schon in Berlin Crelle mitgetheilt, hatte ich in Potsdam eine deutsche Anzeige gemacht, nicht ohne Tiraden, die am Ende des 8. Bandes im Journal steht. Ich habe auch seitdem schon eine sehr liebenswürdige Antwort vom alten Legendre erhalten, die mir zeigte, daß mein Schweigen von $1\frac{1}{2}$ Jahren ihn nicht, wie ich fürchtete, gekränkt hat; zugleich schickte er mir wieder eine kleine Schrift über die Parallelentheorie."

Jacobi als ordentlicher Professor an der Universität zu Königsberg vom Juli 1832—Michaelis 1844.

Unmittelbar nach seiner Disputation sandte er am 12. Juli seine so berühmt gewordene Arbeit „Considerationes generales de transcendentibus Abelianis" an Crelle, in der für die Theorie der Abelschen Funktionen die Grundlage im Abelschen Theorem geschaffen und die Wege für deren spätere Entwicklung vorgezeichnet wurden. „Theoremati antecedenti ut monumento pulcherrimo ingenii admirabilis morte praematura obrepti theorematis Abeliani nomen imponere placet. Ipsas etiam transcendentes $\Pi(x)$ casibus, quibus X ultra ordinem quartum ascendit, transcendentes Abelianas vocare lubet, ut quas ante illum nemo consideraverat. Cl. Abel commentationem de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum jam a. 1826 Academiae Parisiensi exhibuit, quam Illustris Academia commentationibus eruditonem alienorum inserendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde optandum esset, ut Illustri Academiae inter ipsas ejus commentationes eam exhibere placeat, vel si forte usus vetat, ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodammodo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae juvenis eximii, cui ipsos honores Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod, dum Parisiis agebam, a Cl. Fourier precibus meis concessum, utinam, mortuo viro excellentissimo, illustris ejus successor ratum facere velit.

Schon vor längerer Zeit hatte Jacobi gefunden und in seinen Vorlesungen es ausgesprochen, daß die Umkehrungsfunktion eines hyperelliptischen Integrals eine unendlich kleine Periode besitzen würde und sie gesprächsweise deshalb keine „vernünftige Funktion" genannt. Lange hatte er vergeblich über ein naturgemäßes Prinzip zur Umkehrung der Integrale algebraischer Funktionen nachgesonnen, bis ihm schon im vorigen Sommer „in hac quasi desperatione" das Abelsche Theorem den richtigen Weg wies. „Jam rogo, et quaenam sint casu generaliori functiones illae, quarum inversae sunt transcendentes Abelianae, et quomodo de hisce exhibitum audiat theorema Abelianum." Um die wahre Natur des Abelschen Theorems und seine Bedeutung für die Frage der Umkehrung deutlich hervortreten zu lassen, spricht er es für hyperelliptische Integrale in der Form aus, daß, wenn X ein Polynom 5. oder 6. Grades bedeutet, und man $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \varphi(x)$, $\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \varphi_1(x)$ setzt, a und b so aus x, y, z algebraisch zusammengesetzt werden können, daß $\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi_1(x) + \varphi_1(y) + \varphi_1(z) = \varphi_1(a) + \varphi_1(b)$ ist; setzt man nun $\varphi(x) + \varphi(y) = u$, $\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = v$, $x = \lambda(u, v)$, $y = \lambda_1(u, v)$, so folgt, daß $\lambda(u + u', v + v')$, $\lambda_1(u + u', v + v')$ sich algebraisch durch $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\lambda(u', v')$, $\lambda_1(u', v')$ ausdrücken lassen, und ebenso leicht ergibt sich, daß für hyperelliptische Differentiale die beiden linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variabeln $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = 0$ zwei vollständige algebraische Integrale haben. Ganz ähnlich lauten die entsprechenden Theoreme für hyperelliptische Integrale beliebiger Ordnung.

Aber auch frühere zahlentheoretische Untersuchungen hatte er nun wieder aufgenommen, und ohne noch Beweise für die gewonnenen Resultate liefern zu können, sandte er schon einen Tag später, am 13. Juli, eine Arbeit nach Berlin, welche betitelt war: „Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formae $y^2 + Az^2$, designante A numerum primum formae $4n + 3$". Auf Grund der Gaussschen Sätze über die Pellsche Gleichung und der von diesem entwickelten Theorie der reduzierten Formen führt Jacobi mit Hilfe eines Satzes, den er früher aus der Kreisteilung hergeleitet, die Frage nach den Divisoren der in der Form $y^2 + Az^2$ enthaltenen Zahlen auf die Bestimmung der Klassenanzahl für negative Determinanten zurück und spricht ohne weitere Begründung für eine Primzahl A von der Form $4n + 3$ das Gesetz aus, daß die zu derselben gehörige Klassenzahl N, wenn P die Summe der in den kleinsten positiven Zahlen ausgedrückten quadratischen Reste von A, Q die Summe der Nichtreste ist, durch die Formel bestimmt ist $2N - 1 = \frac{Q - P}{A}$, und entwickelt daraus die Lösung eines von Dirichlet vorgelegten Problems in der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{A-1}{2} \equiv (-1)^N \bmod A$.

„Schon oben", sagt Dirichlet, „ist von Jacobis Untersuchungen über die Kreisteilung und die Anwendungen derselben auf die höhere Mathematik, als zu seinen frühesten Arbeiten gehörend, die Rede gewesen. Bei diesen Untersuchungen, denen er die Form zugrunde legte, welche die zuerst von Gauss gegebene Auflösung der zweigliedrigen Gleichungen später durch Lagrange erhalten hatte, traf er in einigen Resultaten mit dem großen Mathematiker Cauchy zusammen, der zu derselben Zeit mit ähnlichen Forschungen beschäftigt war und dieses Umstandes erwähnte, als er während Jacobis ersten Aufenthaltes in Paris seine Arbeiten im Auszuge veröffentlichte. Aus einem schönen, aus der Kreisteilung abgeleiteten Satze, auf den auch Cauchy gekommen war, und nach welchem alle Primzahlen, die bei der Division durch eine gegebene Primzahl oder das Vierfache derselben die Einheit zum Reste lassen, auf eine bestimmte Potenz erhoben, deren Exponent bloß von der letzteren Primzahl abhängt, durch die sogenannte quadratische Hauptform dargestellt werden, welche die negativ genommene gegebene Primzahl zur Determinante hat, schöpfte Jacobi die Vermutung, daß jener Exponent mit der Anzahl der voneinander verschiedenen quadratischen Formen übereinstimmen müsse, welche der erwähnten Determinante entsprechen. Da sich diese Vermutung in allen numerischen Beispielen bestätigte, so trug er kein Bedenken, diese Bemerkung in einer kurzen Notiz zu veröffentlichen. Ich glaube den bisher unbekannt gebliebenen Ursprung dieses Resultates nach Jacobis mündlicher Mitteilung als ein merkwürdiges Beispiel scharfsinniger Induktion hier erwähnen zu müssen, obgleich der strenge Beweis desselben nicht auf die Kreisteilung gegründet werden zu können, sondern wesentlich verschiedene, der Integralrechnung und der Reihenlehre entnommene Prinzipien zu erfordern scheint, die erst später in die Wissenschaft eingeführt worden sind",

und über dieselbe kurze Note Jacobis spricht sich später Kummer in seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet in den Worten aus:

„Eine der bedeutendsten und glänzendsten Entdeckungen Dirichlets ist die Bestimmung der Klassenanzahl der quadratischen Formen für eine jede gegebene Determinante. Obgleich der Ruhm dieser großen Entdeckung Dirichlet allein gehört, insofern er sie vollständig aus seinem eignen Geiste geschöpft hat, so kann doch ein gewisser Anteil, welchen Jacobi und Gauss daran haben, nicht unerwähnt gelassen werden. Jacobi hatte aus der Vergleichung gewisser Sätze der Kreisteilung und der Zusammensetzung der quadratischen Formen die Klassenanzahl für diejenigen Formen, deren Determinante eine negative Primzahl ist, schon einige Jahre früher mehr erraten als erschlossen, und da eine Reihe berechneter Zahlenbeispiele seine Vermutung

bestätigten, so hatte er sie auch veröffentlicht. Gauss aber war, wie die von ihm hinterlassenen Papiere gezeigt haben, schon seit längerer Zeit im Besitze des vollständigen Ausdrucks der Klassenanzahl für negative Determinanten."

Die Herbstferien verbrachte Jacobi in angestrengtester Arbeit in der Nähe von Königsberg, und war, zum Teil durch Bessel veranlaßt, bemüht, die Anwendbarkeit und Bedeutung seiner elliptischen Transzendenten für die Geometrie und Mechanik durch die Behandlung spezieller Probleme nachzuweisen. Sogleich mit Beginn des Wintersemesters, für welches er die Fortsetzung der allgemeinen Theorie der Oberflächen und eine Vorlesung über elliptische Transzendenten angekündigt, schickte er am 1. November 1832 die „De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia" betitelte Arbeit an Crelle. Es handelt sich in dieser Arbeit vorzüglich um Anwendungen der Transformationen:

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

nachdem zunächst gezeigt worden, daß, wenn $m\cos\varphi$, $n\sin\varphi\cos\psi$, $p\sin\varphi\sin\psi$ durch beliebige Funktionen u, v, w der Variabeln φ und ψ ersetzt werden, für die entsprechenden Substitutionen das Element der Kugelfläche die Form annimmt $dS = \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{d\varphi\, d\psi}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}$ mal der aus u, v, w und deren partielle Differentialquotienten nach φ und ψ gebildeten Determinante.

Wenn U eine paare rationale Funktion von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ bedeutet, so führt die obige Substitution das Doppelintegral

$$\iint \frac{U \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + p^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi}}$$

in

$$\frac{1}{m\,n\,p} \iint \frac{U \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{m^2} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{n^2} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{p^2}}$$

mit rationalem Argument und dem gleichen Charakter von U in $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ über, woraus leicht folgt, daß, wenn R außer den Quadraten von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ auch noch die Produkte je zweier enthält und U eine beliebige ganze Funktion derselben bedeutet, das über die ganze Kugel ausgedehnte Doppelintegral $\iint \frac{U \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{R^{\frac{2n+1}{2}}}$ entweder algebraisch oder durch elliptische Integrale ausdrückbar ist, und Beziehungen hergeleitet werden können, welche bekannten Cauchyschen Relationen für die Reduktion von Doppelintegralen auf einfache ihre Entstehung geben. Eine interessante Anwendung bildet die Bestimmung der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids $m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 = 1$ durch elliptische Integrale 1. und 2. Gattung in der Form

$$S = 2\pi\left(\frac{\sin^2 w\, E(w) + \cos^2 w\, F(w)}{n\,p \sin w} + \frac{1}{m^2}\right),$$

wenn $\cos w = \frac{p}{m}$, $\Delta(w) = \frac{n}{m}$, $\varkappa^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 - p^2}$ ist, welche bereits Legendre, aber nur durch Benutzung von damals sehr verborgenen Eigenschaften der elliptischen Integrale 3. Gattung gefunden hatte. Jacobi folgert ferner leicht aus den von ihm aufgestellten Transformationsformeln die von Legendre entdeckte Relation zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale 1. und 2. Gattung und leitet aus der elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung und leitet aus der curvatura integra eines von 4 Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids eingeschlossenen Rechtecks die Reduktion der Rektifikation der Krümmungslinien auf Abelsche Trans-

zendenten her. Es wird endlich noch das Problem behandelt, die Koeffizienten der linearen Substitutionen $u = g\,x + h\,y + i\,z$, $v = g'\,x + h'\,y + i'\,z$, $w = g''\,x + h''\,y + i''\,z$ und die Größen m, n, p zu finden, welche die beiden Ausdrücke $A = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2d\,y\,z + 2e\,z\,x + 2f\,x\,y$, $A' = a'\,x^2 + b'\,y^2 + c'\,z^2 + 2d'\,y\,z + 2e'\,z\,x + 2f'\,x\,y$ in die einfacheren Formen $A = u^2 + v^2 + w^2$, $A' = \frac{u^2}{m^2} + \frac{v^2}{n^2} + \frac{w^2}{p^2}$ transformieren, was, wie aus den Substitutionen $\sqrt{a}\cdot x = x'$,

$$\sqrt{b}\cdot y = y', \quad \sqrt{c}\cdot z = z', \quad \frac{d}{\sqrt{b\,c}} = \cos\lambda, \quad \frac{e}{\sqrt{c\,a}} = \cos\mu,$$

$\frac{f}{\sqrt{a\,b}} = \cos\nu$ ersichtlich ist, mit dem geometrischen Probleme zusammenfällt, die Hauptachsen eines Ellipsoids zu finden, dessen Gleichung $A' = 1$ ist, wenn x', y', z' die schiefen Koordinaten bedeuten, welche unter sich die Winkel λ, μ, ν bilden. Mit Hilfe der so gewonnenen Transformationsformeln werden wiederum Reduktionen von Doppelintegralen aufeinander, und für bestimmte Grenzen auf einfache Integrale ausgeführt, und das wichtige Theorem hergeleitet, daß, wenn $U = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\varphi\sin^2\psi + 2d \sin^2\varphi\cos\varphi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$ und ein analoger Ausdruck U', dessen Koeffizienten mit $a', b', \ldots$ bezeichnet werden, vorgelegt sind, und $(a + a'x)(b + b'x)(c + c'x) - (a + a'x)(d + d'x)^2 - (b + b'x)(e + e'x)^2 - (c + c'x)(f + f'x)^2 + 2(d + d'x)(e + e'x)(f + f'x) = X$ gesetzt wird,

$$\iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U'\sqrt{U}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

ist, wenn das Doppelintegral von $\varphi = 0, \psi = 0$ bis $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$ ausgedehnt wird.

Den Anwendungen von der Transformation der elliptischen Integrale auf Geometrie folgten immer wichtigere und schwierigere auf Mechanik und Astronomie; am 28. Dezember 1832 schreibt er seinem Bruder: „ich arbeite jetzt an einer großen Abhandlung über die Anziehung der Ellipsoide, worüber ich selbst nach den Arbeiten von Newton, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Legendre, Laplace, Ivory, Gauss, die darüber gehandelt, viel interessantes gefunden habe. Doch macht mir die Ausarbeitung eine ungeheure Mühe, denn es ist schwer, alles auf das beste zu machen, nachdem es gemacht ist, und erstes verlangt man ...“; er machte jedoch zunächst seine umfangreichen Untersuchungen über diesen Gegenstand nicht druckfertig und teilte nur die wesentlichsten Resultate derselben seinen Freunden Bessel, Dirichlet und Steiner mit. „Eine große Abhandlung“, sagt Dirichlet, „welche die Attraktion der Ellipsoide zum Gegenstande hat, obgleich seit langer Zeit beinah vollendet, ist bisher ungedruckt geblieben und nur durch einige gelegentliche Notizen bekannt geworden. Als er sich mit dem erwähnten Problem beschäftigte, kam er auch auf den schönen, von Poisson um dieselbe Zeit gefundenen Satz, nach welchem die Anziehung, welche eine unendlich dünne, von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Flächen begrenzte Schale auf einen Punkt im äußern Raume ausübt, ohne Integralzeichen dargestellt werden kann. Jacobi hat dieses Umstandes nie öffentlich Erwähnung getan, obgleich er sich dabei auf das Zeugnis mehrerer Mathematiker hätte berufen können, denen er den Satz mitgeteilt hatte, ehe die erste Anzeige der Poissonschen Abhandlung erschienen war.“

Neben der intensivsten produktiven Thätigkeit gestaltete sich Jacobis Wirksamkeit als Lehrer und Leiter des mathematischen Seminars immer erfolgreicher; im September 1832 wurde sein frühester und von ihm sehr geliebter Schüler, Richelot, welcher seit 1825 unter der Führung Jacobis studiert und 1831 sich habilitiert hatte, zum außerordentlichen Professor ernannt. „Mit meiner akademischen Wirksamkeit“, schreibt Jacobi seinem Bruder, „habe ich Grund sehr zufrieden zu sein; so habe ich neulich mit einer eignen

Abhandlung 3 meiner Schüler an Crelle geschickt und mehrere sehr ausgezeichnete sind noch zurück.“

Aber auch in der Fakultät stand er bei seinen Kollegen in hohem Ansehen, und sein Einfluß in derselben wurde immer größer; er freute sich, daß der durch seine Initiative von Bessel, Neumann und ihm gestellte Antrag, Jacob Steiner, damals Lehrer an der Gewerbeschule zu Berlin, die Doktorwürde honoris causà zu erteilen, trotz mancher Bedenken von der Fakultät einstimmig angenommen und so seinem alten Freunde eine wissenschaftliche Ehrung zuteil wurde, auf die derselbe, wie er wußte, einen großen Wert legte. „Durch Deinen Dr.“, schreibt ihm Steiner am 14. Juli 1833, „hast Du Dich unter den Einwohnern Berlins sehr populär gemacht; alle blicken über mich hinweg hinaus nach dem, der solches an mir gethan, des Erkundigens war kein Ende; daher schreibe ein Drittel meines Dankes auf Deine eigne Rechnung. Oder besteht die Größe und das Glück eines Menschen (titre de gloire) nicht in der Seelen- (oder Körper-) Zahl Anderer, welches veranlaßt an ihn zu denken? Der Prof. ist aber keine Folge des Dr., wie Du leicht glauben könntest, sondern beide wurden mir fast gleichzeitig verkündet. Der arme Jacob hat jetzt Mühe, sich und diese beiden mit seinen 700 Thalern anständig oder standesgemäß zu erhalten.“

Am Schluß des Wintersemesters 1832/33, in welchem ihm die Freude zuteil geworden, Mitglied der Royal Society in London und Ehrenmitglied der Académie des Sciences in Petersburg zu werden, sandte er noch am 27. März eine kurze Note an Crelle, betitelt „Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Prof. Scherk über die Integration der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x)y$“, in welcher das von Scherk gefundene allgemeine Integral auf die Form gebracht wird:

$$y = \int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} [Ce^{tx} + C_1 \varrho e^{\varrho tx} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 tx} + \cdots + C_n \varrho^n e^{\varrho^n tx}],$$

worin ϱ eine $n+1^{te}$ primitive Einheitswurzel und $C, C_1, \ldots C_n$ beliebige Konstanten bedeuten, welche der Bedingung $C + C_1 + \cdots + C_n = 0$ unterliegen, und nun widmete er die Osterferien fast ganz der Vorbereitung zu einer öffentlichen Vorlesung über Variationsrechnung, die er nebst einer privaten über die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung für das Sommersemester 1833 angekündigt hatte.

Von der letzteren besitzen wir unter dem Titel „Analytische Geometrie des Raumes" eine Nachschrift von Hesse, welche sich auf der Staatsbibliothek in München befindet: Nach Entwicklung einiger Fundamentalsätze der analytischen Geometrie und der Transformationsformeln der Koordinaten, welche sich Hesse wahrscheinlich zum besseren Verständnis des folgenden auf den ersten Blättern seines Kollegienheftes notiert hatte, findet sich darin zunächst wieder eine Aufzeichnung der von Jacobi gegebenen Einleitung, in welcher der Unterschied zwischen der synthetischen und analytischen Geometrie hervorgehoben, zugleich aber die Notwendigkeit der Verbindung beider Methoden für die weitere Entwicklung der Geometrie betont wird. „Von größtem Nutzen ist die analytische Geometrie, um Sätze der reinen Geometrie zu beweisen, während sie sich weniger dazu eignet, Sätze zu finden." Die Vorlesung behält zuerst einen ganz elementaren Charakter, entwickelt die analytischen Beziehungen der geraden Linie und der Ebene, und erläutert die einzelnen Sätze an einfachen Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes; vielfach finden sich schon hier Randbemerkungen des 22jährigen Hesse, welche ein wenig komplizierte Betrachtungen durch einfache und elegante Deduktionen ersetzen. Sehr ausführlich geht Jacobi auf die Transformation räumlicher Koordinatensysteme aufeinander ein und auf die Eulersche Darstellung der Koeffizienten der Transformationsformeln durch drei Größen; erst in der Mitte des Sommersemesters beginnt er die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung zu entwickeln, indem er die allgemeine Flächengleichung 2. Grades nach sehr einfachen, jetzt allgemein bekannten Methoden diskutiert, und behandelt die Eigenschaften der einzelnen Klassen der Oberflächen 2. Ordnung. Die ganze Vorlesung hat einen durchaus elementaren Charakter und war offenbar nur für Anfänger bestimmt, zeichnet sich aber — wenigstens in der vorliegenden Ausarbeitung von Hesse — durch Knappheit der Darstellung und Eleganz der Rechnung aus.

Erst in den Herbstferien kam er wieder dazu, einiges von dem, was ihn beschäftigte, druckfertig zu machen; nachdem er am 23. August die kurze Note niedergeschrieben: „Demonstratio formulae

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}dx} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\text{"},$$

in welcher er den jetzt üblichen Beweis dieser Relation mit Hilfe des Doppelintegrales gab, sandte er noch an demselben Tage die umfangreiche Arbeit „De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium" an das Crellesche Journal.

Cauchy hatte gezeigt, daß man eine homogene Funktion zweiten Grades in $x_1, x_2 \cdots x_n$ durch lineare Transformationen $y_m = \alpha_1^{(m)}x_1 + \alpha_2^{(m)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(m)}x_n$, für welche $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$, in eine homogene Funktion 2. Grades in $y_1, \cdots y_n$ verwandeln kann, welche nur die Quadrate der Variabeln enthält, und zwar stellten sich die n Koeffizienten der transformierten Funktion $G_1y_1^2 + G_2y_2^2 + \cdots + G_ny_n^2$ als die Lösungen einer Gleichung n. Grades mit n reellen Wurzeln dar, während die Quadrate und Produkte der Substitutionskoeffizienten $\alpha_1^{(m)}$,

$\alpha_2^{(m)}, \dots \alpha_n^{(m)}$ rational durch die eine Größe G_m ausdrückbar sind. Jacobi findet nun, daß, wenn in der vorgelegten homogenen Funktion der Koeffizient von $x_\varkappa x_\lambda$ mit p bezeichnet wird, die Substitutionskoeffizienten der Gleichung genügen $\alpha_\varkappa^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)} = \frac{\partial G_m}{\partial p}$. Er verallgemeinert aber dieses Problem noch dahin, daß er auch die Summe der Quadrate durch eine beliebige homogene Funktion 2. Grades ersetzt und zwei homogene Funktionen 2. Grades durch dieselben Substitutionen $x_m = \beta'_m y_1 + \beta''_m y_2 + \dots + \beta_m^{(n)} y_n$ in zwei andere transformiert, welche beide nur die Quadrate der Variabeln enthalten und also die Form haben sollen $G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \dots + G_n y_n^2$ und $H_1 y_1^2 + H_2 y_2^2 + \dots + H_n y_n^2$; es ergeben sich dann $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \dots \frac{G_n}{H_n}$ als die Wurzeln einer Gleichung n. Grades, und die entsprechenden Koeffizientenbeziehungen lauten

$$\beta_\varkappa^{(\lambda)} \beta_{\varkappa'}^{(\lambda)} = \frac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{H_\lambda \partial p} = \frac{G_\lambda \partial H_\lambda - H_\lambda \partial G_\lambda}{G_\lambda \partial q},$$

wenn in der einen der Koeffizient von $x_\varkappa x_{\varkappa'}$ mit p, in der andern mit q bezeichnet wird. Nach Spezialisierung dieser Sätze für bestimmte homogene Funktionen geht Jacobi zur Anwendung derselben auf die Transformation vielfacher Integrale über und findet, daß, wenn zwischen $n-1$ Variabeln $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ und $n-1$ anderen $v_1, v_2, \dots v_{n-1}$, deren Quadratsummen der Einheit gleich sind, die früher charakterisierten linear gebrochene Beziehungen mit gemeinsamen Nenner bestehen, für eine beliebig gegebene Funktion 2. Grades W von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ das Integral

$$\int^{(n-2)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_{n-2}}{\xi_{n-1} W^{\frac{n-2}{2}}}$$

in

$$\int^{(n-2)} \frac{dv_1\, dv_2 \dots dv_{n-2}}{v_{n-1}\left[G - G_1 v_1^2 - G_2 v_2^2 - \dots - G_{n-1} v_{n-1}^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}$$

übergeht. Den Beweis dieses Satzes stützt er auf 6 wichtige Theoreme seiner späteren Theorie der Funktionaldeterminanten, nach welchen für eine beliebige Abhängigkeit der ξ von den v unter der Annahme der Beziehung $F(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}) = 0$ die Differentialrelation

$$\frac{d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \frac{dv_1\, dv_2 \dots dv_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}}},$$

und für den Fall von zwei Gleichungen $F(\xi_1, \dots \xi_n) = 0$, $\Phi(\xi_1, \dots \xi_n) = 0$ die Beziehung

$$\frac{d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} - \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n-1}}}$$
$$= \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial v_n}\right) \frac{dv_1\, dv_2 \dots dv_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} - \frac{\partial F}{\partial v_n} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}}$$

besteht, und sich ferner unter der Annahme jener linearen Transformationen für die der Einheit gleiche Quadratsumme der Variabeln $\frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\xi_n} = \frac{dv_1 \dots dv_{n-1}}{v_n}$ ergibt; ähnliche drei Sätze folgen durch Substitution neuer Variabeln. Eine Reihe von Anwendungen dieser Transformationssätze der vielfachen Integrale zeigt auch ihre Bedeutung für die Auswertung derselben und liefert u. a. unter der Annahme $x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2 = 1$ die Beziehung

$$\int^{(n-1)} \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}}{x_n \left(\frac{x_1^2}{m_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{m_n^2}\right)}$$
$$= \frac{n-2}{2} S \cdot \int_0^\infty \frac{m_1 m_2 \dots m_n\, dx}{\sqrt{(x+m_1^2)(x+m_2^2) \dots (x+m_n^2)}},$$

worin $S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{2.3\ldots(n-2)}$ für gerade n, $S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{3.4\ldots(n-2)}$ für ungerade n, und das Integral über alle reellen Werte von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ auszudehnen ist.

Die Arbeiten und Vorlesungen Jacobis erstrecken sich nunmehr über immer zahlreichere Gebiete der Mathematik und dehnen sich allmählich auf den ganzen Bereich derselben und deren Anwendung auf Geometrie, Mechanik und Astronomie aus. Für den Winter 1833/34 hatte er zum erstenmal eine große Vorlesung über die Theorie der Zahlen angekündigt, es wurden ferner zahlreiche, zuerst freilich nur von wenigen Mitgliedern besuchte, seminaristische Übungen angestellt, und Jacobi außerdem durch Amtsgeschäfte als Mitglied der wissenschaftlichen Prüfungskommission vielfach in Anspruch genommen, nachdem auf seinen ausdrücklichen Wunsch, mit Bessel in diesem Amte abzuwechseln, das Ministerium ihm diese Frage zur eignen Regelung mit diesem überlassen hatte.

Abgesehen von gelegentlichen Bemerkungen, zu denen ihm seine Vorlesungen Anlaß gaben, und von Ausführungen und Ergänzungen seiner früheren Untersuchungen wendet er sich jetzt immer mehr seinen bahnbrechenden Arbeiten über Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen zu. „Hamiltons Formeln“, schreibt er im Januar 1834 an Bessel, „sind natürlich ganz richtig; nur sein Beweis ist nicht ganz vollständig, wie mir scheint, was mich ihn für unrichtig nehmen ließ. Doch vervollständigt er sich leicht. Da das Ganze nur eine Seite einnimmt, worauf es ankommt, sehen Sie es vielleicht einmal an. In demselben Bande hat Ivory bewiesen, wie er sagt, daß ein Ellipsoid mit 3 ungleichen Axen nicht im Gleichgewicht sein kann. Es wird ihn also das Gegenteil interessieren.“

Eine Frucht seiner Vorlesung über Zahlentheorie ist die am 14. Februar 1834 an Crelle gesandte kurze Note „De compositione numerorum e quattuor quadratis“, in welcher er zunächst aus den Formeln der Fundamenta leicht den Satz herleitet, daß, wenn n eine ungerade positive Zahl ist, die Anzahl der Lösungen der Gleichung $4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$, worin w, x, y, z ungerade positive Zahlen sind, der Summe der Faktoren von n gleich ist. Jacobi liefert aber hier auch einen rein arithmetischen Beweis dieses Satzes, indem er sich auf den Hilfssatz stützt, daß, wenn alle in einer ungeraden Zahl n enthaltenen Primzahlen von der Form $4m+1$ sind, die Zahl der Lösungen der Gleichung $2n = y^2 + z^2$ gleich ist der Anzahl der Faktoren von n; indem er nun zunächst hieraus den Satz ableitet, daß für eine beliebige unpaare Zahl p die Anzahl der Lösungen der Gleichung $2p = y^2 + z^2$ dieselbe ist als der Überschuß der Anzahl der Faktoren von p von der Form $4m+1$ über die Anzahl der Faktoren von der Form $4m+3$, folgert er unmittelbar das aufgestellte Theorem. „Eine andere höchst ergiebige Quelle für die Arithmetik“, sagt Dirichlet, „hat Jacobi in der Theorie der elliptischen Funktionen entdeckt, aus welcher er schöne Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate, sowie andere über solche Zahlen abgeleitet hat, welche gleichzeitig in mehreren quadratischen Formen enthalten sind. Diese wichtigen Bereicherungen der Wissenschaft sind eine Frucht der oben erwähnten Einführung der Jacobischen Funktion in die Theorie der elliptischen Transzendenten.“

Noch von demselben Tage, dem 14. Februar, ist die fundamentale Arbeit datiert: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.“ Die schon vor längerer Zeit zum Zwecke der Ausdehnung der Transzendentenlehre in seinen Vorlesungen und Briefen ausgesprochenen Sätze werden hier näher begründet; er beweist, daß die Perioden einer doppeltperiodischen Funktion ein komplexes Verhältnis haben müssen, und daß es dreifach periodische Funktionen einer Variabel überhaupt nicht gibt. Nachdem er sodann für hyperelliptische Integrale erster Ordnung die Relationen für die zwischen den Lösungen des Polynoms genommenen Integrale erster Gattung untersucht, legt er den in seiner Arbeit vom 12. Juli 1832 gemachten Ansatz zugrunde:

$$\int_a^x \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha' + \beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha' + \beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} = u';$$

„considerari debent x, y ut radices aequationis quadraticae $Ux^2 - U'x + U'' = 0$, in quibus U, U', U'' sunt functiones ipsarum u, u'." Es kulminiert diese wunderbare Arbeit in dem Theorem: „Posito $X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$, statuatur

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = i_1\sqrt{-1},\; 2\int_0^1 = i_2,\; 2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} = i_3\sqrt{-1},\; 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} = i_4,$$

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} = i_1'\sqrt{-1},\; 2\int_0^1 = i_2',\; 2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} = i_3'\sqrt{-1},\; 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} = i_4';$$

considerentur x, y ut functiones ipsarum u, u', $x = \lambda(u, u')$, $y = \lambda'(u, u')$, datae per aequationes (supra designatas) . . ., erit

$$\lambda(u + mi_1 + m'i_2 + m''i_3 + m'''i_4,$$
$$u' + mi_1' + m'i_2' + m''i_3' + m'''i_4') = \lambda(u, u')$$
$$\lambda'(u + mi_1 + m'i_2 + m''i_3 + m'''i_4,$$
$$u' + mi_1' + m'i_2' + m''i_3' + m'''i_4') = \lambda'(u, u'),$$

quicunque sint m, m', m'', m''' numeri integri positivi aut negativi . . . . . E theoremate Abeliano constat, positis $x = \lambda(u, u')$, $y = \lambda'(u, u')$, functiones $x_n = \lambda(nu, nu')$, $y_n = \lambda'(nu, nu')$ datas esse ut radices aequationis quadraticae

$U_n x^2 - U_n' x + U_n'' = 0$, in qua U_n, U_n', U_n'' sunt functiones ipsarum x, y, $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$ rationales, si Y ipsius y eadem functio atque X ipsius x. Unde etiam patet, vice versa x, y e x_n, y_n per resolutionem aequationum algebraicarum obtineri. Quarum ordinem e theoremate fundamentali jam conjicis fore n^4. Quod pro $n = 2$ e theoremate Abeliano facile probas; atque idem adeo theorema facile suggerit resolutionem aequationis 16[ti] gradus, quae in bisectione requiritur, per solas extractiones radicum quadraticarum. Quod alia occasione persequemur."

Aus dieser Zeit stammt auch die aus seinen hinterlassenen Papieren von Richelot mitgeteilte Aufzeichnung „Über die Substitution $(ax^2 + 2bx + c)y^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')y + a''x^2 + 2b''x + c'' = 0$ und über die Reduktion der Abelschen Integrale erster Ordnung in die Normalform", für welche der zweite Teil des Titels von dem Herausgeber hinzugefügt worden ist. Durch Differentiation dieser Substitution folgt unmittelbar, wenn $X = (a'x^2 + 2b'x + c')^2 - (ax^2 + 2bx + c)(a''x^2 + 2b''x + c'')$ und $Y = (by^2 + 2b'y + b'')^2 - (ay^2 + 2a'y + a'')(cy^2 + 2c'y + c'')$ gesetzt wird, $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, und Jacobi untersucht nun mit Hilfe eben dieser Substitution die Transformation der Abelschen Integrale erster Ordnung und deren Zurückführung auf die Normalform; er findet, daß die Substitution

$$x = \frac{y-1}{\mu(y+1)},\quad y^2 = \frac{4(t^2 - t^4)}{(m+n)^2 - 4mnt^2} = \frac{4(t'^2 - t'^4)}{(m+n)^2 - 4mnt'^2},$$

wenn $X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$, $F(t) = (t^2 - \alpha^2)(\beta^2 - t^2)(\beta'^2 - t^2)(\alpha'^2 - t^2)$ gesetzt wird, die Transformationsgleichung liefert:

$$\int \frac{(f + gx)\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{(f' \mp g't^2)\,dt}{\sqrt{F(t)}} + \int \frac{(f' \mp g't'^2)\,dt'}{\sqrt{F(t')}},$$

worin sich f' und g' linear durch f und g bestimmen, und welche das Analogon darstellt für die Landensche Transformation der elliptischen Integrale auf die Normalform.

Die im Sommersemester 1833 gehaltene Vorlesung über die Oberflächen 2. Ordnung sowie geometrische seminaristische Übungen gaben ihm vielfach Anlaß, mit Steiner über Fragen geometrischer Natur in Korrespondenz zu treten, und es kam einer dieser Briefe Jacobis aus dem Sommer 1834 zur Veröffentlichung. Von den in diesem und in früheren Schreiben an Steiner ausgesprochenen und zum Teil in seinen Vorlesungen gegebenen Sätzen fanden sich die Beweise in seinen nachgelassenen Papieren vor und wurden unter dem Titel „Geometrische Theoreme" im Jahre 1871 von Hermes veröffentlicht. Als unmittelbare Folge des Theorems von Ivory, daß die Verbindungslinie beliebiger zwei in konfokalen Ellipsen oder Ellipsoiden liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Ellipsen oder Ellipsoiden konjugierten Punkte ist, leitet er u. a. den Satz her, daß, wenn man über zwei festen Basen gg' und ff' mit denselben Schenkeln $Qg = Pf$, $Qg' = Pf'$ Dreiecke beschreibt und die Spitze Q des einen Dreiecks eine beliebig gegebene gerade Linie durchlaufen läßt, die Spitze P des anderen Dreiecks einen Kegelschnitt beschreibt, und weiter das interessante Theorem, daß, wenn zwei den beliebig gegebenen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ umgeschriebene Kegelschnitte gleiche Exzentrizität haben, und in ihnen A und A', B und B', C und C' konjugierte Punkte sind, ihre Mittelpunkte O und O' sich als die Schwerpunkte von A, B, C und von A', B', C' darstellen, wenn man in diesen drei Punkten resp. die Gewichte $u(v+w-u)$, $v(w+u-v)$, $w(u+v-w)$ anbringt, worin $u = BC^2 - B'C'^2$, $v = CA^2 - C'A'^2$, $w = AB^2 - A'B'^2$ ist, und es wird zugleich die Differenz der Quadrate der halben großen oder der halben kleinen Achsen der Kegelschnitte gleich

$$\frac{uvw}{2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2}$$

gefunden — Folgerungen aus diesen Sätzen werden zu Kriterien für die Kegelschnitte verwendet. Jacobi geht sodann zur Ausdehnung aller dieser Theoreme auf die Flächen 2. Grades über und findet wiederum mit Hilfe des Ivoryschen Satzes, daß, wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, und in der Ebene ABC ein beliebiger Punkt Q gegeben sind, und man konstruiert über der Basis $A'B'C'$ mit den Kanten $A'P = AQ$, $B'P = BQ$, $C'P = CQ$ eine Pyramide, der Punkt P, wenn der Punkt Q sich in der Ebene des Dreiecks ABC fortbewegt, eine Fläche 2. Ordnung beschreibt, deren eine Hauptebene die Ebene der Basis $A'B'C'$ ist, und deren eine Fokalkurve dem Dreiecke $A'B'C'$ umgeschrieben ist; die Art der Fläche 2. Ordnung wird sodann bestimmt durch die Beziehung der Seiten der beiden Dreiecke zueinander. Aus dem Satze, daß, wenn ein Ellipsoid und ein einfaches Hyberboloid konfokal sind und man aus irgendeinem Punkte des Hyperboloids einen Berührungskegel an das Ellipsoid legt, die durch denselben Punkt gehenden zwei Strahlen des Hyperboloids die Brennlinien dieses Kegels sind, leitet er eine Reihe weiterer, zum Teil schon früher von Steiner aufgestellter Sätze wieder lediglich aus dem Ivoryschen Theorem her und schließt seinen Brief mit der interessanten Bemerkung, die später vielfach in anderer Form zum Vorschein kam, daß nämlich aus dem Ivoryschen Satze hervorgehe, daß die Kurve von doppelter Krümmung, in welcher zwei Flächen 2. Grades einander schneiden, auch räumliche Brennpunkte haben kann, und daß es also z. B. für jede Krümmungskurve des Ellipsoids zwei bestimmte feste Punkte gibt, die leicht zu konstruieren sind, von der Beschaffenheit, daß die Summe ihrer Distanzen von jedem Punkte der Kurve konstant ist, worauf sich eine leichte organische Erzeugung der Krümmungskurve gründen läßt.

Aus eben dieser Zeit stammt noch die, wahrscheinlich im Anschluß an eine im Seminar gestellte Aufgabe, gemachte Aufzeichnung, welche aus seinen hinterlassenen Papieren Hermes viel später unter dem Titel „Regel zur Bestimmung des Inhaltes der Sternpolygone" publizierte; wenn die Seiten eines Vielecks sich schneiden, so entsteht ein Sternpolygon, und da hierin mehrere geschlossene Räume vorkommen, so hört die gewöhnliche Entwicklung für den Inhalt ebener Figuren für solche Vielecke auf. Jacobi nennt nun den Inhalt des Sternpolygons den algebraischen Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \cdots + x_n y_1 - y_n x_1)$$

und fragt, da dieser Ausdruck nicht mehr der Summe der einzelnen durch das Polygon gebildeten Räume gleich ist, nach der geometrischen Bedeutung desselben; er ist imstande, eine geometrische Regel anzugeben, nach welcher der Inhalt des Sternpolygons jedesmal gefunden werden kann, vorausgesetzt, daß niemals durch einen Punkt mehr als zwei Seiten gehen.

Die im Sommer gehaltene Vorlesung über die analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit rief zwei kleinere Arbeiten hervor, von denen die erstere, datiert vom 2. Juni, den Titel hat: „De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae" und sich mit der Bestimmung des Restes einer unendlichen semikonvergenten Reihe durch bestimmte Integrale beschäftigt. Die von Maclaurin aufgestellte Beziehung, nach welcher, wenn $x - a$ ein Multiplum von h,

$$f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(x)$$

$$= \int_0^x dx \left\{ \frac{f(x)}{h} + \frac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \alpha_2 f''''(x) h^3 + \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-1} \right\}$$

ist, worin die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ durch die Entwicklung bestimmt sind $\frac{1}{2} + \frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + \alpha_1 h - \alpha_2 h^3 + \alpha_3 h^5 - \cdots$, berichtigt Jacobi dahin, daß der Summe auf der linken Seite der Posten

$$\int_0^h \left\{ \frac{(h-t)^{2m+2}}{h(2m+2)!} - \frac{1}{2} \frac{(h-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \alpha_1 \frac{(h-t)^{2m} h}{(2m)!} - \alpha_2 \frac{(h-t)^{2m-2} h^3}{(2m+2)!} \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m \frac{(h-t)^2 h^{2m-1}}{2!} \right\} \sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)\, dt$$

hinzugefügt werden muß, der auch noch in anderer Gestalt dargestellt werden kann. Als wesentlichstes Theorem folgert er hieraus, daß, so oft der Ausdruck $\sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$ für alle positiven Werte von t zwischen 0 und h weder unendlich wird, noch sein Zeichen ändert, der Überschuß der bis zum $m + 2^{\text{ten}}$ Gliede fortgeführten Summationsreihe über den Wert der vorgelegten Summe

$$\int_0^x dx \left\{ \frac{f(x)}{h} + \frac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-1} \right\} - \sum_a^x f(x)$$

dasselbe Zeichen haben wird wie $\sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$, wenn m ungerade, das entgegengesetzte, wenn m gerade ist.

Am 30. Juni sendet er ferner eine zweite, die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffende, kurze Note: „De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ evolvere licet" an Crelle. Um die von Laplace mittels divergenter Reihen gefundene Entwicklung

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + 3q \cdots}}}$$

worin $q = \frac{1}{2x^2}$, auf strengem Wege zu ermitteln, setzt Jacobi $v = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx$ und leitet für $v_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n v}{dx^n}$ die Rekursionsformel $(n+1) v_{n+1} = 2x v_n + 2 v_{n-1}$ her, aus welcher sich, wenn $(-1)^n 2 x^{n+1} v_n = y_{n+1}$ gesetzt wird, die unmittelbar ersichtliche Beziehung $\frac{1}{y_1} = 1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cdots}}$ ergibt.

Noch immer trat von seinen Untersuchungen über die Theorie der Differentialgleichungen und die Prinzipien der Mechanik, in die er sich schon seit längerer Zeit vertieft hatte, nichts in die Öffentlichkeit; eine höchst wichtige und interessante, die Hydrostatik betreffende Arbeit, welche er in Potsdam, wo er während der letzten Hälfte der Herbstferien bei seiner kranken Mutter weilte, am 4. Oktober abschloß, hatte zunächst nur eine Anwendung elliptischer Integrale zum Gegenstand. In der in den Annalen von Poggendorff erschienenen Arbeit „Über die Figur des Gleichgewichts" wird die Frage erörtert, welche Figur eine flüssige homogene Masse, deren Teilchen zueinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren, und welche sich um eine feste Achse gleichförmig dreht, annehmen müsse, um im Gleichgewicht zu bleiben, und eine Mitteilung über eben diesen Gegenstand sandte Jacobi außerdem am 20. Oktober an die Pariser Akademie.

„Mit den eben besprochenen Untersuchungen", sagt Dirichlet, „hängt eine andere Arbeit Jacobis zusammen, die wegen ihres überraschenden Resultats hier nicht unerwähnt bleiben darf. Maclaurin hat bekanntlich zuerst gezeigt, daß eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äußeren Gestalt sich gleichförmig um eine feste Achse drehen kann, wenn diese Gestalt die eines Rotationsellipsoids ist, und dieses schöne Resultat ist später von d'Alembert und Laplace durch den Nachweis vervollständigt worden, daß jedem Werte der Winkelgeschwindigkeit, wenn dieser unter einer gewissen Grenze liegt, zwei und nur zwei solche Ellipsoide entsprechen. Lagrange scheint zuerst an die Möglichkeit gedacht zu haben, daß auch ein ungleichachsiges Ellipsoid den Bedingungen der Permanenz genügen kann; wenigstens geht dieser große Mathematiker in seiner analytischen Mechanik bei Behandlung dieser Frage von Formeln aus, welche für ein beliebiges Ellipsoid gelten. Indem er aber so zu zwei zu erfüllenden Gleichungen gelangt, in welchen

die beiden Aequatorialachsen auf eine symmetrische Weise enthalten sind, zieht er aus dieser Symmetrie den Schluß, daß jene Achsen gleich sein müssen, während doch nur daraus folgt, daß sie gleich sein können, wo dann beide Gleichungen in eine und mit der von Maclaurin zuerst aufgestellten und von d'Alembert und Laplace diskutierten zusammenfallen. Der Verfasser eines bekannten Lehrbuchs, der in der Darstellung dieses Gegenstandes Lagrange gefolgt ist und den eben erwähnten übereilten Schluß mit dem Worte notwendig begleitet, erregte zuerst Jacobis Verdacht, welcher bei genauerer Betrachtung jener zwei Gleichuungen zu seiner und gewiß aller Mathematiker großen Überraschung bald fand, daß auch ein ungleichachsiges Ellipsoid den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann."

Jacobi hebt zunächst in seiner Arbeit die historisch interessante Tatsache hervor, daß Laplace bei der Behandlung der Attraktion der Ellipsoide bemerkt, er könne beweisen, daß diese Integrale im allgemeinen sich nicht endlich, d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken lassen, und erkennt in den bahnbrechenden Untersuchungen von Legendre über die Theorie der elliptischen Integrale und der Kugelfunktionen das einzige Mittel, um die Untersuchung über die Gleichgewichtsfiguren erschöpfend durchzuführen. „Legendre, dessen Ruhm mit den Fortschritten der Mathematik zunimmt, hatte durch Einführung jener merkwürdigen Ausdrücke, durch welche wir heute in den Anwendungen die Funktionen zweier Variabeln darstellen, die allgemeinsten Untersuchungen über diesen Gegenstand möglich gemacht. Er zeigte, daß unter allen Figuren, die nicht zu sehr von der sphärischen Gestalt abweichen, so daß es möglich ist, die Anziehung, welche auf einen Punkt der Oberfläche ausgeübt wird, nach den Potenzen dieser Abweichung zu entwickeln, das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid, wie es Clairaut und Maclaurin bestimmt haben, die einzig mögliche Figur des Gleichgewichts sei, und zwar nicht in irgendeiner Annäherung, sondern in absoluter geometrischer Strenge. Wenn man bedenkt, daß man hier aus Relationen zwischen dreifachen Integralen, deren Grenzen unbekannt sind, und welche Konstanten enthalten, zwischen denen eine unbekannte Relation stattfindet, die Gleichung zwischen den drei Variabeln zu suchen hat, welche die Grenzen gibt und zugleich die unbekannte Relation zwischen den Konstanten bestimmt, so staunt man über die Kühnheit und das Glück dieses Unternehmens ... Wie wesentlich die Bedingung ist, daß die Komponenten der Anziehung nach den Potenzen der Abweichung von der Kugelgestalt würden entwickelt werden können oder wenigstens entwickelt gedacht werden, erhellt daraus, daß die Legendresche Analysis das zweite sehr platte, von d'Alembert zuerst bemerkte Umdrehungsellipsoid nicht gibt. Aber man ist in einem sehr großen Irrtum gewesen, wenn man geglaubt hat, diese beiden Umdrehungsellipsoide seien, wenigstens unter Flächen 2. Ordnung, die einzigen Figuren des Gleichgewichts. In der Tat zeigt eine leichte Aufmerksamkeit, daß Ellipsoide mit drei ungleichen Achsen ebensogut Figuren des Gleichgewichts sein können; daß man zum Äquator eine ganz beliebige Ellipse annehmen kann, und dann immer die dritte Hauptachse, die Umdrehungsachse, welche auch hier die kleinste der drei Achsen ist, und die Rotationsgeschwindigkeit so bestimmen kann, daß das Ellipsoid eine Figur des Gleichgewichts wird." Jacobi findet, wenn m und n die halben Hauptachsen des Äquators, p die halbe Umdrehungsachse, und

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{x}{m^2}\right)\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\left(1+\frac{x}{p^2}\right)}$$

gesetzt wird, eine transzendente Relation zwischen den drei Hauptachsen von der Form:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{m^2}\right)\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\Delta} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{p^2}\right)\Delta},$$

welche alle ungleichachsigen Ellipsoide umfaßt, welche Figuren des Gleichgewichts sein können, während zu jedem dieser Ellipsoide die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit v durch die Gleichung

$$v^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+m^2)(x+n^2)\Delta}$$

bestimmt ist.

Für den Winter 1834/35 hatte Jacobi außer einer Vorlesung über die Oberflächen und Linien doppelter Krümmung eine öffentliche, bisher von ihm noch nicht gehaltene über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen angekündigt, während zugleich die bisher mehr privaten mathematischen Übungen mit den Studierenden eine festere Gestalt annahmen. Nach Auflösung des früheren Herbartschen pädagogischen Seminars beantragten im Februar 1834 Neumann, Jacobi und Sohncke die Gründung eines mathematisch-physikalischen Seminars, und zwar unter der ausdrücklichen Erklärung Jacobis, daß er dem Antrage nur zustimmen könne, wenn etwas ganz Vollständiges und Bedeutendes geschähe, während sich Bessel prinzipiell gegen ein solches Seminar aussprach, weil er mehr Gewicht auf eignes Studium als auf den seminaristischen Unterricht lege. Im November 1834 wurde nun das Seminar mit einer mathematischen unter Jacobi und einer mathematisch-physikalischen unter Neumann stehenden Abteilung eröffnet, Sohncke dagegen wurden die elementareren, in lateinischer Sprache abzuhaltenden Übungen zuerteilt; am Ende eines jeden Jahres sollte dem Ministerium Bericht über den Fortgang der Arbeiten erstattet werden. Jacobi widmete sich nun mit dem größten Eifer der Leitung des Seminars, dessen Arbeiten er in jedem Semester damit einleitete, daß er „in kurzen Vorträgen an einen den Mitgliedern geläufigen Zusammenhang anknüpfte und von da zu einer besonderen Aufgabe hinleitete, mit deren Lösung die Mitglieder sich die Woche über zu beschäftigen hatten; ihre Arbeiten wurden im Laufe der Woche dem Dirigenten abgegeben und am nächsten Sonnabend von demselben beurtheilt, worauf zu einer neuen Aufgabe übergegangen wurde". Die ersten Mitglieder im Winter 1834/35 waren Hesse, Czwalina und Schoenemann, mit denen Aufgaben behandelt wurden, welche sich auf sphärische Kegelschnitte bezogen, worin sich Hesse „durch Gediegenheit des Inhaltes und Eleganz der Form seiner Arbeiten auszeichnete".

Wenn Jacobi auch, wie wir bald sehen werden, wesentliche Teile seiner umfangreichen Untersuchungen in der analytischen Mechanik bereits fertiggestellt hatte, so beschränkte er sich zunächst doch noch immer in seinen Veröffentlichungen auf Ergänzungen und Erweiterungen früherer Arbeiten und auf die Darlegung von Resultaten, mit denen er seine geometrischen Vorlesungen bereicherte. In der vom 3. Dezember 1834 datierten Arbeit „Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$ tuplicia exhibentur", geht er auf eine frühere Untersuchung zurück, in der er gezeigt hatte, daß, wenn $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, das für reelle x_n über alle positiven und negativen Werte der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ ausgedehnte Integral

$$\int^{(n-1)} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n\left(\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda\right)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{2^{n-1} S}{\sqrt{\sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}}}$$

ist, worin S gefunden, und der Ausdruck $\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ für alle reellen Werte von $x_1 \ldots x_n$ als positiv vorausgesetzt war. Ist nun ein lineares System gegeben $a_{r1} y_1 + \cdots + a_{rn} y_n = m_r \, (r = 1, 2, \ldots n)$, worin $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, so liefert, wie leicht durch Zerlegung seiner Determinante N in Unterdeterminanten erster Ordnung ersichtlich, das für mehrfache Integrale gefundene Theorem für die Auflösung des linearen Gleichungssystems die Werte

$$\frac{2^{n-1} S}{n} \frac{y_r}{\sqrt{N}} = \int^{(n-1)} \frac{x_r (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)}{x_n\left(\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda\right)^{\frac{1}{2}(n+2)}} dx_1\, dx_2 \cdots dx_{n-1},$$

worin $S = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, wenn n gerade, und $S = \frac{1}{3 \cdot 5 \ldots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, wenn n ungerade ist; durch eine einfache Umformung kann man sich auch von der Beschränkung, daß $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, und daß $\sum a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ für alle Wertsysteme von $x_1, \ldots x_n$ positiv ist, frei machen.

Die vom 9. Dezember 1834 datierte Arbeit „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes" ist ziemlich elementarer Natur, offenbar für seminaristische Übungen bestimmt gewesen und knüpft an seine Jugendversuche zur Auflösung der Gleichungen 5. Grades an. Aus der Form, wie 2, 3, 4 Elemente sich durch die symmetrischen Funktionen dieser ausdrücken lassen, leitet er die Auflösungen der Gleichungen 2., 3., 4. Grades her, zeigt, daß im Innern der Lösungsform unsymmetrische, in den Wurzeln der Gleichung rationale Funktionen vorkommen, durch deren Potenzierung symmetrische entstehen, und sucht die Natur dieser unsymmetrischen Ausdrücke genauer zu bestimmen. In Verallgemeinerung eines schon auf der Schule von ihm gefundenen Satzes führt er die Gleichung 5. Grades $x^5 - 10q^2 x = p$ durch eine einfache Substitution in $y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = py^5$ über und zeigt, daß sich diese, wenn man das Zeichen des zweiten und dritten Postens ändert, mit Hilfe von Quadratwurzeln und 5. Wurzeln auflösen läßt. Er geht ferner noch auf die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung ein, welche zwischen gegebenen Grenzen enthalten sind, indem er dieselbe auf die Feststellung der reellen Wurzeln einer Gleichung überhaupt zurückführt, und erweitert bekannte Methoden auf die Aufsuchung der kleinsten und größten Lösungen einer Gleichung.

Bei Gelegenheit seiner Wintervorlesung über Linien und Flächen war er zu einigen interessanten Bemerkungen gelangt, die er am 19. Dezember 1834 unter dem Titel „Zur Theorie der Curven“ veröffentlichte. Von einigen einfacheren Sätzen abgesehen, mag hervorgehoben werden, daß er das Element des Bogens der Krümmungsmittelpunktskurve gleich fand dem Halbmesser der Schmiegungskugel mal dem Winkel der Schmiegungsebenen, und die Differenz zweier aufeinander folgender Krümmungshalbmesser gleich dem Elemente des Bogens der Kurve der Krümmungsmittelpunkte mal dem Kosinus des Winkels, den es mit dem Krümmungshalbmesser bildet, oder auch gleich der Distanz der Mittelpunkte der Schmiegungskugel und des Schmiegungskreises mal dem Winkel der Schmiegungsebenen. Er führt ferner die Koordinaten einer Kurve als Funktion der Bogenlänge ein und entwickelt die Koordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunktes der zu x, y, z gehörigen Schmiegungskugel in der Form $\xi = x + \varrho\alpha_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\alpha_3$, $\eta = y + \varrho\beta_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\beta_3$, $\zeta = z + \varrho\gamma_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\gamma_3$, $R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$, wenn ϱ und r die Radien der ersten und zweiten Krümmung, R der Radius der Schmiegungskugel, α_2, β_2, γ_2 die Richtungskosinus der positiven Richtung der Hauptnormale, und α_3, β_3, γ_3 die Richtungskosinus der positiven Richtung derjenigen Normale sind, welche auf der Schmiegungsebene senkrecht steht; vermöge dieser Formeln gelingt es ihm, einen Satz von Lagrange zu berichtigen, indem er findet, daß nur für eine ebene Kurve die Linie ihrer Krümmungsmittelpunkte ihre Evolute ist, oder von den Krümmungshalbmessern berührt wird. Determinantenformeln für das Maß der zweiten Krümmung beschließen die Arbeit.

In der noch vor Ende des Jahres am 20. Dezember niedergeschriebenen kurzen Notiz „De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea“ knüpft Jacobi einige Bemerkungen an eine

nachgelassene Arbeit von Euler, welche die Aufgabe behandelt, den Ausdruck aus einer rationalen Zahl x, welche $\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$ selbt rational macht, unzählig viele andere Werte von x von derselben Eigenschaft zu finden. „In quibus commentationibus non adnotavit vir, analysin solutionis ab eo traditae aliam non esse nisi multiplicationis integralium ellipticorum — quamquam utriusque analysis autorem consensum illum memorabilem non fugisse, probabile est.“ Jacobi folgert diesen Zusammenhang unmittelbar aus dem Eulerschen Additionstheorem, nach welchem, wenn $f(x)$ vom 4. Grade und $\Pi(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ ist, in der Beziehung $\Pi(x) = m_1\,\Pi(x_1) + m_2\,\Pi(x_2) + \cdots + m_n\,\Pi(x_n)$, worin $m_1, m_2, \ldots m_n$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, x und $\sqrt{f(x)}$ rational durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $\sqrt{f(x_1)}, \ldots \sqrt{f(x_n)}$ ausdrückbar sind. Verallgemeinert lautet der Satz: „designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram $2n + 1^{ti}$ aut $2n + 2^{ti}$ ordinis, si datur valor ipsius x rationalis, pro quo etiam $\sqrt{f(x)}$ rationale fiat, dantur innumerae aequationes n^{ti} gradus, quarum coefficientes numeri rationales sunt, ita comparatae, ut designante x earum radicem quamlibet, radicale $\sqrt{f(x)}$ per ipsam radicem x et numeros rationales rationaliter exhiberi queat“, und dieses Theorem ist auf Integrale beliebiger algebraischer Funktionen übertragbar.

Hatten bisher die Untersuchungen Jacobis über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, deren Veröffentlichung er noch immer hinausgeschoben, mehr in den Problemen der Variationsrechnung ihre Entstehung gefunden, so nahm die Richtung der hierauf bezüglichen Arbeiten, welche aber auch erst nach einem Jahre den Mathematikern zur Kenntnis kamen, durch die im Jahre 1834 und 1835 erschienenen Arbeiten von Hamilton eine wesentlich andere und bedeutungsvolle Wendung. Aus seinen kurzen Aufzeichnungen ist erkennbar, daß er mit Bessel bereits im Jahre 1834 über diese Untersuchungen und die von ihm herbeigeführte wesentliche Vereinfachung der Hamiltonschen Theoreme mündlichen Gedankenaustausch gepflogen; dieser schreibt auch am 20. Januar 1834, wahrscheinlich durch Jacobi auf die Hamiltonschen Arbeiten hingewiesen, an Olbers: „Sind Sie auf Hamilton's Abhandlung im letzten Bande der 'Philosophical Transactions' aufmerksam gewesen? Sie ist ohne Zweifel wichtig für die Theorie, ob auch für die Praxis kann ich noch nicht beurtheilen. Das Wesentliche der Abhandlung besteht darin, daß gezeigt wird, daß man durch eine partielle Differentialgleichung eine Function erkennen kann, deren Differentiirungen die vollständige Auflösung der dynamischen Probleme ergeben. Bisher konnte man nach der Anleitung der mécanique analytique die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung durch ein einförmiges und elegantes Verfahren erhalten. Hamilton integrirt nur einmal, freilich keine gewöhnliche sondern eine partielle Differentialgleichung; sobald dies geschehen ist, erhält man durch Differentiirung dieses Integrales nicht nur die Differentialgleichungen, bei welchen Lagrange stehen blieb, sondern auch die Integrale derselben; es ist möglich, daß diese Idee beträchtlichen Erfolg erhalten kann. Sie kann zwar gewiß nicht über ein Integral hinweg heben, welches man sonst suchen muß, allein die Änderung der Reihenfolge, welche sie hervorbringt, kann doch von wesentlichem Nutzen sein."

Aber alle auf diese Probleme bezüglichen Untersuchungen Jacobis blieben den Mathematikern zunächst noch unbekannt, und nur in den Vorlesungen und seminaristischen Übungen traten Andeutungen davon hervor; das Crellesche Journal brachte auch jetzt nur Arbeiten geometrischen und algebraischen Inhalts, aber von größtem Interesse und weittragender Bedeutung.

Noch im Wintersemester verfaßte er eine vom 22. Februar 1835 datierte ganz kurze Bemerkung „Über den Steinerschen Satz von den Primzahlen im 13. Bande des Crelleschen Journals", in welcher er das Theorem, daß, wenn p eine Primzahl, für n durch p nicht teilbare Zahlen, welche durch p dividiert lauter verschiedene Reste lassen, die Summen ihrer Kombinationen mit Wiederholungen zu $p-n, p-n+1, \ldots p-2$ genommen durch p teilbar sind, daraus herleitet, daß, wenn $\frac{1}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)} = \frac{P}{x^n} + \frac{P'}{x^{n+1}} + \frac{P''}{x^{n+2}} + \cdots$ gesetzt wird, $P^{(m)}$ einerseits als die Summe der Kombinationen mit Wiederholungen zu m aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, andererseits für $m \geqq 0$ durch den Ausdruck $\frac{a_1^{n+m-1}}{A_1} + \frac{a_2^{n+m-1}}{A_2} + \cdots + \frac{a_n^{n+m-1}}{A_n}$ bestimmt wird, worin $A_r = (a_r - a_1)(a_r - a_2) \ldots (a_r - a_{r-1})(a_r - a_{r+1}) \ldots (a_r - a_n)$ ist.

In den Osterferien 1835 beschäftigte er sich von neuem zum Zwecke seiner Sommervorlesung über Variationsrechnung mit dem Studium der großen Lagrangeschen Abhandlungen; „vielleicht sehen Sie", schreibt er am 3. April an Bessel, „die ausgezeichneten Mémoires von Lagrange, von denen ich gestern sprach, und die ich im beifolgenden dicken Bande gezeichnet habe, flüchtig an. Bei Gauss heißt es nicht: de mortuis nil nisi bene, sondern de mortuis et de vivis nil." Von der zweiten Vorlesung, die er in diesem Sommer hielt und in welcher er die Oberflächen 2. Ordnung behandelte, besitzen wir eine von Rosenhain verfaßte Nachschrift. „Der Veranlassung", sagt Dirichlet, „welche Jacobi in seinen Untersuchungen über die Attraktion der Ellipsoide fand, sich mit den Flächen 2. Grades zu beschäftigen, verdankt man die Kenntnis mehrerer interessanter Eigenschaften und einer höchst eleganten Erzeugungsweise dieser Flächen."

Wie er es in allen seinen Vorlesungen liebte, gab er auch hier eine historische Einleitung, welche sich auf die

Einführung der analytischen Methode in die Geometrie bezog, hebt aber bei dieser Gelegenheit ausdrücklich hervor, daß zu analytisch-geometrischen Zwecken auch die reine Geometrie stets hilfreich sein müsse. „So beschäftigt sich z. B. Gauss mit der Transformation eines Integrales

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b\cos\varphi + c\sin\varphi + d\cos 2\varphi + e\sin 2\varphi}} \text{ in } \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}},$$

die nach Steiner mit der einfachen Aufgabe übereinkommt, zwei in einer Ebene gegebene Kegelschnitte so zu projizieren, daß sie konzentrisch werden und sich auf dasselbe Paar konjugierter Durchmesser beziehen. Es wäre daher nicht unzweckmäßig, die Resultate der Steinerschen Untersuchungen durch reine Geometrie auch durch Rechnung zu verfolgen, denn man würde hier jedenfalls neue Symbole finden." Die Vorlesung selbst beschäftigt sich zunächst mit der Theorie der geraden Linie und der geradlinigen Figuren im Raume, mit der Zusammenstellung der Linien und Ebenen und der Transformation der räumlichen Koordinatensysteme. In der Lehre von den Oberflächen 2. Ordnung, zu deren Darstellung er sich auch öfter der höheren Analysis bedient, wird zunächst die Lehre von dem Mittelpunkt und den Durchmessern derselben entwickelt, und weiter ausführlich die Methode dargelegt, durch welche er selbst nicht bloß die Realität der Wurzeln der Hauptachsengleichung bewiesen, sondern auch gezeigt hat, wie man ihre Zeichen und Grenzen erkennt, um die Gattung der Oberflächen zu bestimmen. Es folgt die Einteilung der Flächen 2. Grades und die Untersuchung der wesentlichsten Eigenschaften derselben, verbunden mit der Entwicklung der Theorie der Polarebenen und der Berührungskegel der Flächen. Die Behandlung der Schnittkurven zweier Flächen 2. Ordnung wurde in dieser Sommervorlesung nicht ganz zu Ende geführt, wie denn überhaupt diese Vorlesung einen mehr elementaren Charakter hatte.

Am 22. Mai 1835 hielt Jacobi in einer öffentlichen Sitzung der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg einen Vortrag: „Über die Pariser polytechnische Schule", nachdem er während seines Aufenthaltes in Paris vielfach Gelegenheit gehabt, sich mit der Geschichte und den Einrichtungen derselben genauer bekannt zu machen.

„Als der bekannte Victor Cousin, Staatsrat und Pair", begann Jacobi seinen Vortrag, „im Auftrage der jetzigen französischen Regierung seine pädagogische Reise durch Deutschland machte, um sich namentlich über das preußische Schulwesen unterrichten zu lassen, erstattete unser Kultusminister v. Altenstein dem Könige einen Bericht über diese Sendung, daß Herr Cousin bei uns alles sehr gut gefunden habe, eine Anstalt aber, wie die polytechnische Schule in Frankreich, vermisse. Der Minister fügte hinzu, daß dieser Mangel sich nicht ableugnen lasse, auch immer fühlbarer werde, daß er deshalb seit längerer Zeit den Plan zu einer solchen Anstalt entworfen, aber wegen der Ungunst der Verhältnisse Anstand genommen habe, auf Bewilligung der nicht unbedeutenden Fonds bei Sr. Majestät anzutragen. Der König antwortete hierauf unter dem 29. August 1831, er sei geneigt, die Einrichtung dieses Instituts zu fördern." Hieran anknüpfend nimmt Jacobi zum Gegenstande seines Vortrages die Beantwortung der Fragen: welches war das Entstehen der polytechnischen Schule, wie hat sie sich im Laufe der Zeit unter den mannigfachsten Umständen fortentwickelt, was sind ihre Resultate? Er liefert zunächst eine übersichtliche und interessante Darstellung der Geschichte jener Schule; besonders lebendig schildert er, wie der berühmte Chemiker Fourcroy im Jahre 1794 beauftragt worden, dem Konvent einen Organisationsplan zu überreichen, wie dann Robespierre bei der gänzlichen Auflösung aller Finanzverhältnisse sich diesen Plänen entgegengestellt, und daß Fourcroy erst nach dem 9. Thermidor seinen Bericht einreichen konnte, der mit den Worten begann: „Der Wohlfahrtsausschuß habe die aktenmäßigen Beweise, was Robespierre am meisten gehaßt, was er am blutdürstigsten verfolgt hätte, wären die Wissenschaften gewesen; er habe eine förmliche Verschwörung gegen die menschliche Vernunft organisiert und sei mit nichts Geringerem umgegangen, als Wissenschaft und Kunst auf der Erde auszurotten. Und welchen Nutzen doch gewährten diese für die Soldaten der Republik? Sie lehrten Waffen, Salpeter und Pulver anfertigen, aus den Glocken Kanonen gießen, Luftballons aufschicken, um die Stellung der feindlichen Heere zu rekognoszieren, Telegraphen bauen, Leder für die Soldaten in acht Tagen machen, die Truppen zweckmäßiger verproviantieren, ja man würde ganz neue Verteidigungsmittel erfinden, um die Feinde der Republik abzuwehren.“ An diese „sonderbare Apologie der Wissenschaften“ knüpft nun Jacobi die Entwicklung des Grundplanes der Anstalt, die mannigfachen Umgestaltungen derselben, vor allem den Einfluß, den Monge, von Napoleon unterstützt, auf diese ausübte; Binet hatte Jacobi im Jahre 1829 mit den einzelnen Einrichtungen der Anstalt bekannt gemacht, welche dessen Verwunderung erregten. „Mit religiöser Ehrfurcht zeigte man die größeren Laboratorien, in welchen die Meister ihre berühmten Entdeckungen gemacht, insbesondere dasjenige, wo Gay-Lussac und Humboldt gemeinsam mehrere Jahre gearbeitet.“ Allmählich gewann auch die Mathematik einen größeren Anteil am Studienplan, und nun erst entwickelte sich die Schule zu ihrer unerreichten Höhe. Die Zahl der Zöglinge betrug damals 300; die Prüfungen wurden mit jedem einzelnen besonders angestellt. „Ich war öfter bei den Abgangsprüfungen in der Mathematik, welche Poisson abhielt, zugegen; da ich hierbei mich mit dem Examinator und Examinanden ganz allein befand, so hatte ich gute Gelegenheit, mich über das, was in der Mathematik in der Schule geleistet wurde, zu unterrichten. Diese Abgangsprüfung in der Mathematik

beschäftigte Poisson einen Monat lang täglich 9 Stunden.“ Als das Waffenglück Napoleons umschlug und die verbündeten Heere über den Rhein gingen, baten die Schüler um die Erlaubnis, in Masse eintreten zu dürfen, um das Vaterland zu verteidigen. Napoleon soll damals geantwortet haben, soweit sei es nicht mit ihm gekommen, daß er seine Henne töten müßte, die ihm die Goldeier lege. Jacobi hebt endlich noch die an dieser Schule erschienenen Lehrbücher hervor, wie Lagranges Funktionentheorie und Funktionenrechnung, Berthollets chemische Statik, Laplaces Exposition du système du monde, Lacroix', Francoeurs, Cauchys Lehrbücher der Algebra und Infinitesimalrechnung u. a. m., welche die Früchte des dort gegebenen Unterrichtes über ganz Europa verbreitet haben. „Den Glanz, den die polytechnische Schule durch ihre Lehrer und die Leistungen ihrer Schüler auf ganz Frankreich warf, hielt sie durch alle Stürme der Zeit hoch aufrecht, indem die Nationalehre bei ihrer Erhaltung beteiligt war. Bald erwähnte man sie auf der Tribüne der legislativen Gewalt oder in öffentlichen Dokumenten nicht, ohne sie die erste Schule der Welt, den Neid Europas, ein Institut ohne Nebenbuhler und Vorbild zu nennen.“

Jacobis Untersuchungen über Linien und Flächen führten ihn zu einer vom 13. Juni 1835 datierten Arbeit: „Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum“, deren wesentlichstes Resultat — der sogenannte Jacobische Satz — später zur Grundlage der Abelschen Transzendenten gemacht worden ist. Das bekannte Eulersche Theorem, daß, wenn X eine ganze Funktion von x bedeutet, $\sum \frac{U}{\frac{\partial X}{\partial x}} = 0$ ist, wenn die Summe sich auf alle Lösungen von $X = 0$ erstreckt, und U eine ganze Funktion von x ist, deren Grad um zwei Einheiten kleiner als der von X, dehnt Jacobi auf ein System von beliebig vielen Gleichungen mit ebensoviel Variabeln aus. Er beweist zunächst, daß, wenn $f = 0$, $\varphi = 0$ zwei Gleichungen mit zwei Variabeln x, y, und $X = 0$, $Y = 0$ die Eliminationsgleichungen von y und x sind, wenn ferner M, N, P, Q die einfachsten ganzen Funktionen darstellen, welche $Mf + N\varphi = X$, $Pf + Q\varphi = Y$ identisch machen, und wenn man endlich $V = MQ - NP$ setzt und mit $V_{m,n}$ den Wert von V für $x = x_m$, $y = y_n$ für verschiedene m und n bezeichnet, dann $V_{m,n} = 0$ wird, oder daß V verschwindet, wenn für x und y Wurzeln der Eliminationsgleichungen gesetzt werden, welche nicht zugleich simultane Lösungen der beiden vorgelegten Gleichungen sind. Kronecker hat im Nachlasse Jacobis eine Bemerkung gefunden, welche darauf hindeutet, daß er schon die zur Allgemeingültigkeit dieses Satzes notwendige Beschränkung gekannt hat, daß der Grad der Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ dem Produkte der Dimensionen der Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ gleich werden muß. Aus diesem Satze folgert er nun leicht, daß, wenn man mit R_m den Wert von $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ für $x = x_m$, $y = y_m$ bezeichnet, die symmetrische Funktion der gemeinsamen Wertsysteme der beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ $\sum_{\varrho} \frac{x_\varrho^\alpha y_\varrho^\beta}{R_\varrho} = 0$ ist, wenn α und β positive ganze Zahlen bedeuten, deren Summe um zwei vermehrt kleiner ist als die Summe der Dimensionen, bis zu welchen die Funktionen f und φ ansteigen, woraus sich die wichtige Erweiterung des Eulerschen Satzes ergibt: „Sint f, φ duarum variabilium x, y functiones quaecunque rationales integrae; sit F alia functio ipsarum x, y rationalis integra quaecunque, cujus ordo tribus inferior summa ordinum functionum f, φ; erit $\sum \frac{F}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$, summa extensa ad valores ipsorum x, y omnes, qui sunt radices simultaneae aequationum $f = 0$, $\varphi = 0$." Die Ausdehnung dieses Theorems auf k Funktionen mit k Varia-

beln bildet ein Beispiel zu der späteren Parallelisierung der Funktionaldeterminante von Jacobi mit der Ableitung einer Funktion von nur einer Variabeln.

Die Abgeschiedenheit Königsbergs von den wissenschaftlichen Zentren Europas machte in Jacobi immer mehr den Wunsch rege, an eine andere preußische Universität versetzt zu werden, und er wendete sich am 3. Juli 1835 mit einer dahingehenden Bitte an den Unterrichtsminister:

„Die Universität Bonn hat durch den Tod eines braven Mathematikers, Prof. Diesterweg, einen betrübenden Verlust erlitten. Es sind die Intentionen Ew. Exc. über die Wiederbesetzung seiner Stelle mir unbekannt. Wenn aber Ew. Exc. es für zweckmäßig erachten, diese Professur mir anzuvertrauen, so würde dies mit meinen lebhaften Wünschen übereinstimmen. . . . . Wenn durch den großen Mann, neben welchem ich hier zu stehen das Glück habe, sowie durch die hier gebildeten Schüler eine Lücke hier kaum entstehen könnte, so würde es vielleicht meinen Anstrengungen gelingen, in einer heitern und zugänglichen Gegend Deutschlands eine mathematische Schule von größerer und umfassenderer Bedeutung zu gründen, und die unter den Auspicien Ew. Exc. durch die Gnade unseres Königs in jenen Gegenden neu erblühte Universität dürfte dann auch in diesen Disciplinen hinter keiner der älteren Universitäten Deutschlands zurückstehen."

Zugleich bittet er Bessel, der sich zur Zeit in Berlin befand, sein Ansuchen an den Minister zu unterstützen, und ist sehr enttäuscht, als ihm dieser am 21. Juli antwortet: „Obgleich ich mir lieber einen Finger abschneiden, als sagen will, daß es meiner Ansicht angemessen sei, Sie lebendig aus Königsberg zu lassen, so will ich mir doch auch lieber den Hals abschneiden, als sagen, daß Sie nicht allenthalben als ein Schatz glänzen würden; von der allerkräftigsten Seite kann ich Ihnen also nicht opponiren." Dementsprechend erwidert ihm auch am 24. August der Minister: