

dem Gange, den Gauss bisher genommen hat, genötigt zu glauben, daß er diese Methoden gekannt, sie aber zu verschweigen für gut befunden hat, denn sie führen zu denselben Resultaten, die Gauss in seinen neueren Werken bekannt gemacht hat.“ Und nun entwickelt er die Fundamentaltheoreme der Kreisteilung, in der Form, wie er sie schon früher Gauss zum Teil schriftlich mitgeteilt hatte und im Oktober des nächsten Jahres als Frucht eben dieser Vorlesung veröffentlichte, stützt auf diese Sätze die Theorie der quadratischen Reste, und gibt vom Reziprozitätsgesetze derselben eine Reihe der verschiedenartigsten Beweise. Indem er nun zur Theorie der biquadratischen Reste übergeht, entwickelt er zunächst die Lehre von den ganzen komplexen Zahlen, beweist den Gausssschen, von Dirichlet bewiesenen Satz von der Gleichzeitigkeit des quadratischen Rest- und Nichtrestseins zweier komplexer Primzahlen, und auf Grund von zwei speziellen Hilfssätzen das von Gauss aufgestellte, aber ohne Beweis mitgeteilte Reziprozitätsgesetz für biquadratische Reste; hieran schließt er eine ausführliche Theorie der kubischen Reste, wie er sie in seinen Briefen an Gauss bereits angedeutet, und entwickelt in einfacher Weise deren Reziprozitätsgesetz. Die letzten Vorlesungen liefern endlich noch einige Anwendungen der Kreisteilung auf Eigenschaften der quadratischen Reste, die zum Teil aus der Theorie der quadratischen Formen bekannt waren, teils aber auch vollständig neu und äußerst interessant sind, aber von Jacobi nie im einzelnen veröffentlicht wurden.

„Die im Jahre 1832 erschienenen zwei Abhandlungen von Gauss über die biquadratischen Reste“, sagt Dirichlet, „die durch die tief sinnigen Gedanken, komplexe ganze Zahlen in der höheren Arithmetik geradeso wie reelle zu behandeln, und durch das darin aufgestellte Reziprozitätsgesetz Epoche machten, welches in der Theorie der biquadratischen Reste zwischen zwei komplexen Primzahlen stattfindet, gab Jacobi Veranlassung, seine früheren Untersuchungen wieder aufzu-

nehmen, und es gelang ihm, den erwähnten schönen Satz von Gauss und einen ähnlichen, welcher sich auf die kubischen Reste bezieht, mit großer Einfachheit aus der Kreisteilung abzuleiten. Obgleich Jacobi die eben angeführten Untersuchungen und andere damit zusammenhängende, die ich nicht einmal andeutungsweise bezeichnen kann, in den Jahren 1836—39 vollständig niedergeschrieben hat, so ist er doch nie dazu gekommen, sie durch den Druck zu veröffentlichen. Seine Zögerung entsprang aus dem Wunsche, einigen seiner Resultate eine größere Ausdehnung zu geben, wozu er, von so vielen anderen Arbeiten in Anspruch genommen, die nötige Muße nicht gefunden hat. Ein Teil seiner Forschungen und namentlich die schon erwähnten Beweise der Reziprozitätsgesetze sind jedoch einigen deutschen Mathematikern durch Nachschrift der Vorlesungen bekannt geworden, welche er im Winter 1836—37 in Königsberg über die Kreisteilung und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen gehalten hat.“

Noch vor Ende des Jahres suchte sich Jacobi endlich auf Bessels Drängen, der seit fast zwei Jahren von all den umfassenden Forschungen seines Freundes, von denen die wissenschaftliche Welt noch fast gar nichts erfahren hatte, Kenntnis genommen, durch kurze Mitteilungen die Priorität seiner Resultate zu wahren, und richtete am 29. November 1836 an Encke, den Sekretär der Berliner Akademie, ein auf seine Entdeckungen bezügliches Schreiben, welches im Crelleschen Journal unter dem Titel „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen“ veröffentlicht wurde, und dessen Resultate er auch kurz der Pariser Akademie mitteilte.

„Es ist mir gelungen, eine große und wesentliche Lücke in der Variationsrechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Größten und Kleinsten nämlich, welche von der Variationsrechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Größtes oder Kleinstes gibt oder keins von

beiden. Man hatte zwar erkannt, daß die Kriterien hierfür davon abhängen, ob gewisse Systeme von Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über das das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden, und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, daß diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integriert hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet. Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Funktionen erhalten, welche eine Anzahl willkürlicher Konstanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkürlichen Konstanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien des Größten und Kleinsten zu integrieren hat.“ Jacobi entwickelt zunächst das Resultat seiner Untersuchung für das Integral $\int f(x, y, y') dx$, für welches die Hauptgleichung der Variation $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$ lautet, und die zweite Variation, wenn $\delta y = w$ gesetzt wird, durch $\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'^2 \right) dx$ gegeben ist; zur Existenz eines Maximums und Minimums des Integrales ist erforderlich, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ immer dasselbe Zeichen behält, aber um die vollständigen Kriterien des Maximums und Minimums zu haben, muß man noch den vollständigen Ausdruck einer Funktion v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v \right)^2$$

Genüge leistet, und diesen vollständigen Ausdruck findet Jacobi, indem er $u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b}$ setzt, worin a, b die Inte-

grationskonstanten der Hauptgleichung und α, β willkürliche Konstanten sind, und den Ausdruck

$$v = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{du}{dx} \right)$$

bildet, welcher nur die willkürliche Konstante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält. Um nun die Untersuchung allgemein anzugreifen, leitet er zunächst eine merkwürdige Eigenschaft einer besonderen Klasse linearer Differentialgleichungen $2n$. Ordnung her, welche die Form haben

$$0 = Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 y'')}{dx^2} + \dots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

worin $A, A_1, \dots$ gegebene Funktionen von x sind; ist nämlich y irgendein Integral von $Y=0$, so wird, wenn man $u = ty$ setzt, der Ausdruck

$$y \left[Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \dots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n} \right] = yU$$

integrabel, und man kann sein Integral angeben, ohne t zu kennen; dieses Integral hat wieder die Form von Y , wobei nur n um eine Einheit kleiner geworden, indem

$$\int yU dx = Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t'^{(n)})}{dx^{n-1}}$$

ist, worin sich die Zusammensetzung der Funktionen B aus u und den Funktionen A allgemein angeben läßt. „Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdruckes zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form $\int V \delta y dx$ geben, wo $V=0$ die zu integrierende Gleichung ist. Die zweite Variation erhält hiernach die Form $\int \delta V \delta y dx$. Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so muß dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V=0$, welche in δy linear ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, daß die Gleichung $\delta V=0$ bei dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt und gewahrt in der

Tat bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Maximums und Minimums zu integrierenden Differentialgleichungen. Außerdem sieht man sogleich, daß ein Wert von δy , welcher die Differentialgleichung $\delta V = 0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Konstanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V = 0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrales δy der Differentialgleichung $\delta V = 0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen linearen Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V = 0$, deren sämtliche Integrale man auf diese Weise kennt, läßt sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y = 0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittels der angegebenen Eigenschaften dieser Art von Gleichungen gelingt es, die zweite Variation $\int \delta V \delta y dx$ durch fortgesetzte partielle Integration in einen anderen Ausdruck zu transformieren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hierbei zu erreichen strebt.“ Jacobi führt nun als Beispiel den Fall durch, in welchem V die 1. und 2. Ableitung einschließt, und kommt zugleich in einer Anwendung — wie später allgemein in seinen Vorlesungen über Mechanik — für das Prinzip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten auf die sogenannten Grenzwerte zu sprechen, welche weder ein Maximum noch ein Minimum geben: „... für die Flächen, die in jedem Punkte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen, daß zwischen je zweien ihrer Punkte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.“ Während er diesen Untersuchungen ein großes Interesse deshalb zuspricht, weil sie in einem der schönsten Teile der Mathematik eine wesentliche Lücke ausfüllen, glaubt er doch, daß die folgenden Entdeckungen auf dem Gebiete der Mechanik tiefer in das Ganze der Wissenschaft eingreifen. Auf Hamiltons Prinzipien fußend konnte Jacobi

die Lösung der Probleme der Mechanik auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen, und es gelang ihm weiter, diese Untersuchungen auch auf den Fall auszudehnen, daß die Kräftefunktion die Zeit enthält, das Prinzip der lebendigen Kraft also nicht mehr gültig ist, während das Prinzip der kleinsten Wirkung immer noch bestehen bleibt. Eine Erweiterung dieser Resultate führt nun Jacobi bei der Untersuchung der Umkehrung der gestellten Frage zu der für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung bedeutungsvollen Entdeckung, daß deren Integration stets auf die Integration eines einzigen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems zurückgeführt werden kann, aber es kam wesentlich darauf an, nachzuweisen, daß diese Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen einer besonderen Behandlungsweise fähig sind. Die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung der Mechanik enthalten nun nie die unbekannte Funktion selber, und daraus folgert Jacobi schon auf Grund der von Lagrange für eine partielle Differentialgleichung mit nur drei Variablen gegebenen Integrationsmethode, daß, wenn irgendein Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, von einer Differentialgleichung der 2. Ordnung abhängt, und man außer diesem Satze noch ein Integral kennt, so daß das Problem auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen zwei Variablen reduziert ist, man diese letztere immer integrieren, d. h. nach einer bestimmten Regel den Multiplikator derselben finden kann, wie z. B. bei der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren. „Ich habe vor etwa einem halben Jahre die auf den Fall der freien Bewegung eines Punktes in einer Ebene bezüglichen Formeln, welche allgemein, wenn man außer dem Integral der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral kennt, das Problem auf Quadraturen zurückführen, der Pariser Akademie mitgeteilt. Diese Formeln lassen sich sogleich auch auf die Bewegung eines Punktes auf einer ge-

gegebenen Fläche ausdehnen ... Es ist mir ferner gelungen, die Schwierigkeiten, welche der Verallgemeinerung der Lagrangeschen Methode für die Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variablen im Wege standen, zu heben und hierdurch eine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für jede Zahl von Variablen zu begründen, welche für die Integration derselben die wesentlichsten Vorteile darbietet und unmittelbar auf die Probleme der Mechanik ihre Anwendung findet ... Die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und die isoperimetrischen Probleme, in welchen die Differentialquotienten der unbekannten Funktionen unter dem Integralzeichen nur bis auf die 1. Ordnung steigen, hängen von derselben Analysis ab, so daß jedes solches isoperimetrische Problem auch als Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung gefaßt werden kann. Man kann unter diesen isoperimetrischen Problemen auch diejenigen begreifen, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum werden, oder allgemeiner, dessen Variation verschwinden soll, nicht unmittelbar als Integral, sondern durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung gegeben ist. Umgekehrt kann man auch die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung als solches isoperimetrische Problem ansehen.“ Jacobi faßt nun seine Auseinandersetzungen darin zusammen, daß, wenn das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Mechanik, von denen das Problem abhängt, nach Elimination der übrigen Variablen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $2n$. Ordnung zwischen zwei Variablen geführt, und man ein Integral desselben kennt, sich das Problem durch eine bestimmte Wahl von Größen, die man als Variable einführt, im Sinne der hiernach gegebenen Definition der Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem der $2n - 2$. Ordnung zurückführen läßt, dann durch Kenntnis eines neuen Integrals auf eines der $2n - 4$. Ordnung usw., bis man keine Differentialgleichung mehr zu integrieren hat; alle außerdem noch aus-

zuführenden Operationen bestehen lediglich in Quadraturen. „Sie sehen, hochgeehrtester Professor, daß die in vorstehenden kurzen Umrissen angedeuteten Resultate ein neues wichtiges Kapitel der analytischen Mechanik begründen, die Vortheile betreffend, welche man aus der besonderen Form der Differentialgleichungen der Mechanik für ihre Integration ziehen kann. Wir verdanken Lagrange diese Form, aber sie hat bis jetzt in seinen und den Händen der ihm nachfolgenden Analysten nur dazu gedient, die analytischen Transformationen rascher und übersichtlicher zu leisten, und den bekannten allgemeinen mechanischen Gesetzen die Ausdehnung zu geben, deren sie fähig sind. Aber diese Form erhält jetzt eine viel wichtigere Bedeutung, indem sie zeigt, daß gerade die Differentialgleichungen von dieser bestimmten Form einer eigenthümlichen Behandlung fähig sind, welche die Schwierigkeiten ihrer Integration bedeutend vermindert.“

Die ausführlichere Behandlung der zuletzt berührten Punkte legte er damals in einer Aufzeichnung nieder, die später von Clebsch unter dem Titel „Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen vier Variablen“ veröffentlicht wurde. Jacobi schickt dieser zunächst eine historische Einleitung voraus und setzt sodann den eigentlichen Sinn der Lagrangeschen Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen $F(x, y, p, q) = 0$, in welcher die abhängige Variable V selbst nicht vorkommt, klar auseinander; er zeigt, daß, wenn man ein Integral der Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

mit $f(x, y, p) = a$ bezeichnet, so daß nunmehr p und q Funktionen von x, y, a sind, $pdx + qdy$ integrabel wird, und findet nach der von ihm modifizierten Hamiltonschen Methode das letzte Integral dieser Differentialgleichungen,

wenn $V = \int (p dx + q dy)$ ist, in der Form

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p}{\partial a} dx + \frac{\partial q}{\partial a} dy \right) = b;$$

diese Methode wird auf die mechanischen Probleme angewandt, welche nur von zwei freien Koordinaten abhängen, und für welche das Prinzip der lebendigen Kraft gilt. Jacobi erweitert nun das von Lagrange für die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit drei Variablen angegebene Verfahren auf alle partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, behandelt aber zur klareren Einsicht in das Wesen seiner Methode hier nur den Fall einer solchen Gleichung zwischen vier Variablen, in welcher die abhängige Variable selbst nicht vorkommt, um zu dem in dem Briefe an Encke bezeichneten allgemeinen Resultate zu gelangen. Soll $dV = p dx + q dy + r dz$, und r eine gegebene Funktion von x, y, z, p, q sein, welche V nicht enthält, so müssen p und q so als Funktionen von x, y, z und zwei willkürlichen Konstanten bestimmt werden, daß der Ausdruck $p dx + q dy + r dz$ integrabel, also wenn $\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} = A$,

$\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} = B$, $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = C$ gesetzt werden, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ wird, zu denen noch die identische Gleichung $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ hinzukommt. Aus der gegebenen Funktion r von x, y, z, p, q findet Jacobi die lineare partielle Differentialgleichung $-\frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial r}{\partial y}$ zwischen q und den unabhängigen Variablen x, y, z, p , und wird somit auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx:dy:dz:dp:dq = -\frac{\partial r}{\partial p} : -\frac{\partial r}{\partial q} : 1 : \frac{\partial r}{\partial x} : \frac{\partial r}{\partial y}$$

geführt. Ist nun ein Integral derselben $f(x, y, z, p, q) = a$, so ist der aus dieser Gleichung hergeleitete Wert von q die verlangte Funktion von x, y, z, p und einer willkürlichen Konstanten, welche der linearen partiellen Differentialgleichung genügt. Betrachtet man weiter r und q als Funk-

tionen von x, y, z, p , so nehmen die Gleichungen $C = 0$, $B = 0$, $A = 0$ die Form an $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$, woraus $A + B \frac{\partial q}{\partial p} + C \frac{dr}{dp} = 0$ folgt; Jacobi zeigt nun, daß, wenn man für $f = a$ ein ganz beliebiges Integral des totalen Differentialgleichungssystems nimmt, es immer möglich ist, die Funktion p als Funktion von x, y, z so zu bestimmen, daß den beiden Gleichungen $B = 0$, $C = 0$ Genüge geschieht, welche wiederum $A = 0$ nach sich ziehen. Bestimmt man aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung und $f = a$ die Größen r und q als Funktionen von x, y, z, p , so daß $B = 0$, $C = 0$ in $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$ übergehen, so handelt es sich um die Aufsuchung eines zwei partiellen Differentialgleichungen gemeinsamen Integrales, welche sich lediglich auf das Theorem stützt, daß, wenn q und r Funktionen von x, y, z, p sind, welche der Gleichung $\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ genügen, und wenn φ ein Integral der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$ ist, $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$ ebenfalls ein Integral dieser Gleichung oder $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0$ ist. Jacobi findet hiernach, daß das totale Differentialgleichungssystem von vier Gleichungen zwischen fünf Größen, welches äquivalent ist einer Differentialgleichung 4. Ordnung zwischen zwei Größen, und welches sonst die sukzessive Integration einer Differentialgleichung 4., 3., 2. und 1. Ordnung erfordern würde, nach den eben angegebenen Prinzipien, nachdem ein Integral der vier Differentialgleichungen 1. Ordnung ermittelt ist, nur noch die Integration von Differentialgleichungen der 2. Ordnung zwischen zwei Variablen und keine der 3. Ordnung erfordert; es wird sich also die Differentialgleichung 3. Ordnung, auf welche nach gefundenem ersten Integral das

Problem zurückkommt, immer auf Differentialgleichungen 2. Ordnung zurückführen lassen. Schließlich wird noch die vollständige Integration des bei der Aufsuchung der gemeinsamen Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen benutzten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt und dessen Multiplikator bestimmt.

Auch die von Clebsch später herausgegebene Aufzeichnung Jacobis „De aequationum differentialium isoperimetricalum transformationibus earumque reductione ad aequationem differentialem partialem primi ordinis non linearem“ stammt aus einer nur wenig späteren Zeit. Aus $\delta \int U(t, x, x', \dots x^{(m)}) dt$ folgt $0 = \frac{\partial^m U_m}{\partial t^m} - \frac{d^{m-1} U_{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots \pm U_0$, wenn $U_0 = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_i = \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}$ ist, und wenn man mit Hilfe der Gleichung $\xi = U_m = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}$ aus $V = U - x^{(m)} \xi$ die Größe $x^{(m)}$ eliminiert, so wird die Differentialgleichung 2m. Ordnung auf ein Normalsystem von zwei Differentialgleichungen m. Ordnung zurückgeführt $\frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi$, worin die rechten Seiten nur bis $x^{(m-1)}$ und $\xi^{(m-1)}$ reichen; es ergab sich zugleich leicht aus seinen damals schon abgeschlossenen, aber erst später veröffentlichten Untersuchungen, daß der Multiplikator dieses Systems die Einheit ist, und dasselbe findet statt, wenn U noch andere abhängige Variable mit ihren Ableitungen enthält. Jacobi liefert nun noch eine zweite Transformation, durch welche er die Möglichkeit der Reduktion der isoperimetrischen Probleme auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung nachweist. Enthält U außer der unabhängigen Variablen t beliebige unbekannte Funktionen derselben mit ihren Ableitungen $x_1, x_1', \dots x_1^{(\alpha)}, x_2, x_2', \dots x_2^{(\beta)} \dots$ und sollen $x_1, x_2, \dots$ so bestimmt werden, daß $\delta \int U dt = 0$ ist, so setze man $\frac{\partial U}{\partial x_1^{(\alpha)}} = \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2^{(\beta)}} = \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}$, $\dots$ und eliminiere mit Hilfe dieser Beziehungen $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\beta)}, \dots$ aus der Funk-

tion $V = U - x_1^{(\alpha)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}} - x_2^{(\beta)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}} - \dots$, dann wird V eine Funktion der als unabhängige Variable zu betrachtenden Größen $t, x_1, \dots x_1^{(\alpha-1)}, x_2, \dots x_2^{(\beta-1)}, \dots$ und der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}, \dots$ sein. Nach Ermittlung von V bilde man die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial t} + x_1' \frac{\partial W}{\partial x_1} + \dots + x_1^{(\alpha-1)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-2)}} + x_2' \frac{\partial W}{\partial x_2} + \dots + x_2^{(\beta-1)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-2)}} + \dots = V$, dann werden, wenn von dieser die vollständige Lösung W gefunden, welche außer der additiven Konstanten noch $\mu = \alpha + \beta + \dots$ willkürliche Konstanten $a_1, a_2, \dots a_\mu$ einschließt, worin μ die Summe der Ordnungszahlen angibt, bis zu denen sich in U selbst die Differentialen der unbekannten Funktionen erheben, die unbekannten Funktionen $x_1, x_2, \dots$ und ihre Differentialquotienten $x_1', x_1'', \dots x_1^{(\alpha-1)}, x_2', x_2'', \dots x_2^{(\beta-1)}, \dots$ durch die μ Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial a_i} = b_i$ zwischen jenen μ Größen und t selbst bestimmt sein, worin $b_1, \dots b_\mu$ neue willkürliche Konstanten bedeuten, und dieselben Betrachtungen lassen sich auf isoperimetrische Probleme ausdehnen, für welche zwischen den unbekannten Funktionen Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen gegeben sind.

Die ebenfalls um diese Zeit entworfene und von Clebsch aus den hinterlassenen Papieren publizierte Aufzeichnung „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando“, welche ebenso wie die anderen veröffentlichten Bruchstücke einen besonderen Abschnitt in dem großen, schon damals geplanten Werke über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen bilden sollte, geht von der Bemerkung aus, welche Jacobi bei seinen später zu besprechenden Multiplikatoruntersuchungen gemacht, daß der Multiplikator der Differentialgleichungen der isoperimetrischen Probleme mit einer abhängigen Variablen

leicht zu ermitteln ist, daß sich aber die Bestimmung desselben viel schwieriger gestaltet, wenn die höchsten Differentialquotienten mehrerer abhängigen Variablen unter dem Integral nicht von derselben Ordnung sind, und Jacobi greift deshalb die Frage ganz allgemein an, wie ein nicht normales Differentialgleichungssystem auf die normale Form zu führen sei. Er zeigt, daß die kürzeste Reduktion auf die Normalform durch die Lösung des Problems bestimmt wird, für m^2 beliebige Größen $a_{i\kappa}$, in welchen i und κ die Werte $1, 2, \dots, m$ annehmen, m kleinste positive oder verschwindende Größen $l_1, l_2, \dots, l_m$ zu finden, derart, daß man, wenn $a_{i\kappa} + l_i = p_{i\kappa}$ gesetzt wird, unter den m^2 Größen $p_{i\kappa}$ m in verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen gelegene Größen $p_{i_1 1}, p_{i_2 2}, \dots, p_{i_m m}$ auswählen kann, von denen eine jede unter den Größen derselben Vertikalreihe den größten Wert hat oder wenigstens nicht kleiner ist als irgendeine andere Größe derselben. Die ziemlich komplizierte Lösung dieser Aufgabe wird durch ein Beispiel erläutert, und sodann die Anwendung davon auf das Problem der Zurückführung der Differentialgleichungen auf die Normalform gemacht. Für das damit in Zusammenhang stehende Problem der Zurückführung eines vorgelegten Systems auf eine einzige Differentialgleichung zwischen einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen sollen durch Differenzieren der Differentialgleichungen solche Hilfsleichungen gebildet werden, die notwendig sind, damit nur durch Elimination ohne jede Differentiation die Differentialgleichung zwischen diesen beiden Variablen hervorgehe, und es wird gefragt, wievielmals zur Aufstellung jenes Systems von Hilfsgleichungen jede der Differentialgleichungen zu differenzieren ist; auch die Lösung dieses Problems stützt sich auf den oben erwähnten Hilfssatz.

Unmittelbar nach Absendung seines Briefes an Encke schloß Jacobi am 9. Dezember 1836 seine große und für den ganzen weiteren Ausbau der Analysis und Mechanik fundamentale Arbeit ab, welche betitelt ist „Über die Re-

duktion der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen irgendeiner Zahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen“, welche zugleich in französischer Übersetzung im Liouvilleschen Journal erschien, und die in dem Briefe an Encke sowie in den eben besprochenen Aufzeichnungen zum Teil enthaltene Theorie näher ausführt.

„Zu Jacobis wichtigsten Untersuchungen“, sagt Dirichlet, „gehören diejenigen über analytische Mechanik. Hamilton hatte die interessante Entdeckung gemacht, daß die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik sich immer auf die Lösung von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückführen läßt, aber diese Entdeckung war, wie merkwürdig sie auch erscheinen mußte, völlig unfruchtbar geblieben, bis Jacobi sie von einer unnötigen Komplikation befreite, indem er zeigte, daß die zu findende Lösung nur einer der beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen braucht.“

In der Tat hatte Hamilton zur vollständigen Integration der $3n$ Bewegungsgleichungen die Auffindung einer Funktion S von $6n + 1$ Variablen, nämlich den $3n$ Größen x_i, y_i, z_i , den $3n$ Größen a_i, b_i, c_i und der Größe t erfordert, welche zu gleicher Zeit den beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U$, $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i} \right)^2 \right] = U_0$ Genüge leistet, wodurch er „seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt hat“, während Jacobi zeigt, daß es genügt, ein vollständiges Integral der ersten dieser beiden partiellen Differentialgleichungen zu finden, welches außer der additiven Konstanten noch $3n$ andere willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3n}$ enthält, um die vollständigen endlichen Integrale der vorgelegten $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit $6n$

willkürlichen Konstanten, auch wenn die Kräftefunktion die Zeit enthält, in der Form zu finden $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \dots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n}$; ist die Kräftefunktion von t frei, so vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung auf die Form $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U + h$, und die Lösungen des mechanischen Problems ergeben sich aus dem vollständigen Integrale in der Gestalt $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \dots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1}, \frac{\partial S}{\partial h} = t + \tau$,

wenn h die Konstante der lebendigen Kraft war; dieselben Sätze gelten für die Bewegung nicht freier Systeme. Als Beispiel für die Auffindung von S wird der einfache Fall der elliptischen Planetenbewegung behandelt und bei dieser Gelegenheit das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft für ein System gegenseitig durch Anziehung aufeinander wirkender Punkte so transformiert, daß dasselbe nur die Entfernungen der Punkte voneinander enthält.

Jacobi geht nun zur Behandlung des allgemeinen Problems der Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung über, wofür sich Lagrange auf zwei unabhängige und eine abhängige Variable beschränkt hatte, während Pfaff in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1814 das Problem zum ersten Male ganz allgemein behandelt hat. Jacobi gibt nun zunächst, wie er es schon in einer seiner ersten Arbeiten auf eine symmetrische und übersichtliche Art getan, eine ausführliche Darstellung der Pfaffschen Methode, um dieselbe auf die Hamiltonsche Differentialgleichung anzuwenden. „Wenn daher die Differentialgleichungen der Bewegung durch die neue Methode Hamiltons auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt worden, so besteht, wie ich im vorigen gezeigt habe, die ganze Kenntnis, die wir bis jetzt über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variablen besitzen, darin, die

Integration dieser partiellen Differentialgleichung wieder auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückzuführen. Ja es ist die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung nach der von mir ausinandergesetzten Pfaffschen Theorie nur ein erster Schritt zur Integration der partiellen Differentialgleichung, indem zufolge dieser Theorie nachher noch eine Reihenfolge von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bilden und jedes vollständig zu integrieren ist. Man muß daher im umgekehrten Sinne sagen, daß es eine wichtige Bemerkung Hamiltons ist, daß die Integration der von ihm aufgestellten partiellen Differentialgleichungen nur auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückkommt und es keiner weiteren Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu bedarf. Diese Bemerkung Hamiltons gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, daß sie sich mit Leichtigkeit auf alle partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdehnen läßt.“ Er gelangt nun durch Anwendung der Hamiltonschen Methode in der Tat zu dem ganz allgemeinen Resultate, daß zur Integration irgendeiner partiellen Differentialgleichung zwischen einer beliebigen Zahl von Variablen die vollständige Integration des von Pfaff aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig hinreicht, und man nicht, wie Pfaff verlangt, noch eine Reihe anderer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren hat. „Durch den obenerwähnten Zusammenhang zwischen einem Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und einer partiellen Differentialgleichung“, sagt Dirichlet, „wurde er, die Sache in umgekehrter Ordnung betrachtend, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, mit welcher er sich schon in einer seiner frühesten Abhandlungen über die Pfaffsche Methode beschäftigt hatte, und gelangte jetzt zu dem Resultate, daß von der ganzen Reihe

von Systemen, deren sukzessive Integration Pfaff fordert, die Behandlung des ersten alle übrigen überflüssig macht, daß also schon der erste Schritt der früheren Methode vollständig zum Ziele führt.“ Jacobi gibt eine genaue Analyse der Pfaffschen Methode und kann auf Grund derselben durch Einführung der Anfangswerte der Variablen, was Cauchy schon 1819 getan, zeigen, daß, wie man durch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen die vollständige Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung finden kann, auch umgekehrt aus irgendeiner vollständigen Lösung der letzteren die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden können, und daß sich dies auch auf die allgemeine Untersuchung ausdehnen läßt, unter welche Pfaff die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einbegreift, so daß, wenn irgendein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Konstanten gegeben ist, welches der Differentialgleichung $X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ Genüge leistet, man daraus auch die vollständigen Integrale des von Pfaff aufgestellten Systems von $2n - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten kann. „Ich habe oben bemerkt, daß es in der von Pfaff zur Integration der Gleichung $X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ vorgeschlagenen Methode ein Übelstand sei, daß man von den nacheinander zu integrierenden Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nur das erste wirklich aufstellen, und für die andern Systeme nur die Art angeben kann, wie man sie, wenn man die vorhergehenden vollständig integriert hat, zu bilden hat. In der Tat ist klar, daß es hierdurch unmöglich fällt, das Ganze der Aufgabe zu übersehen. Für den besondern Fall, welcher die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung gibt, haben wir gesehen, daß die Integration des ersten dieser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen ausreicht und es der Aufstellung und Integration anderer Systeme nicht weiter bedarf.“

In eben dieser Zeit verfaßte auch Jacobi die umfangreiche und überaus interessante Aufzeichnung „Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existiert, und über die Theorie der Störungen“, welche erst weit später aus seinen hinterlassenen Papieren von Clebsch mitgeteilt wurde.

Wie Lagrange durch Einführung der Kräftefunktion die Differentialgleichungen der Bewegung mittels der partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Koordinaten darstellt, so wies Hamilton nach, daß man in diesem Falle auch sämtliche Integralgleichungen der Bewegung mittels der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Funktion auf ebenso einfache Weise darstellen kann. Jacobi bespricht zunächst das von Hamilton als angehäuften lebendige Kraft be-

zeichnete Integral $2 \int_0^t T dt = V$ sowie dessen charakteristische-

oder Grundfunktion $\int_0^t (U + T) dt = S$, entwickelt letztere für

die Planetenbewegung, geht dann zur Form der Integralgleichungen für unfreie Bewegungen über und entwickelt die beiden von Hamilton aufgestellten partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, denen die charakteristische Funktion genügt. Er zeigt hier wiederum, daß es hinreicht, die charakteristische Funktion nur der ersten partiellen Differentialgleichung zu unterwerfen, um schon daraus die Integralgleichungen des Bewegungssystems zu erhalten, nur daß dann nicht, wie bei Hamilton, die willkürlichen Konstanten die Anfangswerte der Koordinaten und der Bewegungsgrößen bezeichnen; aber gerade dadurch mußte Hamilton mit zwei partiellen Differentialgleichungen operieren und kam so nicht zur Herleitung der Integrale der Bewegungsgleichungen aus dem vollständigen Integral. Jacobi sucht nun weiter den Zusammenhang der verschiedenen Systeme von Integralgleichungen zu ermitteln, welche sich aus ver-

schiedenen vollständigen Lösungen der zur Bestimmung der Funktionen S und V dienenden partiellen Differentialgleichungen ergeben, und zeigt, wie man aus verschiedenen vollständigen Lösungen stets dieselben vollständigen Integrale der Bewegungsgleichungen erhält.

Es folgt die Entwicklung der charakteristischen Funktion für das Problem der Planetenbewegung aus der partiellen Differentialgleichung, und dafür noch andere Methoden, welche bei beliebigen Anziehungsgesetzen brauchbar bleiben und sich auf den Satz stützen, daß man jede partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher die gesuchte Funktion nicht selber vorkommt, in eine andere verwandeln kann, in welcher sich die partiellen Differentialquotienten mit den Variablen vertauschen, so daß eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher außer der unbekannten Funktion auch mehrere Variablen nicht selber vorkommen, sondern nur die nach den letzteren genommenen partiellen Differentialquotienten, immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher die Zahl der partiellen Ableitungen um eine gleiche Anzahl geringer ist.

Nachdem nun Jacobi noch für die zweite Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen das Hamiltonsche totale System und die partielle Differentialgleichung aus der Variation der charakteristischen Funktion hergeleitet und dieselbe für das Problem der Rotation entwickelt hat, geht er zur Zurückführung der allgemeinsten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen über und zeigt, daß, wenn $f(t, q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ irgend eine Funktion der $2m + 1$ Größen $t, q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m$ bedeutet, und zwischen diesen Variablen das System von $2m$ Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$, wenn ferner $c_1, \dots, c_m$ die Werte der Größen $q_1, \dots, q_m$, und $b_1, \dots, b_m$ die Werte der Größen $p_1, \dots, p_m$ für $t = 0$

bedeuten, und man vermöge der $2m$ Integralgleichungen das

Integral $W = \int_0^t \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f \right) dt$ durch die

Größen $t, q_1, \dots, q_m, c_1, \dots, c_m$ ausdrückt, dann die Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \frac{\partial W}{\partial c_i} = -b_i$ als die $2m$ Integralgleichungen des Systems

betrachtet werden können, während der Ausdruck von W selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

1. Ordnung $\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$ ist,

welche m willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_m$ und eine noch additiv verbundene einschließt. Nachdem er das Theorem auch auf den Fall erweitert, daß W selbst in die Funktion f eintritt, beweist er die Umkehrung dieser beiden Sätze und behandelt wieder die durch die Annahme, daß t nicht explizite in f enthalten ist, sich ergebende Vereinfachung. Indem er nun die verschiedenen Arten der vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit m unabhängigen Variablen untersucht, findet er, daß, wenn eine Lösung $m + k$ willkürliche Konstanten enthält, zwischen den Verhältnissen der nach diesen willkürlichen Konstanten genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung k Relationen sich ergeben, welche außer diesen Verhältnissen nur noch die willkürlichen Konstanten enthalten, und zeigt den Zusammenhang dieses Satzes mit dem Umstande, daß Hamilton seine charakteristische Funktion durch zwei partielle Differentialgleichungen definieren konnte, indem er den Satz beweist, daß, wenn man von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung eine Lösung mit einer willkürlichen Konstanten mehr gefunden hat, als die Zahl der unabhängigen Variablen beträgt, dann dieselbe Funktion gleichzeitig außer der vorgelegten partiellen Differentialgleichung noch einer andern genügt, welche zwischen den willkürlichen Konstanten und den nach ihnen genom-

menen partiellen Differentialquotienten der unbekannten Funktion besteht, ohne die unabhängigen Variablen selbst zu enthalten. Die Untersuchung der Beziehungen, welche zwischen den Differentialquotienten der Variablen nach den Konstanten und denen der Konstanten nach den Variablen bestehen, führt ihn zu dem wichtigen Theorem, daß, wenn $W(q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ irgendeine Funktion, und man drückt aus den Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ einmal die Größen $q_1, \dots, p_1, \dots$ als Funktionen von $\alpha_1, \dots, \beta_1, \dots$, ferner $\alpha_1, \dots, \beta_1, \dots$ durch $q_1, \dots, p_1, \dots$ aus, dann $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial \beta_x}{\partial q_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial \beta_x} = -\frac{\partial \alpha_x}{\partial q_i}$, $\frac{\partial q_i}{\partial \beta_x} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial p_i}$, $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_x} = -\frac{\partial \beta_x}{\partial p_i}$ sein wird, und von diesen Formeln werden Anwendungen auf die Differentialbeziehungen für die freie Bewegung gemacht.

Nachdem er noch allgemein die Frage beantwortet, wie man aus einer gegebenen vollständigen Lösung eine andere ableitet, deren Konstanten die Anfangswerte der Variablen sind, und die gefundene Methode auf die Planetenbewegung angewandt hat, geht er zur Entwicklung der Störungsformeln über und beweist zunächst, daß die Lagrangeschen Formeln, wenn die Störungsfunktion H_1 außer den Größen q auch noch die Größen p enthält, in $\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{dt}$ übergehen, worin $(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \dots \right] - \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \dots \right]$, und $\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0$ ist, während die Erweiterung der Poissonschen Störungsformeln in der Form gegeben wird $\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta] \frac{\partial H_1}{\partial \beta}$, worin $[\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} + \dots - \left[\frac{\partial \alpha}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} + \dots \right]$, und wieder $\frac{d[\alpha, \beta]}{dt} = 0$ ist. Da nun (α, β) und $[\alpha, \beta]$ nicht von t abhängen, so wird, wenn c_x, b_x die zu $t = 0$ gehörigen Werte von q_x, p_x bedeuten, $(\alpha, \beta) = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha} \frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \dots - \left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \dots \right)$,

$[\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial c_1} \frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \dots - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1} \frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \dots \right)$, und daher, wenn die Größen c, b selber zu Elementen genommen werden, $(c_i, b_x) = 0$ etc. sein, und somit die Gleichungen bestehen $\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_i}$, $\frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_i}$, so daß wieder eine partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{dt} + H_1 = 0$ existiert, deren vollständiges Integral die Integrale der gestörten Elemente in der Form $\frac{\partial W}{\partial c_i} = b_i$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ liefert; für diese kanonischen Elemente werden die Störungsformeln für die Planetenbewegung entwickelt, und der Übergang von einem Systeme kanonischer Elemente und der zugehörigen Störungsgleichungen zu einem andern untersucht, wobei sich zeigt, daß die Störungsfunktion immer so bestimmt werden kann, daß die veränderlichen Elemente irgendwelche Funktionen der Zeit werden. Nachdem noch die Modifikationen erörtert worden, welche eintreten, wenn die Kräftefunktion des ungestörten Problems die Zeit nicht enthält, geht Jacobi zu seiner Entdeckung von der Bedeutung des Poissonschen Satzes über und weist nach, daß, wenn man von einem Probleme der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, zwei Integrale kennt, man daraus durch bloße partielle Differentiation ein drittes ableiten kann. Die Arbeit schließt mit der allgemeinsten Transformation der partiellen Differentialgleichung $F\left(W, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0$ bei Einführung einer neuen unbekannten Funktion $Z = f(W, x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$, für welche sich durch Elimination der $2n + 1$ Größen $W, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$ aus den $2n + 2$ Gleichungen $F = 0$, $Z = f, \frac{\partial f}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial t_i}$ die transformierte partielle Differentialgleichung zwischen $Z, t_1, \dots, t_n, \frac{\partial Z}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial t_n}$ ergibt.

Aus eben dieser Zeit stammt die gleichfalls von Clebsch aus den hinterlassenen Papieren Jacobis herausgegebene Zeichnung „Über die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung“, die ebenfalls ein Kapitel seines großen Werkes bilden sollte. Wenn $S = f(t, q_1, \dots, q_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ ist, worin H eine Funktion von $t, q_1, \dots, q_m, S, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}$, und $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ willkürliche Konstanten bedeuten, und man setzt in H für $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ die Größen p_i , bildet ferner die Gleichungen $S = f(t, q_1, \dots, \alpha, \alpha_1, \dots)$, $\frac{\partial f}{\partial q_i} = p_i, \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \dots = \beta : \beta_1 : \dots$, worin die β neue willkürliche Konstanten, so sind, wie Jacobi gezeigt hat, diese Gleichungen die vollständigen Integralgleichungen des zwischen den Variablen t, q_i, S, p_i stattfindenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - p_i \frac{\partial H}{\partial S}, \frac{dS}{dt} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \dots - H$. Wenn nun $S = f$ eine vollständige Lösung sein soll, so darf die Determinante, gebildet aus den partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung von f nach $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ und denen 2. Ordnung nach diesen Größen und den $q_1, q_2, \dots, q_m$, nicht verschwinden, und es folgt danach aus einem von Jacobi in dem Aufsätze „de binis quibuslibet functionibus homogeneis etc.“ bewiesenen Satze, daß die m Quotienten von $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$ durch $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in bezug auf je m der $m+1$ Variablen voneinander unabhängige Funktionen sein müssen, daß es also zwischen diesen Quotienten, einer der $m+1$ Variablen und den willkürlichen Konstanten keine identische Gleichung gibt.

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen erörtert er auch hier wieder den Fall, daß bei Aufsuchung einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch den

naturgemäßen Gang der Betrachtung eine größere Anzahl willkürlicher Konstanten in die Lösung eingeführt wird, als zu einer vollständigen Lösung erforderlich ist, und zeigt wieder in anderer Weise, wie man den Fall der überzähligen willkürlichen Konstanten auf den früheren zurückführt, und wie man diese Betrachtungen auf das aus einer vollständigen Lösung mit überzähligen Konstanten entspringende System der dynamischen Integralgleichungen anwendet. Jacobi geht nunmehr ausführlich auf die Untersuchung von Lagrange ein, aus jeder vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung allgemeinere abzuleiten und die von Lagrange hierbei gelassene Lücke durch den Nachweis auszufüllen, daß die von ihm eingeführten allgemeinen Formen auch wirklich alle Lösungen umfassen, oder daß die willkürlichen Funktionen, welche sie enthalten, immer so bestimmt werden können, daß eine gegebene Lösung erhalten wird. Wenn die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung durch $S = f(t, q_1, \dots, q_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dargestellt ist, und f in F übergeht, wenn man $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ als Funktionen von $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ betrachtet, welche den Gleichungen $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0$ genügen, so ist $S = F$ wieder eine Lösung der Differentialgleichung, und man wird auf diese Weise alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung erhalten, indem man eine beliebig gegebene Lösung F aus jeder beliebigen vollständigen Lösung dadurch herleiten kann, daß man zuerst feststellt, wie viele der Größen $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ man bestimmten Funktionen der übrigen gleich zu setzen hat, und alsdann diese letzteren den obigen Gleichungen gemäß ermittelt. Darauf sich stützend, untersucht Jacobi unter Anlehnung an seine frühere Arbeit, wie man aus einer vollständigen Lösung alle vollständigen Lösungen ableiten kann, zunächst für den Fall, daß die partielle Differentialgleichung die gesuchte Funktion nicht enthält, und zeigt wiederum, daß alle verschiedenen vollständigen Lösungen

dieselben dynamischen Integralgleichungen geben, indem er diesen Nachweis auf den Satz zurückführt, daß man aus der vollständigen Lösung $S = f(t, q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m) + a$ durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ aus den Gleichungen $F = f + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, a_1, a_2, \dots, a_m) + a, \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$ eine neue vollständige Lösung mit den willkürlichen Konstanten $a, a_1, \dots, a_m$ erhält, wenn die willkürliche Funktion φ so beschaffen ist, daß die Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$ in bezug auf $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, oder die Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$ in bezug auf $a_1, a_2, \dots, a_m$

voneinander unabhängig sind. Nach Ausdehnung dieser Resultate auch auf den Fall, daß die partielle Differentialgleichung die gesuchte Funktion selbst enthält, hebt er hervor: „Wenn man eine bestimmte vollständige Lösung zugrunde legt, so teilen sich alle Lösungen in verschiedene Klassen, je nachdem man, um sie aus der vollständigen Lösung abzuleiten, eine oder zwei etc. oder $m + 1$ Relationen zwischen den in denselben enthaltenen willkürlichen Konstanten anzunehmen hat. Die erste Klasse ist die allgemeinste, die letzte umfaßt die Lösungen selbst, welche in der zugrunde gelegten vollständigen Lösung enthalten sind. Diese Einteilung drückt aber nichts den Lösungen selbst Immanentes aus, sondern nur ihre Beziehung zu der zugrunde gelegten vollständigen Lösung; denn es kann jede gegebene Lösung zu jeder beliebigen Klasse gehören, je nachdem man verschiedene vollständige Lösungen zugrunde legt.“

Von den großen Erfolgen in diesen überaus schwierigen Untersuchungen gibt er am 20. Dezember 1836 seinem Bruder in Dorpat Kenntnis: „... Ich habe mich diesen Sommer, soweit die vielfachsten durch diese Krankheit (des Sohnes Nicolas) und eignes Unwohlsein herbeigeführten Störungen es gestatteten, auf neuen Gebieten mit entschiedenem Glücke bewegt. Ich habe die große Lücke in

der Variationsrechnung, die Kriterien des Größten und Kleinsten in den isoperimetrischen Problemen betreffend, mit denen ich mich, wie Du weißt, seit einer Reihe von Jahren herumschlug, dadurch glücklich ausgefüllt, daß es mir auf unerwartete Weise gelang, die Systeme von Differentialgleichungen, deren Integration nach allen bekannten Methoden unmöglich schien, vermittels einer neuen Anwendung der schönen Methode der Variation der Constanten vollständig zu integrieren. Ich habe ferner in der Störungstheorie einen merkwürdigen Ausdruck der großen Axe gefunden, der für alle Potenzen der Excentricitäten des gestörten und der Maße des störenden genau ist, und auf welchen Freund Bessel großen Werth legte. Endlich habe ich eine neue Methode, die Differentialgleichungen der Bewegung zu behandeln, erfunden, durch welche jedes Integral die Stelle von zwei Integrationen ersetzt... Wenn der alte gute Bartels mit dem Tode abgehen sollte, würdet Ihr freilich Noth haben, ihn für die reine Mathematik zu ersetzen. Ich wüßte nur einen einzigen, ein eminentes Talent und ein Charakter von solcher Bravheit und Bescheidenheit, wie in den Sitten der heutigen Welt nicht leicht wieder gefunden wird, den Dr. Kummer am Liegnitzer Gymnasium. Dieser junge Mann, der schon das Bedeutendste in den tiefsten Theilen der Analysis geleistet, und den ich über alle unsere mathematischen Universitätsdocenten setze — Dirichlet vielleicht ausgenommen — wäre schon längst zur Universität gegangen, wenn es nicht bei uns so stünde, daß z. B. an der Halle'schen Universität gar kein ordentlicher Professor der Mathematik ist, und auf der Breslauer die Direction der Sternwarte und die ordentliche Professur der Mathematik dem Professor der Physik Dr. Scholz mit übertragen ist. Wenn ich nun dem Minister schreibe, das sei ein Gräuel, so schreibt er wieder, das sei ein Gräuel, aber er habe kein Geld. Und wenn er sich endlich an den König wendet, so wird es ihm abgeschlagen, weil er Geld genug habe, aber

nicht damit umzugehen verstehe, was leider nur zu wahr ist. Ich denke, ich habe Dir schon öfter von Kummer gesprochen; er griff eine Differentialgleichung 3. Ordnung in meinen fundamentis auf, die so complicirt ist, daß ich weder selber das geringste damit anfangen konnte, noch auch glaubte, daß irgend ein anderer etwas damit würde anfangen können. Mit einer Kühnheit, die mich in die größte Verwunderung setzte, machte er gerade diese zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen und leitete daraus auf unerwartete Weise ähnliche Resultate für andere Transcendenten ab, wie ich für die elliptischen gefunden hatte; eine der berühmtesten Arbeiten von Gauss ist der Ausdruck der Reihe $1 + \frac{\alpha\beta}{1-\gamma}x + \dots$ durch bestimmte Integrale, wenn $x = 1$; man glaubte, dieser Arbeit könne nichts mehr hinzugefügt werden, und Kummer leistete dasselbe für jeden Werth von x . Endlich hat er zuerst die Riccati'sche Gleichung integrirt, die so lange den Anstrengungen der Analysten spottete, und die Liouville im Pariser polytechnischen Journal um dieselbe Zeit vergeblich durch n -fache Integrale zu bewältigen bemüht war, andere schöne Arbeiten dieses noch ganz jungen Mannes abgerechnet.“

Die von Jacobi hier erwähnten Untersuchungen von Kummer über die hypergeometrische Reihe hatten sogleich sein lebhaftes Interesse erweckt, und es fand sich auch unter seinen hinterlassenen Papieren eine aus dem Jahre 1836 oder 1837 stammende Notiz, die er im Jahre 1843 einer neuen Bearbeitung unterzogen und deren Resultate er auf die allgemeine hypergeometrische Reihe ausgedehnt hatte, Ergebnisse, welche Heine während seiner damaligen Studienzeit zu einem Aufsatz zusammengestellt und im Jahre 1859 unter dem Titel „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“ veröffentlicht hat. Allgemeiner als Euler, welcher $y = \int_0^1 V du$, worin $V =$

$u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$ als Integral der Differentialgleichung $x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0$ gefunden hatte, zeigt Jacobi, daß dieser Gleichung auch das Integral $\int_g^h V du$ genügt, wenn g und h zwei von den Werten $0, 1, \pm \infty$ bezeichnen und $\left[\frac{u(1-u)}{1-xu} V\right]_g^h = 0$ ist, die Konvergenz des

Integrales vorausgesetzt; dasselbe leistet auch $\int_g^{\frac{1}{x}} V du$, wenn $\frac{u(1-u)}{1-xu} V$ für $u = g$ verschwindet und $1 - \alpha$ positiv ist.

Da aber nach Gauss $\int_0^1 u^{\lambda}(1-u)^{\mu}(1-au)^{\nu} du$, von einem konstanten Faktor abgesehen, der hypergeometrischen Reihe $F(-\nu, \lambda + 1, \lambda + \mu + 2, a)$ gleich ist, so erhält Jacobi hiernach die 24 hypergeometrischen Reihen, welche Kummer aufgestellt hat, in der wesentlich neuen Form, daß die bestimmten Integrale, welche jenen Reihen gleich sind, sämtlich durch Integration desselben Ausdrucks zwischen zweien der Grenzen $0, 1, \pm \infty, \frac{1}{x}$ erhalten werden. Eine gänzlich davon verschiedene Art von Beziehungen zwischen Integralen jener Differentialgleichung findet Jacobi durch Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche Gauss in seiner Arbeit über mechanische Quadraturen durchgeführt hat; indem er aus einem Integrale derselben durch ein bestimmtes Integral die Lösung einer anderen Differentialgleichung 2. Ordnung herleitet, entwickelt er leicht für eine endliche hypergeometrische Reihe die Beziehung

$$F(-n, \alpha + n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n \{ x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} \}}{dx^n},$$

so daß man, wenn dieselbe mit X_n bezeichnet wird, jede Funktion nach diesen ebenso wie nach Kugelfunktionen entwickeln

kann, da, wenn $I_{mn} = \int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma} dx$ gesetzt wird,

230 Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg.

sich $I_{mn} = 0$ und I_{nn} gleich einer bestimmten Konstanten ergibt. Jacobi geht endlich noch auf die Untersuchung der Frage ein, ob es für jeden endlichen Wert der Elemente möglich ist, die gegebene Differentialgleichung durch einfache bestimmte Integrale vollständig zu integrieren, und er charakterisiert die Klassen, in denen dies der Fall ist.

Noch im Winter 1836/37 begann Jacobi die Ausarbeitung der im Sommer in seiner Vorlesung gegebenen Anwendungen der Kreisteilung auf die Zahlentheorie; nur einen Punkt derselben berührt er jetzt schon in einem Briefe an Gauss vom 31. Januar 1837: „Sie wollen S. 31 Ihrer ersten biquadratischen Abhandlung wissen, welches Zeichen jedesmal in der Kongruenz $2b \equiv \pm r^2 \pmod{p}$ zu nehmen sei; dafür habe ich, wenn p die Form $8n + 5$ hat, die folgende Antwort: Es sei N die Zahl der reduzierten quadratischen Formen der Theiler von $x^2 + py^2$, so muß b mit solchem

Zeichen genommen werden, daß $(-1)^{N + \frac{p+3}{8}} \cdot \frac{b}{2}$ die Form $4m + 1$ erhält“, und am 15. April 1837 schrieb er an seinen Vetter Hauptmann Schwinck: „Ich bin grade jetzt dabei, eine sehr große Arbeit über die Primzahlen zu beenden und abzuschicken.“

Als jedoch die achtstündige Privatvorlesung über Variationsrechnung, die er für den Sommer angekündigt, nicht zustande gekommen, und er dadurch freie Zeit für die wissenschaftliche Arbeit gewonnen, führte er beim Niederschreiben die zahlentheoretischen Untersuchungen immer weiter aus, und die Zusätze zu dem, was er in der vorjährigen Sommervorlesung gegeben, wurden so umfangreich, daß er noch die ganzen Herbstferien auf die Ausarbeitung derselben verwenden mußte. Die seminaristischen Übungen hielt er in diesem Sommer mit großem Eifer ab, und eine erneute Eingabe von ihm und Neumann vom 29. August 1837 hatte das erfreuliche Resultat, daß

Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg. 231

endlich zwei Jahre später am 19. April 1839 dem Seminar 350 Taler jährlich bewilligt wurden.

Auch der wissenschaftliche Verkehr mit Bessel blieb trotz seiner so sehr in Anspruch genommenen Zeit beständig ein äußerst reger, wovon ein aus den hinterlassenen Papieren seines Freundes, durch Kortüm mitgeteilter, Brief Jacobis aus Pillau vom 12. August 1837 Zeugnis gibt. Die „Geometrische Konstruktion zweier geodätischen Formeln Bessels“ leitet Jacobi durch Abbildung mittels der Normalen auf der Einheitskugel und durch zwei Hilfssätze her, von denen der erste aussagt, daß, wenn in einem sphärischen Dreiecke die Grundlinie und der ihr gegenüberliegende Winkel unendlich kleine Größen sind, die Differenz der beiden anderen Seiten gleich ist der unendlich kleinen Grundlinie multipliziert in den cosinus eines der ihr anliegenden Winkel, der andere, daß, wenn in einem ebensolchen sphärischen Dreieck ein Winkel ein rechter oder eine Seite ein Quadrant ist, im ersten Falle die beiden Seiten einander gleich sind, im zweiten die Summe der Winkel an der Grundlinie gleich zwei Rechten ist.

Am Ende der Herbstferien sieht er endlich einen definitiven Abschluß seiner großen zahlentheoretischen Arbeit vor sich und schreibt am 14. September 1837 seinem in diesem Jahre aus Dorpat nach Petersburg berufenen Bruder: „... Was meine Studien betrifft, so habe ich seit einem Jahre mehr erfunden, d. h. von anderen erfundene Schwierigkeiten gelöst als seit langer Zeit, die analytische Mechanik, die Variationsrechnung und die Zahlentheorie sind diesmal der Schauplatz; in letzterer bin ich dabei, eine große Abhandlung von gegen 20 Bogen zu beenden, auch habe ich endlich angefangen, einiges aus meiner Theorie der Störungen von guten Freunden in Zahlen ausführen zu lassen...“, und in der Tat erscheint am 16. Oktober 1837 ein Auszug aus einem an die Berliner Akademie gerichteten Schreiben in deren Monatsberichten unter dem Titel „Über die Kreis-

teilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie“. Schon am 8. Februar 1827 hatte Jacobi Gauss von seinen zahlen-theoretischen Untersuchungen Mitteilung gemacht, nach denen, wenn p eine Primzahl, x eine Lösung von $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$, g eine primitive Wurzel von p , $F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \dots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}$ und α eine Wurzel der Gleichung $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1} = 0$

ist, die Relation besteht $F(\alpha)F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} p$; daß ferner, wenn $F(\alpha^m)F(\alpha^n) = \psi(\alpha)F(\alpha^{m+n})$ gesetzt wird, so daß $\psi(\alpha)$ eine ganze und ganzzahlige Funktion von α ist, $\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p$ wird. Ist r eine primitive Wurzel von $r^{p-1} = 1$, und setzt man in der Funktion $\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$ für r die Zahl g , so wird für positive m und $n < p-1$ $\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\Pi(n)} \pmod{p}$, wo $\Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ist, und er folgerte daraus, daß, wenn $m+n > p-1$, $\psi(g) \equiv 0 \pmod{p}$ ist, „einer der für die Anwendungen wichtigsten Sätze der Zahlentheorie“.

Jacobi fügt jetzt den früheren Mitteilungen hinzu, daß, wenn $2 \equiv g^m$, $3 \equiv g^{m'} \pmod{p}$, dann $F(-1)F(\alpha^3) = \alpha^{2m}F(\alpha)F(-\alpha)$, $F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'}pF(\alpha^3)$ ist, worin γ eine imaginäre 3. Einheitswurzel bedeutet. Die Funktionen $F(\alpha)$, welche bisher nur bestimmt waren, wenn α eine quadratische, kubische oder biquadratische Wurzel der Einheit ist, lassen sich durch die obigen Formeln auch für eine 6., 8., 12. Wurzel der Einheit bestimmen, so daß man die Gleichungen vom 6., 8., 12. Grade, welche in der Kreisteilung vorkommen, durch die Zerfällung von p in die drei Formen $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$ vollständig auflösen kann. Als eine für die Theorie der quadratischen Formen wichtige Anwendung der Zahlentheorie, welche zugleich eine Analogie zur Lagrangeschen Methode zur Bildung der Resolventengleichung einschließt, hebt Jacobi das dem Gauss'schen Satze über Eulersche Integrale analoge Theorem hervor, daß, wenn $p = \lambda n + 1$, β eine primitive λ .

Einheitswurzel, α irgendeine Wurzel von $\alpha^{p-1} = 1$, $\lambda \equiv g^m \pmod{p}$ ist, für ungerade λ $F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha) \dots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) \equiv \alpha^{-\lambda m} p^{\frac{\lambda-1}{2}} F(\alpha^\lambda)$, und für gerade λ $F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha) \dots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}} p^{\frac{\lambda-2}{2}} F(-1)F(\alpha^\lambda)$ ist, worin stets

$F(-1) = \sqrt[2]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. „Die Formeln scheinen darauf hinzu-deuten, daß, wie die Funktionen ψ im Zusammenhange mit den Binomialkoeffizienten oder den Eulerschen Integralen 1. Gattung stehen, zwischen den Funktionen F und den Eulerschen Integralen 2. Gattung eine ähnliche Beziehung stattfinden muß, in der Art, daß $-\frac{1}{\Pi(n)}$ der Funktion $F(r^{-n})$

entspricht. Aber ich habe lange diese Beziehung vergeblich gesucht, bis ich sie in folgendem Satze fand: In dem Aus-drucke von $F(\alpha)$ setze man für jeden Exponenten g^u den ihm in bezug auf p kongruenten kleinsten positiven Rest g_u , wodurch $F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} + \dots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}$ wird. Es seien ferner x und α nicht Wurzeln der Einheit, sondern x eine unbestimmte Variable und α eine Zahl $\equiv g^{p-1-m} \pmod{p}$. Setzt man $x = 1 + y$ und bezeichnet mit Y_n die Entwick-lung von $[\log(1+y)]^n$, wenn man die y^{p-1} übersteigenden Potenzen von y fortwirft, so wird für die verschiedenen Zahlen α , welche man für die verschiedenen Werte von m erhält, $F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi(m)} \pmod{p}$, wo die Kongruenz für ein unbestimmtes y in bezug auf die einzelnen Koeffi-zienten der Potenzen von y stattfindet. Dies ist die gesuchte Beziehung, aus welcher durch Multiplikation zweier Funk-tionen F die obige zwischen den Funktionen ψ und den Binomialkoeffizienten folgt.“

Nachdem er noch einen neuen Ausdruck für die wahre Form der Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ mittels der ψ -Funk-tionen angegeben, zu dessen Bestätigung Rosenhain in einer Preisschrift die Gleichungen $x^p = 1$ für alle Primzahlen p bis 103 aufgelöst hat, spricht er das folgende Theorem, „einen der