

„... es erscheint mir zum Besten der Sache wünschenswerth, daß Sie für jetzt Ihre verdienstliche Wirksamkeit bei der dortigen Universität noch fortsetzen, und das Studium der mathematischen Wissenschaften dort ferner, wie es bisher schon mit so ausgezeichnetem Erfolge geschehen ist, immer mehr begründen, ... es wird mir eine um so angelegentlichere Pflicht sein, durch eine angemessene Gehaltzulage Ihre äußere Lage zu verbessern, sobald hierzu nur die erforderlichen Fonds vorhanden sein werden“, und stellt ihm für später eine seinen Wünschen noch mehr entsprechende und seiner Wirksamkeit noch förderlichere Gelegenheit zur Veränderung seiner Lage in Aussicht.

Jacobi kommt jedoch nochmals am 9. September auf sein Ansuchen zurück: „Was meine Bitte selber betrifft, so erschien sie mir wohlbegründet, weil ich Bonn als Vereinigungspunkt von Deutschland, Holland, Frankreich und der Schweiz als den passendsten Punkt für eine Wirksamkeit in den mathematischen Wissenschaften betrachte, die in diesen Ländern von jeher mit Vorliebe getrieben wurden, und hätte ich hoffen dürfen, bei dem jetzigen Aufschwunge der mathematischen Wissenschaften, auch namentlich in Holland, auch aus diesen verschiedenen Gegenden manche Schüler dort um mich zu vereinigen. Unbezahlbar und von unberechenbarem Vortheile aber wäre für mich die Nähe von Paris gewesen, auch meinen dortigen Freunden, wie ich mir schmeichle, erwünscht.“ Aber die Gewährung der Bitte blieb versagt.

Die wichtigen algebraischen Untersuchungen, die seminaristischen, auf die verschiedenartigsten mathematischen Fragen sich erstreckenden Übungen mit seinen strebsamen und ausgezeichneten Schülern, endlich noch der stete Verkehr mit Bessel, welcher unaufhörlich mit Problemen theoretischer und praktischer Natur, jetzt meist auf die Theorie der bestimmten Integrale und die Entwicklungsformen der Funktionen bezüglich, an ihn herantritt, zogen ihn zunächst

wieder ganz von seinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen der Mechanik ab. Noch während des Sommersemesters verfaßt er am 9. Juli eine im Anschluß an die berühmte Besselsche Abhandlung „De perturbationibus etc.“ entstandene Arbeit „Formula transformationis integralium definitorum“, in der er zunächst von einer Legendreschen Formel ausgeht, welche dieser zur Kenntlichmachung der Konvergenz der Fourierschen Reihe entwickelte, und welche für die Darstellung von  $(1 - 2a \cos x + a^2)^{-\frac{1}{2}}$  in Form einer solchen Reihe in der Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{\cos ix \, dx}{\sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}} = a^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i} x \, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$$

gegeben ist, aus der für kleine  $a$  und wachsende  $i$  das Fallen der Koeffizienten ersichtlich. „Putabat Legendre, illam transformationis formulam unicam sui generis esse. Sed incidi nuper in formulam generalem, qua, proposita evolutione functionis in seriem secundum cosinus multipiorum anguli procedentem, integralia, quibus coefficientes evolutionis exhibentur, transformantur in alia, in quibus sub signo loco  $\cos ix$  invenitur factor  $\sin^{2i} x$ , et loco functionis evolvendae  $i^{\text{tum}}$  ejus differentiale, secundum  $\cos x$  sumptum“; ähnliche Transformationsformeln für Doppelintegrale kommen bei der Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln zur Erscheinung. Jacobi findet für eine nach ganzen positiven Potenzen der Variabeln entwickelbare Funktion die merkwürdige Beziehung

$$\int_0^\pi f(\cos x) \cos ix \, dx = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)} \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x \, dx,$$

und stützt den Beweis dieses Satzes auf das Lemma, daß für  $z = \cos x$

$$\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1) \frac{\sin ix}{i}$$

ist. Nachdem er noch für unbestimmte Grenzen die obige Legendresche Transformation auf die Form gebracht

$$\int \frac{\cos 2n\psi - i \sin 2n\psi}{\sqrt{1 + 2\kappa \cos 2\psi + \kappa^2}} d\psi = (-\kappa)^n \int \sin^{2n} \operatorname{am}\left(u + \frac{iK'}{2}\right) du,$$

worin  $(1 + \kappa) \sin \operatorname{am} u = (1 + \kappa \sin^2 \operatorname{am} u) \sin \psi$  ist, leitet er eine Reihe Eulerscher und Legendrescher Relationen her und findet unmittelbar durch Anwendung auf das Besselsche Integral für dieses unter anderem den bekannten Ausdruck

$$\pi J_k^{(i)} = \frac{k^i}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)} \int_0^\pi \cos(k \cos \varepsilon) \sin^{2i} \varepsilon d\varepsilon,$$

woraus sich wiederum einige interessante Rekursionsformeln für die Besselschen Funktionen sowie mehrere merkwürdige Fouriersche Reihenentwicklungen ergeben. Eine ganz ähnliche Beziehung für die Transformation der Doppelintegrale wird zur Entwicklung von  $[a^2 - 2aa'(\cos \varphi \cos \varphi' + \cos J \sin \varphi \sin \varphi') + a'^2]^{-\frac{n}{2}}$  nach Vielfachen von  $\varphi + \varphi'$  und  $\varphi - \varphi'$  verwendet, sowie zur Auswertung bestimmter Doppelintegrale benutzt. Ohne Beweis — wie dies auch wieder später der Fall ist — wird im Anschluß hieran endlich der wichtige Satz ausgesprochen: „Duarum planetarum, quae in orbitis ellipticis moventur, distantia, ad potestatem quamcunque elata, si in seriem infinitam evolvenda proponitur, secundum cosinus ac sinus multorum anomaliarum earum excentricarum procedentem: evolutionis coefficientes numero dupliciter infinitae omnes per quindecim ex earum numero lineariter exprimi possunt.“

Diese letztere Bemerkung findet in der vom 9. Oktober 1835 datierten Arbeit „De evolutione expressionis  $(l + 2l' \cos \varphi + 2l'' \cos \varphi')^{-n}$  in seriem infinitam secundum cosinus multorum utriusque anguli  $\varphi, \varphi'$  procedentem“ eine Ergänzung. „Quamvis vero in his quoque rebus gravia restent, in quibus tractandis a novis principiis proficisci debes, hoc loco ad alius generis disquisitionem methodos viri illustris (Legendre)

applicabo.... Theoremata quaedam de expressionibus complicationibus a me inventa in alia nuper commentatione indicavi.“ Für die Entwicklung des analogen Ausdruckes nach den cosinus eines Winkels findet, wie aus der Theorie der Kugelfunktionen bekannt war, eine Rekursionsformel für die Koeffizienten statt, nach der sich alle aus einer endlichen Anzahl derselben darstellen lassen; es entsteht nun die Frage, wie sich dies für die Entwicklung nach den cosinus der beiden Winkel gestaltet, und zwar soll dies durch Aufstellung der Rekursionsformeln für je einen Winkel ermittelt werden. Wenn  $U = \Delta^{-n} = (l + 2l' \cos \varphi + 2l'' \cos \varphi')^{-n} = \sum p_{ii'} e^{(i\varphi + i'\varphi')\sqrt{-1}} = p_{00} + 2 \sum p_{i0} \cos i\varphi + 2 \sum p_{0i'} \cos i'\varphi' + 4 \sum p_{ii'} \cos i\varphi \cos i'\varphi'$  sein soll, so werden die Größen  $p_{ii'}$  nach den in der letzten Arbeit von Jacobi aufgestellten Formeln durch den Ausdruck bestimmt sein:

$$p_{ii'} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos i\varphi \cos i'\varphi' d\varphi d\varphi'}{(l + 2l' \cos \varphi + 2l'' \cos \varphi')^n} = \frac{(-2)^{i+i'}}{\pi^2} \frac{n(n+1) \cdots (n+i+i'-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2i'-1)} (l')^i (l'')^{i'} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2i} \varphi \sin^{2i'} \varphi' d\varphi d\varphi'}{(l + 2l' \cos \varphi + 2l'' \cos \varphi')^{n+i+i'}},$$

und er findet aus den Differentialbeziehungen  $\Delta \frac{\partial U}{\partial \varphi} + n \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} U$

$$= \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} + (n-1) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} U = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \frac{\partial U}{\partial \varphi'} + n \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi'} U = \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi'} +$$

$$(n-1) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi'} U = 0 \quad \text{zwischen den } p \text{ die Rekursionsformel}$$

$$i'[lp_{ii'} + 2l'p_{i-1i'}] + l''[(i' - i + n - 1)p_{ii'-1} + (i' + i - n + 1)p_{ii'+1}] = 0 \quad \text{und 3 ähnliche, wodurch die Bestimmung}$$

aller auf die 4 voneinander unabhängigen Größen  $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$  reduziert ist. Für die Entwicklungskoeffizienten

von  $U = \sum P_i e^{i\varphi} V^{-1}$  ergibt sich zugleich die Differen-

tialgleichung 3. Ordnung  $MP_i + M' \frac{dP_i}{d\varphi} + M'' \frac{d^2 P_i}{d\varphi^2} +$

$M''' \frac{d^3 P_i}{d\varphi^3} = 0$ , in welcher  $M, M', M'', M'''$  ganze lineare Funk-

tionen von  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi$  sind. Ähnliche Sätze werden für den Fall ausgesprochen, daß  $A$  eine beliebige ganze Funktion von  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi'$ ,  $\sin \varphi'$  bezeichnet, jedoch wird weder hier noch in seinen späteren astronomischen Arbeiten, in denen sich dieselben wiederholt angeführt finden, ein strenger Beweis für dieselben geliefert. In seinem Nachlaß fand sich ein Bruchstück betitelt „De evolutione expressionis  $\{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi + (A' + B' \cos \varphi + C' \sin \varphi) \cos \varphi' + (A'' + B'' \cos \varphi + C'' \sin \varphi) \sin \varphi' + \dots\}^{-n}$  in seriem infinitam secundum cosinus ac sinus multiporum utriusque anguli  $\varphi$ ,  $\varphi'$  procedentem, una cum applicatione ad calculum motus planetarum“, in dessen Einleitung Jacobi hervorhebt, daß die Theorie der Bewegung der in ihren elliptischen Bahnen gestörten Himmelskörper sich wesentlich um die Entwicklung der reziproken Distanz zweier Planeten nach den cosinus und sinus der Vielfachen der beiden mittleren Anomalien dreht, und daß gerade dieser Teil des Problems, insofern sich dasselbe nicht auf die Variation der Elemente bezieht, eigentlich seit Euler keine Fortschritte gemacht hat. Seitdem am Anfange des Jahrhunderts Planeten entdeckt waren, deren Bahnen große Exzentrizitäten und große Neigungen hatten, wurden die früheren Methoden hinfällig, und die Astronomie besaß keine Methode, um die Störungen durch analytische Ausdrücke darzustellen. Gauss habe schon am Beginn des Jahrhunderts bei Berechnung der Bahn der Pallas die Veröffentlichung seiner Methoden in Aussicht gestellt, aber in den 25 Jahren sei nichts außer der Arbeit „determinatio attractionis etc.“ erschienen. Bruns vermutet, bei der Besprechung des astronomischen Nachlasses von Jacobi, daß das Ziel, welches Jacobi auf den später verloren gegangenen Blättern, von denen nur ein Bruchstück sich gefunden, vorschwebte, die Aufstellung der linearen Relationen war, welche zwischen den Koeffizienten der Entwicklung stattfinden, ferner die Aufsuchung der linear voneinander unabhängigen Koeffizienten, durch welche sich alle anderen

linear ausdrücken lassen, und endlich die Aufsuchung von linearen Differentialgleichungen, denen die Koeffizienten genügen. Jacobi wiederholt auch hier den am Schlusse der vorigen Arbeit ausgesprochenen Satz von der linearen Abhängigkeit aller Koeffizienten von 15 derselben, fügt aber hinzu: „Coefficientes illas quindecim non prorsus ex arbitrario accipere licet, fit enim, ut e coefficientibus initialibus quaedam a minori numero antecedentium pendeant. Unde cavere debes, ne in coefficientium primordialium numerum referas, quae a se invicem non sint independentes.“

Wie aus den späteren Arbeiten ersichtlich, hatten in zwischen geometrische Untersuchungen Jacobi zu wichtigen algebraischen Ergebnissen geführt, deren Veröffentlichung mit der vom 27. August 1835 datierten Arbeit „De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis“ beginnt. Während Bézout das Problem der Elimination einer Größe  $x$  zwischen zwei Gleichungen  $f(x) = 0$  und  $\varphi(x) = 0$  auf ein Eliminationsproblem zwischen linearen Gleichungen zurückführte, indem er, wenn  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$  gesetzt wird, die Gleichungen  $m_r = (a_n x^{n-r-1} + \dots + a_{r+1}) \varphi(x) - (b_n x^{n-r-1} + \dots + b_{r+1}) f(x) = \alpha_0 x^0 + \dots + \alpha_{n-1-r} x^{n-1} = 0$  ( $r = 0, 1, \dots, n-1$ ) bildet und aus den  $n$  in  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  linearen homogenen Gleichungen diese  $n$  Größen eliminiert, stellt Jacobi zunächst das Verschwinden der Determinante  $L$  der  $\alpha_{rs}$  als Bedingung für die Existenz eines gemeinschaftlichen Teilers von  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  auf; aus der Beziehung  $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$  folgert er, da  $Lx^{(r)} = A_{r0} m_0 + \dots + A_{rn-1} m_{n-1}$  ist,  $A_{rs} = A_{sr}$ , und für das den beiden Gleichungen gemeinsame  $x$  die Beziehung  $x^0: x^1: \dots: x^{n-1} = A_{0r}: A_{1r}: \dots: A_{n-1,r}$ . Durch Umformung der Determinante gelangt Jacobi im Prinzip zu der späteren Cayleyschen Eliminationsmethode und knüpft hieran noch weitere Sätze, welche sich später in seiner Determinantentheorie wiederfinden, wie z. B. daß der Wert von  $A_{rs}$  nur von der Summe  $r + s$  der Indices abhängt, u. a. m. Es mag endlich noch

das folgende Theorem Erwähnung finden, dem sich eine Reihe ähnlicher anschließt, und worin  $A_{r,s}$  durch  $A_{r+s}$  zu ersetzen ist: „Sit  $w_k = 0$  aequatio  $k^{\text{ta}}$  ordinis respectu ipsius  $x$ , quae provenit e  $k + 1$  aequationibus  $L = A_0 m_0 + A_1 m_1 + \dots + A_{k-1} m_{k-1}$ ,  $Lx = A_1 m_0 + A_2 m_1 + \dots + A_k m_{k-1}$ ,  $\dots$   $Lx^k = A_k m_0 + A_{k+1} m_1 + \dots + A_{2k-1} m_{k-1}$ , eliminatis  $k$  quantitativibus  $m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$ ; si ipsius  $w_k$  potestas altissima  $x^k$  coefficientem habet  $\Sigma \pm A_{00} A_{11} \dots A_{k-1, k-1}$ , erit expressio  $[\Sigma \pm A_{00} A_{11} \dots A_{k-2, k-2}]^2 w_k + [\Sigma \pm A_{00} A_{11} \dots A_{k-1, k-1}]^2 w_{k-2}$  per  $w_{k-1}$  divisibilis.“

In den Herbstferien widmet sich Jacobi wieder ganz seinen großen Arbeiten, die ihn schon seit Jahren unausgesetzt beschäftigen, beeilt sich aber, um Zeit und Muße für die Ausarbeitung derselben zu gewinnen, erst noch eine Reihe von Lücken in seinen früheren Veröffentlichungen über Transzendenten, Algebra und Geometrie auszufüllen.

Es war bekannt, daß die Substitutionen  $\cos \varphi = \alpha \cos \eta + \beta \sin \eta \cos \vartheta + \gamma \sin \eta \sin \vartheta$  und die analogen für  $\sin \varphi \cos \psi$  und  $\sin \varphi \sin \psi$ , wenn  $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ ,  $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \dots$ , das Doppelintegral  $\iint U \sin \varphi d\varphi d\psi$  in  $\iint U \sin \eta d\eta d\vartheta$  überführen, worin  $U$  in dem ersten durch  $\varphi, \psi$ , in dem zweiten durch  $\eta, \vartheta$  auszudrücken ist, und Jacobi hatte bereits in einer früheren Arbeit von dieser Transformation des Doppelintegrals mehrfache Anwendungen gemacht; in der vom 12. September 1835 datierten Abhandlung „De integralibus quibusdam duplicibus, quae post transformationem variabilium in eandem formam redeunt“ liefert er zwei neue Beispiele für eine Transformation, welche ebenfalls das Integralelement unverändert läßt. Sind nämlich zwischen den Größen  $x, y, z, p, q, r$  zwei Gleichungen vorgelegt  $0 = gx + hy + iz = g'p + h'q + i'r$ ,  $0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxyz + 2ezx + 2fxy = a'p^2 + b'q^2 + c'r^2 + 2d'q'r + 2e'r'p + 2f'p'q$ , von denen die eine in bezug auf  $x, y, z, p, q, r$  homogen linear, die andere in bezug auf dieselben Größen homogen vom 2. Grade ist,

sei ferner  $x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 1$ , so besteht die Transformationsgleichung

$$\iint \frac{U dp dq}{r \sqrt{g^2(d^2 - bc) + h^2(e^2 - ca) + i^2(f^2 - ab) + 2hi(da - ef) + 2ig(eb - fd) + 2gh(fe - de)}}$$

$$= \iint \frac{U dx dy}{x \sqrt{g'^2(d'^2 - b'c') + h'^2(e'^2 - c'a') + i'^2(f'^2 - a'b') + 2h'i'(d'a' - e'f') + 2i'g'(e'b' - f'd') + 2g'h'(f'c' - d'e')}}.$$

und eine ähnliche Beziehung, wenn zwei Gleichungen gegeben sind, von denen jede homogen linear in dem einen und homogen vom 2. Grade in dem anderen Wertesystem ist.

Auch die Theorie der elliptischen Funktionen ergänzte er durch einige sehr interessante und wichtige Formeln, die er am 21. September 1835 unter dem Titel „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales“ veröffentlichte. Vom Additionstheorem der elliptischen Funktionen ausgehend hatte er und nach ihm Richelot eine Beziehung zwischen  $\sin \text{am}(u + a + b)$ ,  $\sin \text{am}(u + a)$ ,  $\sin \text{am}(u + b)$  und  $\sin \text{am} u$  entwickelt und durch Anwendung dieser auf die Integrale 2. Gattung das Additionstheorem derselben, sowie durch Einführung von  $\log \Omega(u) = \int_0^u E(u) du$  für die Integrale 3. Gattung  $\Pi(u, a) = u E(a)$

+  $\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}$  auch die Additionstheoreme dieser aufgestellt.

Endlich leitet er noch aus  $H(u) = \sqrt{\kappa} \cdot \sin \text{am} u \cdot \Theta(u)$  die für die späteren Anwendungen wichtige Beziehung her

$$\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)} = \frac{H'(a)H(b)H(u+a)H(u+b)}{\Theta(a)\Theta(b)\Theta(u)\Theta(u+a+b)}.$$

„Dedi olim sine demonstratione expressiones algebraicas generales radicum aequationum  $n^{\text{ta}}$  gradus, quae transformationem functionum ellipticarum concernunt. Quae formulae, quae spectari debebant ut id, quod hactenus in theoria functionum ellipticarum maxime reconditum est, per principium

novum ac latissime patens a me inventae sunt; post ope formulae memorabilis eas demonstratione maxime eleganti atque elementari comprobare contigit. Quod suo tempore in lucem proferemus.“

Daß ihn aber in diesen Ferien unausgesetzt mechanische und astronomische Fragen beschäftigten, ohne daß er noch zu irgendeiner Veröffentlichung über diese Probleme gelangte, ersehen wir aus der Korrespondenz Bessels mit ihm und andern befreundeten Gelehrten. „Jacobi bemüht sich viel um die Entwicklung der Störungen der Himmelskörper“, schreibt Bessel am 24. September an Schumacher; „so viel ich einsehe, liegt die Hauptschwierigkeit, welche bis jetzt garnicht ordentlich beseitigt werden kann, und auch nur durch eine neue Idee beseitigt werden wird, in den von den höheren Ordnungen der Massen abhängigen Theilen. Die Aufgabe, unabhängig von der Bedingung, daß zwei der drei Massen vergleichungsweise mit der dritten kleine Größen seien, scheint durch die Natur aufgelöst werden zu können; wenigstens scheint der dreifache Stern  $\zeta$  Cancri einen Fall dieser Art zu zeigen, indem er aus 3, ihren Helligkeiten nach nicht sehr verschiedenen Theilen zusammengesetzt ist. Die allergrößte Entdeckung in der Mathematik würde wohl die Erfindung eines neuen Integrals der Differentialgleichung der Bewegung dieser Körper sein. Gesucht ist dieses Integral gewiß häufig genug“,

und Jacobi schreibt selbst am 11. Oktober 1835 an Bessel gelegentlich einer Anfrage über die Verdienste von Pfaff in der Theorie der Differentialgleichungen und mit Bezug auf ein mündliches Gespräch über einige Punkte der analytischen Mechanik: „Schreiben Sie ihm, daß Sie ferner der ebendasselbst von ihm ausgesprochenen Bemerkung vollkommen beistimmen, daß Pfaff ein vortrefflicher Mathematiker gewesen sei, und wenn auch bisweilen seine lichten Momente mit anderen abgewechselt hätten — was immer erfreulich sei, da manche nur die andern hätten — so bliebe

es doch dahin gestellt, ob er grade in solchen die Prüfung und Bestätigung der wichtigeren Sätze bewerkstelligt. . . . Pontécoulant's Analyse des besprochenen Gegenstandes ist ganz die Poisson'sche und ebenso unelegant, als ob Lagrange nie gelebt hätte. Wenn sie mir von meinem schönen Rosenstrauch die Blume pflücken und nur die Dornen zurücklassen, sollten sie doch säuberlicher mit umgehen.“

Bevor nun Jacobi in das Wintersemester eintrat, veröffentlichte er noch eine fundamentale algebraisch-geometrische Untersuchung, welche eine Ausführung und geniale Fortentwicklung seiner früheren „Theoremata nova algebraica etc.“ war. In der Arbeit „De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis simul cum enodatione paradoxo algebraici“ weist Jacobi darauf hin, daß der Widerspruch, den Euler darin findet, daß durch neun Punkte eine Kurve 3. Ordnung bestimmt ist, während doch zwei Kurven 3. Ordnung sich in neun Punkten schneiden, durch die dann alle Kurven 3. Ordnung des Büschels gehen, daher rühre, daß eine ganze Funktion  $n$ . Grades von  $m$  Variabeln freilich im allgemeinen durch  $\binom{n+m}{m}$  Werte bestimmt ist, daß dies jedoch dann und nur dann der Fall ist, wenn das Wertsystem eine gewisse Determinante nicht zu Null macht. Er zeigt zunächst, daß von den  $n^2$  Durchschnittspunkten zweier Kurven  $n$ . Ordnung  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  Punkte durch die übrigen bestimmt sind, weist auf rein algebraischem Wege, gestützt auf die Formeln der erwähnten Abhandlung, nach, daß, wenn  $mn$  einfache Punkte auf zwei algebraischen Kurven  $m$ . und  $n$ . Ordnung gelegen sein sollen, wo  $m > n$ , zwischen den  $2mn$  Koordinaten der  $mn$  Punkte  $mn - 3n + 1$  Bedingungsgleichungen ( $n^2 - 3n + 2$  für  $m = n$ ) stattfinden müssen, und daß ferner die größte Zahl der Punkte, welche auf einer Kurve  $n$ . Ordnung beliebig angenommen werden können, damit



man durch eben dieselben eine einfache Kurve  $m$ . Ordnung legen kann, wenn wiederum  $m > n$ ,  $mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  ist, daß somit  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  von den Schnittpunkten einer Kurve  $m^{\text{ter}}$  und  $n^{\text{ter}}$  Ordnung durch die  $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  übrigen eindeutig bestimmt sind; der Beweis dieser, der Jacobische Satz genannten, Erweiterung des Cramer-Plückerschen Problems stützt sich im wesentlichen auf sein früher aufgestelltes Theorem, nach welchem für zwei Gleichungen  $f_m(x, y) = 0$ ,  $f_n(x, y) = 0$  die Beziehung

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta}{\frac{\partial f_n}{\partial x} \frac{\partial f_m}{\partial y} - \frac{\partial f_m}{\partial x} \frac{\partial f_n}{\partial y}} = 0$$

besteht, wenn  $\alpha + \beta \leq m + n - 3$ , und sich die Summation über alle  $mn$  Schnittpunkte erstreckt, wobei alle diese Gleichungen aus  $\frac{(m-n-1)(m-n-2)}{2}$  von ihnen abgeleitet werden können. Diese und eine Reihe anderer Sätze über ebene Kurven dehnt nun Jacobi auch auf Flächen aus; er findet zunächst, daß durch  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 2$  Punkte die Durchschnittskurve zweier Flächen  $n$ . Ordnung bestimmt wird, durch  $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3} - 1$  Punkte die Durchschnittskurve einer Fläche  $n$ . und  $m$ . Ordnung, wenn  $m \geq n$ , und daß endlich  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 3$  Punkte die  $n^3$  Punkte bestimmen, in denen drei Flächen  $n$ . Ordnung sich schneiden. Ist eine Durchschnittskurve zweier Flächen  $n$ . Ordnung gegeben, so werden von in ihr gelegenen Punkten, durch welche eine Fläche  $m$ . Ordnung ( $m \geq n$ ) sich legen läßt, welche nicht durch die Kurve selbst geht, nicht mehr willkürlich angenommen werden können als  $n^2(m-n+2) - 1$ , wenn  $m \geq 2n-3$ , und wenn  $m < 2n$ , nicht mehr als  $n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2 \cdot 3} - 1$ ,

und gerade durch so viel Punkte wird man stets eine Fläche  $m$ . Ordnung legen können. Endlich wird für die  $n^2m$  Punkte, in denen sich zwei Flächen  $n$ . und eine Fläche  $m$ . Ordnung schneiden, die Zahl der Bedingungen, welche zwischen den Koordinaten dieser Punkte stattfinden muß, bestimmt und die Gesamtzahl der Bedingungen aufgestellt, denen  $mnp$  Punkte genügen müssen, damit sie als Durchschnittspunkte dreier Flächen  $m$ .,  $n$ .,  $p$ . Ordnung betrachtet werden können, welche keine gemeinsame Durchschnittskurve besitzen.

Einige bei Gelegenheit der geometrischen Übungen im Sommer gemachte Bemerkungen veröffentlichte er am 14. Oktober 1835 unter dem Titel „Observationes geometricae“. Wenn ein Körper gegeben ist, so wird ein zu diesem symmetrischer gebildet, wenn einer oder den drei Koordinaten aller Punkte entgegengesetzte Werte zuerteilt werden, ein kongruenter, wenn man zwei Koordinaten entgegengesetzte Werte gibt, endlich ein ähnlicher, wenn statt der Koordinaten die  $m$ -fachen Werte derselben gesetzt werden, worin  $m$  positiv. Nachdem nun Euler bewiesen, daß es für zwei ähnliche Körper einen beiden gemeinsamen, oder sich selbst entsprechenden Punkt gibt, das Ähnlichkeitszentrum, von dem aus beide Körper gesehen einen ähnlichen Anblick bieten, stellt Jacobi, um für einen gegebenen Körper einen andern zu bilden, der ihm in beliebiger Lage ähnlich ist, für die Koordinaten die Beziehungen auf  $mx = f + \alpha p + \beta q + \gamma r$ ,  $my = g + \alpha' p + \beta' q + \gamma' r$ ,  $mz = h + \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r$ , so daß die des sich selbst entsprechenden Ähnlichkeitspunktes durch die hieraus entspringenden drei Gleichungen bestimmt werden, wenn man für  $x, y, z$  und  $p, q, r$  die Koordinaten dieses Punktes  $A, B, C$  setzt. Da nun, wie unmittelbar zu sehen, der Nenner der hieraus sich ergebenden Werte von  $A, B, C$  nur dann verschwindet, wenn  $m = 1$ , also die Körper kongruent sind, so folgt, daß nur zwei kongruente Körper keinen Ähnlichkeitspunkt besitzen.

Der Winter 1835/36 nimmt nun die Kräfte Jacobis

wieder aufs äußerste in Anspruch; Integralrechnung, Theorie der elliptischen Funktionen und seminaristische Übungen hatte er für dieses Semester angekündigt. Von den beiden Vorlesungen besitzen wir Nachschriften von Rosenhain. Die für Anfänger bestimmte Vorlesung über Integralrechnung behandelte nur die Quadraturen rationaler und solcher irrationaler Funktionen, welche Quadratwurzeln aus Polynomen 1. und 2. Grades einschließen, und erst am Schluß der Vorlesung finden sich noch einige Auseinandersetzungen über die Elemente der Theorie der totalen Differentialgleichungen mit dem Hinweis, daß die Aufsuchung der behandelten Quadraturen nichts anderes bedeute, als die Integrale der einfachsten Differentialgleichungen in algebraischer Form oder durch die elementaren Transzendenten darzustellen. Die Vorlesungen über elliptische Funktionen dagegen, die er in 77 Stunden gehalten, waren von einer Tiefe und Eleganz der Darstellung und brachten eine so reiche Fülle des Stoffes, wie sie keine seiner früheren Vorlesungen geboten. „Da die 10stündigen Vorlesungen über die elliptischen Transzendenten die Kräfte der Zuhörer in hohem Grade in Anspruch nahmen, so hielt ich es für zweckmäßig, die Übungen des Seminars bereits Neujahr einzustellen.“

Die Rosenhainsche Nachschrift dieser Vorlesung beginnt mit einer kurzen Einleitung und Charakteristik des Legendreschen traité; „indem Legendre von der allgemeinen Bestimmung der drei Integralgattungen ausging, konnte er sich doch nicht von dem physiokratischen Prinzip seiner Zeit trennen; er betrachtete es daher als seine Haupttendenz, die numerischen Werte der Integrale zu bestimmen.“ Jacobi geht hier zum ersten Male zur Begründung der elliptischen Transzendenten von der  $\vartheta$ -Funktion aus; „weder Fourier noch Abel haben den Zusammenhang dieser Funktion mit den elliptischen Integralen eingesehen.... Die Definition dieser Transzendenten durch eine unendliche

Reihe hat vor jeder anderen den Vorzug, weil man von ihrem Werte immer eine bestimmte Vorstellung hat, während bei der Definition der Transzendenten durch Integrale die präzise Vorstellung aufhört, sobald die Grenzen der Integrale imaginäre Größen werden, weil wir an diese Form weniger gewöhnt sind. Ihre Theorie ist von Cauchy ausgearbeitet, aber sie hat doch noch nicht den Grad von Klarheit, welchen eine unendliche Reihe hat. Hierzu kommt noch die Undeutlichkeit, welche eine Quadratwurzel unter dem Integral hervorbringt, besonders wenn die Variable imaginäre Werte annimmt, wie bei allen Transzendenten.“

Nach Entwicklung der charakteristischen Eigenschaften der  $\vartheta$ -Funktion werden mit Hilfe dieser die Nullwerte derselben bestimmt, und hieraus die unendliche Produktentwicklung dieser Transzendenten abgeleitet. „Ich habe auf zwei Arten die Funktion durch ein unendliches Produkt dargestellt; es war vorauszusehen, daß dieses Resultat, dessen Auffindung so viel Schwierigkeit machte, desto wichtiger sein würde; diese Erwartung wurde erfüllt, denn es ergaben sich in der Tat daraus die wichtigsten Theoreme“, und er entwickelt danach durch Verwandlung der unendlichen Produkte in Reihen die schon früher von ihm veröffentlichten zahlentheoretischen Sätze. An den Beweis des Satzes, daß jede Zahl sich als die Summe von vier Quadraten darstellen lasse, knüpft er einige Bemerkungen allgemeinerer Natur: „Dieser Satz bildet einen Teil eines großen Lehrsatzes von Fermat; er gab die ersten Gründe dazu in Noten zu einer Ausgabe des Diophantus, worin sich mehrere Sätze befinden, die jedoch fast alle ohne Beweis mitgeteilt sind. Von einigen, sagt er, habe er keinen Beweis finden können, und diese sind meistens falsch, von anderen, er habe einen Beweis, und diese hat man später als richtig erkannt. Unter diesen letzteren befindet sich der Hauptsatz, der noch bis jetzt nicht allgemein hat erwiesen werden können, daß jede Zahl die Summe von

höchstens  $m$   $m$ -eckigen Zahlen sei . . . . . Der Satz, der die dreieckigen Zahlen behandelt, ist erst von Gauss in den *Disquisitionibus arithmetica* bewiesen, doch gesteht er hier selbst ein, daß seine Methode sich nicht auf die fünfeckigen Zahlen würde anwenden lassen. Cauchy fand endlich den Beweis auch für diese; ich habe ungeachtet vieler Versuche diesen Satz noch nicht auf die elliptischen Transzendenten zurückführen können.“ Nachdem diese Untersuchungen sieben Vorlesungen in Anspruch genommen, geht Jacobi zur Entwicklung der  $\vartheta$ -Funktion nach der Fourierschen Reihe über und macht davon einige Anwendungen auf die lineare Transformation dieser Transzendenten: „Diese Transformation ist eine der wunderbarsten der ganzen Analysis und sie gibt für spezielle Werte von  $q$  und  $z$  Gleichungen, die so auffallend sind, daß man sie ohne numerische Beispiele fast nicht glaubt“; danach vertieft er sich in vielen der folgenden Vorlesungen immer mehr in die allgemeine Transformation der  $\vartheta$ -Funktion, freilich nach Methoden, die komplizierte und wenig übersichtliche Rechnungen erfordern und offenbar in dieser Form von ihm zum ersten Male und direkt für diese Vorlesung angestellt waren.

Mit seiner 22. Vorlesung beginnt aber ein völlig neuer Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen, der sich freilich erst systematisch in einer drei Jahre späteren Vorlesung vollzogen hat. Jacobi beweist ein „neues Fundamentaltheorem unserer Transzendenten“, jenen so berühmten gewordenen Satz von der Summe von Produkten von vier  $\vartheta$ -Funktionen, den er selbst erst wenige Wochen vorher gefunden. Kronecker vermutet mit Recht: „Da Jacobi beim Beginn der Vorlesungen 1835/36, wie aus der Rosenhainschen Ausarbeitung deutlich zu ersehen ist, das neue Fundamentaltheorem der Transzendenten  $\vartheta$  gehabt hat, so fällt dessen Entdeckung notwendig in die Zeit zwischen dem 21. September 1835, welches Datum der Aufsatz 'Formulae novae etc.' trägt, und dem Anfange der Winter-

vorlesungen. Man kann daher mit aller Sicherheit die durch die Entdeckung der  $\vartheta$ -Relation bezeichnete Epoche und die damit beginnende neue Phase in der Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen vom Ende September oder Anfang Oktober 1835 datieren.“

Nach Herleitung der Additionstheoreme der  $\vartheta$ -Funktionen aus jenem allgemeinen Theorem und der Beziehungen zwischen den vier  $\vartheta$ -Funktionen untereinander, geht Jacobi zur Aufstellung der Relationen zwischen den Differentialquotienten dieser vier Funktionen über und zu der von ihm entdeckten merkwürdigen Beziehung des Differentialquotienten des ungraden  $\vartheta$  zu den drei anderen Grundfunktionen für das verschwindende Argument. Nun wird der Zusammenhang der  $\vartheta$ -Transzendenten mit den elliptischen Integralen der drei Gattungen eingehend untersucht; er definiert die drei elliptischen Funktionen als Quotienten von  $\vartheta$ -Funktionen, leitet aus den Eigenschaften der letzteren die Periodizität der ersteren her und entwickelt aus speziellen Fällen seines allgemeinen  $\vartheta$ -Theorems die Additionsformeln der elliptischen Transzendenten, sowie aus dem Zusammenhang der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung mit der  $\vartheta$ -Funktion die Additionstheoreme dieser Integrale. Große Schwierigkeiten bereitet ihm der Begriff der unendlichen Vieldeutigkeit des elliptischen Integrales, indem er auf die Cauchysche Anschauungsweise vom komplexen Integral einzugehen versucht, und kommt bei dieser Gelegenheit auf den von ihm früher bewiesenen Satz, daß eine Funktion einer Variablen nicht mehr als zwei Perioden haben kann. Hieran schließt sich die ausführliche Entwicklung der Eigenschaften der elliptischen Funktionen, hergeleitet aus denen der  $\vartheta$ -Funktionen, die Aufstellung der verschiedenen Formen der Additionstheoreme nebst der „Anwendung auf ein Problem der Elementargeometrie“, und eine nochmalige, etwas veränderte Darstellung der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch die  $\vartheta$ -Funktionen. Von



der Transformation und Multiplikation der  $\vartheta$  ausgehend behandelt er weiter die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, geht aber nur auf die Transformation 1. und 2. Grades näher ein. Die 67. Vorlesung ist dem Abelschen Theorem und den Abelschen Transzendenten gewidmet; „ein Zweig der Analysis, der für die Zukunft eine große Entwicklung verspricht, beschäftigt sich damit, zusammengesetzte algebraische Relationen durch einfache Transzendenten zu ersetzen. Es könnte scheinen, als würde dadurch etwas Niederes auf etwas Höheres zurückgeführt, gleichwohl aber sieht man, wenn man den Gegenstand genauer ins Auge faßt, daß gerade dieses in gewissen Fällen unser tägliches Geschäft ist.“ Nachdem er vom Abelschen Theorem gesprochen und von den neuen Transzendenten, die mittels desselben in die Analysis eingeführt werden, hebt er hervor, daß man nicht hoffen darf, etwa auf einem unangemessenen Wege durch Überwindung der mühsamsten Rechnungen zu einem Resultate zu gelangen, „hier wird alles durch die Kraft der Betrachtung abgeleitet werden müssen, wenn diese Theorie zustande kommt; dann freilich wird sie auch als der Glanzpunkt mathematischer Forschung dastehen, weil durch sie der höchste mathematische Verstand durch Rechnung unverdunkelt zur Anschauung kommen muß.“ Jacobi entwickelt endlich ausführlich das Abelsche Theorem für hyperelliptische Integrale, bespricht den von ihm gegebenen Ansatz für die Umkehrung dieser Integrale und erläutert die Periodizität dieser Umkehrfunktionen.

Bei Gelegenheit seiner Vorlesung hatte Jacobi eine Aufzeichnung über einen schon früher erwähnten Punkt aus der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen gemacht, die erst nach seinem Tode aus seinem Nachlaß im Jahre 1891 unter dem Titel „De transformationibus functionum ellipticarum irrationalibus sive inversis“ von Mertens herausgegeben wurde, und welche aus den Aus-

drücken für  $\sin \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, \lambda \right)$  durch  $\sin \operatorname{am}(u, \kappa)$  und  $\sin \operatorname{am}(nu, \kappa)$  durch  $\sin \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, \lambda \right)$  die vollständigen algebraischen Auflösungen der durch diese Ausdrücke definierten Gleichungen in der Form herleitet:

$$\begin{aligned} \frac{n\kappa M}{\lambda} \sin \operatorname{am}(u + 4p\omega, \kappa) &= \sin \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, \lambda \right) \\ &+ \sum e^{\frac{8vp\pi i}{n}} \sin \operatorname{am} \left( \frac{u + 4v\omega'}{M}, \lambda \right) \sqrt[n]{\frac{\varphi(4v\omega') \varphi(u)}{\varphi(u + 4v\omega)}}, \\ \frac{\lambda}{nM} \sin \operatorname{am} \left( \frac{u + 4p\omega'}{M}, \lambda \right) &= \sin \operatorname{am}(nu, \kappa) \\ &+ \sum e^{-\frac{8vp\pi i}{n}} \sin \operatorname{am}(nu + 4v\omega, \kappa) \sqrt[n]{\frac{\overline{\varphi(4v\omega)} \overline{\varphi(nu)}}{\overline{\varphi(nu + 4v\omega)}}}, \end{aligned}$$

worin

$$\Phi(u) = (1 - x^2 \sin^2 \operatorname{am}(2\omega, \kappa) x^2) \dots (1 - x^2 \sin^2 \operatorname{am}((n-1)\omega, \kappa) x^2),$$

$$\Psi(u) = (1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \left( \frac{2\omega'}{M}, \lambda \right) y^2) \dots (1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \left( \frac{(n-1)\omega'}{M}, \lambda \right) y^2),$$

wenn  $x = \sin \operatorname{am}(u, \kappa)$ ,  $y = \sin \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, \lambda \right)$ ,  $n\omega = mK + m'iK'$ ,  $4n\omega' = \mu K + \mu'iK'$  und  $m\mu' - \mu m' = 1$  ist.

Am 18. Februar 1836 wurde Jacobi zum auswärtigen Mitglied der Berliner Akademie gewählt und erhielt die Nachricht davon zuerst durch Steiner, der ihm von den Einzelheiten der Wahl, von der Gefahr, die ihm Cauchy als Gegenkandidat bereitete, in einem humoristischen Briefe vom 22. Februar nähere Schilderungen gab und dann fortfährt: „Dein erster Brief enthielt die Weisung, es wäre für mich gut, wenn wir bei Zeiten wieder zusammenkämen, die ich, als ein in der Polar-Geschichte geübter, glaube richtig gefaßt zu haben. Dem Joh. Schulze wurde bemerkt, Berlin, der höchste wissenschaftliche Ort Deutschlands, wohin alle Lernbegierigen strömen, leiste in der Mathematik fast nichts; in seiner Provinz stehe es mit derselben auf den Gymnasien am schlechtesten; diesem Mangel sei zwar leicht, aber nur

dadurch abzuhelpen, daß man Dich hierher berufe, mit Machtvollkommenheit zum Examinator ernenne; aus eigner Machtvollkommenheit würdest Du von selbst bei der Universität sowie in allen literarischen Beziehungen das belebende Centrum werden, was für mich, D., und überhaupt für Alles, was mathematisch lebt und kreucht, von größter Wichtigkeit würde, und zwar sei der Plan dadurch möglich zu machen, daß Pl. nach Bonn und O. nach Halle versetzt werde. Ja, ja, es wäre gut, aber es geht nicht, kein Geld, kein Geld! . . . . Das genannte Schriftchen (die Elemente der Isoperimetrie) ist nämlich nur ein Theil von einem Chaos über Maximum und Minimum, worin ich im Winter 1834/35 wühlte. Durch einige erfolgreiche Kniffe angespornt, wollte ich diesen Gegenstand für die Geometrie elementarisch behandeln, die Differentialrechnung mit Schand' und Spott aus diesem Reiche hinaustreiben, weil sie in den meisten Fällen reine Spiegelfechtereie ist, dagegen aber das  $\infty$  Kleine, wie es zu Anfang und vor jener im Gebrauch war, wieder zu hohen Ehren bringen. Ich gewann viele schöne neue Resultate, aber auch anscheinend falsche, blieb an vielen Stellen stecken, kein rex, der helfen konnte oder aus nobler Ambition helfen mußte. Ich war lange im Begriff, Dir einige von diesen Schwierigkeiten zur Entscheidung vorzulegen und würde es noch thun, wenn mich nicht der Gedanke an Dein ältliches Volumen abschreckte; nur der 16jährige Jüngling war omnipotent. . . . In Rücksicht Deiner sehr verdienstlichen sphärischen Leistungen folgendes: was den Alten schwer gewesen, nennt Heuristes Kinderspiel; hätt' er etwas mehr gelesen, so erfänd er nicht so viel."

Mit dem Winter 1835/36, der Jacobis Kräfte aufs äußerste angespannt hatte, hörte für längere Zeit die Beschäftigung mit der Theorie der elliptischen und Abelschen Transzendenten auf — er hatte die ganze Spannkraft seines Geistes nötig, um endlich mit seinen weittragenden Entdeckungen in der Mechanik, der Variationsrechnung

und der Theorie der Differentialgleichungen, wenn auch zunächst nur noch in Andeutungen, in die Öffentlichkeit zu treten.

„Sollte man wohl“, schreibt er am 24. Juni 1836 an Bessel, „bei einer so gemeinen Sache, wie die Bewegung eines Punktes in einer Ebene, noch Neues bemerken können? Und doch glaube ich, daß das Folgende neu und merkwürdig ist. Es seien  $\frac{dx}{dt} = x'$ ,  $\frac{dy}{dt} = y'$  und habe man außer der lebendigen Kraft noch ein Integral gefunden  $\varphi(x, y, x', y') = a$ , worin  $t$  nicht explicite vorkommt, so daß man  $x', y'$  in  $x, y, h, a$  ausdrücken kann, so ist der Ausdruck  $x'dx + y'dy$  immer ein genaues Differential, also auch seine Differentiale nach  $h$  und  $a$  genommen, und von den beiden Gleichungen

$$b = \int \left( \frac{\partial x'}{\partial a} dx + \frac{\partial y'}{\partial a} dy \right), \quad t + \tau = \int \left( \frac{\partial x'}{\partial h} dx + \frac{\partial y'}{\partial h} dy \right)$$

giebt die erste die gesuchte Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ , die zweite den Ausdruck der Zeit in  $x, y$  . . . . Vorstehendes soll eigentlich eine captatio benevolentiae, eine Einladungsschrift oder dergl. sein, nämlich die Anfrage einleiten, ob Sie vielleicht die Gewissensbisse meiner Frau, daß sie Ihnen auf einige Stunden Ihren schönen Besuch entzieht, durch die Großthat lindern wollen, Ihren Thee heute unter den Damen zu nehmen. Wie oft hat dies Humboldt in dreien Welttheilen gethan, thun Sie es einmal in einem."

Unmittelbar darauf richtet er ein Schreiben an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin, von dem ein Auszug unter dem Titel „Über ein neues Integral für den Fall der drei Körper, wenn die Bahn des störenden Planeten kreisförmig angenommen und die Masse des gestörten vernachlässigt wird“, im Juli 1836 in deren Monatsberichten erschien, und sendet zugleich an die Pariser Akademie eine Zusage „Sur le mouvement d'un point et sur un

cas particulier du problème des trois corps“, die mit den Worten beginnt: „Parmi les vérités nouvelles dont les mathématiques se sont enrichies de temps en temps, il y en a auxquelles on n'a pu parvenir qu'en surmontant de grandes difficultés, et dont la découverte paraît être réservée aux esprits supérieurs, qui président au développement de la science. Il y en a d'autres dont la découverte n'a pas le mérite des difficultés vaincues, mais qui étant à la portée de tout le monde dès qu'elles ont été une fois trouvées, se sont soustraites pendant long-temps aux soins des savants, je ne sais par quel accident, peut-être même à cause de leur facilité.“ In diesen Mitteilungen wird zunächst der Bessel bereits brieflich übermittelte Satz kurz angeführt, dann aber noch die Bemerkung hinzugefügt, daß für die Bewegung eines Punktes mit zu vernachlässigender Masse, der sich um die Sonne bewegt und durch einen Planeten gestört wird, dessen Bahn ein Kreis ist, vorausgesetzt daß die Planetenbahn die  $xy$  Ebene, die Sonne Koordinatenanfang,  $a_1$  die Distanz des störenden Planeten von der Sonne,  $n'$  seine Anomalie,  $m'$  seine Masse,  $M$  die Masse der Sonne ist, die streng richtige Gleichung gilt

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} - n' \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + m' \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1(x \cos n't + y \sin n't) + a_1^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x \cos n't + y \sin n't}{a_1^2} \right\} + \text{const.}$$

„C'est donc une nouvelle équation intégrale, qui dans le problème des trois corps subsistera entre les termes indépendants de l'excentricité de la planète troublante, et qui est rigoureuse pour toutes les puissances de la masse de cette dernière.“

Auch seine im Sommer 1836 gehaltene Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen, die ihm wieder zu mannigfachen geometrischen Arbeiten Veranlassung gab, und

von der wir eine Ausarbeitung von Rosenhain besitzen, legt diesmal besonderes Gewicht auf diejenigen Teile dieser Theorie, welche mit der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Er schickt seiner Gewohnheit gemäß der Vorlesung zunächst wieder eine längere Einleitung historischen Inhalts voraus, in der er die Arbeiten von Monge, Dupin und Gauss kurz charakterisiert, um dann sogleich mit Zugrundelegung der Lagrangeschen Anschauungen die Theorie der Berührung beliebiger Ordnung der Kurven untereinander sowie mit Oberflächen und der Oberflächen untereinander zu entwickeln. Bei der Erläuterung des Begriffs der Grenze hebt er hervor, daß derselbe „eine der tiefsten Konzeptionen der Griechen“ sei; „wir finden ihn vollständig ausgearbeitet in Archimedes' Schriften, der den Inhalt der Kugeloberfläche und die Quadratur der Parabel gefunden hat und daher die ersten Anwendungen der Integralrechnung macht. Es ist der Sache gemäß, daß diese früher als die Differentialrechnung angewendet wurde, denn der Begriff eines bestimmten Integrales ist elementarer als der eines Differentials . . . .“ Auf die Lagrangeschen Anschauungen vom Grenzbegriff stützt er die Entwicklung von der Rektifikation der Kurven doppelter Krümmung und der Quadratur der Oberflächen und geht bei dieser Gelegenheit auf seine Theorie der Transformation der Doppelintegrale näher ein; er behandelt als Beispiel ausführlich die Oberflächenbestimmung des Ellipsoids nach Legendres und der von ihm selbst so bedeutend vereinfachten Methode mit genauer Diskussion der hier in Anwendung kommenden elliptischen Integrale, verläßt aber nun die allgemeinen Betrachtungen, welche die Methode der Grenzen zur Basis hatten, und geht zu denjenigen Untersuchungen über, welche die geometrische Anschauung zu Hilfe nehmen, „denn die Geometrie hat auch für den Analytischen den Vorteil, daß sie die vollkommenste Symbolik darbietet“. Von den Tangenten

196 Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg.

und Normalen der Kurven, den Tangential- und Normal-ebenen der Flächen gelangt er zur Behandlung der Eigenschaften des Kegels, Zylinders und der Umdrehungsflächen, entwickelt deren partielle Differentialgleichungen und erläutert die Mongesche Charakteristikentheorie. Er erörtert sodann eingehend die Integrationsmethode von Lagrange für die linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und dessen Methode zur Integration aller partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen und leitet so die Vorlesung in eine solche über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen überhaupt über. „Die Ausdehnung auf jede Zahl von Variablen hat zuerst Pfaff gefunden in einer meisterhaften Abhandlung ... Indes ließ die Abhandlung von Pfaff noch viel zu wünschen übrig. Nun hat der Professor Hamilton, der Direktor der Dubliner Sternwarte, in einer überaus merkwürdigen Abhandlung die Integration der Differentialgleichungen der Dynamik zurückgeführt auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung. Dieses erscheint gewissermaßen als keine Erleichterung, da die Integration derselben schwieriger ist. Wenn man aber seine Analysis genau betrachtet und verallgemeinert, so findet man darin umgekehrt alles, was sich noch für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen  $n$  Variablen wünschen ließ.“ Nunmehr entwickelt er seine später veröffentlichten Integrationsmethoden im Zusammenhange mit der Lagrangeschen und Pfaffschen sowie die Übertragung der Methode von Hamilton von den dynamischen Gleichungen auf alle partiellen Differentialgleichungen. Nachdem er dann zur Untersuchung der Eigenschaften der Kurven doppelter Krümmung zurückgekehrt und auch hier wieder den Satz bewiesen, daß nur für eine ebene Kurve die Linie ihrer Krümmungsmittelpunkte von den Krümmungshalbmessern berührt wird, also ihre Evolute ist, wendet er sich zur *curvatura integra* von

Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg. 197

Gauss und zu dessen merkwürdigem Satze von der *curvatura integra* eines von drei geodätischen Linien gebildeten Dreiecks; er trägt ausführlich den Beweis dieses Satzes sowie der von ihm gefundenen Verallgemeinerung vor, die er zu gleicher Zeit zum Gegenstande einer gleich nachher zu erwähnenden Arbeit für das Crellesche Journal macht, und entwickelt in der Vorlesung weiter eine ausführliche Theorie der kürzesten Linien. Es folgt die Behandlung der einzelnen Flächenfamilien; er unterwirft vor allem die abwickelbaren Flächen einer genaueren Diskussion, untersucht die unendlich vielen Evoluten einer Kurve doppelter Krümmung und schließt endlich mit einer Theorie der Krümmungslinien einer Fläche, in der er auf die Sätze von Monge sowie auf die Beweise der früher von ihm im Crelleschen Journal nur in ihren Resultaten mitgeteilten Theoreme für die Krümmungslinien der Oberflächen 2. Ordnung näher eingeht.

Die obenerwähnte Arbeit, zu welcher er durch seine Vorlesung veranlaßt wurde, und welche das Datum vom 27. Juli 1836 trägt, ist betitelt „*Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati.*“ Indem Jacobi jede Kurve im Raume als kürzeste Linie irgend einer Fläche ansieht, spricht er zunächst den Gauss'schen Satz in der Form aus, daß, wenn ein Dreieck im Raume von drei beliebigen Kurven gebildet wird, welche zu je zweien in dem Winkel, in welchem sie zusammenstoßen, dieselbe Richtung des Krümmungsradius haben, und man in der Einheitskugel parallele Radien zu den Krümmungsradien dieser Kurven zieht, dann der Inhalt des Dreiecks auf der Kugel gleich dem Exzeß der drei Winkel über zwei Rechte ist. Als neues, auf eben dieser Anschauung fußendes Theorem und zugleich als Quelle des Gauss'schen bezeichnet er den Satz, daß, wenn man vom Mittelpunkt der Einheitskugel parallele Radien zieht, welche senkrecht stehen auf den

198 Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg.

Krümmungsebenen einer Kurve  $\alpha\beta$ , die Länge  $ab$  der auf der Kugel verzeichneten Kurve gleich sein wird der Differenz der Winkel, welche an den Endpunkten der vorgelegten Kurve  $\alpha\beta$  die Ebene der Krümmungsradien mit der Krümmungsebene bildet, wobei er unter der Ebene der Krümmungsradien einer Kurve die Ebene versteht, welche zwei unendlich nahe aufeinander folgenden Krümmungsradien parallel ist. Einige Jahre später knüpften sich, wie wir sehen werden, lange und bisweilen unerquickliche Diskussionen an diesen Satz.

Schon am folgenden Tage, am 28. Juli, berichtet er in der „Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur“ einen von Lagrange begangenen Irrtum geometrischer Natur, auf den er ebenfalls im Laufe seiner Vorlesung geführt worden, indem er zeigt, daß auf einer gegebenen Fläche eine Krümmungslinie nicht zugleich kürzeste Linie sein kann, wenn sie nicht eine ebene Kurve ist.

In den Herbstferien ging er nun ernstlich an die ausführliche Bearbeitung seiner in den letzten Jahren angestellten so umfangreichen Untersuchungen über Variationsrechnung, Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen, und schreibt darüber am 17. September 1836 seinem Bruder Moritz, der bis zum Jahre 1835 als Baumeister in Königsberg gelebt, dann als Professor der Zivilbaukunst nach Dorpat berufen war: „... Um Dir zunächst von meinem und dann Deiner Freunde Ergehen zu berichten, so hatte ich, wie Du weißt, eine Anzeige von zwei Abhandlungen Hamiltons für das Dove-Moser'sche Repertorium übernommen. Dieses führte mich sehr tief in das Studium der wichtigsten mechanischen Theorien, wodurch ein ungeheures Manuscript answoll, an dessen Beendigung ich aber durch anhaltendes Kopfweh verhindert wurde... Ich gerieth auf einige sehr abstrakte Ideen über die Behandlung der Differentialgleichungen, welche in den Problemen der Mechanik

Jacobi als ordentl. Professor an der Universität zu Königsberg. 199

vorkommen, indem diese Differentialgleichungen durch ihre besondere Form Erleichterungen für die Integration zulassen, welche man noch nicht bemerkt hatte. Diese Betrachtungen werden desto wichtiger, wie ich glaube, werden, weil sie sich zugleich auf die Differentialgleichungen ausdehnen, welche bei den isoperimetrischen Problemen und der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorkommen.“

Für den Winter hatte Jacobi, um Zeit für die Ausarbeitung dieser Untersuchungen zu gewinnen, nur eine Vorlesung, und zwar über Zahlentheorie angekündigt; die Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, in denen er das Problem der konformen Abbildung des Ellipsoids zu behandeln anfang, wurden von ihm und Neumann noch im Laufe des Semesters suspendiert, weil dasselbe „allein von allen Seminararien“, wie die Direktoren der Behörde berichteten, „aller Fonds entbehrte“, und dadurch eine ge-  
deihliche Tätigkeit in demselben bedeutend erschwert war. Von der zahlentheoretischen Vorlesung besitzen wir eine eingehende und gewissenhafte, wenn auch bisweilen nicht ganz klare Nachschrift von Rosenhain, der noch im Laufe des Winters ebenso wie Hesse durch eine Seminarprämie ausgezeichnet wurde. Wieder leitet Jacobi auch diese Vorlesung mit einer ausführlichen, bis in die Zeit der Griechen zurückreichenden, sehr interessanten historischen Betrachtung ein, und, zur Entwicklung der modernen Zahlentheorie gelangend, hebt er hervor: „Wir müssen, um Fermats Sätze zu beweisen, Hilfsmittel anwenden, welche er nicht kannte, und es ist daher anzunehmen, daß er sehr einfache Methoden gehabt hat, welche wir noch nicht haben wieder auffinden können, wie es überhaupt in dieser Theorie nichts Ungewöhnliches ist, daß man einen Beweis, der mehrere Seiten umfaßt, nachdem man ihn gefunden, auf ebenso viele Zeilen abkürzen kann.“ Er schließt sich zunächst dem Gange der ersten Sectionen der Disquisitiones arith-



meticae von Gauss an und geht dann zur Untersuchung der höheren Kongruenzen über; „die meisten dieser zahlen-theoretischen Betrachtungen lassen sich auch auf algebraische Untersuchungen ausdehnen, wenn man statt der ganzen Zahlen ganze rationale Funktionen einer Variablen setzt ... Eine der wichtigsten Untersuchungen dieser Art hat Abel über die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch mitgeteilt; er gibt dort eine sichere und bestimmte Regel, durch die man erkennt, wenn  $\int \frac{A dx}{\sqrt{X}}$ , wo  $A$  und  $X$

ganze rationale Funktionen von  $x$  sind, sich endlich finden läßt, und diese Regel gründet sich ganz auf die Entwicklung von  $\sqrt{X}$  in einen Kettenbruch. Diese Entwicklung gibt auch über die Transzendenten die interessantesten Aufschlüsse; so habe ich für die elliptischen Transzendenten gezeigt, daß sich der Kettenbruch aufs einfachste durch die Multiplikation der elliptischen Funktionen darstellen läßt. Ich will daher die Methoden der Algebra und Arithmetik soviel als möglich einander zu nähern suchen.“ Bei Gelegenheit des Beweises des Wilsonschen Satzes hebt er hervor, daß, wenn  $p$  eine Primzahl von der Form  $4n - 1$  ist, man immer eine feste Zahl  $t$  angeben kann, nämlich  $t = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}$ , welche durch  $p$  dividiert den Rest  $+1$  oder  $-1$  läßt. „Es ist nun hier die Aufgabe, anzugeben, wann  $t$  den Rest  $+1$  und wann es den Rest  $-1$  läßt. Diese Aufgabe gehört zu den schwierigsten der höheren Arithmetik; sie wurde im Crelleschen Journal mehr zum Scherz, um zu zeigen, daß man unauflösliche Aufgaben geben könne, als im Ernst zur Auflösung vorgelegt; dennoch gelang es mir, eine ziemlich einfache Regel dafür aufzufinden, und ich habe sie in einer Abhandlung, *Observatio arithmetica etc.*, jedoch ohne Beweis mitgeteilt.“ Er schließt nunmehr an den Wilsonschen Satz die Bemerkung: „Für jede Primzahl  $4n + 1 = p$  läßt  $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2})^2$  den Rest  $-1$ , daher ist für den

Modul  $4n + 1 \pm \sqrt{-1}$  eine reelle Zahl, nämlich  $\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}$  oder dem Rest, den diese Zahl durch  $p$  dividiert läßt. Später werden wir sehen, daß, wenn  $p$  die Form  $4n + 3$  hat, es keine Zahl gibt, deren Quadrat durch  $p$  dividiert den Rest  $-1$  läßt. In bezug auf einen solchen Modul ist also  $\sqrt{-1}$  auch imaginär; allein es gilt hier nicht das, was in der Analysis von solcher Wichtigkeit ist. In der Analysis lassen sich alle Gleichungen, welche etwas Unmögliches enthalten, auf die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  zurückführen. In der Zahlentheorie dagegen gibt es keine solche einzige imaginäre Form, sondern es gibt deren unendlich viele. Gauss hat einen Anfang gemacht, diese imaginären Formen in die Zahlentheorie einzuführen, in seiner letzten Abhandlung über die biquadratischen Reste, indem er Moduln von der Form  $a + b\sqrt{-1}$  einführt. Dies ist aber nur eine spezielle Form der allgemeinen Formen, die man in die Zahlentheorie einführen muß, diese ist nämlich  $a + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}$ , wenn  $r$  eine  $n^{\text{te}}$  Wurzel der Einheit ist.“ Nach einigen allgemeinen Untersuchungen über Potenzreste und historischen Bemerkungen über die Theorie der quadratischen Reste geht Jacobi zur Theorie der Kreisteilung über und entwickelt zunächst die von Gauss aufgestellten Theoreme. „Zu den Methoden, welche ich Ihnen hier mitteilen will, hat Gauss in seinen *Disquisitiones arithmeticae* nur die ersten Grundzüge gegeben, und auch in seinen späteren Untersuchungen nicht gesagt, daß er sie vervollkommenet habe. Gleichwohl ist seine Methode der Vervollkommenung im höchsten Grade fähig, und man wird durch sie auf neue Wege geführt, die Zahlentheorie zu erweitern. Auch bieten die neuesten Werke von Gauss Resultate, zu denen man auf diesem Wege gelangen kann; und da Gauss seine Resultate und Beweise gewöhnlich ohne sichtbaren inneren Zusammenhang, ganz starr und gefroren, als Rätsel aufstellt, so daß man sie erst auftauen muß, so sind wir bei