Nach dieser Einleitung geht nun Jacobi unmittelbar zur Definition der ϑ-Funktion als einer Summe von Exponentialgrößen mit Exponenten, welche die Glieder einer arithmetischen Reihe 2. Ordnung bilden, über, führt die vier verschiedenen ϑ-Funktionen ein und entwickelt deren wesentlichste Eigenschaften, ihre Darstellung durch unendliche Reihen und Produkte, leitet durch Transformation derselben eine Reihe der früher von ihm gefundenen zahlentheoretischen Sätze ab, und untersucht endlich noch die Periodizitätsbeziehungen der mit einer Exponentialgröße, deren Exponent in der Variabeln quadratisch ist, multiplizierten ϑ-Funktionen. Der zweite Teil der Vorlesung beginnt mit der Entwicklung seiner berühmten Relation zwischen den Produkten von vier ϑ-Funktionen; aus den sich hieraus ergebenden Formeln werden die Additionstheoreme der ϑ-Funktionen hergeleitet, und nachdem der Übergang zu den elliptischen Funktionen vollzogen, die Eigenschaften dieser ausführlich behandelt und die Theorie der Integrale 2. und 3. Gattung angeschlossen. Die 36., 37. und 38. Vorlesung beschäftigt sich mit der Theorie der Transformation 1. und 2. Grades der elliptischen Funktionen, während die letzte, die 39. Vorlesung, noch eine kurze Andeutung von der Behandlung der Transformation n. Grades der elliptischen Funktionen auf Grund der Transformation der ϑ-Funktion liefert. Gerade die Transformationstheorie der ϑ-Funktion, die er längst schon als die Fundamentaltranszendente in der Theorie der elliptischen Funktionen bezeichnet hatte, interessierte ihn bei diesen Vorlesungen, und es ergab sich ihm manches, worauf er früher nicht aufmerksam gewesen; „ich will eine lustige Formel hersetzen“, schreibt er am 8. Februar an Bessel, „sollte nämlich Jemand in den Fall kommen, das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Ausdrücke $(1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^2$, $(1 - 2q + 2q^4 - \cdots)^2$ wissen zu wollen, so sind es dieselben Ausdrücke, wenn man in ihnen q^2 statt q setzt.“

Von dem 2. Teile dieser Vorlesung über elliptische Funktionen besitzen wir außerdem noch eine äußert korrekte, im Auftrage Jacobis zum Zwecke der Veröffentlichung von Borchardt angefertigte Ausarbeitung. „Sie kann“, wie Weierstrass sagt, „mit gutem Fug als eine von Jacobi autorisierte betrachtet werden, weil dieser das Manuskript durchgesehen, mit Anmerkungen begleitet und durch Hinzufügung mehrerer Formelsysteme vervollständigt hat.“ Das Manuskript Borchardts, welches sich im Nachlasse Jacobis vorgefunden, wurde im Jahre 1891 unter dem Titel „Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet“ veröffentlicht. „Ich beabsichtige den historischen Gang der Entdeckung der elliptischen Funktionen umkehrend den entgegengesetzten Weg einzuschlagen“, lauten Jacobis Einleitungsworte, denen unmittelbar jene allgemeine Relation zwischen den Produkten von vier ϑ-Funktionen folgt, wie er sie schon in seiner letzten Vorlesung über die elliptischen Transzendenten zugrunde gelegt, aus welcher dann die elliptischen Funktionen als ϑ-Quotienten und deren Additionstheoreme hergeleitet werden; auch hier wird, wie er dies stets in seinen Vorlesungen getan, mit Hilfe der Relation zwischen $\vartheta(x, q)$ und $\vartheta(2x, q^4)$ die Beziehung $\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$ entwickelt, und nach Herstellung der Reihen für den Integralmodul und die Perioden die Theorie der Integrale 2. und 3. Gattung mit Hilfe der ϑ-Funktionen dargestellt.

Einen Teil der während der Bearbeitung seiner Vorlesungen gewonnenen, aus der Theorie der elliptischen Funktionen hergeleiteten zahlentheoretischen Folgerungen sandte er zugleich unter dem Titel „Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel, nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen“ an Crelle und gibt darin zunächst für die früher aus den elliptischen Funktionen hergeleitete Beziehung

$$\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right\}^3 = \sum_{0}^{\infty}{}^{n}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}},$$

welche das einzige Beispiel dafür war, daß der Kubus oder eine andere Potenz einer Reihe, in welcher die Exponenten der Glieder derselben eine arithmetische Progression 2. Ordnung bilden, wieder eine solche Reihe — hier mit Trigonalzahl-Exponenten — liefert, einen ganz elementaren Beweis, indem er durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung das Problem auf die Verifikation des Satzes zurückführt, daß für jeden Wert von $x \sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2 - b^2) x^{a^2+3b^2}$, worin sich die Summation auf alle positiven und negativen Zahlen a der Form $6m+1$ und auf alle positiven ungeraden Zahlen b bezieht, verschwindet. Durch unmittelbare Ausführung des Kubus in der obigen Gleichung wird Jacobi auf eine Reihe weiterer zahlentheoretischer Theoreme geführt; zerfällt man z. B. eine Zahl p von der Form $24k+3$, welche nicht das Dreifache eines Quadrats ist, auf alle möglichen Arten in drei Quadrate von der Form $(6m \pm 1)^2$ und zählt diese Zerfällungen in der Weise, daß man immer die Fälle, in welchen alle drei Quadrate verschieden sind, doppelt rechnet, so wird man für die Zerfällungen, in denen eine oder drei der Größen m gerade sind, eben dieselbe Zahl wie für die Zerfällungen erhalten, in denen eine oder drei der Größen m ungerade sind, und ähnliche Sätze über die Zerfällungen von p in die Form $a^2 + 2a'^2$, in welcher a nicht durch 3 teilbar ist. Aus der ebenso leicht sich ergebenden Formel $\{\sum (-1)^m x^{(6m+1)^2}\}^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{3b^2}$, in welcher m alle positiven und negativen Zahlen, b alle positiven ungeraden Zahlen bedeuten, lassen sich aber noch Folgerungen ganz anderer Art herleiten; wenn z. B. N eine ungerade Zahl ist, so hat man immer, und zwar auf mehrere Arten, $3N^2 = (6m+1)^2 + (6m'+1)^2 + (6m''+1)^2$ oder $N^2 = (2(m+m'+m'')+1)^2 + 2(2m-m'-m'')^2 + 6(m'-m'')^2$, ferner besteht, wenn N eine Primzahl ist, die Gleichung $N = \alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2$, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind, u. a. m.

Im Sommer 1840, in welchem Jacobi außer den Übungen im Seminar nur eine schon häufig wiederholte Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen und doppelt gekrümmten Linien hielt, gewann er wieder mehr freie Zeit zur Ausführung und Zusammenstellung von zusammenhängenden Untersuchungsreihen, die zunächst die Theorie der linearen Gleichungen betrafen und schon vor vielen Jahren durch Fragen Bessels angeregt waren, sich aber sehr bald zu einer allgemeinen Theorie der Determinanten ausgestalteten, für die er bereits zum Zwecke seiner früheren algebraischen und analytischen Untersuchungen die nötigen Vorarbeiten hatte machen müssen. Um diese Zeit veröffentlichte Bessel in Schumachers astronomischen Nachrichten: „Neue Formeln Jacobis für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate", in welchen die Zusammensetzung der Auflösungen eines linearen Systems von drei Gleichungen und der Gewichte der daraus entspringenden Werte in völlig symmetrischer Form gegeben wird; „sie erscheinen so merkwürdig, daß ich mir von meinem Freunde Jacobi die Erlaubnis zur Veröffentlichung erbeten habe"; und am 1. Juli schreibt Jacobi an Gauss: „... bin ich so frei, einige die Methode der kleinsten Quadrate betreffende Sätze mitzutheilen, welche ich in diesen Tagen bemerkt habe; sie beziehen sich auf die Zusammensetzung der Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte aus denen, welche die verschiedenen Combinationen der Beobachtungen ergeben, wenn man nur immer so viel nimmt, als unbekannte Größen sind ..."

Noch in diesem Sommer erhielt er den Roten Adlerorden 3. Klasse, wurde Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen und an Poissons Stelle auswärtiges Mitglied der Göttinger Sozietät. „... In der That kann ich ein Recht zu einer solchen Auszeichnung", antwortet er letzterer am 29. Juni, „nur in dem anhaltenden Bemühen erblicken, in den Geist der Schriften des außerordentlichen Mannes einzudringen, welchen die Königl. Societät zur Zeit an ihrer Spitze sieht, und dessen wunderbarer Genius unwillkührlich an den Archimedes' erinnert. Denn wir finden in seinen Schriften bei Überlieferung des Vollgehaltes gleich tiefsinniger Entdeckungen auch die vollendete Form und ideale wissenschaftliche Strenge jenes Alten wieder, und wie dieser weit über alle praktischen Anwendungen, welche ihn in dem Munde des Alterthums zur Fabel werden ließen, den rein mathematischen Gedanken stellte, so hat auch Gauss bei aller Bewunderung, welche die größere Menge der Vollendung seiner Praxis zollt, selber an sich immer nur den Maßstab der Tiefe seiner Gedanken gelegt."

Als eine der größten Zierden der Königsberger Hochschule zeichnete ihn auch der junge König Friedrich Wilhelm IV. besonders aus; sehr erfreut konnte Jacobi, der die Herbstferien wieder in angestrengtester Arbeit in Königsberg zubrachte, seiner Schwägerin am 30. September melden: „Bei meinem durch die vermehrte Familie so vergrößerten Hausstande hat es mir sehr angenehm sein müssen, daß der König bei seinem jetzigen Aufenthalte hier mir in einem gnädigen Cabinetschreiben eine jährliche Zulage von 500 Thalern ertheilt hat, sowie ebenfalls dem Geheimrath Bessel."

Noch vor Beginn des Wintersemesters, für welches er eine Vorlesung von allgemeinerem Charakter über höhere Mathematik angekündigt hatte, übersandte er in Form eines Briefes eine kurze „Sur un théorème de Poisson" betitelte Note dem Präsidenten der Pariser Akademie. „Monsieur de Humboldt vient de me communiquer un fragment d'une Notice biographique sur Mr. Poisson, dont la lecture m'a donné envie d'adresser à vous, Monsieur, et à votre illustre Académie, quelques remarques sur la plus profonde découverte de Mr. Poisson, mais qui, je crois, n'a été bien comprise ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui-même; ... ce théorème, vraiment prodigieux, et jusqu'ici sans exemple, est resté en même temps découvert et caché." Und nun formuliert Jacobi das Theorem in der demselben von ihm gegebenen Gestalt,

wonach man, wenn eine beliebige Anzahl materieller Punkte von Kräften angegriffen und Bedingungen unterworfen ist, für welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt, und man außer diesem Integral noch zwei andere Integrale kennt, daraus direkt ein drittes ohne Anwendung von Quadraturen bestimmen kann; für spezielle, dem gegebenen Probleme spezifisch angehörige Integrale kann man danach alle Integrale herleiten. „C'est qu'on verra dans un ouvrage auquel je travaille depuis plusieurs années, et dont peut-être je pourrai bientôt faire commencer l'impression."

Die Ausarbeitung seines großen Werkes über Mechanik, mit dem er schon, wie er früher seinem Bruder schrieb, seit zwei Jahren beschäftigt war, und von dem einzelne, in seinem Nachlasse aufgefundene Teile schon oben erwähnt wurden, führte ihn auch immer tiefer in speziell astronomische Probleme, zu denen ihm Bessel stets erneute Anregung gab; am 2. Weihnachtstage 1840 schrieb Jacobi seinem Freunde: „Der Fall concentrischer Bahnen bietet Erleichterungen, die nicht ohne Interesse sind; wenn man kleine Größen 2. Ordnung vernachlässigt, wird $\varrho^2 = a'^2 - 2aa' \cos(E - E') + a^2 + 2\varDelta(a' \cos E' - a \cos E)$, wo ϱ die gegenseitige Distanz zweier Planeten, a, a' die halben großen Axen, $\varDelta$ die Distanz der beiden Centra der Bahn, η, η' die Winkel der beiden Apsidenlinien mit der Verbindungslinie der beiden Zentra, ε, ε' die beiden excentrischen Anomalieen, $\varepsilon + \eta = E$, $\varepsilon' + \eta' = E'$." Während er aber noch kurz zuvor mit größter Hast und Anstrengung an der Fertigstellung seines Werkes über Mechanik arbeitete, überwältigte ihn doch im Laufe des Winters die Fülle der Untersuchungen in der Theorie der Dynamik und die Bearbeitung der astronomischen Probleme, welche die Störungstheorie betrafen, derart, daß er den Plan, dieses Werk druckfertig zu machen, wieder aufgeben mußte; am 9. Januar 1841 schrieb er seinem Bruder in Petersburg:

„... Du kannst Ostrogradsky mit vielen Grüßen von mir erzählen: que je m'occupe à dévélopper analytiquement les formules de perturbation sans faire usage d'aucune quadrature mécanique et sans procéder suivant les différents ordres des excentricités et inclinaisons, que les formules sont simples et très convergentes, et que l'on peut les pousser d'après une loi facile jusqu' à telle limite numérique qu'il plaira. Pour montrer l'usage de ma méthode dans un problème difficile j'ai pris pour exemple la détermination de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, et Mr. Claussen s'occupe à présent à évaluer en nombres les formules, qui donnent cette inégalité. Le fondement de ma méthode n'est pas tiré des fonctions elliptiques, mais d'une double substitution, que j'ai imaginée pour cet effet et que j'ai exposée dans toute sa généralité il y a dix années dans le 8. volume du journal de Crelle (De transformatione integralis duplicis etc.) ... Ich habe es jetzt aufgegeben, ein größeres mechanisches Werk unter dem Titel Phoronomie zu schreiben, denn ich habe nicht gehörig langen Athem dazu, 20 Abhandlungen wer weiß wie viel Jahre noch zurückzuhalten, bis noch 20 andere dazu geschrieben. Ich werde in irgend einer Form alles, was ich fertig habe, in einzelnen Abhandlungen von Stapel laufen lassen, und wenn nur erst der astronomische Dämon, der übrigens das Prioritätsrecht hat, da diese astronomischen Hirngespinste sehr alt sind, mich losgelassen, so soll eine wahre Sündfluth kommen. Laplace hat 30 Jahre Memoiren über die Mec. C. geschrieben, ehe der 1. Band davon erschien, und so hoffe ich auch später einmal mit größerer Leichtigkeit alles zu ganzen Werken zusammenzustellen, denn freilich ist der Nutzen dieser ein ganz anderer. Leider habe ich schon von diesen Werken gesprochen, obgleich es das sicherste Mittel war, daß nichts daraus wurde ..."

In der zweiten Hälfte des Winters hatte er sich ganz der Fertigstellung einer systematischen Bearbeitung der Theorie der Determinanten zugewandt, die er auch, datiert vom

17. März 1841, unter dem Titel „De formatione et proprietatibus determinantium" an das Crellesche Journal überschickte.

„Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neuen Analysis ist", sagt Dirichlet, „Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so gibt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält. Jacobi, der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesen Gebieten Bewunderungswürdiges. Dahin gehören seine Abhandlungen über die Transformation homogener Funktionen des 2. Grades, über Elimination, über die simultanen Werte, welche einer Anzahl von algebraischen Gleichungen genügen, über die Umkehrung der Reihen und über die Theorie der Determinanten. In dem letztgenannten Kapitel verdankt man ihm eine ausgebildete Theorie der von ihm mit dem Namen der Funktionaldeterminanten bezeichneten Ausdrücke. Indem er die Analogie dieser Ausdrücke mit den Differentialquotienten weiter verfolgte, gelangte er zu einem allgemeinen Prinzip, welches er das Prinzip des letzten Multiplikators nannte, und welches bei fast allen in den Anwendungen vorkommenden Integrationsproblemen die letzte Integration zu bewerkstelligen das Mittel gibt, indem es den dazu erforderlichen integrierenden Faktor a priori angibt."

Jacobi behandelt zunächst in der oben bezeichneten Arbeit von der alternierenden Funktion ausgehend die elementaren Eigenschaften der Determinanten; „scilicet illae proprietates quamvis elementares non omnes ita tritae sunt, ut quas indemonstratas relinquere deceat"; die Zerlegung in Unterdeterminanten, die Darstellung dieser als Differentialquotienten der Determinante selbst, die Multiplikation der Determinanten und die Untersuchung der aus den adjungierten Elementen gebildeten wird systematisch dargestellt. Er wendet sich sodann zur Auflösung eines Systems von m linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten, behandelt aber auch den Fall von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten, ohne jedoch auf alle möglichen Besonderheiten einzugehen; er erklärt dies für ein „paullo prolixum negotium“. Schließlich entwickelt er noch einige auf die Methode der kleinsten Quadrate bezügliche Theoreme, „quibus explicetur, quomodo incognitarum valores eorumque Pondera, Methodo illa determinata, pendeant a diversis valoribus et ponderibus, quae obtinentur pro diversis Combinationibus numeri Observationum numero incognitarum aequales, qui earum determinationi sufficit“; er findet, wie er schon früher Bessel und Gauss mitgeteilt, daß, wenn man aus n linearen Gleichungen alle möglichen Partialsysteme von je ν Gleichungen bildet, jedes derselben nach den Unbekannten auflöst, und diesen Lösungen als Gewicht das Quadrat der Determinante des entsprechenden Partialsystems beilegt, die mit diesen Gewichten gebildeten Mittelwerte aller Unbekannten mit den durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Werten übereinstimmen.

Unmittelbar darauf verfaßt er als 2. Teil dieser Arbeit die Abhandlung „De determinantibus functionalibus“, in welcher die Determinanten aus den ersten partiellen Differentialquotienten eines Systems von Funktionen von ebensoviel Variabeln behandelt werden, und die Analogie mit dem Differentialquotienten einer Funktion einer Variabeln durchgeführt wird. Die Beziehung der Funktionaldeterminante zu der der inversen Funktionen, die Auffindung des Kriteriums der Abhängigkeit von n Funktionen von n Variabeln voneinander in dem identischen Verschwinden der Funktionaldeterminante, die Zurückführung dieses „überaus wichtigen analytischen Instrumentes“ auf einen Posten eines Produktes von n Gliedern, und die Anwendung dieser Umformung der Funktionaldeterminante auf die Transformation der vielfachen Integrale bilden das Fundament für den ganzen späteren Aufbau der Algebra; auf den Satz von dem gleichzeitigen Verschwinden der Funktionaldeterminante

mit einem Systeme homogener Gleichungen und auf die von Hesse hinzugefügte Ergänzung, daß für einen gleichen Grad der Homogenität auch die Ableitungen der Funktionaldeterminante zu gleicher Zeit verschwinden, stützt sich die für die Anwendungen auf Geometrie so wichtige Eliminationstheorie mit Hülfe der Determinanten.

Endlich bildet noch eine kürzere, um dieselbe Zeit verfaßte Arbeit: „De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum“, eine Ergänzung zu den beiden vorigen Arbeiten. Indem sich Jacobi auf den Satz von Vandermonde stützt, nach welchem eine bestimmte Determinante gebildet aus den ersten $n-1$ Potenzen von n Größen sich als ein Produkt aus den Differenzen dieser Größen ergibt, leitet er aus den von ihm entwickelten Determinantensätzen die Eigenschaften der alternierenden Funktionen her und entwickelt schließlich die allgemeine Form dieser Funktionen mit Hilfe der symmetrischen Gebilde derselben nach einer Methode, die im wesentlichen zusammenfällt mit der Darstellung der Potenzsummen durch die Koeffizienten einer Gleichung in jenen allgemeinen Formeln, welche sich als Entwicklungskoeffizienten bestimmter logarithmischer Reihen ergeben. Eine ergänzende Bemerkung zu dieser Darstellung bietet die am 18. März 1841 niedergeschriebene kurze Note „Zur kombinatorischen Analysis“, worin er mit Hülfe der logarithmischen und Exponentialreihe nachweist, daß $\sum \frac{1}{2^b 3^c \ldots a!\,b!\,c!} = 1$ ist, wenn $a + 2b + 3c + \cdots$ denselben Wert behält, eine Beziehung, die er auch durch rein kombinatorische Betrachtungen gewinnt.

Die Wiederholung der Vorlesung über Variationsrechnung, welche sich im wesentlichen dem Gange der früher gehaltenen anschloß, gestattete ihm endlich, eine seiner Abhandlungen über Differentialgleichungen fertigzustellen, welche einen Teil des früher geplanten, nunmehr aufgegebenen großen Werkes bilden sollte. Am 12. Juli 1841 beendete er die fundamentale, sehr umfangreiche Arbeit „Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis“, welche eine große Reihe der in seinen obenerwähnten Aufzeichnungen enthaltenen Resultate systematisch zusammenstellt. „Quod hic ab Ill. Lagrange praestitum esse videmus, id semper in rebus mathematicis summum erit, vinculum atque connexionem invenire problematum. Quamquam quod alterius ad alterum reductionem attinet, modo illud ad hoc modo hoc ad illud revocare convenit. Qua de re mirari non debes, quod in hac commentatione, cum mihi disserendum esset de habitu atque natura aequationum, quibus integrantur aequationum differentialium vulgarium simultanearum systemata, ratius esse duxi, ab aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis proficisci harumque solutioni contra Analyticorum usum illarum integrationem substruere.“ Jacobi geht von der linearen partiellen Differentialgleichung $X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = X$, aus, deren Integral $\alpha = f(x, x_1 \ldots x_n)$ die Gleichung $0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ identisch erfüllt; sind $f_1, \ldots f_n$ partikuläre Lösungen, so genügt der Differentialgleichung auch $\Pi(f_1, f_2, \ldots f_n)$, und daß nur n solche voneinander unabhängige Integrale existieren, beweist er mit Hilfe der von ihm aufgestellten Theoreme über Funktionaldeterminanten; hieran schließt sich weiter das Problem, die Lösung f in Form einer unendlichen Reihe darzustellen, wenn die Bedingung hinzugefügt wird, daß dieselbe für einen zwischen den unabhängigen Variabeln bestehenden Zusammenhang in eine gegebene Funktion übergehen soll. Indem er nun Systeme gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen betrachtet, zeigt er, daß durch n endliche Gleichungen, welche den Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ genügen, die sich bekanntlich durch Elimination auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung mit einer abhängigen Variabeln zurückführen lassen, eine jede Lösung f der partiellen Differentialialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ einer Konstanten gleich wird, und daß umgekehrt, wenn man n voneinander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ willkürlichen Konstanten gleichsetzt, zwischen den $n + 1$ Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ n Gleichungen definiert werden, aus denen man die n gewöhnlichen Differentialgleichungen $dx : \cdots : dx_n = X : \cdots : X_n$ herleiten kann. Jacobi nennt nun n endliche, auf die obigen n unabhängigen Lösungen führende Integralgleichungen des Systems $dx : \cdots : dx_n = X : \cdots : X_n$ vollständige, wenn sie n willkürliche Konstanten enthalten, die sich nicht auf eine geringere Zahl zurückführen lassen, und man erhält somit, wenn man aus n vollständigen Integralgleichungen des Systems die n willkürlichen Konstanten als Funktionen der Variabeln ausdrückt, n voneinander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$. Führt man statt der willkürlichen Konstanten die Anfangswerte der Variabeln $x^0, x_1^0, \ldots x_n^0$ ein, so wird in jeder der zwischen den Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ und deren Anfangswerten $x^0, x_1^0, \ldots x_n^0$ vorgelegten Integralgleichung durch Vertauschung von $x, x_1, \ldots x_n$ mit $x^0, x_1^0, \ldots x_n^0$ die Integralgleichung entweder unverändert bleiben oder in eine andere aus der Zahl der Integralgleichungen übergehen.

Für die Untersuchung in betreff der überflüssigen willkürlichen Konstanten kommt zunächst in Betracht, daß, wenn durch Integration der Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ die Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch x und durch willkürliche Konstanten ausgedrückt werden, die gefundenen Ausdrücke $x_i = \varphi_i(x)$ mehr als n willkürliche

Konstanten nicht enthalten dürfen, wie schon früher in einer seiner Aufzeichnungen ausführlich dargelegt wurde. Ist nun eine Integralgleichung eine vollständige, wenn sie zu dem Systeme der vollständigen Integralgleichungen gehört oder wenn ihr durch das System der vollständigen Integralgleichungen genügt werden kann, während sie im entgegengesetzten Falle eine partikuläre Integralgleichung genannt wird, so ist es zur Auffindung einer Lösung jener partiellen Differentialgleichung nicht notwendig, das ganze System von Gleichungen zu benutzen, durch welches das entsprechende gewöhnliche System von Differentialgleichungen vollständig integriert wird, sondern es genügt, eine beliebige Gleichung zu kennen, welche zum System der vollständigen Integralgleichungen gehört. Können nun aus den Gleichungen, welche aus einer vorgelegten Integralgleichung durch Differentiation und Benutzung des totalen Systems deriviert sind und somit selbst wieder Lösungen der partiellen Differentialgleichung liefern, nicht alle willkürlichen Konstanten eliminiert werden, so ist die vorgelegte Integralgleichung notwendig vollständig, und so oft jene Integralgleichung mehr willkürliche Konstanten einschließt, als aus ihr Gleichungen abgeleitet werden, so wird diese Gleichung ebenfalls eine vollständige sein, wenn auch einigen willkürlichen Konstanten, deren Zahl jenem Überschuß gleich ist, besondere Werte zuerteilt werden.

Indem er nun einer vorgelegten Integralgleichung überflüssige willkürliche Konstanten zuschreibt, wenn durch Partikularisierung einiger derselben das Integralsystem, zu welchem jenes Integral gehört, seine Allgemeinheit behält, folgert er, daß, wenn für das gewöhnliche Differentialgleichungssystem mit n abhängigen Variabeln eine beliebige vollständige Integralgleichung gegeben ist, welche keine überflüssige Konstanten enthält, aus dieser so viel voneinander unabhängige Lösungen der zugehörigen partiellen Differentialgleichung abgeleitet werden können, als

willkürliche Konstanten in derselben enthalten sind, somit für den Fall von n solchen Konstanten die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung, und erörtert weiter die Frage, wie man aus einem Integrale mit überflüssigen Konstanten durch wiederholte Differentiation nach denselben andere Integrale herleiten kann. Indem Jacobi nun in Anlehnung an seine erste im Jahre 1827 veröffentlichte Abhandlung über partielle Differentialgleichungen zu dem Zusammenhang von Systemen simultaner partieller Differentialgleichungen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen übergeht, stellt er das fundamentale Theorem auf, daß, wenn das partielle Differentialgleichungssystem $X\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_1} + \cdots + X_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} = X_{i+1}, \ldots X\frac{\partial x_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \cdots + X_i\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = X_n$ vorgelegt ist, und man die gewöhnlichen Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ vollständig integriert, sodann zwischen den willkürlichen Konstanten, welche in die vollständigen Integralgleichungen eingehen, nach Aufstellung beliebiger $n-i$ Gleichungen zwischen denselben aus diesen und den n Integralgleichungen alle n willkürlichen Konstanten eliminiert, daraus $n-i$ Gleichungen hervorgehen, durch welche die Größen $x_{i+1}, \ldots x_n$ als Funktionen von $x, \ldots x_i$ bestimmt werden, welche dem partiellen Differentialgleichungssystem Genüge leisten; daran schließen sich einige unmittelbare Folgerungen, welche die Transformation jenes Systems partieller Differentialgleichungen für eine andere Wahl der unabhängigen und abhängigen Variabeln betreffen.

Indem er nun die Integration eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems mit Hilfe von Multiplikatoren oder durch Aufsuchung passender Faktoren, mit denen die Differentialgleichungen multipliziert und addiert ein vollständiges Differential liefern, zu bewerkstelligen sucht, zeigt er, daß das Problem wieder auf die Reduktion des gewöhnlichen Systems auf eine partielle Differentialgleichung führt. Ist $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$, und $df = M dx + M_1 dx_1 + \cdots + M_n dx_n$, so wird vermöge der Beziehungen $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = M_1$, $\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = M_n$ eine Funktion f gesucht, für welche zugleich $df = M dx + \cdots + M_n dx_n$ und $0 = MX + \cdots + M_n X_n$ ist, also durch Elimination von M $df = M_1\left(dx_1 - \frac{X_1 dx}{X}\right) + M_2\left(dx_2 - \frac{X_2 dx}{X}\right) + \cdots + M_n\left(dx_n - \frac{X_n dx}{X}\right)$; es folgt hieraus, daß, wenn f gefunden, man die Multiplikatoren $M_1, \ldots M_n$ kennt, welche den Ausdruck $M_1\left(dx_1 - \frac{X_1 dx}{X}\right) + \cdots + M_n\left(dx_n - \frac{X_n dx}{X}\right)$ zu einem vollständigen Differential, also integrabel machen, und daß umgekehrt, wenn man die Multiplikatoren $M_1, \ldots M_n$ also auch M kennt, welche diesen Ausdruck integrabel machen, die hieraus mit Hilfe von Quadraturen sich ergebende Funktion f eine Lösung der partiellen Differentialgleichung liefert. Für n voneinander unabhängige Integrale $f_1, f_2, \ldots f_n$ entstehen n verschiedene Systeme von Multiplikatoren $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots M_n^{(i)}$, und für eine willkürliche Funktion $\Pi(f_1, f_2, \ldots f_n)$ ist das allgemeine Multiplikatorensystem durch die Gleichungen gegeben $M_k = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} M_k^{(1)} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} M_k^{(n)}$.

Nachdem Jacobi noch mannigfache Transformationen der $\frac{n(n+1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen für den Differentialausdruck $\Sigma X_i dx_i$ aufgestellt und eine Reduktion derselben auf $2n-1$ andere gegeben, beschäftigt er sich endlich noch in dieser Arbeit mit der Transformation eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems in eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln und stellt eine Reihe wichtiger Betrachtungen an, welche schon den Inhalt der oben besprochenen Aufzeichnungen bildeten.

Mißliche Familienverhältnisse zwangen Jacobi zunächst zur Unterbrechung seiner Arbeiten; er mußte, da unvorhergesehene, sehr große pekuniäre Verluste die Auflösung des väterlichen Geschäftes notwendig machten, außerdem der leidende Zustand seiner Mutter seine Anwesenheit in Potsdam dringend erforderte, seine Vorlesungen schon vor dem Ende des Juli schließen, und als er bei seiner Ankunft in Potsdam die Verhältnisse noch trauriger fand, als er vermutete, faßte er trotz aller materiellen Schwierigkeiten sogleich den Entschluß, seine Mutter mit nach Königsberg zu nehmen. Die ihm nach Potsdam gemachte Mitteilung von seiner Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Turiner Akademie, sowie die am 3. August ausgesprochene Bewilligung von 250 Talern von seiten der Berliner Akademie zum Behufe der numerischen Ausführung seiner neuen Methode für die Berechnung der planetarischen Störungen brachten ihm wenigstens eine momentane Freude in der trüben Stimmung des elterlichen Hauses. Am 18. August schreibt er seiner Frau: „Ich beeile mich Dir Mutters wegen zu schreiben, daß Du ihr zu Michaelis eine Wohnung miethest ... Die kleine jetzt eingetretene Pause habe ich benutzt, um vorgestern nach Berlin zu fahren ... Visite bei G. R. Schulze, der furchtbar grob gegen mich war, was wohl seinem sinkenden Ansehen zuzuschreiben ist; dann machte ich, nachdem ich mich hatte im Hotel des Ministers zur Abendaudienz aufschreiben lassen, einen langen Besuch bei Encke, der eigentlich Hauptzweck der Reise war; dann zu Peter Riess, mit dem ich zu Dove ging, dann Audienz beim Minister Eichhorn und retour mit dem Dampfwagen ... Der Minister war im höchsten Grade freundlich; er freue sich unendlich meine persönliche Bekanntschaft zu machen; es wurde viel gesprochen von der politischen Lage in Preußen, von Schön u. dergl. Dieses habe ich gesehen, daß, wenn je irgend einmal von meiner Versetzung nach Berlin die Rede sein soll, das Ministerium ohnmächtig ist, und dies nur durch den König unmittelbar gehen könnte, d. h. durch Humboldt."

Schon am 27. August wendet sich Jacobi noch von Potsdam aus in einem Immediatgesuch an den König:

„Eure Königliche Majestät wage ich mit der allerunterthänigsten Bitte anzugehen, mich von der Königsberger Universität an die Berliner Universität, an welcher ich vor 16 Jahren meine Laufbahn als academischer Docent begonnen habe, Allergnädigst zurückversetzen zu wollen. Ich fand damals in Berlin nahe meiner Heimath keine Stelle und war genöthigt mit Aufopferung von Familieninteressen eine kleine erledigte Stellung in Königsberg anzunehmen. In der seitdem verflossenen Zeit haben die mathematischen Wissenschaften in den Staaten Ew. Königl. Majestät einen unerwarteten Aufschwung genommen, so daß sie den Standpunkt, auf welchem sie sich in andern Ländern Europas befinden, erreichen oder vielmehr vielleicht übertreffen. Es gereicht zu meinem besonderen Glücke, daß ich an diesem Aufschwunge Antheil habe nehmen und namentlich den mathematischen Unterricht an der Universität Königsberg in weiterem Umfange habe begründen können. Aber ich habe das Bewußtsein, daß meine Thätigkeit größer und weiter sein würde, wenn es mir jetzt verstattet wäre, mich mit den großartigen Hülfsmitteln und Kräften in Verbindung zu setzen, welche Eurer Königl. Majestät Residenz Berlin die Aufmerksamkeit der gebildeten Welt zuwenden. Seit mehreren Jahren zu einem der Mitglieder der Berliner Academie der Wissenschaften ernannt, früher selbst Docent an der Berliner Universität, finde ich hier meine geistige ebensowohl wie meine Familienheimath. Zwei meiner Schüler, Prof. Richelot und Doctor Hesse, welche in die Tiefen der Wissenschaft einzuführen mir gelang, lehren an der Königsberger Universität meine Fachwissenschaften in gründlichen und gediegenen Vorträgen, und machen die Wiederbesetzung meiner Stelle unnöthig . . .",

und an demselben Tage meldet Jacobi dem Minister, daß er in einem Immediatgesuch den König um Versetzung von Königsberg nach Berlin gebeten habe; „an der Berliner Universität gebildet, selbst eine kurze Zeit Docent an dieser Universität und seit mehreren Jahren eines der Mitglieder der Academie der Wissenschaften, fühle ich mich durch geistige wie durch Familieninteressen hierhergezogen. Mein 15jähriger Aufenthalt in Königsberg hat hierin keine Änderung gemacht, sondern nur das Verlangen nach Rückkehr in mir steigern können. Ich habe das Bewußtsein, die mir in Königsberg gestellte Aufgabe gelöst und dem dortigen mathematischen Universitätsunterricht eine Ausdehnung gegeben zu haben, welche mir gestattete, die Studirenden selbst in die entlegneren und schwierigeren Theile der Mathematik einzuführen und Schüler zu bilden, die nicht allein durch schriftstellerische Thätigkeit die Wissenschaft bereicherten, sondern welche auch an der Königsberger Universität bereits mit Glück lehren, so daß die Wiederbesetzung meiner Stelle jetzt völlig unnöthig sein dürfte. Ich selbst aber sehne mich danach, mich wieder den weiteren und größeren wissenschaftlichen Verhältnissen Berlins anschließen zu können, und glaube im Interesse der Wissenschaft bitten zu dürfen, meine Zurückversetzung an die Berliner Universität zu bevorworten . . ."

Das Gesuch Jacobis wurde aus finanziellen Gründen und in Rücksichtnahme auf die Königsberger Verhältnisse abschlägig beschieden.

Noch bevor Jacobi wieder nach Königsberg zurückkehrte, berichtet Bessel am 11. September 1841 an Gauss über die traurige Veranlassung, welche Jacobi zu seiner Reise nach Potsdam bewogen hatte: „Unserm Jacobi ist eine Unannehmlichkeit zugestoßen. Er hat sein Vermögen größtentheils, wahrscheinlich ganz, verloren. Sein Vater verlangte im Testament, daß das gemeinschaftliche Vermögen der Mutter und Kinder zusammenbleiben und von einem der Brüder in einem Banquiergeschäfte nutzbar gemacht werden sollte. Dieser Bruder ist aber unvorsichtig gewesen und gerieth schon vor 2 Jahren in Verlegenheit, aus welcher er sich nur heraushalf, um jetzt einen starken Bankerott zu machen. Die Erbschaft betrug etwa 100000 Thaler. Jacobi ist seit 4—6 Wochen zu seiner Mutter nach Potsdam gereist, die er nun mit hierher bringen wird. Glücklicherweise kann ein solches Talent nicht verderben, aber ich hätte ihm doch das Gefühl der Freiheit ferner gewünscht, welches Vermögensbesitz gewährt. Wir schätzen hier Jacobi doppelt, wegen seines Talentes nicht allein, sondern auch wegen seines Charakters, der seiner sarkastischen Art nicht im Entferntesten entspricht, und wenn man ihn erst kennen gelernt hat, sehr liebenswürdig erscheint.“

Erst unmittelbar vor Beginn der Vorlesungen, für welche er außer der Theorie der Oberflächen und Kurven wohl, um sich über die Dinge aussprechen zu können, mit denen sein Geist jetzt vollauf beschäftigt war, noch die Theorie der Differentialgleichungen angekündigt hatte, traf er in Königsberg ein und erhielt bald darauf statt des noch immer erhofften günstigen Bescheides von seiner Versetzung nach Berlin eine vertrauliche Anfrage des Ministers bezüglich der für eine ordentliche Professur in Breslau in Frage kommenden Mathematiker; Jacobi schlug in einem Schreiben vom 20. November Kummer und Richelot ex aequo vor, „indem ich mir nicht getraue, zwischen den Verdiensten und Leistungen dieser beiden Männer zu entscheiden“.

Die Methoden für die Störungsrechnungen, von denen Jacobi schon früher durch seinen Bruder Ostrogradzky, sowie persönlich Bessel Mitteilung gemacht und zu deren Ausführung die Berliner Akademie eine Unterstützung gewährt hatte, veranlaßten Clausen, wohl aus rein persönlichen Gründen, zu einer nicht sehr freundlichen Beurteilung derselben, und Schumacher, bei dem eine gewisse Gereiztheit Jacobi gegenüber schon seit einiger Zeit unverkennbar

war, schrieb darauf bezüglich am 31. Januar 1842 an Gauss: „Von Jacobis Methoden hat Clausen, da sie ihm als Geheimnis anvertraut waren, nicht viel mehr sagen können, als daß er nichts besonderes davon erwarte. Aus einzelnen Äußerungen schließe ich, daß sie zu den Methoden gehören, die Formeln oder Reihen geben, in welche man die numerischen Werthe substituiren muß, und daß dabei elliptische Transcendenten gebraucht werden. Es scheint nach Bessels Briefen, daß er, wenn er nicht einen geschickten Rechner findet, der ihm in die Hand arbeitet, wahrscheinlich die ganze Sache liegen lassen wird, und so würde dann (Jacobi's eigne Worte) die Mécanique céleste in dem état pitoyable bleiben, dans laquelle Laplace l'a laissée. Ich sage mit Absicht es scheint, denn Bessel drückt sich immer, wenn er von Jacobi spricht, etwas unbestimmt aus.“

Der Jahresanfang brachte Jacobi die höchste Ehrenbezeugung, die einem Gelehrten zuteil werden konnte, indem er am ersten Stiftungstage der Friedensklasse den Orden pour le mérite erhielt.

Die Wintervorlesung über Differentialgleichungen hatte ihm zu einer kurzen vom 26. März datierten Bemerkung „De integratione aequationis differentialis $(A + A'x + A''y)\cdot(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$“ Veranlassung gegeben, in welcher er, durch eine einfachere, von Euler integrierte Differentialgleichung angeregt, zeigte, daß, wenn man die kubische Gleichung auflöst $(A - z)(B' - z)(C'' - z) - B''C'(A - z) - CA''(B' - z) - A'B(C'' - z) + A'B''C + A''BC' = 0$, und deren untereinander verschiedene Wurzeln mit λ, λ', λ'' bezeichnet, ferner $B'C'' - B''C' = D$, $C'A'' - C''A' = D'$, $A'B'' - A''B' = D''$, $B' + C'' = E$ setzt, das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung $[D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y]^{\lambda''-\lambda'} \cdot [D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y]^{\lambda''-\lambda} \cdot [D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y]^{\lambda-\lambda'} = C$ ist.

Schon vom folgenden Tage, vom 27. März 1842, ist wiederum ein Bruchstück seiner großen Entwürfe zu einem Gesamtwerke über Mechanik unter dem Titel „De motu puncti singularis“ datiert. Jacobi bemerkt darin zunächst, daß, wenn ein Punkt gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie zu bleiben und von Kräften bewegt wird, welche beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sind, die Bewegung desselben nur durch Quadraturen definiert ist; wird der Punkt der Bedingung unterworfen, auf einer Fläche $f(x, y, z)=0$ zu bleiben, und gilt für die Kraftkomponenten X, Y, Z die Beziehung $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$, so erhält man das Integral $\frac{1}{2}v^2=\int(X dx+Y dy+Z dz)+c$, worin der Ausdruck unter dem Integral durch die Flächengleichung allein integrabel wird, während die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Fläche allgemein auf die Form $\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p_1}$, $\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p_2}$, $\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial T}{\partial q_1}+Q_1$, $\frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial T}{\partial q_2}+Q_2$ gebracht werden, worin $p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2=\frac{\partial T}{\partial q_2'}$, $Q_1=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}$, $Q_2=X\frac{\partial x}{\partial q_2}+Y\frac{\partial y}{\partial q_2}+Z\frac{\partial z}{\partial q_2}$ ist. Völlig neu und von größter Tragweite ist aber der Satz, den er hier nur als speziellen Fall eines von ihm allgemein aufgestellten mechanischen Prinzips ausspricht, daß, wenn drei Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen vier Größen q_1, q_2, p_1, p_2 in der Form gegeben sind $dq_1:dq_2:dp_1:dp_2=\frac{\partial T}{\partial p_1}:\frac{\partial T}{\partial p_2}:\left[-\frac{\partial T}{\partial q_1}+Q_1\right]:\left[-\frac{\partial T}{\partial q_2}+Q_2\right]$, in denen Q_1, Q_2 nur Funktionen von q_1, q_2 sind, und zwei Integrale mit zwei willkürlichen Konstanten α und β gefunden sind, mit deren Hilfe man $p_1, p_2, \frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}$ durch q_1, q_2, α, β ausdrücken kann, so daß nur noch die eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen q_1, q_2 zu

integrieren bleibt $\frac{\partial T}{\partial p_2}dq_1-\frac{\partial T}{\partial p_1}dq_2=0$, um die Bewegungskurve auf der Fläche zu bestimmen, dann stets die linke Seite dieser Gleichung mit dem Faktor $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta}-\frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}$ multipliziert ein vollständiges Differential liefern also durch Quadraturen integrabel sein wird. „Haec propositio emanat e nova theoria multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium simultanearum applicandi, quam in alia commentatione expono.“ Gilt das Prinzip der Flächen, so kann es kommen, daß schon das eine durch dieses Prinzip gelieferte Integral das Problem auf Quadraturen zurückzuführen gestattet, und Jacobi zeigt für diesen Fall, daß die Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche vermöge einer nach der Meridianebene gerichteten und nur von der Lage des Punktes in dem Meridiane abhängigen Kraft zurückgeführt werden kann auf die Bewegung eines Punktes in der Meridianlinie, indem nur noch eine zur Achse senkrechte und der 3. Potenz der Entfernung des Punktes von der Achse umgekehrt proportionale Kraft hinzutritt; diese Bewegung ist somit durch Quadraturen definiert. Es folgt ferner leicht, daß, wenn sich ein Punkt auf einer Rotationsfläche bewegt, deren Masse Attraktionskraft besitzt und in allen Meridianebenen nach demselben Dichtigkeitsgesetz verteilt ist, die Bewegung des Punktes nur durch Quadraturen bestimmt ist, wenn der feste Körper ruht oder gleichförmig um die Achse rotiert. Als Beispiel wird die Bewegung eines Punktes auf einem homogenen Umdrehungsellipsoid behandelt, welches nach dem Newtonschen Gesetze anziehend wirkt, ferner die konischen Oscillationen des einfachen Pendels oder die Bewegung auf der Kugel. Jacobi hat weiter bemerkt, daß, wenn ein Punkt von einem festen Zentrum so angezogen wird, daß das Flächenprinzip gilt, aber nicht das Prinzip der lebendigen Kraft, das Problem doch jedesmal auf Quadraturen zurückgeführt werden kann, wenn die Intensität der Attraktion durch eine beliebige homogene Funktion $(-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Koordinaten ausgedrückt wird, und daß ferner die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Kurve durch Quadraturen definiert wird auch dann, wenn den sollizitierenden Kräften, welche beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sind, eine Kraft des widerstehenden Mediums hinzugefügt wird, welche gleich ist einer linearen Funktion des Quadrates der Geschwindigkeit oder einem Exponentialausdruck $a + be^{cv^2}$, gleichgültig, ob das Medium homogen ist oder die Dichtigkeit sich nach irgendeinem beliebigen Gesetze ändert. Ebenso wird die Bewegung des einfachen Pendels im widerstehenden Medium behandelt, und noch am Schlusse der Arbeit unter denselben Voraussetzungen die bekannten Formeln des ballistischen Problems entwickelt.

Jacobi vertieft sich nun wieder ganz in seine Studien über die Prinzipien der Mechanik und die Störungstheorie, kündigt für den Sommer 1842 eine Vorlesung über Differentialgleichungen an, welche die Fortsetzung der letzten Wintervorlesung bilden sollte, und beschäftigt sich zunächst fast ausschließlich mit den Vorarbeiten zu der beabsichtigten nächsten großen Wintervorlesung über analytische Mechanik, deren spätere Herausgabe die Grundlage aller Vorlesungen und Forschungen auf diesem Gebiete geworden ist. Seine Vorträge über Differentialgleichungen führen ihn zu immer erneuter Lektüre von Eulers Schriften; am 14. April schreibt er an Fuss in Petersburg:

„. . . Denken Sie, wie sehr Ihr großer Plan der Herausgabe der Werke Euler's an Ihre Person grade geknüpft ist, und daß es wahrscheinlich nie geschieht, wenn Sie es nicht thun. Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus Euler's Integralrechnung gemacht und mich auf's Neue gewundert, wie frisch sich dieses über 70jährige Buch erhalten hat, während der gleichzeitige d'Alembert ganz unmöglich zu lesen ist. Der Grund davon scheint mir in seinen Beispielen zu liegen. Denn diese Beispiele spielen

nicht so bloß beiher und erläutern; sie sind der ganze Inhalt, den die allgemeine Proposition zu der Zeit hat. Wenn er partielle Differentialgleichungen etwa auf gewöhnliche zurückführt, so giebt er alle Fälle, soweit sie ihm zu Gebote stehen, in denen die gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Quadraturen sich zurückführen lassen, von diesen die Fälle, in denen die Quadraturen endlich werden, von diesen, in welchen sie algebraisch werden und aehnlich überall. Der Satz tritt da aus seiner abstracten Allgemeinheit heraus, er bekommt einen wirklichen Inhalt; es ist als eine Entdeckung zu betrachten, wenn man zu den Euler'schen Beispielen eines hinzufügen kann. Nur der allgemeine Satz zugleich mit den Beispielen, wie sie Euler giebt, und wie sich dieselben mit dem Fortschritt der Kunst reicher gestalten, ist der wahre Inhalt und deßhalb sind die Euler'schen Schriften die wahrhaft lehrreichen . . .“

Während seiner Sommervorlesung über Differentialgleichungen wurde er durch die Übungen des Seminars wenig in Anspruch genommen; wiewohl Jacobi noch in seinem Berichte über die Tätigkeit des Seminars von Ostern 1839 bis Ostern 1840 mit Genugtuung die wissenschaftlichen Arbeiten in demselben besprechen und vor allem „die Arbeit des kenntnisreichen und talentvollen Borchardt, von dem wohl bald größeres zu erwarten ist“, hervorheben konnte, war er im Sommer 1840 sowie im Winter 1840/41 nur in der Lage, elementarere Übungen mit den Mitgliedern des Seminars anzustellen, da, wie er dem Ministerium berichtete, „der wissenschaftliche Standpunkt der Studirenden nicht erlaubte, wie in den früheren Jahren, bis zu den schwierigeren Problemen vorzudringen.“ Dagegen war der Verkehr mit seinen früheren, noch in Königsberg weilenden Schülern, die zum Teil schon seine mathematischen Kollegen geworden waren, ein sehr reger, und es wurden zwischen ihnen mündlich und schriftlich die schwierigsten wissenschaftlichen Probleme erörtert. Auf eine Anfrage Richelots schreibt ihm Jacobi am

20. April, nachdem er schon im Prinzip seine Theorie des Multiplikators entworfen:

„Wenn ich die Abhandlung, die ich jetzt schreibe, auf die Differentialgleichungen anwende, welche Sie jetzt integriren, so ergiebt sich folgendes Theorem: Es seien $x, y, z, w, u, \ldots$ die Variabeln, X, Y, Z etc. irgend welche Functionen resp. bloß von x, y, z etc., welche aber nicht dieselben zu sein brauchen, wie beim Abel'schen Theorem. Nennt man X_1, Y_1, Z_1 etc. die Producte der Differenzen der Variabeln, wenn man resp. x, y, z etc. fortläßt, so kann man die Differentialgleichungen so darstellen: $dx : dy : dz \ldots = X_1\sqrt{X} : Y_1\sqrt{Y} : Z_1\sqrt{Z} : \ldots$ Man nehme an, es seien alle Integralien außer einem gefunden und vermittels derselben z, w, u etc. durch x und y und die willkührlichen Constanten ausgedrückt; es sei ferner $\varDelta$ die Determinante dieser Ausdrücke von z, w, u etc., wenn man sie bloß als Functionen der willkührlichen Constanten betrachtet; dann wird das letzte Integral $\int \frac{\varDelta}{\sqrt{Z}\cdot\sqrt{W}\cdot\sqrt{U}\ldots} \left\{\frac{Y_1\,dx}{\sqrt{X}} - \frac{X_1\,dy}{\sqrt{Y}}\right\} = \text{const.}$, wo, wenn man Z, W, U, Y_1, X_1 durch x und y vermittels der gefundenen Integralgleichungen ausdrückt, der Ausdruck unter dem Integral ein vollständiges Differential ist. Bei 3 Variabeln hat man die Gleichungen $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = 0$; es seien M und N die beiden Factoren, so daß $(M + Nx)\frac{dx}{\sqrt{X}} + (M + Ny)\frac{dy}{\sqrt{Y}} + (M + Nz)\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ gleich einem vollständigen Differential $d\varPhi$ und $\varPhi = \alpha$ das erste Integral wird. Dann ist $\varDelta = \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{1}{\frac{\partial \varPhi}{\partial z}} = \frac{\sqrt{Z}}{M + Nz}$, und es wird daher das zweite Integral $\int \frac{1}{M + Nz}\left\{\frac{(z-x)\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{(z-y)\,dy}{\sqrt{Y}}\right\} = \text{const.}$ Sagen Sie mir gefälligst, ob der Satz sich von selbst versteht, oder

schwer zu verificiren ist und ob er Ihnen von Interesse scheint . . .“

Analoge Betrachtungen führen ihn nun unmittelbar zu neuen Überlegungen bezüglich des Abelschen Theorems, die er schon wenige Tage später am 5. Mai unter dem Titel „Demonstratio nova theorematis Abeliani“ aufzeichnet. Sind zwischen den n Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ und der Variabeln t die Differentialgleichungen 1. Ordnung vorgelegt $\frac{d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0$, $\frac{\lambda_1\,d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{\lambda_n\,d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0$, $\ldots \frac{\lambda_1^{\,n-1}\,d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{\lambda_n^{\,n-1}\,d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = dt$, worin $f(\lambda)$ eine Funktion $2n-1$. Grades in λ ist, und setzt man $N_\varkappa = (\lambda_\varkappa - \lambda_1)\ldots(\lambda_\varkappa - \lambda_n)$, so daß sich $\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_i)}}{N_i}$ ergibt, so können die unmittelbar ersichtlichen transzendenten Integrale durch ein algebraisches Integralsystem ersetzt werden, indem aus dem bekannten Lagrangeschen Satze, daß für eine Funktion $\psi(\lambda)$ vom $2n-2$. Grade $\sum \frac{\partial \frac{\psi(\lambda_\varkappa)}{N_\varkappa^{\,2}}}{\partial \lambda_\varkappa} = 0$ ist, durch Differentiation der obigen Differentialgleichungen leicht folgt, daß für jeden Faktor $m - \lambda$ von $f(\lambda)$ die Beziehung besteht $\sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)} \left\{\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right\} = \text{const.}$, welche $2n-1$ algebraische Integrale darstellen, von denen $n-1$ hinreichen. Jacobi zeigt noch allgemein, daß $\int \sqrt{(m-\lambda_1)\ldots(m-\lambda_n)} \cdot \sqrt{(m_1-\lambda_1)\ldots(m_1-\lambda_n)}\,(m, m_1)\,dt$ einen algebraischen Wert erhält, wenn (m, m_1) den Entwicklungskoeffizienten von λ^{-1} in der Funktion $\frac{f(\lambda)}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}$ dividiert durch das Quadrat der n linearen λ-Faktoren bedeutet.

Jacobi mußte die Sommervorlesungen früher, als er beabsichtigt hatte, schließen, da er und Bessel am 15. Mai das nachfolgende Schreiben des Kurators der Königsberger Universität Schön erhalten hatten:

„S. Majestät der König haben mir zu befehlen geruht, Ihnen, meine hochgeehrten Herren, den Wunsch zu äußern, daß Sie der auf den 23. k. M. bestimmten Versammlung der British Association in Manchester beiwohnen und zurück über Paris gehen mögen, und mich zugleich autorisirt, zur Deckung der Kosten dieser Reise Ihnen 3000 Thaler anzuweisen. Indem ich Ihnen, meine hochgeehrten Herren, dies ganz ergebenst mittheile, und der Überzeugung bin, daß Sie durch Erfüllung dieses Wunsches die Genugthuung gern gewähren werden, welche in dieser Reise für unser Vaterland liegt, benachrichtige ich Sie ganz ergebenst . . .“

Diesem ehrenvollen Auftrage kamen die beiden großen Forscher, welche damals die Zierden deutscher Wissenschaft bildeten, gern nach und traten die Reise bereits in den ersten Tagen des Juni an, während Richelot und Hesse angewiesen wurden, „für die mathematischen Vorlesungen auszuhelfen“. „Dem erlauchten Staatsmanne, welcher damals an der Spitze der Verwaltung der Provinz Preußen stand“, sagt Dirichlet, „schien es im Interesse der Wissenschaft wünschenswert, daß Bessel und Jacobi einmal der schon oft an sie ergangenen Aufforderung zur Teilnahme an der jährlich in England stattfindenden Gelehrtenversammlung Folge leisteten, und er stellte daher beim Könige den Antrag auf Bewilligung der Kosten zu einer solchen Reise . . .“

Am 11. Juli 1842 verließ Jacobi das Festland und reiste mit seiner Frau zunächst nach Manchester, um dort auf der British Association einen Vortrag „On a new general principle of analytical mechanics“ zu halten, dessen Inhalt er in der Pariser Akademie unter dem Titel „Sur un nouveau principe de la mécanique analytique“ publizierte, und in welchem er schon sein Prinzip vom letzten Multiplikator andeutet, ohne es jedoch noch allgemein auszusprechen; er führt als Beispiele, in denen man das letzte Integral durch Quadraturen er-

halten kann, die Planetenbewegung an, die Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren und die Rotationsbewegung eines Körpers um einen festen Punkt, wenn der Körper nicht von beschleunigenden Kräften angegriffen wird, hebt hervor, daß er bei diesen Untersuchungen die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Bewegung zugrunde legt, und stellt in Aussicht, das allgemeine Prinzip, sobald er nach Königsberg zurückgekehrt sein wird, zu veröffentlichen.

Auf der Rückreise von London besucht er wieder Paris und hält dort in der Akademie einen Vortrag, dessen Inhalt er unter dem Titel „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps“ veröffentlichte. Während bisher das Problem der drei Körper auf die Bewegung zweier von ihnen um den dritten oder um den Schwerpunkt aller drei zurückgeführt wurde, wodurch nicht nur die Symmetrie, sondern auch das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Flächen verloren ging, spricht Jacobi zunächst ein ganz allgemeines Prinzip aus, das er auf das Problem der drei Körper angewandt hat. Wenn n Körper gegeben sind, und die Annahme erlaubt ist, daß der Schwerpunkt derselben in Ruhe bleibt, so erhält man hierdurch für die derselben Achse parallelen Koordinaten je eine lineare Gleichung und kann somit jede durch $n-1$ neue Variabeln linear ausdrücken. Da nun die hierdurch eingeführten $n(n-1)$ Konstanten nur diesen linearen Schwerpunktsbedingungen zu genügen haben, also noch $n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2$ Konstanten willkürlich bleiben, so kann man diese so bestimmen, daß die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte der ersten Ableitungen aus der transformierten lebendigen Kraft herausfallen, und also noch $(n-1)^2-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $=\frac{n(n-1)}{2}$ Konstanten willkürlich bleiben, über die man passend verfügen kann, nachdem die lebendige Kraft des vorgelegten Systems von n Körpern auf eine solche eines

Systems von $n-1$ Körpern, deren Koordinaten die neuen Variabeln sind, mit passend zuerteilten Maßen reduziert worden ist. Das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert eine Gleichung, welche die Summe der lebendigen Kräfte der $n-1$ fiktiven Körper einer Funktion ihrer Koordinaten gleich macht, und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lassen erkennen, daß das Prinzip der Flächen auch für die Bewegung dieser $n-1$ Körper erhalten bleibt. Wendet man dies auf das Problem der drei Körper an, welches man somit auf die Untersuchung des Zwei-Körperproblems reduziert, so folgt aus den drei Flächenprinzipien, daß der gemeinsame Durchschnitt der Bahnebenen der beiden Körper konstant in einer festen Ebene, und zwar der Laplaceschen unveränderlichen Ebene des Systems bleibt, und daß die Neigungen der Ebenen dieser Bahnen gegen die feste Ebene genau bestimmt sind durch die Parameter dieser als variable Ellipsen betrachteten Bahnen. Wählt man nun als Variable des Problems die Neigungen der beiden Bahnen gegen die unveränderliche Ebene, die beiden radii vectores, die Winkel, welche sie mit dem gemeinsamen, in der unveränderlichen Ebene gelegenen Durchschnitt der beiden Bahnebenen bilden, und endlich den Winkel, welchen dieser Durchschnitt mit einer festen Geraden in dieser Ebene macht, so findet man, daß dieser letztere Winkel ganz aus dem System der Differentialgleichungen verschwindet und sich nach deren Integration durch eine Quadratur bestimmt, wonach also die Knoten aus diesen neuen Differentialgleichungen eliminiert sind. Die sechs Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche die relative Bewegung der drei Körper ausdrücken, sind somit auf fünf Differentialgleichungen 1. Ordnung und eine 2. Ordnung reduziert, und daher die Ordnung des Systems der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper erniedrigt.

Wiederum sah sich Clausen veranlaßt, die Tragweite dieser Arbeit von Jacobi zu beanstanden; am 13. September schreibt Schumacher darüber an Gauss: „Clausen hat mir einen Aufsatz gebracht, der eigentlich zeigt (oder zeigen soll), daß bei Jacobi's Methode, die er in Paris der Akademie vorgetragen hat (sur l'élimination du noeud dans le problème de trois corps) nichts gewonnen ist, da statt der ersparten Glieder neue, von Jacobi nicht erwähnte hinzukommen. Dies ist in Lob des dabei verwandten Scharfsinnes eingewickelt, aber das Ganze kann das Motto aus Cicero's Briefen haben, de quo scribis, nihil est, und zeigt, daß Clausen, was ich nicht wußte, auch schalkhaft sein kann. Wenn Sie, mein theuerster Freund, diesen Aufsatz sehen mögen, so werde ich ihn Ihnen sogleich übersenden ...“; doch Gauss antwortete am 16. September, daß er jetzt keine Zeit habe und ihn gedruckt lesen werde, und am 25. September schreibt er ihm, daß ihm noch immer die Zeit fehle, „ihn mit der Aufmerksamkeit zu lesen, die er erfordert und verdient“.

Am 12. September war Jacobi von seiner Reise nach England und Frankreich zurückgekehrt und entwarf seinem Bruder in Petersburg von Königsberg aus eine kurze Schilderung derselben: „... In Paris ist jeder Winkel meiner Arbeiten besser gekannt, als ich je vermuthet hätte, eine große Aufmunterung, aber auch eine schwere Aufgabe, das Erworbene zu conserviren ... In Manchester sprach Faraday viel mit mir von Dir; er reiste ab, als die eigentliche Versammlung anfing, weil er menschenscheu sein soll ... Von allen Gelehrten, welche ich kennen gelernt, haben den bedeutendsten Eindruck auf mich gemacht Brewster und Arago ...“

Die letzten Ferientage vor Beginn seiner großen Vorlesung über analytische Mechanik benutzte Jacobi noch, um die Ausstellungen, welche Clausen an seinen letzten geometrischen und astronomischen Arbeiten zu machen hatte, zu widerlegen. Am 1. September 1842 hatte sich nämlich Schumacher mit der Mitteilung an Gauss gewendet: „Da