comporte la même généralité que le théorème générale d'Abel. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa généralité vous serez mieux que moi à même d'un juger." Die hier erwähnte von Jacobi angewandte Transformation ist im geometrischen Sinne äquivalent der Beziehung der Punkte einer Kurve, deren Koordinaten sich als rationale Funktionen eines Parameters darstellen lassen, auf die Punkte einer Geraden mit Hilfe dieses Parameters. Er schließt mit den Worten: „Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches: Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre ..."

Durch die Korrespondenz mit Hermite angeregt, der zuerst in Frankreich selbsttätig und schöpferisch in die Theorie der elliptischen und Abelschen Transzendenten eingriff, verfaßte er noch einige kürzere, aber höchst interessante Arbeiten, von denen die erste vom 25. August 1845 „Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung" betitelt ist. Wenn $R = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \cdots + 1$, V eine ganze Funktion von x von n. Grade mit dem höchsten Koeffizienten 1 ist, und man bildet mit einer Konstanten a den Ausdruck $x V^2 - a^2 R = (x - x_1)\ldots(x - x_{2n+1}) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$, so ist nach dem Abelschen Theorem für $m = 0$, $1, 2, \ldots n-1$:

$$\int \frac{x_1{}^m dx_1}{\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{x_{2n+1}^m dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = 0$$

mit gehörig bestimmten Wurzelzeichen, worin die Anfangs- und Endgrenzen der Integrale die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der angegebenen Form sind, in denen sich a und die Koeffizienten von V verändert haben, während R ungeändert geblieben ist. Entwickelt man $\varDelta = \frac{1}{\sqrt{xR}} \log \frac{\sqrt{x}\, V + a\sqrt{R}}{\sqrt{x}\, V - a\sqrt{R}}$ nach fallenden Potenzen

von x, so daß $\varDelta = \frac{\varDelta_0}{x^{n+1}} + \frac{\varDelta_1}{x^{n+2}} + \cdots$, so findet Abel

$$\int \frac{x_1{}^{n+i} dx_1}{\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{x_{2n+1}^{n+i} dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = \varDelta_i \quad \text{und} \quad \varDelta_0$$

$= 2\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{2n+1}}$. Jacobi liefert nun zur Bestimmung von $\varDelta_i$ die folgende Methode: Man entwickle den Ausdruck $(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{2n+1} z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von z, setze in dem Koeffizienten von z^i für b_1, $b_2, \ldots$ die Größen $a_1 + \alpha_1$, $a_2 + \alpha_2, \ldots$, entwickle alle Produkte und Potenzen dieser Binome und multipliziere jeden Term, der den Faktor enthält $\alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \ldots$, noch mit $\frac{a^{2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + 1}}{2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + 1}$, so wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Wert von $\frac{1}{2} \varDelta_i$. Nachdem Abel für die Integrale 3. Gattung die Beziehung

$$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = \varDelta(\alpha)$$

gefunden, entwickelt Jacobi durch Einführung von Größen, welche von neuen transzendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form dieses Ausdruckes, welche für $n = 1$ unmittelbar das bekannte Additionstheorem der elliptischen Integrale 3. Gattung liefert.

Noch in denselben Tagen schrieb er, durch diese Untersuchungen über das Abelsche Theorem veranlaßt, eine zweite Note „Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werte durch eine gebrochene rationale Funktion", in welcher er auf die von Cauchy gegebene Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel zurückkommt, welche eine gebrochene Funktion, deren Zähler und Nenner resp. vom $n-1$. und m. Grade sind, für eine Reihe von $n + m$ gegebenen Werten derselben darstellt, und sich für $m = 0$ auf die Lagrangesche Funktion reduziert. Jacobi teilt verschiedene Darstellungsweisen hierfür mit, weil „die Darstellung gegebener Werte durch gebrochene rationale Funktionen in der Theorie der Abelschen Transzendenten von so großer Wichtigkeit ist". Das wesentlichste Theorem, zu welchem Jacobi hierbei gelangt, sagt aus, daß, wenn die rationale Funktion für $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ die Werte $u_0, u_1, \ldots u_{m+n-1}$ annehmen soll, und es ist $f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m+n-1})$,

$$R_p = \frac{x_0{}^p u_0}{(x_0 - x)f'(x_0)} + \cdots + \frac{x^p{}_{m+n-1} u_{m+n-1}}{(x_{m+n-1} - x)f'(x_{m+n-1})},$$

$$w_p = \frac{x_0{}^p (x_0 - x) u_0}{f'(x_0)} + \cdots + \frac{x^p{}_{m+n-1}(x_{m+n-1} - x)u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})},$$

so wird, wenn die gesuchte Funktion u mit $\frac{N(x)}{D(x)}$ bezeichnet wird, $-\frac{1}{f(x)}\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm R_0{}^{(0)} R_1{}^{(1)} \ldots R_m{}^{(m)}}{\Sigma \pm w_0{}^{(0)} w_1{}^{(1)} \ldots w_{m-1}^{(m-1)}}$, wenn man nach Bildung der beiden Determinanten in jedem ihrer Terme resp. $R_{\alpha+\beta}$ und $w_{\alpha+\beta}$ für $R_\alpha{}^{(\beta)}$ und $w_\alpha{}^{(\beta)}$ setzt; durch eine bestimmte Regel kann auch der Zähler unmittelbar aus dem Nenner gebildet werden.

In den Herbstferien verweilte Jacobi in Berlin, um sich wieder ungestört der Fortsetzung seiner Arbeiten widmen zu können; aber auch seine Familienverhältnisse machten seine Anwesenheit wünschenswert: „Sie werden wohl wissen", schreibt er seinem Freunde Leers am 13. Oktober, dem er einen Kupferstich von einer wundervollen Statue des Sophokles verehrte, die er oft im neuen Museum des Lateran während seiner Anwesenheit in Rom bewundert hatte, „daß nach 3 Knaben meine Frau mich jetzt mit der dritten Tochter beschenkt hat."

Um zunächst einen größeren Zuhörerkreis in Berlin um sich zu versammeln, hatte Jacobi nur eine größere Vorlesung über Differential- und Integralrechnung angezeigt, die er vor 23 Zuhörern hielt, trat aber zugleich auch im Laufe des Winters den wissenschaftlichen und künstlerischen Kreisen Berlins näher. „Jacobis sind mir", schreibt eine Dame aus dem Mendelssohn-Dirichletschen Kreise, „ein

überaus angenehmer Gewinn; sein überlegner Geist zeigt sich in jeder Art, und da er uns gern zu haben scheint, benimmt er sich gegen uns aufs Liebenswürdigste; unter Anderm kann man nicht mit mehr Verständniß Musik hören als er." Auch der Briefwechsel mit seinen Königsberger Freunden und Fachgenossen Bessel und Neumann nahm wieder einen regeren Verlauf; letzterem schreibt er am 5. Dezember:

„Da die Akademie grade ihre zweimonatlichen Ferien hatte, als mir Ihr ehrenvoller Auftrag zu Theil wurde, so konnte Ihre Arbeit erst am 20. October derselben vorgelegt werden. Inzwischen hatte ich sogleich von Encke amtliche Kenntniß von ihrem Einlaufen nehmen lassen. Da Poggendorff mir von den Herren am gründlichsten die Ampère'schen Vorstellungen zu kennen schien, so ersuchte ich ihn, die Vorlegung der Arbeit mit einigen berichtenden Worten zu begleiten, wozu er sich auch die Formeln von mir geben ließ, damit ihm das Verständniß der im Auszug mitgetheilten Resultate leichter würde. Der Bericht fiel wohl mehr aus Ungeschick als Unwissenheit so schwach aus, daß keiner der andern Herrn Physiker auch nur die geringste Vorstellung von dem genre Ihrer Arbeit erhielt; ich glaube, über ein chinesisches Werk hätte ich ihn besser gemacht. Freilich scheint ihm auch Ihre Arbeit ziemlich chinesisch zu sein; er hat nicht einmal die erste Zeile verstanden. In diesem Gegenstande scheinen auch die technischen Ausdrücke noch nicht so festzustehen oder bekannt zu sein, so daß ich glaube, daß Sie mit einigen umständlichen Erklärungen es wohl hätten wesentlich unsern Physikern und so weit wenigstens erleichtern können, daß sie den Inhalt der Sätze hätten verstehen können. Es wäre wohl sehr gut, wenn wir in Ermangelung Ihrer selbst einen Ihrer Schüler hier hätten, welcher den Dolmetsch abgeben könnte, und insofern wäre es wünschenswerth, daß Kirchhoff herkäme. Außer Geschichte der Physik bei Poggendorff glaube ich sonst nicht, daß er hier was profitiren könnte, wenn er nicht Chemie lernen will. In Betreff einer Unterstützung werden Sie sich wohl an Humboldt wenden müssen, wenn Eichhorn dafür keinen Fonds hat, oder auch könnte Humboldt Ihr Schreiben wegen Kirchhoff, falls Sie noch solches beabsichtigen, bei Eichhorn unterstützen, obschon sie Todfeinde sind. Was Sie selbst betrifft, so denken Sie nur nicht, daß irgend etwas Persönliches gegen Sie im Spiele ist, sondern es ist nur nicht das nothwendig erforderliche Feuer für die Sache, um die Geldhindernisse zu beseitigen. Von Bessel höre ich nichts, also wird es ihm wohl etwas leidlicher gehen . . . Die Akademie hat auf meinen Antrag beschlossen, Ihre Abhandlung in extenso zu drucken . . ."

Im Dezember dieses Jahres veröffentlichte Jacobi noch eine kurze „Über einige die elliptischen Funktionen betreffenden Formeln" betitelte Note, in welcher er aus der früher gewonnenen Beziehung $F(x) = e^{-\tau u^2} \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega(u)^n}$, worin $x = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$, $\int\limits_0^u (1 - \varkappa^2 x^2)\, du = E(u)$, $\int\limits_0^u E(u)\, du = \log \Omega(u)$, τ eine Konstante und $F(x)$ den rationalen Nenner der Substitution bedeutet, welche eine Transformation der n^{ten} Ordnung ergibt, eine Relation zwischen den Koeffizienten der Entwicklung von $\log F(x)$ nach steigenden x-Potenzen, den Entwicklungskoeffizienten von u^n nach steigenden Potenzen von x, den von $\varkappa$ abhängigen Entwicklungskoeffizienten von x^2 nach steigenden u-Potenzen und den den letzteren analog aus λ gebildeten Größen herleitet; ähnliche Relationen liefert die Multiplikation, woraus wieder bekannte Formeln von Eisenstein folgen.

Das neue Jahr 1846 begann er, von allen Seiten dazu gedrängt, am 3. Januar mit einem in der Singakademie gehaltenen Vortrage „Über Descartes' Leben und seine

Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen", der auch in französischer Übersetzung im Liouvilleschen Journal erschien.

Nach einer meisterhaften historischen Entwicklung des Lebens von Descartes, wie er sie schon in ähnlicher Weise am 27. Oktober 1837 in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg entworfen hatte, schildert er die Vielseitigkeit in den Schöpfungen dieses großen Gelehrten: „Bald widmet er sich den abstraktesten mathematischen Untersuchungen, bald macht er physikalische Experimente, bald erforscht er die Tiefen der Mechanik, in der er das heute dieses ganze Gebiet beherrschende Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erfunden hat." Jacobi untersucht die verschiedenen Forschungsmethoden Descartes' und stellt die der Mathematik entlehnte an die Spitze: „Auf Befragen, ob es denn kein Mittel gäbe, sich vor trügerischen Scheingründen zu bewahren, nannte er seine aus dem Schoße der Mathematik gezogene Methode. In mehreren Privatunterhaltungen begeistert er den Kardinal von Bérulle für diese Methode und ihre verschiedenen Anwendungen, welche auch auf Verbesserung des materiellen Wohles der Menschheit abzwecken; denn er geht schon damals darauf aus, durch Vervollkommnung der Mechanik den Effekt der menschlichen Arbeitskräfte zu erhöhen, was heute eine die Welt umgestaltende Wirklichkeit geworden." Ein Jahr, nachdem Jacobi diese Worte gesprochen, erschien „Die Erhaltung der Kraft" von Helmholtz, und es war nach Du Bois-Reymonds Zeugnis Jacobi der einzige Berliner Gelehrte, der die ungeheure Tragweite dieser Arbeit klar erkannte, während noch alle Physiker und Mathematiker sich zu derselben ablehnend verhielten. Jacobi geht sodann zur Besprechung der einzelnen Werke von Descartes über: „Sein erstes großes Werk, das die protestantischen Theologen der Utrechter Universität als atheistisch und staatsgefährlich verfolgten, enthielt vier verschiedene Werke: die Abhandlung über die Methode, seine Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen, die Dioptrik, die Meteore und die Geometrie; in den drei letzten Werken wollte er ein Beispiel seiner Methode geben, an einem rein mathematischen, einem rein physikalischen und einem gemischten Gegenstande. Seine Geometrie hat die mathematischen Wissenschaften umgestaltet, die Geometrie von der Herrschaft und Partikularität der Figuren befreit und sie zu einem Gegenstande des allgemeinen Kalküls gemacht." Jacobi schließt mit den schönen Worten: „Sein 'cogito ergo sum' ist der Ausgangspunkt der neueren Philosophie geworden, es ist die Inschrift des Paniers, mit welchem die neue Wissenschaft vorwärts dringt. Der Mensch weiß, was sein Wesen ist, die Nebel der Scholastik zerreißen, die Sonne des Gedankens geht auf über einer neuen Welt, und in ihrem Lichte wandeln wir noch heute. Es ist nicht der wilde, unbewußte Drang, welcher sich dem Staate und der Religion gegenüberstellt, es ist die ruhige Sicherheit des sich selbst bewußten Geistes, welcher in ihnen und mit ihnen die Aufgabe der Menschheit lösen will."

Diesen Vortrag, der in Berlin großes Aufsehen erregt hatte, übersandte er dem Minister Eichhorn, der ihm am 23. Januar schrieb: „Ew. Wohlgeboren danke ich verbindlichst für die Aufmerksamkeit, welche Sie mir durch Übersendung Ihrer am 3. d. M. 'Über Descartes Leben etc.' gehaltenen Vorlesung erwiesen haben. Ich habe die Schrift mit dem lebhaftesten Interesse gelesen, nicht sowohl wegen der von Ihnen angedeuteten Übereinstimmung meiner in Königsberg gesprochenen Worte mit den Grundsätzen des Descartes, als weil darin über theologische Zeloten und politische Strudelköpfe ein Urtheil gesprochen ist, welches ähnlichen Geistern unserer Zeit zum Correctiv dienen könnte, wenn ihnen die Methode, die Vernunft richtig zu leiten, und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen, zugänglich wäre . . ."

Nachdem er noch am 5. Januar der Berliner Akademie eine nicht weiter veröffentlichte Untersuchung „Über die Zerfällung ganzer Zahlen in vier komplexe Faktoren" vorgelegt, beschäftigte er sich in den Weihnachtstagen viel mit der ihm von Neumann übersandten fundamentalen Arbeit, deren große Bedeutung er erkannte, deren Studium ihm jedoch mancherlei Schwierigkeiten physikalischer Natur bereitete.

„Theuerster Freund", schreibt er ihm am 6. Januar 1846, „da Ihre physikalischen Collegen hier so beschäftigt sind, daß sie die Correctur beim besten Willen, wie ich glaube, nicht mit der wünschenswerthen Sorgfalt hätten ausführen können, und Sie mich nun einmal mit der Sache beehrt hatten, so hatte ich, obgleich vielleicht der Unpassendste, aber der am meisten Zeit hat, mich derselben unterzogen. Die Aenderungen, die ich vorgenommen und die Ihnen falsch oder unpassend scheinen, werden Sie leicht verändern können . . . Das Ds im Nenner bei partiellen Differentialien, wenn im Zähler ein anderes d steht, wie $\frac{d^2E}{Ds\,dt}$, ist ferner unerlaubt, auch hier nicht nöthig. Wo es nöthig werden sollte, muß man auch im Zähler zwei verschiedene Charakteristiken schreiben $\varDelta dE$. Aber hier sind ja nur gewöhnliche partielle Differentialien, und das Draht- und Wegelement wird erst später unterschieden. Dagegen habe ich das Ds als Factor immer beibehalten, damit man gleich weiß, daß es vom Draht ist. Am fürchterlichsten war für mein Auge DsE, was ganz wie ein Product dreier Factoren aussieht; aber Sie lachen über solche Pedanterieen . . . Ich werde für Sie 25 Exemplare abziehen lassen und noch besonders sogleich ein Exemplar an Weber schicken, der neulich hier war und sich sehr für die Arbeit interessirte . . . Poggendorff hat vor einigen Tagen über Kirchhoff's Abhandlung einen überaus rühmenden Vortrag gehalten. Weber lernte sie hier kennen, und es scheint, daß das

Aufheben, das er davon gemacht, P. das Verständniß eröffnet und ihn in Feuer gesetzt hat. R. meinte zwar, das könne sich jeder selber machen, wenn er es braucht; P. meinte aber, das sei nicht der Fall, er würde es selbst jetzt noch nicht machen können; Weber habe vor einigen Jahren 3 Tage bei ihm gesessen und sich mit dem leichtesten particulären Falle, bis er ihn herausgekriegt, gequält. P. sagte in der Akademie, die Abhandlung sei so knapp geschrieben, daß zu befürchten steht, sie würde auf die Physiker nicht den Eindruck, den sie sollte, machen. Dies war in so fern naiv, als es ganz sein Fall gewesen zu sein scheint. Ich würde mich mehr für Kirchhoff's Herkommen interessiren, wenn ich wüßte, was er hier holen soll. Für dasselbe Geld wie hier könnte er ein Jahr in Paris leben, und das scheint mir doch für ihn erheblicher. Der Antrag für die Mittel dazu könnte natürlich nur durch Humboldt direct an den König gehen, daß dieser Eichhorn sagte, das Geld zu geben . . . Es ist jetzt eine curiose Zeit, die man am klügsten thäte, vorübergehen zu lassen, ohne Reactionen zu provociren, und sich auf das zu beschränken, worüber man sich in seiner amtlichen Stellung nach seinem Gewissen, wenn man dazu aufgefordert wird, erklären muß . . ."

Am 13. Januar antwortet ihm Neumann auf die Kirchhoffsche Arbeit bezüglich:

„Was Poggendorff und Kirchhoff betrifft, so beurtheilen Sie das Sachverhältniß richtig, indeß muß ich doch bemerken, daß der Inhalt dieser in Rede stehenden Anmerkung die Ohm'schen Gesetze vervollständigt und ihnen erst eine ganz allgemeine Anwendbarkeit giebt, obgleich er eine einfache Folgerung aus der Ohm'schen Theorie ist. Unter den Physikern wird Kirchhoff grade durch diesen unwesentlichen Theil seiner Abhandlung Renommée erhalten, weil er von häufiger Anwendung ist . . . Ich habe natürlich in dem Seminarbericht Kirchhoff's Arbeiten sehr

hervorgehoben, auch die gedruckte nachgeschickt — die Folge war, daß der Minister sich garnicht über die Arbeiten des Seminars äußert, sondern sich nur freut über den guten Fortgang des Seminars . . ."

Der Druck der Neumannschen Arbeit macht Jacobi, der sich in diese Untersuchungen physikalisch-mathematischer Natur hineinzuarbeiten bestrebt ist, mancherlei Schwierigkeiten. Er schreibt Neumann am 28. Januar:

„Da ich wünschte, daß Ihre Abhandlung bald in's Publicum käme, so wollte ich sie in den Band der Akademie für 1844 bringen lassen. Jetzt ist dies nicht mehr nöthig... Ich bitte Sie also, wenn auch nicht unnöthig die Rücksendung zu verzögern, doch mit aller Muße und Sorgfalt den Abdruck durchzusehen, damit ich überzeugt sein kann, daß Sie die gemachten Aenderungen auch wirklich bemerkt haben und sie Ihnen recht sind . . . Die Abhandlung wird, wie Poggendorff will, in die physikalische Abtheilung kommen. Ich hatte ihn damit geneckt, daß ich sie in die mathematische Klasse bringen wollte, weil ich daraus, daß er (offenbar aus Zeitmangel) einen so schlechten Bericht darüber gemacht, geschlossen, daß sie nicht zur Physik gehöre . . . Indem ich Ihren Sommaire genauer jetzt angesehen, habe ich mich überzeugt wie werthvoll derselbe ist, und wie sehr Sie Recht haben, ihn vordrucken zu wollen. Obgleich, wenn er nun allein gedruckt worden wäre, er wohl nicht so hätte gewürdigt werden können. Da ich keine andere Überschrift wußte, habe ich Vorbericht darüber setzen lassen. Vielleicht fällt Ihnen ein besonderes Wort ein . . . Darum Gott befohlen."

Die interessante Antwort Neumanns vom 5. Februar lautete:

„Gewiß ist ε ein Begriff! und wenn meine Abhandlung einiges Verdienst hat, so ist es dies, den Begriff dieser Größe als das eigentliche physikalische Problem aller Inductionserscheinungen hingestellt zu haben. Aber er ist in