ich hoffe, daß Herr Prof. Weber noch etwas bei mir bleiben wird, bin ich so frei, Ihnen, mein theuerster Freund, beifolgenden Aufsatz von Clausen, der eine angebliche Erweiterung Ihres Theorems von Jacobi betrifft, und in dem Clausen zeigt, daß Jacobi sich geirrt hat, nicht durch W. sondern durch die Post zuzusenden. Er soll gleich in den Astr. Nachr. erscheinen, aber ich wünschte doch, daß Sie ihn vorher durchsehen möchten. Ich werde Sie gewiß nicht mit Sachen belästigen, die Ihnen Zeit und Mühe kosten, aber hier, denke ich, wird ein Blick Ihnen zeigen, wer Recht hat, und ich wage daher darum zu bitten, da ich nicht gern Clausen gegen Jacobi compromittirt sehen möchte. Hat Clausen Recht, wie es mir scheint, so ist es eine sehr nützliche Lection für Jacobi, der bei den größten Geistern immer zu verbessern und wenigstens zu erweitern sucht."

Diese wenig schönen Zeilen, welche wie fast stets bei Schumacher eine gewisse Gereiztheit und Unbehaglichkeit der erdrückenden Größe Jacobis gegenüber verraten, beantwortete Gauss am 5. September mit den Worten: „Indem ich Ihnen, mein theuerster Freund, hier den Aufsatz des Herrn Clausen zurückschicke, bemerke ich nur 1) daß ich seine Widerlegung der angeblichen Generalisirung meines Theorems völlig gegründet, 2) in der Entwicklung (obwohl ich nicht Buchstab für Buchstab nachgerechnet habe, was auch nicht nöthig ist) dem Gegenstande angemessen und ziemlich finde."

Daraufhin nahm Schumacher mit einer wahren Befriedigung die Arbeit von Clausen auf, welche die Richtigkeit des früher besprochenen Jacobischen Theorems über das geodätische Dreieck anzweifelte, und Jacobi sah sich daher veranlaßt, am 16. Oktober Schumacher eine kurze Note „Über einige merkwürdige Kurventheoreme" zu übersenden, worin er „einen einfachen Beweis für seinen — von Steiner schon 1839 als richtig anerkannten — Satz liefert, zumal er auf einem an sich sehr bemerkenswerten

Satz der Kurvenlehre beruht". Aus dem Mittelpunkt einer Kugel, lautet jener Satz, ziehe man mit den Krümmungshalbmessern einer im Raume gegebenen Kurve $\pi\zeta$ parallele Linien, welche die Kugelfläche in den Punkten der Kurve PZ schneiden, und gleichzeitig mit den an π und ζ gelegten Schmiegungsebenen der gegebenen Kurve parallele Ebenen, welche die Kugelfläche in den größten Kreisen PA und ZA schneiden, so ist der sphärische Inhalt des von der Kurve PZ und den Bogen größter Kreise PA und ZA gebildeten Dreiecks PAZ gleich dem der Kurve PZ gegenüberliegenden Winkel PAZ oder dem Supplement des Winkels der an π und ζ gelegten Schmiegungsebenen. Aus diesem Satze leitet er nun das früher von ihm bewiesene Theorem her, aus dem sich wiederum das Gausssche ergibt; aber es ist allgemeiner als das Gausssche, „weil, wie Herr Clausen gezeigt hat, nicht durch jede zwei in einem Punkte zusammenstoßende Kurven, in welchem ihre Krümmungshalbmesser dieselbe Richtung haben, sich eine Fläche legen läßt, auf welcher die beiden Kurven kürzeste Linien sind." In bezug auf diese Widerlegung schreibt nun Schumacher am 4. Dezember an Gauss: „In dem Stücke der Astr. Nachrichten, das jetzt gedruckt wird, werden Sie zwei neue Curventheoreme von Jacobi finden, die die Richtigkeit des von Clausen angegriffenen beweisen sollen", aber Gauss geht in seiner Antwort überhaupt nicht mehr darauf ein.

Um auch einen zweiten Angriff Clausens abzuwehren, sendet er am 31. Oktober eine Note an die Astronomischen Nachrichten, betitelt „Zusatz zu der Abhandlung: Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps", von der Schumacher am 10. November an Gauss berichtet: „Jacobi behauptet in Bezug auf Clausen Recht zu haben und hat mir einen Aufsatz, der dies beweisen soll, gesandt. Da ich Ihres Rathes entbehren muß, weil Sie mit der Inclination beschäftigt, nichts fremdes zugesandt haben wollen, so ersuchte ich Bessel die Sache scharf zu betrachten, und

Jacobi zu warnen, daß er nicht ein verzeihliches Versehen durch Paralogismen gut zu machen suche. Bessel hat mir geantwortet, Jacobi bestehe darauf, daß er Recht habe, er i. e. Bessel wolle aber alles noch einmal überlegen. So steht die Sache jetzt.“ Da aber Schumacher jedes eigne Urteil über die Arbeiten Jacobis abging, so blieb ihm nichts übrig, als auch diese Widerlegung aufzunehmen, und er schrieb am 1. Dezember an Gauss: „Sie werden in dem jetzt erschienenen Stücke der Astronomischen Nachrichten 1) Jacobi's Pariser Vorlesung, aber von ihm verändert, 2) Clausen's Bemerkungen, 3) Jacobi's Antwort darauf finden. Jacobi's Antwort bezieht sich vorzüglich darauf, ob man eine Quadratur eine Integration nennen dürfe oder nicht. Er sagt nein.“

Jacobi zeigt nämlich darauf bezüglich ganz allgemein, daß, wenn in irgendeinem mechanischen Probleme der Satz von der lebendigen Kraft $V = h$ und die drei Flächensätze gelten $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, wo α, β, γ, h willkürliche Konstanten bedeuten, die drei Gleichungen $V = h$, $u = \alpha$, $v^2 + w^2 = \beta^2 + \gamma^2$ hinreichen, um die Ordnung des Systems um fünf Einheiten, oder wenn man die Zeit eliminiert, um sechs Einheiten zu verringern. Dafür, daß man durch drei Gleichungen die Ordnung um sechs Einheiten verringert, hat man drei Quadraturen zu leisten, wovon aber die eine von dem einen der drei Flächensätze übernommen wird, auf welchen man noch keine Rücksicht genommen hat. Die Zurückführung der elliptischen Bewegung eines Planeten sowie des Rotationsproblems auf Quadraturen ist unter diesem allgemeinen Satze enthalten.

Für das Wintersemester 1842/43 hatte Jacobi eine große Vorlesung über analytische Mechanik angekündigt, zerlegte dieselbe jedoch, nach Königsberg zurückgekehrt, in eine Vorlesung über die Integration der Differentialgleichungen und in eine über Mechanik des Himmels, da Dirichlet ihn, als er auf der Rückreise von Paris Berlin berührte, gebeten,

für Seidel und Heine, die beide im Winter nach Königsberg kommen wollten, diese letztere Vorlesung zu halten, an der auch in der Tat nur noch zwei andere Zuhörer teilnahmen, da Jacobi, wie Seidel erzählt, den andern selbst davon abriet, und ihnen andeutete, daß sie es wohl nicht vollkommen verstehen würden. Seidel hebt bei dieser Gelegenheit hervor, Jacobi habe sonst in der Regel — aber doch wohl nur in den elementaren Vorlesungen — weniger hohe Gegenstände behandelt, um leichter Zuhörer zu finden, dann sei er aber etwas nachlässig in seinem Vortrage gewesen, da der Stoff für ihn selbst zu geringes Interesse hatte.

Über diese Vorlesung, welche die Mechanik des Himmels behandelte, berichtet Seidel seinen Eltern: „Die himmlische Mechanik, über welche uns Prof. Jacobi liest, ist gewissermaßen die reine theoretische Astronomie, es werden jedoch in ihr mehr die großen Verhältnisse, die Bewegungen ganzer Sonnensysteme im Weltraum etc. betrachtet und die Veränderungen, die an denselben im Laufe der Jahrtausende eintreten. Es gehören hierher z. B. die von verschiedenen französischen Gelehrten, namentlich Poisson, geführten Untersuchungen darüber, ob unser Sonnensystem, wenn nicht Ursachen hinzukommen, die nicht in ihm selbst liegen, und von denen wir daher auch keinen Begriff haben können, für immer bestehen oder sich von selbst einmal auflösen und resp. zusammenstürzen wird etc., Untersuchungen, die indeß noch der Vollendung ermangeln. Da dabei in der Mechanik des Himmels alle wirkenden Kräfte strenge berücksichtigt werden, auch solche, von denen wir nur aus der Theorie Kenntniß haben, da sie zu gering sind, um sich in den Beobachtungen zu zeigen, wie z. B. die Anziehung der Fixsterne auf unser Sonnensystem, so werden diese Untersuchungen außerordentlich complicirt und würden daher in dieser Form nicht geeignet sein, den astronomischen Berechnungen zu Grunde gelegt zu werden. Das Hauptinteresse dieses Gegenstandes beruht daher in seiner Schwierigkeit und in den interessanten mathematischen Betrachtungen, auf welche er führt."

Von der großen Vorlesung über die Integration der Differentialgleichungen besitzen wir eine Nachschrift Borchardts, welche Clebsch mit geringfügigen Abänderungen als Jacobis Vorlesungen über Dynamik im Jahre 1866 herausgegeben hat.

„Diese Vorlesungen werden sich mit den Vorteilen beschäftigen, welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besondern Form dieser Gleichungen ziehen kann. Es sollen nur diejenigen Probleme betrachtet werden, welche sich auf ein System von n materiellen Punkten beziehen, und bei welchen die Bewegung allein von der Konfiguration der Punkte und nicht von ihrer Geschwindigkeit abhängt." In der Einleitung hebt Jacobi hervor: „Der von Hamilton entdeckte Zusammenhang gibt auch neue Aufschlüsse über die Methode der Variation der Konstanten. Diese Methode beruht auf folgendem: Die Integrale eines Systems von Differentialgleichungen der Dynamik enthalten eine gewisse Anzahl willkürlicher Konstanten, deren Werte in jedem besondern Falle durch die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte bestimmt werden. Bekommen nun die letzteren während der Bewegung Stöße, so ändern sich dadurch nur die Werte der Konstanten, die Form der Integralgleichungen bleibt dieselbe. Bewegt sich z. B. ein Planet in einer Ellipse um die Sonne, und bekommt er während der Bewegung einen Stoß, so wird er sich nun in einer neuen Ellipse oder vielleicht auch in einer Hyperbel, jedenfalls in einem Kegelschnitt bewegen, die Form der Gleichung bleibt dieselbe. Treten nun solche Stöße nicht momentan auf, sondern werden sie kontinuierlich fortgesetzt, so kann man die Sache so ansehen, als ob die Konstanten sich kontinuierlich änderten, und zwar so, daß diese Änderungen die Wirkung der störenden Kräfte genau darstellen.

Diese Theorie der Variation der Konstanten wird in dem Verlauf unserer Untersuchung in einem neuen Lichte erscheinen . . ."

„Man erkennt die Notwendigkeit, die partiellen Differentialgleichungen zu studieren; aber seit 30 Jahren hat man sich nur mit den linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, während für die nicht linearen nichts geschehen ist. Für drei Variable hat bereits Lagrange das Problem absolviert, für mehr Variable hat Pfaff eine zwar verdienstliche aber unvollkommene Arbeit geliefert. Nach Pfaff muß man zur Lösung der partiellen Differentialgleichung zunächst ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen integrieren. Nach Integration derselben hat man ein neues System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches zwei Variable weniger enthält, dieses wiederum zu integriren usw., und so gelangt man endlich zur Integration der partiellen Differentialgleichung. Hiernach hatte also Hamilton durch seine Zurückführung der Differentialgleichungen der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung das Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt; denn nach Pfaff erfordert die Integration einer partiellen Differentialgleichung die Integration einer Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, während das mechanische Problem nur die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Es war daher hier die umgekehrte Zurückführung von größerer Wichtigkeit, wonach eine partielle Differentialgleichung sich auf ein einziges System von Differentialgleichungen zurückführen läßt. Das erste Pfaffsche System stimmt nämlich mit dem, auf welches die Mechanik führt, überein, und es läßt sich nachweisen, daß die übrigen Systeme alsdann entbehrt werden können. So wie in diesem Falle kehrt sich die Zurückführung eines Problems auf ein anderes sehr häufig um, indem der Fortschritt der Wissenschaft das erste zum zweiten macht und umgekehrt. Das Wichtige in solchen

Zurückführungen ist der Zusammenhang, der zwischen zwei Problemen nachgewiesen wird. Der in Rede stehende Zusammenhang läßt erkennen, daß jeder Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch einen Fortschritt in der Mechanik herbeiführen muß. Ein tieferes Studium der Differentialgleichungen der Mechanik zeigt, daß die Anzahl der Integrationen sich immer auf die Hälfte zurückführen läßt, während die andere Hälfte durch Quadraturen ersetzt wird."

„Es gibt ein merkwürdiges Theorem, welches zeigt, daß ein qualitativer Unterschied zwischen den Integralen stattfindet. Während nämlich einige Integrale nicht mehr Bedeutung haben als Quadraturen, gibt es andere, welche für alle übrigen zusammengenommen gelten können. Dies Problem läßt sich folgendermaßen aussprechen: Kennt man außer dem durch das Prinzip der lebendigen Kraft gegebenen Integral noch zwei Integrale der dynamischen Gleichungen, so kann man aus diesen beiden ein drittes finden. Ein Beispiel hiervon sind die sogenannten Flächensätze in bezug auf die drei Koordinatenebenen; gelten von diesen zwei, so läßt sich der dritte daraus ableiten. Hat man nach dem angeführten allgemeinen Satze aus zwei Integralen ein drittes gefunden, so läßt sich hieraus und aus einem der früheren ein viertes finden usw., bis man auf eins der gegebenen zurückkommt. Es gibt Integrale, welche bei dieser Operation das ganze System der Integralgleichungen erschöpfen, während bei andern sich der Zyklus früher schließt. Dieses Fundamentaltheorem ist schon seit 30 Jahren zugleich gefunden und verborgen. Es rührt nämlich von Poisson her und war auch Lagrange bekannt, der in dem erst nach seinem Tode erschienenen zweiten Teile der Mécanique analytique dasselbe als Hilfssatz brauchte. Aber dieser Satz ist immer in einer ganz andern Bedeutung genommen worden; er sollte nur zeigen, daß in einer Entwicklung gewisse Glieder unabhängig von der Zeit seien,

und es war keine geringe Schwierigkeit, in demselben seine heutige Bedeutung zu sehen. In diesem Satz liegt zugleich das Fundament für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung."

Jacobi stellt nun zunächst die Differentialgleichungen der Bewegung auf, führt die Kräftefunktion ein, und beschäftigt sich sodann mit dem Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, wobei er hervorhebt, daß das Wort „Erhaltung" sich darauf bezieht, daß die Bewegung des Schwerpunktes durch dieselben Gleichungen dargestellt wird, als wenn keine Bedingungsgleichungen da wären. Eine weitere Vorlesung behandelt das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft, besonders auch für den Fall, daß die Kräftefunktion eine homogene Funktion der Koordinaten ist, überträgt dasselbe auf die Entfernungen der Punkte voneinander und schließt mit der Entwicklung der Bedingungen für die Stabilität des Weltsystems. Bei der Behandlung des Prinzips der Erhaltung der Flächenräume wird wieder hervorgehoben, daß zwei Flächensätze den dritten nach sich ziehen, und bei der Untersuchung der Lage der unveränderlichen Ebene nachgewiesen, daß, wie aus dem Satze der lebendigen Kraft die Stabilität des Weltsystems rücksichtlich seiner Dimensionen abgeleitet wird, das Prinzip der Flächen und die Existenz der unveränderlichen Ebene dazu benutzt werden kann, die Stabilität desselben rücksichtlich der Form seiner Bahnen zu beweisen, indem die Exzentrizitäten der Planetenbahnen sich nur zwischen gewissen Grenzen verändern können. Es folgt die Jacobi eigentümliche Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung und die eingehende Erörterung des Begriffes eines Grenzwertes. Nach einer genauen Diskussion der Lagrangeschen Multiplikatoren wird das Hamiltonsche Integral und die zweite Lagrangesche Form der dynamischen Gleichungen besprochen, woran sich die Entwicklung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und die

Theorie des Prinzips des letzten Multiplikators anschließt, welche erst später in ausführlicher Darstellung von Jacobi veröffentlicht wurde.

Nach einer Zusammenstellung derjenigen Determinanteneigenschaften, welche in der Theorie des letzten Multiplikators benutzt werden, und einiger Sätze über die Variation der Determinanten wird die Anwendung auf die Bestimmung des Multiplikators für Systeme von Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen gemacht, die Funktionaldeterminanten und ihre Benutzung zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichung für den Multiplikator behandelt, die zweite Form der den Multiplikator definierenden Gleichung entwickelt und die Multiplikatoren der stufenweise reduzierten Systeme von Differentialgleichungen hergeleitet, sowie die Herstellung des Multiplikators bei Benutzung partikulärer Integrale erörtert. Zu der Aufsuchung des Multiplikators für ein freies System materieller Punkte werden als Beispiele die Anziehung eines Punktes nach einem festen Zentrum im widerstehenden Mittel und im leeren Raum durchgeführt. Jacobi schließt hieran die Herleitung des Multiplikators für die Bewegungsgleichungen unfreier Systeme in der ersten Lagrangeschen sowie in der Hamiltonschen Form und schreitet dann zur Aufstellung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung und ihrer Anwendung auf die isoperimetrischen Probleme. Er zeigt, daß die aus einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung abgeleiteten Integralgleichungen dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen wirklich genügen, betrachtet den Fall der freien Bewegung besonders und untersucht die Form der Hamiltonschen Differentialgleichung für den Fall, daß in der Kräftefunktion die Zeit nicht explizite vorkommt.

Lagranges Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen behandelt nun Jacobi eingehend und wendet

dieselbe auf die mechanischen Probleme an, welche nur von zwei Bestimmungsstücken abhängen, wozu er als Beispiele die freie Bewegung eines Punktes in der Ebene und die kürzeste Linie auf einer Oberfläche benutzt. Nach einer Reduktion der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für diejenigen Probleme, in welchen das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts gilt, wird die Hamiltonsche Methode zur Bestimmung der Bewegung eines Planeten um die Sonne benutzt, und die Lösung in Polarkoordinaten, zugleich aber auch durch Einführung der Abstände des Planeten von zwei festen Punkten entwickelt. Nachdem zum Zwecke der Behandlung mechanischer Probleme mittels elliptischer Koordinaten die geometrische Bedeutung derselben sowie die Anwendung derselben für die Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoids und die Rektifikation seiner Krümmungslinien erläutert worden, behandelt Jacobi mit Hilfe derselben die kürzeste Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid, das Problem der Kartenprojektion und die Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren. Es wird noch gezeigt, wie man durch Aufsuchung verschiedener vollständiger Lösungen der partiellen Differentialgleichung verschiedene Formen der Integralgleichungen des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erhält, und auf diesem Wege ein Beweis für das Abelsche Theorem geliefert, und nunmehr geht Jacobi zu allgemeinen Untersuchungen bezüglich der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und deren verschiedenen Integrationsmethoden über. Von den Sätzen über die simultanen Lösungen zweier linearen partiellen Differentialgleichungen werden Anwendungen auf die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, insbesondere für den Fall der Mechanik, gemacht und zugleich der Satz von dem aus zwei gegebenen Integralen der dynamischen Differentialgleichungen herzuleitenden dritten Integral entwickelt. Nachdem endlich noch die beiden Klassen von Integralen behandelt worden, welche man nach der Hamiltonschen Methode für die mechanischen Probleme erhält, und die ein Unterscheidungsmerkmal dafür liefern, ob der Poissonsche Satz zu neuen Integralen führt oder nicht, wird im Zusammenhange die Störungstheorie dargestellt.

Eine schwere Erkrankung hinderte Jacobi, seine Vorlesung zu Ende zu führen. „Bald nach der Rückkehr von seiner Reise nach London und Paris", sagt Dirichlet, „zeigten sich bei Jacobi die Symptome einer leider unheilbaren Krankheit — er schwebte längere Zeit in der größten Gefahr." Nach der Ansicht von Clebsch beabsichtigte er als Schluß der Vorlesung seine Methode der Integration nicht linear partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung vorzutragen, welche sich in einer der oben besprochenen, im Jahre 1838 verfaßten Aufzeichnungen vollständig ausgearbeitet unter seinen nachgelassenen Papieren vorgefunden hat. Clebsch hat in einem Anhange zur Dynamik von Jacobi unter dem Titel „Die Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung" die Lücke zu ergänzen gesucht.

Noch vom Anfange des Winters besitzen wir eine mit dieser Vorlesung im engsten Zusammenhange stehende Aufzeichnung, die aus seinen hinterlassenen Papieren mit Zusätzen und Ergänzungen unter dem Titel „Über die Curve, welche alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien eines Rotationsellipsoids berührt" von Wangerin veröffentlicht wurde.

Die geodätischen Linien liefern zwischen je zwei ihrer Endpunkte nicht den kürzesten Weg auf der Oberfläche für die ganze Länge ihrer Ausdehnung, wenn die Oberfläche, auf der sie sich befinden, geschlossen ist, so daß sie sich spiralförmig um dieselbe herumwinden. „Dies ist nicht bloß auf das absolute Minimum zu beziehen, sondern es gilt ebenso auch für das relative, d. h. es wird in den Fällen, in welchen eine kürzeste Linie nicht mehr die kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist, nicht bloß überhaupt andere kürzere geben, sondern es werden sich auch solche darunter befinden, die der Kurve während des ganzen Laufes unendlich nahe bleiben." Auf der Kugel z. B. ist der größte Kugelkreis wirklich kürzeste Linie, wenn die Länge des Bogens nicht 180° erreicht; beträgt der Bogen gerade 180°, so lassen sich unendlich viele gleich große Bogen ziehen, und beträgt der Bogen mehr als 180°, so wird man einen kürzeren Weg erhalten, wenn man von seinen Endpunkten nach irgendeinem Punkte der Kugeloberfläche zwei Bogen größter Kreise zieht, die kleiner als 180° sind, und da man den Kugelpunkt unendlich nahe legen kann, so ergibt sich weder ein Minimum noch selbstverständlich ein Maximum.

Da die von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien sich noch in einem zweiten Punkte schneiden und somit im allgemeinen eine Kurve berühren, so scheint sich dadurch ein Widerspruch zu ergeben, daß diese Linien in den Raum, den sie umhüllen, nicht eindringen können, man also zwischen dem Ausgangspunkte und einem in diesem Raume befindlichen Punkt keine kürzeste Linie ziehen kann, während es doch zwischen je zwei Punkten immer eine kürzeste Linie gibt. Um diesen scheinbaren Widerspruch aufzuklären, untersucht Jacobi jene Berührungskurve für das Erdsphäroid, bei welchem die Exzentrizität als eine sehr kleine Größe angenommen und deren höhere Potenzen vernachlässigt werden. Der von Jacobi ausgesprochene Satz, daß die kürzesten Linien nur von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte bis zu ihrem Berührungspunkte mit der Enveloppe wirklich relative Minima sind, wird von Wangerin bestätigt.

Noch in den Weihnachtsferien fühlte Jacobi sich ziemlich arbeitskräftig und nahm die durch die ungeheure wissenschaftliche Produktion unterbrochene Korrespondenz mit seinen Freunden wieder auf. Am 14. Januar 1843 schrieb ihm Lamé, für den sich Jacobi bei der Besetzung einer Pariser Professur sehr interessierte: „... Une ère nouvelle datera, dans l'histoire des mathématiques, de vos recherches, de celles d'Abel, et surtout de l'ouvrage, où vous avez si bien resumé la belle création des transcendantes elliptiques. Ces recherches ont d'abord été regardées par plusieurs bons géomètres comme prouvant uniquement la puissance de génie et la prodigieuse sagacité de leurs auteurs, mais comme devant offrir peu d'applications utiles ..."

Aus demselben Monat stammt wahrscheinlich auch eine Aufzeichnung, die Heine unter dem Titel „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird" veröffentlicht hat, und welche Überlegungen enthält, die Jacobi zum Teil schon im Jahre 1839 angestellt hatte. Sind a, a_1, a_2 unbestimmte Zahlen, $l_0, m_0, l_1, m_1, l_2, m_2, \ldots$ gegebene Größen, ferner $a + l_0 a_1 + m_0 a_2 = a_3$, $a_1 + l_1 a_2 + m_1 a_3 = a_4$, ... so kann man a, a_1, a_2 durch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} und umgekehrt in der Form ausdrücken $a = p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2}$, $a_1 = p_i' a_i + \cdots$, $a_2 = p_i'' a_i + \cdots$, und $a_i = P_i a + P_i' a_1 + P_i'' a_2$, $a_{i+1} = P_{i+1} a + \cdots$, $a_{i+2} = P_{i+2} a + \cdots$ Man sieht leicht, daß die Determinante des ersten linearen Gleichungssystems unverändert bleibt, wenn man den Index i um eine Einheit vermehrt, und sie wird daher, da sie für $i = 0, 1, 2$ den Wert 1 hat, stets diesen Wert haben. Wenn nun u_0, v_0, w_0 drei gegebene positive Größen sind, deren größte w_0 ist, so bestimme man l_0 und m_0 als die den Brüchen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ nächstkleineren ganzen Zahlen; setzt man dann $v_0 - l_0 u_0 = u_1$, $w_0 - m_0 u_0 = v_1$, $u_0 = w_1$, und bezeichnet ähnlich mit l_1 und m_1 die den Brüchen $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ nächstkleineren ganzen Zahlen usw.; bestimmt man so allgemein aus u_i, v_i, w_i die Größen l_i und m_i als die den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ nächstkleineren ganzen Zahlen und mit Hilfe derselben wieder u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}, so folgt $w_i > u_i$, $w_i > v_i$, mithin w_i immer als die größte der drei Zahlen u_i, v_i, w_i, und man erhält so mit Hilfe der den obigen analogen Beziehungen $u_i = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0$, ... und $u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i$, ... in den Brüchen $\frac{P'_{i+2}}{P_{i+2}}$, $\frac{P''_{i+2}}{P_{i+2}}$, welche denselben Nenner besitzen, zwei Näherungswerte für die Größen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$. Jacobi entwickelt nun die reellen Wurzeln einer kubischen Gleichung durch kettenbruchähnliche periodische Algorithmen ähnlich, wie die quadratischen Irrationellen durch periodische Kettenbrüche charakterisiert sind, nachdem er bereits im Jahre 1839 Dirichlet und Borchardt mitgeteilt hatte, daß man bei $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ nach einigen unregelmäßigen Anfangsgliedern zuletzt wirklich auf Perioden geführt wird.

Noch am 5. Februar war er imstande, der Berliner Akademie einen „Bericht über neue Entwicklungen in der Störungsrechnung" zu senden, in welchem er als Zweck derselben die Entwicklung der störenden Kräfte nach den Vielfachen der mittleren Anomalien bezeichnete, und den Mangel an Übersicht und Klarheit der Laplaceschen Entwicklungsmethode in betreff der Größen, welche man vernachlässigt, zu beseitigen suchte; „die Bestimmung der Koeffizienten durch doppelte mechanische Quadraturen, welche in vieler Hinsicht sich empfiehlt, ist eine ganz allgemeine Methode; man kann es gewissermaßen immer als etwas Übertriebenes ansehen, sich bei Behandlung eines besondern Problems einer allgemeinen Methode zu bedienen, und darf die Hoffnung nicht fahren lassen, es werde eine ganz bestimmte, grade für das besondere Problem passende Methode geben."

Nun aber brach Jacobi, der sich schon seit Beginn des Jahres krank gefühlt, völlig zusammen. „Jacobi ist seit mehreren Wochen unpäßlich", schreibt Bessel am

14. Februar 1843 an Gauss, „die nähere Veranlassung davon ist eine Erkältung, die an sich selbst wenig bedeutet und daher von uns für ein geringes Übel angesehen worden ist; allein sie hat ein länger vorhandenes weit ernsthafteres Übel deutlich hervortreten lassen — eine Harnruhr, die leider sehr oft zerstörend endigt." Jede ernstere Arbeit mußte zunächst aufhören, nur auf den beständigen mündlichen und brieflichen Verkehr mit Bessel, der sich jetzt viel mit Kugelfunktionen beschäftigte und zu den ältesten Arbeiten Jacobis aus dem Jahre 1826 seine Zuflucht nahm, wollte er nicht verzichten; „welch' liebenswürdige Abhandlung", schreibt ihm Bessel am 28. März, „ist die in Crelle II. S. 223! Oben S. 225 findet sich eine kostbare Formel, welche alles Erforderliche leistet ... Also ist auch das Potential eines beliebigen Rotationssphäroids durch Ihre Formel in aller Schärfe auszudrücken."

Dirichlet erhielt sogleich ausführliche Nachrichten über den wahren Charakter der Krankheit und wurde von den schwersten Besorgnissen für die Zukunft seines großen Freundes ergriffen. Am 26. März schreibt er ihm: „Da Sie als Reconvalescent auf schmale Kost gesetzt sein und auch nicht die Erlaubniß haben werden, viel zu arbeiten, so denke ich mir, daß der Umgang mit mir eine passende Nahrung für Sie sein würde, und frage daher bei Ihnen an, ob Sie nichts dagegen haben, daß ich in den bevorstehenden Ferien auf etwa 14 Tage nach Königsberg komme. Ich erbitte mir hierüber Ihren baldigen ganz freimüthigen Bescheid und füge nur noch hinzu, daß, wenn ich Ihnen jetzt nicht gelegen bin, ich dies nur als einen Aufschub betrachten werde und dann für nächsten Herbst auf einige privatissima am Strande der Ostsee rechne."

Auf die freundliche Einladung Jacobis und dessen Frau reiste Dirichlet sogleich nach Königsberg und verweilte 14 Tage bei seinem Freunde, dem er nach seiner Rückkehr am 19. Mai schrieb: „Daß ich seit beinah 3 Wochen heimgekehrt, Ihnen noch nicht geschrieben und Ihnen und Ihrer verehrten Gattin für den überaus angenehmen und erquicklichen Aufenthalt in Ihrem Hause noch nicht gedankt habe, hat darin seinen Grund: Der erschöpfende Bericht des Herrn Prof. Cruse ist erst 8 Tage nach meiner Rückkunft hier eingetroffen; ohne Zeitverlust habe ich denselben Schönlein übergeben und von diesem erst gestern die beiliegende gutachtliche Äußerung erhalten, der ich nach mündlicher Mittheilung noch Folgendes beizufügen beauftragt bin: Schönlein ist der Meinung, daß Sie vor Ende August über die Alpen gehen, um sich in den folgenden 2 Monaten in Oberitalien zu acclimatisiren und den Winter im Süden zubringen. Er wünscht aber, daß Sie sich vor Ende oder vielmehr gegen die Mitte des Monats Juni hier einfinden. Außerdem hat er hinzugefügt, daß, wenn Sie hinsichtlich der zu unternehmenden Reise an Sn. Majestät den König ein Gesuch richten, Sie sich in demselben auf ihn berufen möchten ..."

Einige Tage vorher hatte Jacobi seinem Bruder in Petersburg mitgeteilt, daß er schwer leide; „übrigens habe ich den ganzen Winter meine diesmal großen und schwierigen Vorlesungen über meine neuen Methoden der analytischen Mechanik gehalten. Auch geht es eigentlich mit dem Arbeiten ziemlich, aber bloß hier und da herumzuwühlen, wogegen ich den absolutesten Widerwillen habe, irgend etwas auszuarbeiten ...! Dirichlets 16tägiger Aufenthalt ist mir eine große Erquickung gewesen ... er hat etwa 60 Bogen Zahlentheorie von mir mitgenommen, um zu sehen, wie viel noch bis zur Herausgabe dabei zu thun ist; denn ich bin ganz außer Stande, so etwas jetzt auch nur anzusehen ... Ich schicke für die Petersburger Akademie eine kleine Note mit, welche die ganze Theorie der Abelschen Transcendenten auf den Kopf stellt."

Die seinem Bruder geschickte Note erschien in der Petersburger Akademie als „Extrait d'une lettre de Mr.

Jacobi à Mr. Hermite" unter dem Titel „Note sur les fonctions Abéliennes", in welcher er zeigt, daß, wenn $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x)$, X vom 5. oder 6. Grade und $\Pi(x) + \Pi(y) = u$, $\Pi_1(x) + \Pi_1(y) = v$ gesetzt werden, und man die hierdurch bestimmten Größen, wenn $v = 0$ mit x', y', wenn $u = 0$ mit x'', y'' bezeichnet, sich aus den hieraus folgenden Beziehungen $\Pi(x') + \Pi(y') + \Pi(x'') + \Pi(y'') = u = \Pi(x) + \Pi(y)$ und $\Pi_1(x') + \Pi_1(y') + \Pi_1(x'') + \Pi_1(y'') = v = \Pi_1(x) + \Pi_1(y)$, worin x und y algebraische Funktionen von x', y', x'', y'' sind, ergibt, daß die Umkehrungsfunktionen $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ sich algebraisch durch die vier Funktionen $\lambda(u, 0)$, $\lambda(0, v)$, $\lambda_1(u, 0)$, $\lambda_1(0, v)$ ausdrücken lassen. Eine spätere hierauf bezügliche, ein wenig unklare Bemerkung Eisensteins, daß man, wie die sin am der Quotient von zwei Transzendenten ist, für die Abelschen Funktionen als Umkehrungsfunktionen den Quotienten von Quotienten betrachten müsse, berichtigt Jacobi in einer Nachschrift vom Oktober 1845, aus der Schumacher am 29. Dezember 1845 in einem Briefe an Gauss nichts weiter mitzuteilen weiß als: „in dem letzten Stücke von Crelle's Journal sehe ich einige Bemerkungen Jacobi's gegen Eisenstein, die eben nicht auf ein besonders freundschaftliches Verhältniß schließen lassen."

Am 20. Mai suchte Dirichlet Humboldt in Potsdam auf, um ihn für die vom Könige zu bewilligende Reiseunterstützung zu interessieren, und Humboldt schreibt schon am 28. Mai an Jacobi:

„Bei dem Namen, den Sie edler Freund und College verherrlicht haben, bei dem europäischen Antheil an Ihren Leiden, bei den edlen menschlichen Gesinnungen des Königs, der sich erinnert, wie Ihr und unseres Bessels Auftreten in England und Frankreich im verflossenen Jahre den vaterländischen Ruhm erhöht und erweitert haben, ist es mir leicht gewesen, Ihren Wunsch zu erfüllen. Ich erhielt gestern morgen (Sonnabend d. 27.) Ihre theuren Zeilen. Da wir hier wegen Anwesenheit des ganzen Mecklenburg-Schwerinschen Hofes wie der Leuchtenberge in großer Agitation leben, so konnte ich (obgleich im Schlosse wohnend) nur an den König schreiben, wie es mir mein Herz eingab. Es geschah in derselben Stunde; ich hatte einen sehr mäßigen Geldvorschlag gemacht, bis 1500 Thaler. Schon vor Tisch war die Bewilligung an den Staatsminister von Thiele abgegangen. Der König sagte mir am Abend, er berechtige Sie, bis auf zweitausend Thaler zu rechnen, es solle Ihnen ein Credit auf 2000 Thaler zur Italienischen Reise eröffnet werden, er habe größte Beschleunigung anbefohlen. Als ich beim Schlafengehen ihm nochmals dankte, setzte er hinzu: wie konnten Sie glauben, ich würde anders handeln? Über das Formelle des kleinen Finanzgeschäfts kann ich Ihnen nichts sagen, da Herr v. Thiele nicht hier ist, und ich den König gestern Abend nicht durch Fragen plagen wollte. Treten Sie ja bald, recht bald Ihre Reise an und empfangen Sie den Ausdruck meiner herzlichsten, sehnlichsten Wünsche. Ich fürchte die Post zu verfehlen. Sagen Sie unserm Bessel, dem ich tief verschuldet bin, die süßesten Worte von mir. Er und ich, wir wollen Ihren Muth stärken..."

Schon am folgenden Tage, den 29. Mai, schrieb der König aus Sanssouci an Jacobi:

„Mit lebhaftem Bedauern habe ich von Ihrem mißlichen Gesundheitzustande Kenntniß erhalten, zu meiner Beruhigung aber auch zugleich die Versicherung, daß Sie von dem Aufenthalte in einem milderen Klima Ihre gänzliche Wiederherstellung erwarten dürfen. In der Voraussetzung, daß Sie sich hierzu baldmöglichst entschließen werden, habe ich den Oberpraesidenten Bötticher autorisirt, Ihnen zur Bestreitung der Reisekosten mit den nöthigen Mitteln zu Hülfe zu kommen und wünsche den besten Erfolg dieser Reise. Friedrich Wilhelm."

Der Entschluß Jacobis, dem Rate Schönleins zu folgen, war unmittelbar gefaßt, und die Abreise für den Anfang des Juli festgesetzt; schon die Aussicht auf einen längeren Körper und Geist stärkenden Aufenthalt gab Jacobi wieder Mut zur Arbeit und Lust zum Dozieren. Wiewohl er für den Sommer gar keine Vorlesungen mehr angekündigt, konnte Seidel doch am 27. Mai seinen Eltern berichten: „Prof. Jacobi wird uns nun doch noch ein Privatissimum lesen, und zwar kann ich sagen, daß dies recht eigentlich mir zu Ehren geschieht, obwohl auch Heine es hören wird; er wird nämlich darin die Grundzüge seiner Methoden zur Bestimmung der Störungen in den Bewegungen der Himmelskörper geben, und überhaupt diejenigen Sachen, von welchen er wünscht, daß ich sie nachher weiter ausarbeite und zum Druck redigire. Man kann dies daher kein eigentliches Colleg nennen, sondern er giebt ihm nur diesen Titel, um wenigstens der Form nach auch in diesem Semester an der Universität thätig zu sein; die Stunde ist jetzt auf Montag 3—4 festgesetzt, in seinem Hause, doch so, daß er sich nicht allzusehr an diese Stunde bindet, so wie er auch der Regel nach länger als bloß 1 Stunde vortragen wird."

Am 29. Mai sandte er eine Arbeit an Crelle betitelt „Über die Entwicklung des Ausdrucks $\left(a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2\right)^{1/2}$", deren Inhalt im wesentlichen im folgenden Jahre in dem Giornale Arcadico unter dem Titel „Sopra le funzioni di Laplace, che risultano dallo sviluppo dell' espressione $\left(a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2\right)^{-\frac{1}{2}}$" reproduziert wurde. Von der Beziehung ausgehend

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{A + iB\cos\eta + iC\sin\eta}$$

beweist Jacobi den von Legendre gegebenen Satz, daß, wenn

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}} = \dfrac{1}{a} + X_1\dfrac{a'}{a^2} + X_2\dfrac{a'^2}{a^3} + \cdots$, und P_n dieselbe Funktion von ω wie X_n von φ ist, die Entwicklung gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2}} =$$

$\dfrac{1}{a} + P_1 X_1 \dfrac{a'}{a^2} + P_2 X_2 \dfrac{a'^2}{a^3} + \cdots$, worauf die Untersuchungen von Laplace über die Entwicklung der Funktionen zweier Winkel beruhen, und leitet hieraus nach jetzt allgemein bekannten funktionentheoretischen Methoden durch Reihenentwicklung die Beziehung her $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos m\eta\, d\eta}{(\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta)^{n+1}}$

$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta)^n \cos m\eta\, d\eta$$

$$= (-1)^m 2^{-n}\,\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n)}\,\sin^m\omega\,\frac{d^{n+m}(p^2-1)^n}{dp^{n+m}},$$ worin $p = \cos\omega$ und $n \geqq m$ ist.

Ein von Bruns veröffentlichtes Bruchstück aus dem Nachlasse Jacobis stammt aus dieser Zeit, schließt sich in seinem 1. Teile der ebenerwähnten Arbeit an, und beschäftigt sich weiter mit der Entwicklung der Störungsfunktion, für welche er die der störenden Kräfte nicht nach den Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen ausführen und deren Koeffizienten auch nicht, was bisher in wenig naturgemäßer Weise geschehen, durch doppelte mechanische Quadraturen bestimmen will. Er findet, wenn E und E' die beiden exzentrischen Anomalien und ϱ die gegenseitige Distanz der beiden Planeten bezeichnet,

$$\varrho = \sqrt{a + b\cos E + c\sin E + d\cos E' + e\sin E' + f\cos E\cos E' + g\cos E\sin E' + h\sin E\cos E' + i\sin E\sin E' + k\cos 2E + l\cos 2E'},$$

worin $a, b, \ldots$ auszurechnende Zahlenwerte sind, und erhält die Störungen der beiden Planeten durch die Integrale

$$\int (\partial a + \partial b \cos E + \partial c \sin E + \cdots) \frac{dt}{\varrho^3}, \quad \int \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial E} \partial E\, d t,$$

$\int \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial E'} \partial E' dt$ ausgedrückt, worin ∂a, ∂b, ... die Variationen der Größen $a, b, \ldots$, und daher durch die Variationen der Elemente, multipliziert in Zahlenwerte, darzustellen sind. Das Problem, die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien zu entwickeln, zerlegt er in zwei Teile, indem er diese Entwicklung zuerst in den exzentrischen Anomalien zu machen und dann diese nach den Besselschen Methoden in die mittleren umzusetzen sucht, und stellt zum Zwecke der Entwicklung der Integrale neue, „auf einem merkwürdigen und sehr allgemeinen, aus der Theorie der elliptischen Transzendenten entlehnten, Prinzipe beruhende Approximationsformeln“ auf. Jacobi berührt hier schon früher von ihm behandelte interessante Fragen über die Zurückführung von Doppelintegralen auf einfache und fügt in bezug auf die nach zwei Winkeln fortschreitenden Entwicklungsformen die Bemerkung hinzu: „Ich habe im vorigen Sommer einen solchen verallgemeinerten Algorithmus (ein kettenbruchähnlicher Algorithmus, welcher auf die Berechnung der Coefficienten der nach zwei Winkeln fortschreitenden Entwicklung Anwendung findet) auf die Kubikwurzeln ganzer Zahlen angewendet und die Algorithmen in den freilich nicht zahlreichen Beispielen, die ich berechnete, periodisch gefunden; zu gleicher Zeit erhält man dadurch die Auflösung der Gleichung $\left(x+y\sqrt[3]{n}+z\sqrt[3]{n^2}\right)\left(x+\alpha y\sqrt[3]{n}+\alpha^2 z\sqrt[3]{n^2}\right)$ $\left(x + \alpha^2 y\sqrt[3]{n} + \alpha z\sqrt[3]{n^2}\right) = 1$ in ganzen Zahlen. Eine Badereise hinderte mich, diese interessante Untersuchung zu verfolgen, und jetzt bin ich ganz davon abgekommen.“

Noch kurz vor seiner Abreise aus Königsberg sandte er am 12. Juni seine letzte Arbeit von dort aus an

Crelle, betitelt „Über die zur numerischen Berechnung der elliptischen Funktionen zweckmäßigsten Formeln“, zu der er durch Aufstellung von Tafeln zum Zwecke seiner Störungsrechnungen geführt worden. Er fügt zu den Formeln, die er in den Fundamenten aufgestellt, hier noch solche, welche zur Berechnung einzelner Werte oder von Tafeln vorzugsweise bequem sind, und leitet u. a. aus $tg\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} - x\right)$ $= \frac{(q-q^3)\sin 2x - (q^6-q^{10})\sin 4x + (q^{15}-q^{21})\sin 6x + \cdots}{1-(q+q^3)\cos 2x + (q^6+q^{10})\cos 4x - \cdots}$, indem er $q = b^8$ setzt, die Entwicklung her: $\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}+\sqrt{2(1+\varkappa')}}$ $= \frac{q-q^3-q^{15}-\cdots}{1-q^6-q^{10}-\cdots} = \frac{\Sigma \pm b^{(8h\pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8h\pm 1)^2}}$. Es werden sodann rasch konvergierende Ausdrücke für die ganzen Integrale 2. Gattung hinzugefügt, und endlich noch gezeigt, daß man bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vorteil die Gaussschen Tafeln anwenden kann, in welchen für einen in einer Kolumne als Argument gegebenen Wert von $\log x$ der Wert von $\log(1+x)$ in der anderen Kolumne sich findet.

Am 24. Juni zeigte Dirichlet Jacobi an, daß auch seine Frau den Winter in Italien zubringen werde, und am 3. Juli konnte Jacobi seinem Bruder zu seiner großen Freude melden: „Das Beste bei der Sache ist aber ein ausgezeichneter Begleiter, der mir geworden ist, ein junger, liebenswürdiger, talentvoller, unabhängiger und sehr vermögender Mathematiker Namens Borchardt, welchen ich gestern promovirt habe, und welcher dazu besonders nach Königsberg gekommen war. Dirichlet wird den ganzen Winter mit seiner Familie ebenfalls in Italien zubringen.“

Am 9. Juli trennte sich Jacobi schweren Herzens von seiner Familie, bei der er seine Mutter zurückließ. Er hielt sich zunächst einige Wochen in Berlin auf, wo er Schönlein konsultierte und viel mit seinen Freunden verkehrte, und trat in den ersten Tagen des August seine Reise in den Süden an. „... Aber zwei der interessantesten Tage", schreibt er seiner Frau aus Baden-Baden am 5. August, „habe ich in Gotha zugebracht mit dem dortigen Astronomen Hansen, vor dessen Charakter mir Bessel immer bange gemacht. Wir sind nämlich in der Theorie der himmlischen Störungen Nebenbuhler, freilich in der Art, daß er immerfort die umfassendsten Arbeiten darüber publicirt, und ich zu meinen Publicationen noch immer nicht gekommen bin. Es gab daher viele interessante Berührungspunkte; er entwickelte gegen mich große Freundlichkeit und Herzlichkeit; wenn mir irgend etwas auf meiner Reise zustieße, sollte ich zu ihm kommen und bei ihm wohnen, es wären die glücklichsten Tage seines Lebens gewesen ... Borchardt bekam, als er nach Gotha kam, einen schweren Ohnmachtsanfall ..."

Er und Borchardt trafen mit Dirichlet und Frau in Freiburg zusammen und reisten über den Splügen nach Chiavenna, besuchten den Comer See, den Lago Maggiore, Mailand, Genua, wo sie am 13. September eintrafen, und von wo aus Jacobi Bessel mitteilte, daß sich seine Gesundheit bedeutend gebessert habe, und von dort nach Florenz, wo Jacobi mehrere Wochen verweilte. „Heute Abend", schreibt Frau Dirichlet ihrer Schwester, „sind wir bei Jacobi und Borchardt auf Cigarren und Wiener Flügel eingeladen, mit obligatem Mondschein; sie haben eine Terrazza nach dem Arno ... Die Soirée bei Borchardt sehr magnifique ... Jacobi reist auf Verkündigungen, womit er sehr geneckt wird ..." Diese Bemerkung bezog sich auf Jacobis Besuch der Naturforscherversammlung in Lucca, von der er seiner Frau eine kurze Schilderung gab: „... Von namhaften Gelehrten, die mich interessirten, waren nur Melloni, Morsotti, Matteucci, Carlini, Bianchi da. Ich hatte die Kühnheit einmal eine Vorlesung in französischer Sprache zu improvisiren; es schien mir Sache der Artigkeit irgend eine Mittheilung zu machen, und etwas

aufzuschreiben hatte ich weder Zeit noch Ruhe. Man erkannte dies auch durch Beifallklatschen an, als ich auftrat. Bei den mancherlei Ehrenbezeigungen, die mir hier widerfahren, ist es eine unliebliche und abkühlende Bemerkung, daß vielleicht in ganz Italien nicht ein einziger ist, der auch nur eine Zeile von meinen Arbeiten gelesen hat; sie sprechen es alle den Franzosen nach, und mein ganzer Ruhm, da man die alte Legendre'sche Geschichte nicht mehr kennt, rührt von den viel verbreiteten Comptes rendus her, welche die Pariser Akademie von ihren Sitzungen herausgiebt, und worin meine Arbeiten häufig citirt werden ... Bei mir kommt nun noch die ewige Verwechslung mit Moritz hinzu: 'Monsieur, nous avons ici dans notre Musée un jeune homme, qui s'est beaucoup occupé de vos procédés de dorure', 'Pardon, Monsieur, je ne suis pas moi, je suis mon frère' ... Den letzten Tag in Lucca und auf der Fahrt nach Pisa beschlossen wir, daß auch Borchardt dort mit einer Vorlesung debutiren sollte; es wurden daher 2 Tage in Pisa dazu von ihm angewandt, einen französischen Auszug aus seiner Doctorarbeit zu machen, während ich mich von dem trouble in Lucca erholte und einmal wieder für mich einige mathematische Formeln kritzelte. Ich ließ Borchardt allein nach Lucca zurückfahren, wo er alles vortrefflich abmachte."

Am 16. November traf Jacobi in Rom ein.

„Als Jacobi, von einer gefährlichen Krankheit erfaßt, auf Anraten der Ärzte zu seiner Wiederherstellung das mildere Klima Italiens aufsuchen mußte", sagt Kummer in seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet, „ergriff Dirichlet, der schon seit längerer Zeit eine Reise nach Italien beabsichtigt hatte, die Gelegenheit, mit Jacobi zusammen einen Winter in Rom zu verleben, und reiste im Herbste des Jahres 1843 mit seiner ganzen Familie dahin ab. Da zugleich auch unsere Kollegen Herr Steiner und Herr Borchardt diesen Winter in Rom zubrachten, so war die deutsche Mathematik in dieser Zeit dort sehr glänzend und vielseitig vertreten ... Das gemeinschaftliche Interesse der Erkenntnis der Wahrheit und der Förderung der mathematischen Wissenschaften blieb die feste Grundlage des freundschaftlichen Verhältnisses, in welchem Jacobi und Dirichlet hier zusammen lebten. Sie sahen sich fast täglich und verhandelten miteinander allgemeinere oder speziellere wissenschaftliche Fragen, deren geistvolle Erörterung gerade durch die Verschiedenheit der Standpunkte, von denen aus beide das Gesamtgebiet der mathematischen Wissenschaften überschauten, ein stets neues und lebendiges Interesse behielt. Jacobi, der durch die wunderbare Fülle seines Geistes nicht minder als durch die Tiefe seiner mathematischen Forschungen und den Glanz seiner Entdeckungen sich überall die ihm gebührende Anerkennung zu erwecken wußte, genoß damals einen weit ausgebreiteteren Ruf als Dirichlet, der die Kunst, sich selbst geltend zu machen, nicht besaß, und dessen hauptsächlich nur die schwierigsten Probleme der Wissenschaft behandelnde Schriften einen weniger ausgebreiteten Kreis von Lesern und Bewunderern hatte."

Der erste Brief Jacobis aus Rom an seine Frau ist vom 9. Dezember 1843 datiert und schildert in lebendigen Farben den dortigen Aufenthalt; Steiner ist sein steter Begleiter bei der Besichtigung der Kunstsammlungen, mittags treffen sie mit Borchardt zusammen, abends wird der Tee bei Dirichlet genommen. „Endlich kam noch unser hiesiger Leibmathematiker, der Abbé Tortolini, der das in meinen Augen große Verdienst hat, alle meine Arbeiten zu kennen, und garnicht weiß, wie er seine Freude und Verehrung an den Tag legen soll, auch mir alle italienischen Werke, nach denen ich frage, gleich schenkt, so daß Richelot mit Neid erfüllt werden würde, wenn er hört, daß ich so die beiden Bände Fagnano, Ruffini's Werk über die Gleichungen, Mascheroni's Anmerkungen zu

Euler's Integralrechnung, Bücher, die ich mir lange gewünscht, unter andern geschenkt bekommen habe ... Borchardt trägt am Abend italienische Lieder vor, wirkt auch bei öffentlichen Concerten mit ... Die Vergolder hier sind ganz untröstlich, daß ich nicht Moritz bin. Man kann wirklich sagen, daß populärer berühmt jetzt nicht so leicht jemand ist ..."

In allen Kreisen der römischen Gesellschaft genoß der große Mathematiker das verehrungsvollste Entgegenkommen; auch zum Papste Gregor XVI wurde er befohlen.

„Von den Mathematikern, welche ich auf meiner Reise kennen lernte", schreibt er am 16. Januar 1844 an Bessel, „war nicht der uninteressanteste der Pabst, bei dem Dirichlet und ich eine Audienz von über einer halben Stunde hatten, die der 79jährige heitere und rüstige Mann stehend absolvirte. Da Sie eine Schwäche für gekrönte Häupter haben (wie denn Herr von Goethe schon richtig in einem Carmen sagt: Aus der Welt ist derzumalen Übermacht nicht zu verbannen. Mir gefällt es zu verkehren mit Gescheuten und Tyrannen), so werden Sie unsere Bewunderung gewiß theilen, wenn Sie hören, daß er nicht nur von Newton, Kepler, Copernicus, Laplace mit großer Theilnahme sprach, sondern genau anzugeben wußte, daß sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der mittleren Entfernungen verhalten. Es war interessant, daß er von Copernicus mit der größten Bewunderung sprach, doch schien er sein System für noch nicht streng bewiesen zu halten, sondern wollte, daß es dieses wäre, nur zugestehen, wenn man eine Parallaxe eines Fixsternes entdeckt hätte. Es war ihm und mir daher interessant, ihm sagen zu können, daß ein berühmter Landsmann von mir durch jahrelange unermüdliche und scharfsinnige Arbeit eine solche entdeckt und nach dem einstimmigen Urtheile aller Astronomen (beim Pabst muß man immer auf Autoritäten zurückgehen) außer Zweifel gestellt hätte. Dieselbe Gunst wie Copernicus schien bei ihm Galilei noch nicht zu theilen, vermuthlich weil in der neuesten Zeit wieder vielfältig seine Geschichte zum Angriff auf die Päbste benutzt worden. Er führte sogar mit einer Art von sehr unpatriotischem Triumphe an, Kepler sei dem Galilei in Entdeckung der Umdrehung der Sonne um ihre Axe um 15 Jahre zuvorgekommen. Auch Halley und die Kometen ließ er nicht unerwähnt und citirte viele lateinische Verse zu Newton's Ehre; als ich ihm erzählte, daß der Astronom und ehemalige sächsische Premierminister v. Lindenau in Rom sei, war er so ungalant gegen Sachsen, ein dictum Kepler's zu citiren, daß ihm eine astronomische Wahrheit lieber als das Kurfürstenthum Sachsen sei. Damit Sie aber nicht glauben, daß sich Gregor XVI bloß mit Anwendungen beschäftigt, so sprach er auch über die verschiedenen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, wie die Beweise durch Proportion zwar einfacher, aber den Kindern die anderen mit Constructionen weit einleuchtender seien. Kurz Sie werden es billigen, wenn ich einem so einsichtigen Mann voll Verehrung die Hände küßte, während Dirichlet als Katholik einige so ungeschickte Versuche machte, ihm die Füße zu küssen, daß der Pabst es nicht dazu kommen ließ."

Jacobi fühlte, daß sich sein Gesundheitszustand während des Aufenthaltes in Rom wesentlich besserte, und er dachte mit einer gewissen Angst und Verzagtheit an eine etwaige Rückkehr nach Königsberg; da erhielt er am 9. Februar eine Mitteilung aus Berlin, die ihn in freudige Aufregung versetzte. „Ich erhalte soeben", schreibt er seiner Frau, „von Dr. Philipp, Schönlein's Gehülfen, einen Brief, der folgende Worte enthält: Ich bin von Schönlein beauftragt, E. H. zu melden, daß jetzt kein Grund Ihrerseits mehr vorhanden ist, die Rückkehr nach Königsberg zu fürchten, da bei dem Könige Ihre Versetzung nach Bonn eine fast beschlossene Sache. Erst vor einigen Tagen hätte der König

über diese Angelegenheit mit ihm gesprochen und dabei geäußert, er sei nicht egoistisch genug, um Sie in Berlin zurückzuhalten, woselbst das Klima nach Schönlein's Dafürhalten, wenn auch weniger ungünstig, wie das Königsberger, doch gewiß nicht so wohlthätig auf Ihren Zustand einwirken würde wie das Klima in Bonn. Herr von Humboldt wird wohl schon E. H. von dieser Entscheidung des Königs Kenntniß gegeben haben. — Da ich von dieser Sache nicht mehr als Du weiß, so bin ich dadurch sehr überrascht worden, aber angenehm, da ich etwas Königsbergmüde bin . . ."

Mit der Besserung seines körperlichen Befindens erwachte auch sogleich wieder die Lust zu erneuter wissenschaftlicher Arbeit. „Er schrieb", sagt Dirichlet, „nicht nur während der fünf Monate seines Aufenthaltes in Italien außer mehreren kleinen Aufsätzen, welche in einer wissenschaftlichen Zeitschrift in Rom selbst erschienen, eine wichtige sehr umfangreiche für das Crellesche Journal bestimmte Abhandlung, sondern unternahm auch die Vergleichung der im Vatikan aufbewahrten Handschriften des Diophantus, mit welchem er sich seit längerer Zeit angelegentlich beschäftigt hatte."

Am 7. März 1844 veröffentlichte er im Giornale Arcadico eine „Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell' equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second' ordine" betitelte Arbeit, in welcher er auf das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Grades näher eingeht, wonach man durch die Substitutionen $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $p' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$, $p'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$ den Ausdruck $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$ in $Gp^2 + G'p'^2 + G''p''^2$ transformieren kann, und wofür Kummer gezeigt hat, daß sich der Ausdruck $(G' - G'')^2 (G'' - G)^2 (G - G')^2$ in die Summe von sieben Quadraten ganzer Funktionen der Koeffizienten $A, B \ldots$ umwandeln läßt. Um die Natur dieses Resultats besser hervortreten zu lassen, drückt Jacobi die Basis eines jeden dieser sieben Quadrate als Funktion der Größen G, G', G'' und der Substitutionskoeffizienten aus, woraus sich das Resultat unmittelbar ergibt, indem jeder der sechs Basisausdrücke gleich ist $(G' - G'')(G'' - G)(G - G')$ multipliziert mit einer Funktion der Substitutionskoeffizienten.

In demselben Journal lieferte er am 16. März eine kurze Inhaltsangabe seines in Lucca gehaltenen Vortrages unter dem Titel „Sul principio dell' ultimo moltiplicatore, e suo uso come nuovo prinzipio generale di meccanica", in welchem er das weittragende Theorem verkündet hatte, dessen Ausführung den Gegenstand einer späteren großen Arbeit im Crelleschen Journal bildet: Wenn $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ vorgelegt und M irgendeine Größe, welche der Gleichung $\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0$ genügt, wenn ferner für das Differentialgleichungssystem alle Integrale mit Ausnahme eines gefunden, und man benutzt die Integralgleichungen $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1, \ldots u_{n-2} = \alpha_{n-2}$, worin $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-2}$ willkürliche Konstanten bedeuten, zur Elimination der Variabeln, so daß $u_i = \alpha_i$ die Gleichung zwischen den Variabeln $x, x_1, \ldots x_{n-i}$ ist, welche zur Elimination von x_{n-i} dient, so wird der Multiplikator der letzten Differentialgleichung $X_1 dx - X dx_1 = 0$ durch den Ausdruck $\mu = \frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}}$ gegeben sein, worin sich vermöge der gefundenen Integrale die Größen X, X_1, μ durch die Variabeln x, x_1 ausdrücken lassen; für die Hamiltonsche Form der Differentialgleichungen der Mechanik ist $M = 1$, und daraus folgt die Anwendung des letzten Multiplikators zur Herstellung des letzten Integrales.

Durch die Briefe seines Hausarztes Professor Cruse wurde Jacobi in Italien auf dem Laufenden bezüglich der Vorkommnisse an der Universität und des Befindens der Seinigen

erhalten und durfte sich, wenn auch hin und wieder nicht unbedeutende Erkrankungen seiner Kinder ihn beängstigten, doch im allgemeinen ruhigen Gemütes nicht bloß der Arbeit, sondern auch dem Genusse der Natur und der Kunst hingeben, und besprach in vielen und ausführlichen hochinteressanten Briefen mit staunenswertem Verständnis die Kunstschätze Roms. Am 11. April schildert er seiner Frau in lebendigen Farben die Tollheiten des römischen Karnevals, „nur Borchardt ging ganz in diesen Wogen auf und unter; es war wirklich ein Vergnügen, einen Menschen zu sehen, dem die Götter gewährt haben, über die gewöhnliche Zeit so jung zu bleiben — denn er wurde in dieser Zeit 27 Jahr. Er konnte garnicht begreifen, wie man einen andern Gedanken haben könnte . . ."

Ende April ging nun Jacobi in Begleitung von Steiner nach Neapel, wo er drei Wochen verblieb, um all die herrlichen Punkte der näheren und weiteren Umgegend aufzusuchen, verweilte auf der Rückreise noch einige Tage in Rom, mußte sodann wegen stürmischen Wetters und seine Gesundheit gefährdender Seekrankheit einen Teil des Weges nach Genua zu Lande zurücklegen und gelangte über Genf, Basel, Straßburg nach Frankfurt. Von hier aus schreibt er am 13. Juni seiner Frau: „Einen Tag vor meiner Abreise nach Neapel zeigte Melloni mir und Steiner die Hauptexperimente in seinen berühmten Wärmeentdeckungen, wo er in der Wärme das der Reflexion, Brechung und den Farben des Lichtes etc. etc. analoge nachweist, und hätte ich gewünscht, mehr von diesen Dingen zu verstehen . . . In Rom holte ich noch einiges Versäumte nach, meine Zeit wurde aber sehr dadurch verkürzt, daß mich Kaselowski noch einmal malte, obgleich mir das frühere Bild jetzt viel besser gefiel . . ."

Ende Juni traf Jacobi wieder in Berlin ein, und Gauss, dem von einem Freunde über das Befinden Jacobis Bericht erstattet war, schrieb am 7. Juli an Schumacher: „Seiner