für die Zahlentheorie fruchtbarsten Sätze“, aus: „Seien die Zahlen $m, m', m'', \ldots$ positiv und kleiner als $p-1$, werden sodann durch $m_i, m_i', m_i'', \ldots$ die kleinsten positiven Reste bezeichnet, welche $im, im', im'', \ldots$ durch $p-1$ dividiert ergeben, und sei $m_i + m_i' + m_i'' + \cdots = n_i\,(p-1) + s_i$, wo s_i ebenfalls positiv und kleiner als $p-1$, ist endlich ν die kleinste unter den Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_{p-1}$ und setzt man

$$F(r^{-m})F(r^{-m'})F(r^{-m''})\cdots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

so werden die ganzzahligen Koeffizienten in $\chi(r)$ alle durch p^ν teilbar und durch keine höhere Potenz von p; setzt man ferner $\chi(r) = p^\nu \chi'(r)$ und in $\chi'(r)$ für r die primitive Wurzel g, so wird $\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi(s)}{\Pi(m)\,\Pi(m')\ldots}$ (mod. p)…. Diese Theoreme bilden gewissermaßen ein Verbindungsglied zwischen den beiden Hauptteilen der höheren Arithmetik, der Kreisteilung und der Theorie der quadratischen Formen.“

Das Bestreben Jacobis, diese Sätze noch zu verallgemeinern, war die Veranlassung, daß er zunächst, leider für immer, die Fortführung seiner schon 20 Bogen starken Ausarbeitung, von der sich in seinem Nachlasse nichts vorfindet, aufgegeben und sich mit diesem kurzen Berichte an die Akademie begnügte. „Die hauptsächlichste Anwendung der Kreisteilung habe ich auf die Theorie der kubischen und biquadratischen Reste gemacht, und mit großer Leichtigkeit und Einfachheit den schönen Gaussschen Satz in seiner 2. Abhandlung über die biquadratischen Reste, dessen bisher noch nicht bekannt gemachten Beweis derselbe als ein mysterium maxime reconditum bezeichnet, wahrscheinlich auf ganz verschiedenem Wege abgeleitet. Die höchste Einfachheit hat der Reziprozitätssatz für kubische Reste, dessen Beweis sich fast mit einem Striche aus den bekannten Formeln der Kreisteilung findet. Sind nämlich $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{L'+M'\sqrt{-3}}{2}$, wo M und M' durch drei aufgehen, zwei

komplexe Primzahlen, und bezeichnet man durch $\left(\frac{x+y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)$ diejenige der Größen 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche in bezug auf den Modul $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ der Potenz $(x+y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{4}(L^2+3M^2)-1}{3}}$ kongruent ist, so wird geradezu $\left(\frac{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}\right)$.“

Nachdem er noch in bekannter Weise das Legendresche Zeichen verallgemeinert und die Entwicklung des Reziprozitätsgesetzes für achte und fünfte Potenzreste in Aussicht gestellt, geht er zu einer seiner frühesten Anwendungen der Kreisteilung, zur zyklometrischen Auflösung der Pellschen Aufgabe über und entnimmt aus einer Nachschrift einer von ihm vor mehreren Jahren gehaltenen Vorlesung unter anderen Sätzen den folgenden: sei p eine Primzahl von der Form $4n+1$, und bezeichnet man mit a ihre quadratischen Reste zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$, so wird $\sqrt{p}(\sqrt{p}.y+x) = 2^{\frac{p+1}{2}} \prod \sin^2\frac{a\pi}{p}$, wo $x^2 - py^2 = -4$, u. a. m.

Die Fülle der Entdeckungen, die ihm zuströmen, läßt ihn immer mehr zur Erkenntnis kommen, daß er zunächst zu einer zusammenhängenden Bearbeitung all der auf den verschiedensten mathematischen Gebieten gewonnenen Resultate keine Zeit finden wird, und er schickt deshalb wenigstens eine kurze Skizzierung seiner in der Mechanik gewonnenen Theoreme, die wir bereits aus den von ihm gemachten Aufzeichnungen kennen gelernt haben, in einer „Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique“ an die Pariser Akademie. „Tout en composant un mémoire étendu relatif à ces recherches, j'ai été entraîné par des questions sur la théorie des nombres, laquelle a toujours été un objet de prédilection pour un grand nombre de géomètres, et ce ne sera qu'après avoir publié les résultats obtenus dans cette matière, que je reviendrai à mon travail sur la dynamique", und gibt zunächst seine bekannte Darstellung des Prinzips der kleinsten Wirkung, welche auf der Elimination des Zeitelements mittels des Prinzips der lebendigen Kraft beruht. „Je crois, que l'on doit regarder le principe de la moindre action comme l'un des plus importants de la mécanique. En effet, on voit dans un mémoire des Miscellanea Taurinensia, ouvrage immortel et supérieur à tout éloge, Lagrange jeune faire ressortir d'un seul jet de ce principe la mécanique analytique toute faite. Celui des vitesses virtuelles n'a été appelé qu'après coup pour les démonstrations méthodiques dans des travaux postérieurs. Pourquoi donc la mécanique analytique, fille ingrate, a-t-elle voulu accuser le principe de la moindre action comme inutile? Si les travaux de M. Hamilton, et les recherches dont j'ai parlé ci-dessus, ajoutent essentiellement à la mécanique analytique, c'est encore à ce principe qu'on en sera redevable." Nach Einführung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung bespricht er die von ihm früher hierbei gemachten fundamentalen Entdeckungen und fügt hinzu: „Supposons que le mouvement éprouve des perturbations et que les équations différentielles du mouvement troublé deviennent $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \cdots$; si, par les formules du mouvement primitif, on exprime la fonction Ω par t et les $6n$ constantes arbitraires, les differentielles de celles-ci dans le mouvement troublé seront $\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \ldots \frac{d\alpha_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{3n-1}}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \ldots \frac{d\beta_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{3n-1}}, \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}$."

Unaufhörlich geht die gewaltige, seine Gesundheit allmählich untergrabende Arbeit die Herbstferien hindurch vor sich, er kann sich von den verschiedenartigen Problemen nicht losreißen und arbeitet an allen zu gleicher Zeit. Am 31. Oktober 1837 schreibt er an seinen Vetter Schwinck, der sich mit mathematischen Fragen an ihn wendet: „Ich bin sehr unglücklich, daß mich jetzt der Teufel plagt, daß ich wie unsinnig nicht von der Zahlentheorie loskomme, indem ich nämlich endlich, was ich darin seit elf Jahren gepfuscht, zusammenschreiben muß. Ich bin darin so versessen und vielleicht noch für den ganzen Winter, daß es mir unmöglich ist, auch nur den kleinsten andern Gedanken zu haben, und wer weiß, wenn ich jetzt diese göttliche Gelegenheit vorübergehen lasse, welches Schicksal in der nächsten Zeit zwischen uns die Störungen störend treibt. Ich will dann auch die Zahlen schmieden, daß sie die Schuhe verlieren ... Ich kann Ihnen nur den Rath geben, wenn Sie mit dem Gauss fertig sind, ihn wieder von vorn anzufangen. Das mit der Methode der kleinsten Quadrate hat er selbst später aufgegeben; doch ist es für die andern noch gut genug; z. B. Bessel trägt noch immer danach vor."

In dieser Lage bleibt nun Jacobi nichts übrig, als seine weiteren Entdeckungen in der Mechanik und der Theorie der Differentialgleichungen in seinen Vorlesungen niederzulegen, und er kündigt deshalb für den Winter 1837/38 außer dem Seminar eine Vorlesung über Variationsrechnung und eine solche über Mechanik an; von beiden besitzen wir Nachschriften von Rosenhain, dem damals erst 20jährigen, aber schon mit selbständigen Untersuchungen beschäftigten ausgezeichneten Schüler Jacobis.

„In der Geschichte der Mathematik", beginnt Jacobi seine Vorlesung über Variationsrechnung, „und vermutlich auch bei dem Entwicklungsgange aller anderen Wissenschaften trifft es sich oft, daß bei der ersten Entdeckung einer neuen Disziplin kühne und starke Geister in einem einzelnen Punkte weit über ihre Zeit hinaus vorwärts dringen und Fortschritte machen, die erst von ihren Nachkommen verstanden und benutzt werden. Diesem Umstande verdankt auch die Variationsrechnung ihre Entstehung ... Die rasche Förderung dieses Zweiges der Mathematik wurde durch zwei zufällige Umstände bewirkt; einmal durch die Eifersucht und den Wettstreit der englischen und deutschen Mathematiker, die den Streit der Engländer und Franzosen abgelöst hatte, welcher von der Restauration der Wissenschaften an das ganze 17. Jahrhundert hindurch geführt wurde; der andere zufällige Umstand, der noch mehr auf die Ausbildung der Variationsrechnung einwirkte, war der Wettstreit der beiden Brüder Jacob und Johann Bernoulli ..." Jacobi hebt nun zunächst bei der Definition der Variationsprobleme die Schwierigkeit der Untersuchung der 2. Variation hervor und fügt hinzu: „es ist mir nicht bekannt, daß schon irgend jemand daran gedacht hätte, die 2. Variation von Doppelintegralen zu untersuchen, auch habe ich trotz vieler Mühe nur erkannt, daß der Gegenstand zu den allerschwierigsten gehört."

Mit Zugrundelegung der berühmten Lagrangeschen Arbeit, „in welcher die Gedanken wie Blitze mit der größten Schnelle und der größten Kürze aufeinander folgen", geht er von der Entwicklung der 1. Variation des Integrales $\int_a^b f dx$ aus, worin f die Variable x, von dieser abhängige unbekannte Funktionen und deren Differentialquotienten bis zu irgendwelcher Ordnung hin enthält, betrachtet aber auch zugleich den Fall, daß x von einer Variabeln t abhängt, und knüpft daran mannigfache Betrachtungen über die Bildung der Differentialquotienten impliziter Funktionen, die Entwicklung der Lagrangeschen Reihe zur Auflösung der Gleichungen u. a. m. Überall sind bei der Entwicklung der 1. Variation des Integrales die verschiedenen Methoden von Euler, Lagrange u. a. auseinandergesetzt; es werden nun Bedingungsgleichungen zwischen den unbekannten Funktionen $u, v, w, \ldots$ eingeführt, und das Prinzip der Lagrangeschen Multiplikatoren erläutert, die Verschiedenheit der variablen Multiplikatoren für den Fall, daß Bedingungsgleichungen zwischen den unbekannten Funktionen gegeben

sind, und der konstanten für die isoperimetrischen Probleme hervorgehoben. Von der Bemerkung ausgehend, daß unter allen Kurven von gegebenem Umfange der Kreis den größten Inhalt hat, daß der Kreis aber auch die andere Bedingung erfüllt, daß er bei dem kleinsten Umfange einen gegebenen Inhalt einschließt, wird er auf das Reziprozitätsgesetz geführt, daß, wenn die 1. Variation von $\int f dx$ verschwinden soll, und man unter Zugrundelegung der Bedingung $\int f_1 dx = a_1$, $\int f_2 dx = a_2, \ldots$ den Wert desselben gleich a gefunden hat, man genau auf dieselbe Lösung kommen wird, welches immer von den Integralen $\int f dx = a$, $\int f_1 dx = a_1$, $\int f_2 dx = a_2, \ldots$ man als dasjenige ansieht, dessen 1. Variation verschwinden soll, während die übrigen gegebene Werte erhalten. Die allgemeinere Aufgabe, die Variation von V verschwinden zu lassen, wenn eine Gleichung gegeben ist zwischen x, V, den Differentialquotienten von V und den unbekannten Funktionen $u, v, w, \ldots$ und deren Differentialquotienten behandelt Jacobi mit Hilfe einer Kombination des Eulerschen Verfahrens und der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten und geht dabei ausführlicher auf die Integration linearer Differentialgleichungen ein. „Man kann zur Variationsrechnung einen ganz neuen Teil hinzufügen; bis jetzt bestand ihr ganzes Geschäft darin, die Differentialgleichungen aufzustellen und zu integrieren, der Teil, den man noch hinzufügen kann, besteht in der Untersuchung dessen, was alle diese Differentialgleichungen Eigentümliches haben. Hamilton behandelt ein Integral, welches unter dem Integralzeichen nur die ersten Differentialquotienten der unbekannten Funktionen enthält; er zeigt, daß in diesem Falle die Integration der Differentialgleichungen zusammenhängt mit der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Seine Formen sind auch noch dadurch beschränkt, daß die unabhängige Variable x ebenfalls unter dem Integralzeichen nicht vorhanden ist. Doch sind seine Untersuchungen leicht zu verallgemeinern; bei genauer Untersuchung zeigt sich, daß diese Methode auf alle Probleme der Variationsrechnung ausgedehnt werden kann, wenn man nur Funktionen einer Variabeln behandelt; bei Doppelintegralen scheint es sehr schwierig zu sein."

Nachdem er nun diese von ihm gemachte Entdeckung, die er in seinen Vorlesungen über Mechanik ausführlicher behandelt, ziemlich genau skizziert hat, geht er zur Behandlung der 2. Variation über und entwickelt zunächst nach den ihm eigentümlichen Methoden den Fall, daß unter dem Integral nur die erste Ableitung der unbekannten Funktion vorkommt nebst einer ausführlichen Kritik der Untersuchungen von Lagrange und Legendre; Jacobi beweist, daß, wenn man die Differentialgleichung integriert hat, welche das Verschwinden der 1. Variation bedingt, man auch die Differentialgleichung integrieren kann, welche die Kriterien für das Maximum und Minimum gibt, und er geht nun darauf ein, diese Kriterien selbst wirklich aufzustellen, jedoch in dieser Vorlesung immer nur für den Fall, daß die Ableitungen unter dem gegebenen Integral die 1. Ordnung nicht überschreiten. Die 47. Schlußvorlesung beschäftigt sich mit der Bildung der 1. Variation der Doppelintegrale und der Aufstellung der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen.

Zu gleicher Zeit hielt Jacobi aber auch eine ausführliche Vorlesung über Mechanik, die jedoch nicht zur Einführung in diese Disziplin bestimmt war, sondern die Transformation und Integration der Grundgleichungen der Dynamik zum Gegenstande haben sollte. Nach einer ganz kurzen Einleitung über die Darstellung der beschleunigenden Kräfte geht er zur Entwicklung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, des d'Alembertschen Prinzips und der ersten Art der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über; aus dem ersteren leitet er die drei Arten des Gleichgewichts her, wofür die Bewegung der Punkte,

wenn man nur die Impulse gehörig klein annimmt, kleiner als jede gegebene Größe wird, oder die Bewegung endlich wird, wie klein auch die Impulse sind, oder endlich bei einigen Impulsen die eine, bei anderen die andere Art der Bewegung eintritt; aus dem zweiten Prinzip folgert er das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft; über die Bedeutung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für die Maschinenlehre, „soweit ich es bei einem mir unbekannten Gegenstande vermag, einen Begriff davon zu geben", macht er sodann eine Reihe sehr interessanter Bemerkungen. Es folgt der Übergang zur Transformation der Bewegungsgleichungen auf neue Variable und damit die Aufstellung der Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Art, sowie eine ausführliche Behandlung des Falles, in welchem in der Kräftefunktion nur die ersten Potenzen der Koordinaten zu berücksichtigen sind, wobei er näher auf den Satz von der Realität der Lösungen der bekannten Gleichung eingeht, welche die Verallgemeinerung der kubischen Gleichung bei dem Hauptachsenproblem der Flächen 2. Grades darstellt. Er erörtert nun ausführlich das Problem der kleinen Schwingungen, berichtigt dabei einen schon früher in einem Briefe an Bessel erwähnten Irrtum von Lagrange, und entwickelt sodann als Beispiel für die Integration der Bewegungsgleichungen eine genaue Theorie des einfachen Pendels mit Benutzung der elliptischen Funktionen, um sich darauf zur Ausdehnung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Fall, wo die Bedingungen des Systems nur durch Ungleichheiten ausgedrückt werden können, zu wenden, und diese Erweiterung auf die Dynamik mittels des d'Alembertschen Prinzips zu übertragen; er gelangt zu dem Resultat, daß, wenn ein System den Bedingungen unterworfen wird, daß die beschränkenden Funktionen nicht negativ werden können, dann das Gesamtmoment der bewegenden Kräfte weniger dem Gesamtmoment der sollizitierenden immer positiv oder Null sein muß, wenn man die Lage des Systems so ändert, daß den wirklichen physikalischen Bedingungen genügt wird. Sehr ausführlich behandelt Jacobi nun das Prinzip der kleinsten Wirkung, wieder mittels Elimination des Zeitelementes aus dem Prinzip der lebendigen Kraft, indem er schon hier, sowie in seiner späteren großen Vorlesung über Mechanik, auf den Unterschied der Maxima-Minima und der Grenzwerte eingeht. Nun vollzieht sich der Übergang zu dem totalen Differentialgleichungsystem von Hamilton und zu dessen partieller Differentialgleichung, welche Jacobi in der schon früher erwähnten Art auf den Fall erweitert, daß die Kräftefunktion auch die Zeit enthält. Naturgemäß wird er hierdurch zu einer Theorie der partiellen Differentialgleichungen überhaupt und zur Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf den Fall von vier Variabeln, sowie zur Behandlung des erst von ihm in seiner wahren Bedeutung erfaßten Poissonschen Satzes von der Erzeugung neuer Integrale aus zweien geführt. Die Vorlesung, welche 43 Stunden umfaßte, bildet, da es Jacobi an Zeit gebrach, kein abgeschlossenes Ganze und war, wie aus dem letzten Teile der Ausarbeitung ersichtlich, für die Zuhörer äußerst schwierig geworden.

Beim Schluß dieser Vorlesung schrieb er am 28. Februar 1838 an Bessel: „Ich habe mich, wie Sie wissen, mit den Grundgleichungen der Dynamik beschäftigt, versteht sich, ohne zu arbeiten, da Herbart und ich nie arbeiten. Ich bin hierbei auf folgendes fabelhafte Theorem gekommen, welches ich Ihnen großmüthiger als Herr B. ohne Entrée präsentiren will: Wenn in einem Problem der Mechanik der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und man kennt irgend zwei Integrale außerdem, so kann man daraus immer nach einer festen Regel durch bloßes Differentiiren ein drittes ableiten, z. B. aus den beiden Flächensätzen den dritten . . .“

Während dieser Wintervorlesung über Mechanik und Variationsrechnung machte er wieder eine Reihe von umfang-

reichen Aufzeichnungen, welche Teile seines großangelegten Werkes über partielle Differentialgleichungen bilden sollten und die später von Clebsch herausgegeben wurden. In der ersten derselben, welche wahrscheinlich im Sommar 1838 verfaßt wurde und den Titel trägt „Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi“ stellt er zunächst, wie in einer schon früher besprochenen Aufzeichnung, unter der Annahme, daß die partielle Differentialgleichung $(q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m, V) = 0$ durch Einführung einer neuen Variabeln t mittels der Gleichung $W = t \cdot V$ in eine andere übergeführt ist, welche die abhängige Variable gar nicht enthält, das Integrationsproblem in der Form, daß, wenn eine Gleichung zwischen den Größen $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ gegeben ist, $m-1$ andere Gleichungen zwischen denselben Größen zu finden sind, aus denen $p_1, \ldots p_m$ als solche Funktionen von $q_1, \ldots q_m$ hervorgehen, daß $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential wird. Nachdem er die hierdurch sich ergebenden Integrabilitätsbedingungen in dreierlei Form aufgestellt, beweist er das wichtige Theorem, daß, wenn $H_1, H_2, \ldots H_m$ voneinander unabhängige Funktionen der Variabeln $p_1, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$ sind, von denen je zwei beliebige H_i und $H_{i'}$ der Gleichung genügen $\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m} - \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m} = 0$, und man aus den Gleichungen $H_1 = h_1, \ldots H_m = h_m$, worin $h_1, \ldots h_m$ willkürliche Konstanten sind, die in $H_1, \ldots H_m$ nicht vorkommen, die Größen $p_1, \ldots p_m$ durch $q_1, \ldots q_m$ ausdrückt, der Ausdruck $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential ist, das gestellte Problem somit auf die Lösung von $\frac{m(m-1)}{2}$ gleichzeitigen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann.

Jacobi will nun hier nicht allgemein die Frage erörtern, wann und wie ein und dieselbe Funktion gleichzeitig mehreren partiellen Differentialgleichungen genügen kann; er beschränkt sich vielmehr darauf, das vorgelegte Problem mittels des Satzes zu erledigen, daß, wenn $\varkappa$ und λ verschieden von den Zahlen $1, 2, \ldots i$, und φ irgendein Integral der Differentialgleichung $0 = \frac{\partial f}{\partial q_\varkappa} + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m}$ ist, dann auch, wenn $p_\varkappa$ und p_λ Funktionen von $q_\varkappa, q_\lambda, q_{i+1}, \ldots q_m, p_{i+1}, \ldots p_m$ sind, welche der Gleichung $\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}$ genügen, die Funktion $f = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}$ ein Integral jener Differentialgleichung ist. Auf dieses Theorem gründet er nun seine Methode der sukzessiven Integration; stellt man zuerst das gewöhnliche Differentialgleichungssystem auf $\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}, \cdots \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_2}, \cdots \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}$, worin p_1 vermöge der vorgelegten partiellen Differentialgleichung als Funktion von $p_2, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$ gegeben ist, und sei $f_1 = a_1$ ein Integral, bestimmt hieraus p_2 als Funktion der Größen $p_3, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$, also auch p_1 als Funktion derselben Größen, bildet sodann das System $\frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, \cdots \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \cdots \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}$, und aus einem Integrale φ desselben nach dem obigen Theorem eine Reihe weiterer Integrale $\varphi', \varphi'', \ldots$, bis man nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einer Integralgleichung $f_2 = a_2$ gelangt, welche den beiden ersten simultanen partiellen Differentialgleichungen genügt, drückt aus $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ die Größen p_1, p_2, p_3 durch $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$

aus, usw., bis man $p_1, p_2, \ldots p_m$ durch $q_1, q_2, \ldots q_m$ dargestellt erhält, so wird $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential sein.

Zum Beweise des zugrunde gelegten Hilfsatzes leitet Jacobi nach Einführung des Symbols $A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = A[\varphi]$ das Theorem her, daß, wenn für jeden Wert von i $0 = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$ und $0 = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = A[f]$ ist, auch $AB^{(m)}[f] = 0$ sein wird, und zwischen $f, B[f], B^2[f], \ldots B^{n-1}[f]$ eine oder mehrere Gleichungen existieren, welche $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthalten; daß ferner, wenn R und S beliebige Funktionen von $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ sind und $[R, S] = \frac{\partial R}{\partial q_1} \frac{\partial S}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m} \frac{\partial S}{\partial p_m} - \frac{\partial R}{\partial p_1} \frac{\partial S}{\partial q_1} - \cdots - \frac{\partial R}{\partial p_m} \frac{\partial S}{\partial q_m}$, $[\varphi, \psi] = F$, $[\psi, f] = \Phi$, $[f, \varphi] = \Psi$ gesetzt wird, die Beziehung besteht $[F, f] + [\Phi, \varphi] + [\Psi, \psi] = 0$ „gravissimum theorema", woraus unmittelbar folgt, daß, wenn $\varphi =$ cst., $\psi =$ cst. zwei beliebige Integrale der Gleichungen $dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m = \frac{\partial f}{\partial q_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_m} : -\frac{\partial f}{\partial p_1} : \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_m}$ sind, die Gleichung $[\varphi, \psi] =$ cst. wiederum ein Integral dieses gewöhnlichen Differentialgleichungssystems sein wird. „Inquirens autem in conditiones possibilitatis ejusmodi integrationis simultaneae quum ad hoc Theorema fundamentale delapsus essem, ingenue fateor, theorema illud me per aliquod tempus pro invento plane novo habuisse. Quid enim magis mirum fingi potest ac paene fidem superans, quam quod inde sequitur et mox videbimus, in omnibus problematis mechanicis, in quibus virium vivarum conservatio locum habet, g e n e r a l i t e r e duobus integralibus praeter principium illud inventis reliqua omnia absque ulla ulteriore integratione inveniri posse?" P o i s s o n hatte den Satz an sich schon im Jahre 1809 veröffentlicht und L a g r a n g e dieses

Theorem für die Störungstheorie verwendet. „Videmus ipsum summum magistrum ne suspicatum quidem esse, quid sit id, quod re vera theorema singulare reddat. Habemus hic praeclarum exemplum, nisi animo praeformata sint problemata, fieri posse, ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus.“

Mit Hilfe dieser Symbole beweist nun Jacobi den oben erwähnten Hilfsatz, aus dem er die Integrale des simultanen partiellen Differentialgleichungssystems $[H_i, H_\varkappa] = 0$ herleitet, und folgert daraus von neuem den Satz, daß, wenn V ein Integral der partiellen Differentialgleichung $f(q_1, \dots q_m, p_1, \dots p_m) = a$ ist, welches aus der Gleichung $V = \int (p_1 dq_1 + \dots + p_m dq_m)$ gefunden wird, in welcher $p_1, \dots p_m$ mit Hilfe der oben aufgestellten Beziehungen $f = a$, $f_1 = a_1$, $\dots f_{m-1} = a_{m-1}$ durch $q_1, \dots q_m$ ausgedrückt sind, man die Integrale des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$ in der Form darstellen kann $\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \dots \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$, $\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \dots \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \frac{\partial V}{\partial a} = t + b$, worin die a und b willkürliche Konstanten sind. In Anwendung auf die Hamiltonschen dynamischen Differentialgleichungen wird gezeigt, daß, wenn man aus zwei Integralen der dynamischen Differentialgleichungen ein drittes durch das Symbol $[\varphi, \psi]$ herleitet, dieses Integral in keiner Weise von der Wahl der Variabeln q_i, sondern nur von der wahren Natur der Funktionen φ und ψ abhängt; aus der Deutung des Poissonschen Satzes ergibt sich wieder, daß der 3. Flächensatz eine Folge der beiden andern ist, und zugleich wird geschlossen, daß, wenn für ein mechanisches Problem das Prinzip der lebendigen Kraft sowie die Flächenprinzipien gelten und die Lage des Systems durch drei Größen bestimmt ist, dasselbe auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Jacobi geht sodann zur Entwicklung der einfachsten

Störungsformeln über, welche aus dem Hamiltonschen Differentialgleichungssystem erhalten werden, und dehnt diese Formeln sowie den Poissonschen Satz auf den Fall aus, daß die Funktion $H = T - U$, welche er die Hamiltonsche Funktion nennt, auch die Größe t enthält. Für diesen Fall wird auch eine Kombination des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft und des Flächenprinzips untersucht, welche in gewissen Fällen gültig bleibt, wiewohl die Kräftefunktion die Zeit explizite enthält, also diese beiden Prinzipien einzeln nicht gelten. Wenn nun die Kräftefunktion die Zeit nicht explizite einschließt, so wird das Differentialgleichungssystem $2m$. Ordnung $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, auf die Form gebracht $dq_1 : \dots : dq_m : dp_1 : \dots dp_m = \frac{\partial H}{\partial p_1} : \dots : -\frac{\partial H}{\partial q_1} \dots$, $2m - 1$. Ordnung sein und somit durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Ordnung um zwei Einheiten erniedrigt werden; die gleiche Erniedrigung der Ordnung erfolgt durch ein Flächenprinzip, jedoch nicht durch jedes Integral, Sätze, die er bereits in seinen Briefen, Aufzeichnungen und Vorlesungen ausgesprochen hatte.

Seinen Satz von den Differentialgleichungen der Störungselemente basiert er nun auf ein allgemeines Transformationstheorem des Hamiltonschen kanonischen Systems in ein anderes kanonisches, nach welchem, wenn das System vorgelegt ist $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_i}$, und eine willkürliche Funktion V der Größen $t, q_1, \dots q_m$ und neuer Variabeln $a_1, a_2, \dots a_m$ gebildet wird, ferner aus den Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial V}{\partial a_i} = -b_i$ die Variabeln $q_1, \dots q_m, p_1, \dots p_m$ durch t und die neuen Variabeln $a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_m$ ausgedrückt werden, der Ausdruck $f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_m)$ für diese Variabeln das kanonische System liefert $\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}$, $\frac{db_i}{dt}$

$= -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$. Zur Anwendung seiner Theorie geht er auf das Problem der Bewegung eines von einem und zwei festen Zentren angezogenen Punktes und von der Rotation eines von keinen Kräften sollizitierten, um einen festen Punkt rotierenden Körpers näher ein, entwickelt zugleich die Differentialausdrücke der gestörten Elemente für beide Probleme, und beweist den Satz, daß, wenn ein Integral der Differentialgleichung 2. Ordnung der geodätischen Linie gefunden ist, die Bestimmung dieser Linie stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Der Behandlung von $\delta\int(T + U)dt = 0$ analog, wird noch für die isoperimetrischen Probleme $\delta\int\varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m')dt = 0$ allgemein gezeigt, daß, wenn mit Hilfe der Gleichungen $\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = p_i$ der Ausdruck $H = q_1' \frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + \cdots + q_m' \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi$ als Funktion der q und p dargestellt wird, die Lösung des Problems von dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem $\frac{d q_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{d p_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ abhängt, wozu es wiederum genügt, die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ zu kennen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der von Lagrange und Poisson gegebenen Störungsformeln, wonach, wenn $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ beliebige voneinander unabhängige Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$, also auch letztere ebensolche Funktionen der ersteren sind, mit Benutzung der Symbole $(\alpha_i, \alpha_\varkappa) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_\varkappa}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \cdots - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_\varkappa} - \cdots$, $[\alpha_i, \alpha_\varkappa] = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial p_1} + \cdots - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial q_1} - \cdots$ aus dem Systeme der $2m$ linearen Gleichungen $v_\varrho = (\alpha_\varrho, \alpha_1)u_1 + \cdots + (\alpha_\varrho, \alpha_{2m})u_{2m}$ sich durch Auflösung derselben die Werte $u_\varrho = [\alpha_\varrho, \alpha_1]v_1 + \cdots [\alpha_\varrho, \alpha_{2m}]v_{2m}$ ergeben.

Ein unangenehmer Zwischenfall hatte die Königsberger

Professoren und unter diesen besonders Jacobi noch am Ende dieses Jahres in große Aufregung versetzt. Als die sieben Göttinger Professoren im Jahre 1837 ihrer Ämter entsetzt wurden, beschloß noch in demselben Jahre die philosophische Fakultät in Königsberg auf Anregung von Lobeck dem Juristen Albrecht, im folgenden Jahre die medizinische Fakultät Wilhelm Weber die Doktorwürde honoris causa zu verleihen; das Ministerium sah jedoch hierin „ein ganz unberufenes und ungehöriges Urtheil über Acte einer fremden Regierung, welches die ernstlichste Rüge verdient“, und auch der Kronprinz Friedrich Wilhelm, als Rektor der Albertina, gab in einem Schreiben an Prorektor und Senat sein großes Mißfallen über diese Beschlußnahme zu erkennen. Der Mitglieder beider Fakultäten bemächtigte sich nun infolgedessen eine große Erregung, die aus Briefen Jacobis an Neumann und Bessel unverkennbar hervortritt, und es erfolgte gemeinsam von der philosophischen und medizinischen Fakultät eine würdige und auf ihre bisherige öffentliche Wirksamkeit — „da auch der Jüngste von uns bereits im 10. Jahre seines akademischen Lehramtes steht“ — hinweisende Erklärung. Erst mit der vom 3. März 1838 datierten Antwort des Kronprinzen — „Mit herzlicher Freude habe ich Ihr Schreiben vom 27. v. M. empfangen, weil ich in der Art, wie Sie meinen Tadel aufgenommen, so ganz die ehrenwerthe Gesinnung erkenne, welche die Albertina seit jeher ausgezeichnet hat. Ich werde auch gern jede Gelegenheit wahrnehmen, Ihnen Beweise meiner Achtung und meines aufrichtigen Wohlwollens zu geben“ — trat Beruhigung der Gemüter ein, und auch Jacobi gewann nach kurzer Unterbrechung wieder die zu seinen großen Arbeiten nötige Ruhe.

Von der Regierung durch den Roten Adlerorden 4. Klasse ausgezeichnet und am 22. März 1838 von der Berliner Akademie durch Bewilligung von 500 Talern zur Herausgabe von Tafeln für die Primzahlen-Reste, „einem

Unternehmen von großem wissenschaftlichen Werthe", sehr erfreut, genoß er im Sommer wenigstens in seiner pädagogischen Tätigkeit eine kleine Erleichterung, da er außer dem mathematischen Seminar nur eine Vorlesung über die Anfangsgründe der analytischen Geometrie angekündigt hatte.

Aber seine wissenschaftlichen Arbeiten überwältigten ihn immer mehr, nicht sowohl durch ihre Schwierigkeit als durch Umfang und Ausdehnung; „was mich selbst betrifft", schreibt er am 9. Juni seinem Bruder, „so bin ich jetzt in einer unglücklichen Periode, mehrere größere Arbeiten $^3/_4$ druckfertig zu machen und dann zu ihrer gänzlichen Beendigung die Geduld zu verlieren; vielleicht kommt wieder einmal eine Periode, in welcher ich grade umgekehrt alles beendige."

Auch für den Winter hatte Jacobi nur zwei elementare Vorlesungen über die Theorie der Oberflächen und über Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen angekündigt, um sich ungestört ganz der Fortführung seiner mathematischen Arbeiten widmen zu können; vom 21. November 1838 ist seine Arbeit „Neues Theorem der analytischen Mechanik" betitelt.

Im Anschluß an eine Arbeit von Encke „über die speziellen Störungen" bemerkt Jacobi: „Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verifiziert werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, für welches die Kräftefunktion auch die Zeit enthalten darf." Finden zwischen den n Punkten eines Systems irgendwelche Verbindungen statt, welche durch $3n - m$ Bedingungsgleichungen gegeben sind, so daß man die Position der Punkte immer durch m voneinander unabhängige Größen $q_1, \ldots q_m$ bestimmen kann, drückt man sodann die lebendige Kraft T

durch $q_1, \ldots q_m, q_1', \ldots q_m'$ aus, und setzt $\frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$, so finden, wenn man die Anfangswerte der q_i und p_i mit q_i^0, p_i^0 bezeichnet, stets die Beziehungen statt $\frac{\partial q_i}{\partial q_\varkappa^{(0)}} = -\frac{\partial p_\varkappa^{(0)}}{\partial p_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial q_\varkappa^0} = \frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial q_i}$, $\frac{\partial q_i}{\partial p_\varkappa^0} = \frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial p_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa^0} = -\frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial q_i}$, worin jeder der beiden Indices i und $\varkappa$ alle Werte $1, 2, \ldots m$ annehmen kann, und die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen voraussetzen, daß man in die Integralgleichungen des Problems die Größen q_i^0 und p_i^0 als die willkürlichen Konstanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Größen q_i und p_i aufgelöst hat, während für die rechtsstehenden partiellen Differentialquotienten die Integralgleichungen nach den Größen q_i^0 und p_i^0 aufzulösen sind; die letzteren Ausdrücke erhält man aus den ersteren, wenn man q_i und q_i^0, p_i und p_i^0 miteinander vertauscht und $-t$ statt t setzt. Für jedes so beschaffene System von Elementen nehmen die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt an, indem der Differentialquotient jedes gestörten Elementes, genommen nach der Zeit, einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion gleich wird, dessen Koeffizient nur $+1$ oder -1 ist.

Es war für Jacobi ein Ausruhen von seinen weitgreifenden und ermüdenden Untersuchungen, als er in den Weihnachtstagen sich mit schon früher in Angriff genommenen Problemen, die ihn wieder zu den elliptischen und Abelschen Transzendenten zurückführten, beschäftigte. Am 28. Dezember 1838 schrieb er an Bessel: „Ich habe gestern die geodätische Linie für ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen auf Quadraturen zurückgeführt. Es sind die einfachsten Formeln von der Welt, Abel'sche Integrale, die sich in die bekannten elliptischen verwandeln, wenn man zwei Axen gleich setzt", und Bessel, welcher sich früher vielfach mit diesem Problem beschäftigt hatte, teilt dies sogleich am

4. Januar 1839 Gauss mit: „Jacobi hat mir in diesen Tagen gesagt, daß er im Besitze der Gleichung der geodätischen Linie auf einem elliptischen Sphaeroide von drei verschiedenen Axen ist. Die Form ist so, daß sie sich, wenn zwei der Axen gleichgesetzt werden, unmittelbar auf die Gleichung der geodätischen Linie auf dem Rotationssphaeroid reducirt."

Aber auch diese Arbeit konnte Jacobi infolge geistiger Übermüdung im Winter nicht mehr druckfertig machen, nur noch der wissenschaftliche Kontakt mit Bessel blieb in dieser Zeit schwerster Überlastung unberührt, und Fragen der verschiedensten Art, besonders bezüglich der Konvergenz der Fourierschen Reihen, gaben interessante Gegenstände für das wissenschaftliche Gespräch und den steten kurzen Briefwechsel; Bessel sendet Jacobi seine Arbeiten vor dem Druck zur Durchsicht, und Jacobi beantwortet dessen Fragen und Bedenken meist umgehend. „Da ich in Beweisen von der Art des vorliegenden", schreibt Jacobi am 9. Januar 1839 an Bessel, „nicht die geringste Übung habe, so habe ich hier das Verhalten des Pfuschers dem Meister gegenüber. Ich kenne nur drei, denen ich es auf ihr Wort glaube, sie haben etwas bewiesen: Gauss, der in der neuen Zeit diese langweilige Strenge erfunden zu haben scheint, Dirichlet und der verstorbene Abel, und diese würde ich nur als Meisterrichter ansehen. Nur um Ihren Befehlen zu gehorchen, erlaube ich mir gegen die Evidenz der Darstellung im § 4 etwas zu moniren . . ." Aber schon am 7. Februar kommt Bessel mit einem ähnlichen Anliegen und schreibt ihm: „Da es doch nicht angeht, daß meine mathematischen Pfuschereien sich eher einem Anderen als dem Meister zeigen (ein anderes ist Pfuscherarbeit, ein anderes Meisterarbeit), so plage ich Sie, lieber Meister, noch einmal mit der Entwicklung der cos.- und sin.-Reihen. Die Geschichte ist so unendlich einfach, daß es mich ärgert, soviel Worte darüber haben machen zu müssen . . . und nun bitte

ich Gott, daß er mich nie wieder zu mathematischen Pfuschereien kommen lasse, sondern mir einen Ekel an allem, was nicht Astronomie ist, beibringe. Diesmal hat Fourier die Schuld."

Die Folgen der ungeheuren geistigen Anstrengung blieben nicht aus; Kopfschmerzen und nervöse Zustände machten jede weitere Tätigkeit unmöglich, und Jacobi wurde gezwungen, zum Zwecke einer Badekur für den Sommer Urlaub zu nehmen. Er reist zunächst Ende März auf einige Wochen zu seiner Mutter nach Potsdam, von wo aus er seine Freunde in Berlin häufig aufsucht; er wird sogleich von Alexander von Humboldt überaus freundlich aufgenommen, und dieser zeigt ihm zu seiner großen Freude einen an demselben Tage von seinem Bruder Moritz aus Petersburg erhaltenen Brief, der ihm schreibt: „während meine Maschinen arbeiten, werden in einer Zelle der Batterie Kupferplatten und Visitenkarten en relief gravirt, die mir das Publicum zuträgt. Wenn das Licht zeichnet, wird es auch der Electricität erlaubt sein zu graviren." Der Umgang mit Steiner und Dirichlet stärkt und belebt ihn, es gelingt ihm auch, Steiner zu Dirichlet zu bringen, nachdem seit zwei Jahren jeder Umgang zwischen beiden aufgehört, auch seinen alten und verehrten Lehrer Boeckh suchte er wieder auf; „das eine nur hatte er an mir auszusetzen", schreibt er seiner Frau, „daß ich aus Potsdam sei, da sei noch nie ein berühmter Mann hergekommen — übrigens ist es auch wirklich ein gräßlicher Ort —"; daß damals ein junger Potsdamer, der wenige Jahre später durch sein Prinzip von der Erhaltung der Kraft der gesamten naturwissenschaftlichen Forschung neue Bahnen weisen sollte, sich bereits als junger Student in Berlin befand, wußte Boeckh natürlich noch nicht. Am 8. April schreibt Jacobi: „In Berlin war ich beständig mit Steiner, Dirichlet und Dr. Kummer aus Liegnitz zusammen, wo jeder und vor allem Dirichlet den Kern seiner Gedanken, Erfindungen, Arbeiten und Projecte zum Besten gab." Aber nicht lange erträgt Jacobi diese Ruhe und Enthaltung von wissenschaftlicher Arbeit; er zieht sich wieder in die Stille seines Elternhauses nach Potsdam zurück, sehr erfreut, daß Humboldt ihn dort täglich ein- auch zweimal besucht, und beschließt erst Anfang Juni nach Marienbad zu gehen, wofür ihm Johannes Schulze eine Unterstützung beim Könige auszuwirken versprochen hatte.

Gleich die ersten Tage seiner Muße in Potsdam benutzt nun Jacobi dazu, um die schon im Dezember des vorigen Jahres entworfene und der Pariser Akademie kurz mitgeteilte Untersuchung auszuarbeiten und am 18. April der Berliner Akademie unter dem Titel „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution", vorzulegen. „Indem er vermittels der so vereinfachten Theorie", sagt Dirichlet, „um nur eine der zahlreichen Anwendungen anzuführen, das noch ungelöste Problem behandelte, die geodätische Linie auf dem ungleichachsigen Ellipsoid zu bestimmen, gelang es ihm mit Hilfe eines analytischen Instrumentes, welches sich schon früher in seinen Händen als sehr wirksam gezeigt hatte und jetzt unter dem Namen der elliptischen Koordinaten allgemein bekannt ist, die partielle Differentialgleichung zu integrieren und so die Gleichung der geodätischen Linie in Form einer Relation zwischen zwei Abelschen Integralen darzustellen. Die Jacobische Entdeckung ist die Grundlage eines der schönsten Kapitel der höheren Geometrie geworden, welches deutsche, französische und englische Mathematiker wetteifernd ausgebildet haben."

Die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linie des ungleichachsigen Ellipsoids, welche für die gewöhnlich üblichen Koordinaten so überaus schwierig erscheint, zerfällt nach Jacobis Entdeckung durch Einführung der sogenannten Krümmungslinien-Koordinaten in zwei Quadraturen, welche durch Abelsche Integrale, und zwar von der 1. Ordnung, welche zunächst auf die elliptischen folgt, dargestellt werden, und ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für die Rektifikation der geodätischen Linie; für das Umdrehungsellipsoid verwandelt sich das eine der beiden Abelschen Integrale in einen Kreisbogen, das andere in ein elliptisches Integral der 3. Gattung. Jacobi hebt hervor, daß schon Legendre die hierauf bezüglichen Formeln von Monge als analytisches Instrument benutzt hat, um den Inhalt der Oberfläche des Ellipsoids auf die Länge von Ellipsenbogen zu reduzieren, wie „einst Archimedes den Inhalt der Kugeloberfläche auf die Länge der Kreisperipherie zurückgeführt hat".

Von dieser Methode der Lagenbestimmung der Punkte eines Ellipsoids macht nun Jacobi noch eine Anwendung auf die Aufgabe, die Oberfläche des Ellipsoids so auf einer Karte abzubilden, daß die unendlich kleinen Teile ähnlich bleiben; wendet man die Theorie von Gauss an, nach welcher man den Ausdruck für das Linienelement $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ in zwei Faktoren zerlegt und jeden Faktor mit Hilfe des Multiplikators integriert, so treten für gewöhnliche Variabeln unübersteigliche Hindernisse entgegen, während sich für die Jacobischen Variabeln das Problem unmittelbar auf bloße Quadraturen, und zwar auf Abelsche Transzendenten zurückführen läßt. „Durch Ausdehnung dieser auf drei Variabeln bezüglichen Formeln auf jede Zahl von Variabeln bekommt man merkwürdige Amplifikationen wichtiger Theoreme. Auf diese Weise habe ich die berühmte von Legendre entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der 1. und 2. Gattung zweier elliptischer Integrale, deren Moduln Komplemente zueinander sind, auf alle Abelschen Integrale ausgedehnt. Aber dieselbe Substitution hat mich auf das Abelsche Theorem selbst geführt, auf einem Wege und durch Betrachtungen, welche von dem von Abel eingeschlagenen gänzlich verschieden sind und welche von einem mechanischen Probleme ausgehen.“ Euler hat das Problem der Anziehung von zwei festen Zentren auf elliptische Integrale zurückgeführt, die, wenn eine der anziehenden Massen oder beide $= 0$ werden, nicht aufhören, elliptische Integrale zu sein, so daß man die elliptische Bewegung eines Planeten oder selbst die geradlinige Bewegung eines Punktes durch eine Gleichung zwischen elliptischen Integralen erhält. Damit sind zwei Methoden gegeben, dasselbe Problem zu behandeln, von denen die eine die Lösung in transzendenter, die andere in algebraischer Form darstellt, also eine Methode, das Fundamentaltheorem der elliptischen Integrale aufzufinden. „Indem ich die für zwei Variabeln angewandten Formeln auf jede Zahl von Variabeln ausdehnte, erhielt ich das Abelsche Theorem, und zwar in einer neuen, merkwürdigen und fertigen Form. Zugleich ergab sich ein einfacher Weg, von dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie ich dasselbe früher in einer Abhandlung über die Abelschen Transzendenten aufgestellt habe, durch Anwendung passender Multiplikationen direkt zu den algebraischen Integralen zu gelangen, was mir früher wegen der großen Komplikation des Gegenstandes wohl wünschenswert, aber schwer zu erreichen schien.“

Nach Vollendung dieser Arbeit stellt er noch während seines Aufenthaltes in Potsdam einige seiner schon weit zurückliegenden zahlentheoretischen Überlegungen zusammen, wohl im Hinblick auf den in wenigen Wochen in Aussicht genommenen Besuch bei Gauss, und legt dieselben unter dem Titel „Über die komplexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5., 8. und 12. Potenzen zu betrachten sind“ am 16. Mai der Berliner Akademie vor. Gauss hatte die komplexen Zahlen von der Form $a + bi$ als Moduln oder Divisoren eingeführt und dadurch das biquadratische Reziprozitätsgesetz in derselben Einfachheit und Vollendung gefunden wie das quadratische. „Aber wie

einfach jetzt auch eine solche Einführung der komplexen Zahlen als Moduln erscheinen mag, so gehört sie nichtsdestoweniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, daß zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern daß er aus dem Studium der elliptischen Transzendenten geschöpft worden ist, und zwar der besonderen Gattung derselben, welche die Rektifikation von Bogen der Lemniskate gibt. In der Theorie der Vervielfachung und Teilung von Bogen der Lemniskate spielen nämlich die komplexen Zahlen von der Form $a + bi$ genau die Rolle gewöhnlicher Zahlen.“ So beim Multiplikations-Divisionsproblem, der 17-Teilung etc.

„Mögen nun auch jene Untersuchungen der Integralrechnung viel komplizierter und schwieriger erscheinen als jener einfache Gedanke der Zahlenlehre, so ist es doch nicht immer das Einfache, welches sich zuerst darbietet. Gauss versichert in den Disqu. arith., die Methode seiner Kreisteilung auf die Teilung der ganzen Lemniskate anwenden zu können und verspricht hierüber ein amplum opus zu einer Zeit, in welcher er sich sicher noch nicht, seinen eignen späteren Angaben zufolge, mit den biquadratischen Resten beschäftigt hatte. Auch ist es nicht unwahrscheinlich, daß er die Fundamentaltheoreme über biquadratische Reste aus dieser Quelle geschöpft hat ...“ Jacobi bezeichnet es als eine ebenso interessante als schwierige Aufgabe, der von Abel gefundenen Teilung der Lemniskate in $a + bi$ Teile einen geometrischen Sinn abzugewinnen. „Die Geometrie hat in neuerer Zeit mit Glück dem Imaginären auch auf ihrem Gebiete einen Platz angewiesen; es ist zu erwarten, daß sie bei dem bewunderungswürdigen Aufschwung, welchen sie unter Steiners Händen genommen hat, sich auch dieser abstrakteren Ideen bemächtigen wird.“ Er hebt hervor, daß zur Auffindung der Reziprozitätsgesetze für kubische Reste, die sich noch einfacher als die Gaussschen für biquadratische Reste gestalten und aus bekannten Formeln der Kreisteilung ableiten lassen, nur die Einführung komplexer Zahlen von der Form $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ oder solcher, die aus den 3. Einheitswurzeln zusammengesetzt sind, als Moduln oder Divisoren erfordern; er beweist, daß jede Primzahl p von der Form $8n+1$ in vier komplexe Faktoren, welche aus 8. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, in der Form zerlegt werden kann $p=\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^3)\varphi(\alpha^5)\varphi(\alpha^7)$, worin $\varphi(\alpha)=y'+y''\alpha^2+z'\alpha+z''\alpha^3$, und y', y'', z', z'' ganze Zahlen sind, und ähnlich lassen sich die Primzahlen von der Form $12n+1$ in vier komplexe Faktoren zerfällen, welche aus 12. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind. Die drei Arten, wie man die vier Faktoren in zwei Paare ordnen kann, geben im ersten Falle für die Primzahlen von der Form $8n+1$ die Darstellung derselben Primzahl in den drei Formen $a^2+b^2, c^2+2d^2, e^2-2f^2$, im zweiten Falle die Darstellung der Primzahlen $12n+1$ in den drei Formen $a^2+b^2, c^2+3d^2, e^2-3f^2$. Zur Untersuchung der Eigenschaften der durch die Kreisteilung eingeführten komplexen Zahlen geht Jacobi auf einen früher von ihm bewiesenen Satz zurück, daß, wenn λ ein Teiler von $p-1$ ist, sich die Primzahl p, und in der Regel auf mehrere verschiedene Arten, als Produkt zweier komplexen Zahlen darstellen läßt, welche aus λ. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, und bemerkt nun, daß man mehrere dieser komplexen Zahlen miteinander multiplizieren und das Produkt wieder durch andere komplexe Zahlen derselben Art dividieren kann, so daß der Quotient ebenfalls eine ganze komplexe Zahl wird, ohne daß man sieht, wie die komplexen Zahlen des Nenners sich gegen die des Zählers fortheben. „Eine genaue Betrachtung dieses merkwürdigen Umstandes führte mich zu der Überzeugung, daß diese komplexen Faktoren der Primzahl p im allgemeinen selbst wieder zusammengesetzt sein müssen, so daß, wenn man sie in die wahren komplexen Primzahlen auflöst, die komplexen Primzahlen, welche die Faktoren des Nenners bilden, gegen die Primfaktoren des Zählers sich einzeln aufheben lassen.“ Es gelang Jacobi in der Tat nach vielen mühsamen, an den einzelnen Primzahlenformen angestellten Versuchen nachzuweisen, daß die Primzahlen von der Form $5n+1, 8n+1, 12n+1$ sich als Produkte von vier ganzen komplexen Zahlen, welche resp. aus 5., 8., 12. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, von der Art darstellen lassen, daß die neuen Faktoren notwendig Primzahlen sind, zwischen denen man in der Theorie der Reste der 5., 8., 12. Potenzen die Reziprozitätsgesetze aufzusuchen hat.

Bevor er nun seine Verwandten und Freunde in Potsdam und Berlin verließ, übersandte er noch am 16. Mai dem Minister seinen „Canon arithmeticus sive tabulae, quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra 1000 numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes“ und stattete zugleich seinen Dank ab „für die bei des Königs Majestät beantragte Unterstützung zu der von ihm beabsichtigten Badecur“. Auf der Reise nach Marienbad hielt er sich nur kurze Zeit in Dresden auf, und sein Umgang in Marienbad selbst, wo er jedem größeren Verkehr fern bleiben, aber auch jede geistige Anstrengung meiden sollte, beschränkte sich hauptsächlich auf seinen alten Freund Peter Riess; nur einmal hatte er Gelegenheit, dem preußischen Kronprinzen vorgestellt zu werden: „... Von der Gegend, in der die neue Petersburger Sternwarte errichtet ist, gab er eine sehr schöne, fast romantische Beschreibung. In die Worte solches Herrn legt man so viel Geist, wie bei einer Geliebten, soviel nur irgend hineingeht.“ Nach Beendigung der Kur, die seiner Gesundheit sehr zuträglich schien, reiste er, nachdem er noch Humboldt in Teplitz besucht, nach Prag und Wien, ohne jedoch von dem Aufenthalt daselbst sehr befriedigt zu werden, und traf dann mit Wilhelm Weber, den er schon seit zehn Jahren nicht wieder gesehen hatte, in München zusammen. In den ersten Tagen des

September verbrachte er einige herrliche Stunden in Heidelberg: „dort besuchte ich den alten Mathematiker Schweins, der mich als Lehrer von Steiner und weil ich als Student viel in seinen Sachen gelesen, interessirte, und der mich Nachmittags auf das Heidelberger Schloß begleitete." Über Frankfurt, Mainz, Köln eilte er nun direkt — wenigstens hatte er, wie wir wissen, die Absicht, dies zu tun — zu Gauss nach Göttingen, leider liegt aber keinerlei Nachricht über die Einzelheiten dieses Besuches vor, auch in den Briefen an seine Frau ist von der Göttinger Episode nichts erwähnt. Doch schickte er, wahrscheinlich mit Bezug auf eine in Göttingen stattgefundene Unterhaltung, schon am 27. September aus Königsberg an Gauss mit den einleitenden Worten: „ich bin so frei, Ihnen anbei eine kurze Andeutung zu schicken, weßhalb ich gewünscht, daß Lagrange für den Fall der gleichen Wurzeln in ein näheres Detail eingegangen wäre" einige kurze Ergänzungen zur Lagrangeschen Auseinandersetzung bezüglich der Integration von zwei simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für den Fall gleicher Wurzeln der Hilfsgleichung, indem er zeigt, daß in dem behandelten mechanischen Problem die Zeit als Potenz in den Formeln niemals dadurch vorkommen kann, daß zwei Wurzeln der Hilfsgleichung einander gleich werden.

Nach Königsberg zurückgekehrt nimmt Jacobi mit frischen Kräften seine so ungern abgebrochenen Untersuchungen wieder auf; „ich habe in den 7 Monaten, die ich abwesend war", schreibt er am 19. Dezember 1839 an Hauptmann Schwinck, „mein bischen Mathematik ganz vergessen und muß wieder von vorn anfangen", und schon in den Weihnachtsferien kann er seinem Bruder melden: „... ich quäle mich seit langer Zeit mit der Ausarbeitung und immer wiederholten Umarbeitung eines großen 'Phoronomia sive de solutionum finitarum problematum mechanicorum natura et investigatione' betitelten Werkes; sobald

diese etwa zehn Bogen betragende Einleitung fertig ist, will ich den Druck beginnen lassen ..."

Für das Wintersemester 1839/40 hatte Jacobi nur eine große Vorlesung über elliptische Transzendenten angekündigt, die uns durch eine Nachschrift von Borchardt erhalten ist, der im Herbst zu Jacobi nach Königsberg gekommen war, um dort bis zum Jahre 1843 zu bleiben und den Doktorgrad zu erlangen. Nachdem Jacobi seine bekannten Sätze über die Natur der Perioden von Funktionen einer Variabeln entwickelt, gibt er die Einteilung der elliptischen Integrale, hebt besonders mit Beziehung auf Gauss und Abel die lemniskatischen Integrale hervor, und berührt kurz das Abelsche Theorem — alles in Form einer Einleitung zu seiner Vorlesung, an deren Schlusse er noch auf die Umkehrungsfunktionen der Abelschen Integrale hindeutet und hervorhebt, daß das Verhalten der Abelschen Transzendenten als Funktionen zweier Variabeln ihre Untersuchung unendlich viel schwieriger macht als die aller bisher in der Analysis betrachteten. „Die Mathematik hat freilich die Eigenschaft, daß man durch Rechnung zu Erfindungen kommen kann, ganz im Gegensatz mit dem Goetheschen Verse: Das ist auch eine von ihren Sünden, Sie glauben Rechnen, das sei Erfinden; denn wenn man auch im Anfange einen unrichtigen Weg einschlägt, so dividiert sich gleichsam durch die Rechnung die Unrichtigkeit fort, und da man mit Buchstabenausdrücken rechnet, d. h. mit solchen, welche die Art ihrer Entstehung an sich tragen, so gibt das Resultat selbst den kürzesten Weg, den man zu nehmen hat. Dieser Weg, durch Rechnen zu erfinden, ist nun aber bei den Abelschen Transzendenten durchaus nicht mehr anzuwenden möglich; denn wenn man auch um noch so wenig vom richtigen Wege abweicht, so kommt man wegen der ungeheuren Komplikation der Rechnung zu gar keinem Resultat. Es scheint daher, daß die Führung dieser Untersuchung die ganze Mathematik auf einen höheren Standpunkt erheben würde."