infructueux, quoique vous en ayez annoncé la possibilité. Je serais très-aise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait à mon avis la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presqu'aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques."

Erst nach dem Erscheinen der Fundamenta kommt Jacobi auf diesen letzten Punkt in dem Briefe Legendres zurück und sucht in seiner Antwort diesen von der Notwendigkeit einer Einführung der imaginären Form der Variabeln und des Parameters zu überzeugen.

„Jacobi hat es später oft wiederholt", sagt Dirichlet, „daß die Einführung des Imaginären allein alle Rätsel der früheren Theorie gelöst habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, daß das Naheliegende sich fast immer zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, daß dieser Gedanke Euler entgangen ist, zu dessen frühesten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunktionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgrößen behandelt, in solchem Grade erweitert und vereinfacht zu haben, daß fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr."

Inzwischen war Legendre mit der Ausarbeitung seines zweiten Supplements zum traité beschäftigt; er faßt die im Laufe des letzten Jahres von Abel und Jacobi gemachten Entdeckungen zusammen, liefert eine eingehende Bearbeitung der verschiedenen analytischen Darstellungen der elliptischen Funktionen, der Summierung gewisser Reihen durch diese neuen Transzendenten, ferner der Einführung der ϑ-Funktionen und der Darstellung der elliptischen Integrale 2. und

3. Gattung mittels dieser Jacobischen Funktion. Einen großen Teil seiner Arbeit widmet er aber der Entwicklung des Additionstheorems für hyperelliptische Integrale, jenes fundamentalen, jetzt in allgemeinerer Form „das Abelsche Theorem" genannten Satzes, welcher von Abel im Jahre 1828 in seiner berühmten Arbeit „Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonction transcendantes" veröffentlicht war und von ihm in der aus Christiania vom 6. Januar 1829 datierten Arbeit „Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes" auf Integrale aller algebraischen Funktionen ausgedehnt wurde. Die tiefere Einsicht in die wunderbaren Forschungen Abels steigerte auch Legendres persönliches Interesse für denselben. Er freut sich, ihm am 16. Januar 1829 mitteilen zu können: „j'ai reçu il y a quelque temps une lettre de Mr. Humboldt, dans laquelle il me marque que le ministre de l'instruction publique à Berlin a reçu du roi l'autorisation de former un séminaire pour l'étude des hautes mathématiques et de la physique, dans lequel vous serez appelé comme professeur avec M. Jacobi", und nachdem kaum das 2. Supplement erschienen, dessen Vorrede vom 15. März datiert ist, wendet er sich an Crelle:

„J'ai appris par Mr. Dorow, que Mr. Jacobi se trouve placé convenablement dans l'université de Königsberg, ce qui me fait grand plaisir. Je voudrais qu'il en fait de même de M. Abel. J'avais, de concert avec trois de mes confrères, hasardé d'écrire au roi de Suède, pour l'engager d'appeler à Stockholm près de l'académie un savant si éminemment distingué. Je n'ai point eu encore de réponse, mais la bonne volonté nous avait témoigné Mr. l'ambassadeur... Mais d'après ce que m'a marqué Mr. de Humboldt il serait peut-être plus avantageux à Mr. Abel d'être appelé à Berlin pour entrer dans le séminaire, que l'on veut établir pour les hautes mathématiques et la physique. On ne pourrait faire un meilleur choix et je désire bien vivement que ce projet se réalise . . .“

Crelle, dem inzwischen das gewünschte Ausscheiden aus der Königl. Ober-Baudeputation bewilligt worden und der „in das Ressort des Unterrichtsministeriums für das mathematische Dienstfach übergegangen war“, übersendet am 2. April dieses Schreiben Legendres dem Minister und dringt auf Beschleunigung des Rufes, weil Abel nach einem am 8. März erhaltenen Briefe sehr an Schwäche der Brust leide und ein Wechsel des Klimas wünschenswert sei. Zugleich wendet er sich am 8. April in freudig erregten Worten an Abel: „Nun, mein lieber theurer Freund, kann ich Ihnen gute Nachricht geben. Das Ministerium des Unterrichts hat beschlossen, Sie nach Berlin zu berufen und hier anzustellen. Ich höre es in diesem Augenblicke von demjenigen Herrn im Ministerio, in dessen Händen Ihre Sache ist. Es ist also daran kein Zweifel. Wie man Sie anstellen und wie viel man Ihnen geben wird, kann ich Ihnen noch nicht sagen, weil ich es selbst noch nicht weiß. Ich sprach jenen Herrn in einer großen Versammlung und nur im Fluge, daher erfuhr ich für den Augenblick noch nichts weiter. Sobald ich etwas Näheres höre, melde ich es Ihnen sogleich. Ich habe nur eilen wollen, Ihnen zuerst die Hauptsache zu melden; Sie können übrigens sicher sein, daß Sie in guten Händen sind. Über Ihre Zukunft können Sie jetzt ganz beruhigt sein. Sie sind der Unsrige und sind in Sicherheit. Ich habe mich gefreut, als wenn mir das Gewünschte selbst geschehen wäre. Es hat nicht wenig Mühe gekostet, aber es ist Gottlob! gelungen. Wem Sie vorzüglich verpflichtet sind, das werde ich Ihnen sagen, wenn ich Sie hier sehe. Sie können sich nur immer zur Reise vorbereiten, damit Sie sogleich abreisen, wenn Sie die officielle Aufforderung bekommen. Bis dahin aber, ich bitte wiederum sehr dringend, sagen Sie Niemandem von der gegenwärtigen Nachricht vor dem Ereignisse selbst. Die officielle Nachricht muß in sehr Kurzem in einigen Wochen nachkommen.“

Schon am 7. Mai mußte Crelle der preußischen Regierung berichten, „daß er vernommen, der Minister habe auf seine Eingabe vom 2. April beschlossen, Herrn Abel hierher berufen zu lassen, daß er aber leider eben die Nachricht von dessen Tode erhalten habe“, worauf der Minister in einem Schreiben vom 10. Mai Crelle auf dessen Ansuchen gestattete, in seinem Journal zu erwähnen, „daß er Abel nach Berlin zu berufen und ihm bei der Universität eine ehrenvolle Carrière zu eröffnen beabsichtigt habe“. Im Juni 1829 meldet Jacobi die Trauernachricht Legendre: „Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été donc cruellement déçue, . . . il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple . . .“, und Gauss schreibt am 19. Mai an Schumacher: „Abels Tod, den ich in keiner Zeitung angezeigt gesehen habe, ist ein sehr großer Verlust für die Wissenschaft . . . Humboldt, mit dem ich über ihn gesprochen habe, hatte den bestimmten Wunsch, alles zu thun, um ihn nach Berlin zu ziehen.“

Im April 1829, nach dem am 6. dieses Monats erfolgten Tode Abels, erschien die schon am 18. November 1827 von Jacobi in Aussicht gestellte Bearbeitung der Theorie der elliptischen Funktionen, betitelt „Fundamenta nova functionum Ellipticarum“, dessen kurzes vom Februar 1829 datiertes Prooemium lautete:

„Ante biennium fere, cum theoriam functionum ellipticarum accuratius examinare placuit, incidi in quaestiones quasdam gravissimas, quae et theoriae illi novam faciem creare et universam artem analyticam insigniter promovere videbantur. Quibus ad exitum felicem et propter difficultatem rei vix exspectatum perductis, prima earum momenta breviter et sine demonstratione, mox cum vehementius illa desiderari et invento novo vix fides tribui videretur, addita demonstratione, cum geometris communicavi. Urgebar simul, ut systema completum quaestionum a me susceptarum in publicum ederem. Cui desiderio ut ex parte saltem satisfacerem, fundamenta, quibus quaestiones meae superstructae sunt, in publicum edere constitui. Quae fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum jam indulgentiae geometrarum commendamus."

Das für die moderne Analysis grundlegende Werk, von dessen Fortsetzung sich nur einzelne, zum Teil noch von Jacobi selbst veröffentlichte Bruchstücke vorgefunden haben, beginnt mit der Entwicklung der allgemeinen rationalen Transformation auf dem in seinen ersten Arbeiten angedeuteten Wege; es werden, nachdem das allgemeine elliptische Differential erster Gattung durch eine Transformation zweiten Grades auf die Legendresche Normalform reduziert worden, die Eigenschaften der Funktionen U und V in der rationalen Transformation $y = \frac{U}{V}$ gerader und ungerader Ordnung entwickelt, und als Beispiele die Transformationen 3. und 5. Grades sowie die zugehörigen Modulargleichungen hergeleitet. Nachdem noch die Multiplikation des elliptischen Integrales auf zwei nacheinander ausgeführte Transformationen reduziert worden, führt Jacobi die Umkehrungsfunktion des Integrales erster Gattung ein und erschließt mit Hilfe des Eulerschen Additionstheorems und der komplementären Transformation den Charakter der doppelten Periodizität dieser Funktionen, deren Nullwerte, ihre Unendlichen und ihre Veränderungen bei Vermehrung um halbe Perioden. Mit Hilfe dieser Umkehrungsfunktion werden nun die expliziten Transformationsausdrücke, sowie die Werte für den transformierten Integralmodul und den Multiplikator gefunden, und aus der Entwicklung der speziellen Transformationsformeln für die geteilten Perioden die Multiplikationsformeln hergeleitet. Nun unterwirft Jacobi die früher aufgestellten Modulargleichungen für die Transformation 3. und 5. Grades einer näheren Betrachtung und zeigt, daß dieselben unverändert bleiben, wenn beliebige, aber dieselben Transformationen auf den primären und abgeleiteten Modul ausgeübt werden. Die von Legendre gefundene Differentialgleichung 2. Ordnung für die Perioden der elliptischen Funktionen führt ihn zu einem eleganten Ausdrucke für den Multiplikator der Transformation und zugleich zu jener merkwürdigen Differentialgleichung 3. Ordnung, der alle transformierten Moduln genügen.

Die elliptische Umkehrungsfunktion wurde in die Ausdrücke für die algebraische Transformation der Integrale eingeführt, und um deren analytische Darstellung zu finden, geht er von der Transformation n^{ten} Grades aus und gelangt, indem er n unendlich werden läßt, zur Darstellung der elliptischen Funktionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ in Form von Quotienten von unendlichen Produkten und Partialbrüchen und daraus wieder zu den Ausdrücken für den Integralmodul und die Perioden als Funktionen der von ihm eingeführten Größe q. Es folgt eine zweite Darstellung der elliptischen Funktionen durch Fouriersche Reihen, mit Hilfe deren die Summen einer großen Anzahl von unendlichen, nach Ausdrücken in q fortschreitenden Reihen hergeleitet werden, welche sich durch den Integralmodul und die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrales ausdrücken. Ebenso werden die n^{ten} Potenzen der elliptischen Funktionen und ihre reziproken Werte in sinus- und cosinus-Reihen auf doppelte Weise entwickelt, wobei interessante und später in der Theorie der allgemeinen doppelperiodischen Funktionen verwertete Methoden benutzt werden, und sodann mit Einführung der $Z(u)$-Funktion diese Entwicklungen für die Darstellung der Integrale 2. Gattung in Form von Fourierschen Reihen verwendet. Die Darstellung der Integrale 3. Gattung leitet Jacobi mit dem Satze von der Zurückführung derselben auf ein Integral 1. und 2. Gattung und auf eine nur von zwei Elementen abhängige Transzendente ein, und stützt hierauf den Satz von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters; die neue Jacobische Transzendente $\Theta(u)$ wird durch eine Exponentialfunktion definiert, deren Exponent das über die $Z(u)$-Funktion genommene Integral ist. Das Additionstheorem der Integrale 3. Gattung für die Amplitude und den Parameter wird mit Hilfe der Additionstheoreme der Θ-Funktion in verschiedenen Formen aufgestellt, und mit Hilfe bestimmter Beziehungen für die lineare Transformation dieser Transzendenten auf Grund der von Legendre in seinem traité ausgeführten Untersuchungen die Reduktion eines beliebigen Integrales 3. Gattung auf solche derselben Art gegeben, für welche die Amplitude reell und der Parameter reell zwischen 0 und -1 liegt. Überall spielt die Θ-Funktion die Rolle der eigentlichen Fundamentalfunktion in der Theorie der elliptischen Transzendenten.

„Auffallenderweise", sagt Dirichlet in seiner Gedächtnisrede, „hat eine so wichtige Funktion noch keinen andern Namen als den der Transzendenten Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei Jacobi erscheint, und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr Jacobis Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transzendenten zuerst erkannt zu haben."

Nach Einführung der Θ-Funktion, welche den Nenner der sin am bildet, wird auch der Zähler derselben als selbständige Transzendente H der Theorie zugrunde gelegt, und die cos am und Δam drücken sich alsdann ebenfalls als Quotienten dieser Transzendenten aus; wesentlich ist dabei der durch Veränderung des Argumentes um halbe Perioden sich ergebende Zusammenhang zwischen diesen

Funktionen, durch den die ganze Theorie auf eine Fundamentaltranszendente zurückgeführt wird. Für die durch unendliche Produkte definierten beiden Transzendenten werden elegante Entwicklungen nach den sinus und cosinus der Vielfachen des Argumentes durch Benutzung der Beziehungen zwischen jenen Funktionen bei Vermehrung des Argumentes um ganze und halbe Perioden der elliptischen Funktionen hergeleitet, und aus diesen Entwicklungsformen die berühmten Reihen für die Perioden, nach Potenzen von q fortschreitend, deren Exponenten die Quadrate der ganzen Zahlen sind, entwickelt. Die verschiedenen analytischen Formen der elliptischen Funktionen geben eine Reihe interessanter Identitäten zwischen unendlichen Produkten und unendlichen Reihen, welche nach Potenzen von q fortschreiten, und mit der Benutzung dieser Beziehungen zum Beweise des Satzes, daß jede Zahl sich als eine Summe von 4 Quadraten darstellen lasse, schließt das große, an Inhalt überreiche Werk.

So steht nun der 24jährige junge Mann unbestritten nächst Gauss als der erste deutsche Mathematiker da — aber körperlich und geistig angegriffen von dem gewaltigen unaufhörlichen Schaffen. Noch eine Arbeit sendet er im April an Crelle, „De functionibus ellipticis commentatio prima" betitelt, die mit den Worten beginnt: „Prima haec commentatio seriem incipit commentationum, quae ut continuatio Fundamentorum spectari potest", und welche, sowie die späteren Fortsetzungen, offenbar, zu einem Ganzen vereint, den zweiten Teil der Fundamenta bilden sollten. Jacobi stellt in dieser Arbeit die Transformationsformeln der Integrale 2. und 3. Gattung in Verbindung mit den Transformationsausdrücken der ϑ-Functionen her, entwickelt die totale Differentialgleichung, welcher Zähler und Nenner der rationalen Transformationen genügen, „quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis ... Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promptu esse non videtur", und untersucht schließlich noch die mit einer quadratischen Exponentialgröße multiplizierte Θ-Funktion in bezug auf ihre Perioden und die Zusammensetzung dieser Funktionen zu den elliptischen Transzendenten.

Nun war aber auch seine Kraft erschöpft; er reist nach Absendung dieser Arbeit zu seinen Eltern nach Potsdam, um dort kurze Zeit auszuruhen, fühlt sich jedoch so angegriffen, daß er am 18. Mai zugleich mit der Übersendung seiner Fundamenta das Ministerium noch für diesen Monat um Urlaub bittet, „eine Bitte zu der ich mich durch Familienverhältnisse und eine mir nötig gewordene Erholung veranlaßt sehe". In dieser Zeit wurde die erste persönliche Bekanntschaft zwischen Jacobi und Dirichlet angeknüpft; „auf einer Reise, die sie zusammen nach Halle und von dort aus in Gesellschaft von W. Weber nach Thüringen unternahmen", berichtet Kummer, „lernten sie sich näher kennen, und da Jacobi die Zeit seiner Ferien öfter in Berlin verlebte, so hatten sie auch später Gelegenheit zu einem intimeren, wissenschaftlichen und freundschaftlichen Verkehr".

Das Ministerium gab Jacobi bereitwilligst einen Urlaub für das ganze Sommersemester 1829 und forderte zugleich Crelle zur Begutachtung der Fundamenta auf, welcher aber, durch amtliche Geschäfte verhindert, erst am 24. September diesem Auftrage nachkommen konnte: „... bis in den letztverflossenen Jahren die beiden jungen und hoffnungsvollen Geometer Abel und Jacobi, von welchen der erstere zum unersetzlichen Schaden der Wissenschaft leider viel zu früh verstarb, diese Theorie jeder auf seinem Wege, und ohne von einander und ihren Arbeiten zu wissen, auf eine bewunderungswürdige und überraschende Weise erweiterten und vervollkommneten ... Erweiterungen von Sätzen, zu welchen Euler und Legendre nicht gelangen konnten, setzen nun unstreitig schon einen außerordentlichen Scharfsinn und wirkliches Genie voraus ... Die Schrift steht unbezweifelt dem Tiefsten und Schwierigsten, was die neuere Mathematik besitzt, zur Seite ... Es finden sich schon Anzeichen, daß sie bedeutenden Einfluß auf die gesamte, noch so dunkle Theorie der Zahlen haben wird, und es ist leicht möglich, daß sie vielleicht auch über die bisherige, fast beschämend enge Begrenzung der Theorie der algebraischen Gleichungen hinaus einiges Licht verbreiten wird. Sie ist als eines der merkwürdigsten litterarischen Erzeugnisse anzusehen, welche die neuere mathematische Litteratur aufzuweisen hat ..."

Zunächst blieb Jacobi noch einige Monate bei seinen Verwandten und Freunden in Potsdam und Berlin, um sich körperlich zu erholen, wieder einmal an Literatur und Kunst zu erfrischen und die einige Zeit vernachlässigte Korrespondenz von neuem zu pflegen.

„L'impression de mon ouvrage," schreibt er am 23. Mai 1829 an Legendre von Potsdam aus, „étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des Géomètres leur ensemble." Zugleich bezeichnet er die in dem letzten Schreiben von Legendre geforderte Unterscheidung der Integrale 3. Gattung als eine nicht in der analytischen Natur dieser Funktionen begründete: „En ce qui regarde les intégrales elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complètement raison; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique.

Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter du mérite a votre division des intégrales elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas." Und in betreff seiner letzten schon nach dem Erscheinen der Fundamenta veröffentlichten Arbeit hebt er hervor: „Mais le but principal de ce premier mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des transformations irrationnelles ou inverses et de la section des fonctions elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière."

Aber Legendre bedauert es in der Antwort vom 4. Juni 1829, daß jene Verschiedenheit der Integrale 3. Gattung wirklich in der Natur der Sache liegen sollte: „mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses et nous ne pouvons rien y changer. Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. Abel qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments . . . En fermant cette lettre je viens d'apprendre avec une profonde douleur que votre digne émule M. Abel est mort à Christiania . . ."

Inzwischen hatte Legendre die Fundamenta erhalten,

sogleich auf das genaueste durchstudiert, und dankt Jacobi am 16. Juli 1829 voll Bewunderung für das große Werk, fügt aber hinzu: „mais comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée, et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut-être pour vous et pour la science. La plus simple des fonctions elliptiques savoir l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$ jouit de tant et de si belles propriétés; considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la seconde et de la troisième espèce que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de fonctions elliptiques, mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée, dès 1793, dans mon mémoire sur les transcendantes elliptiques, a été adoptée généralement, vous l'avez trouvée établie; quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général? Vous faites schisme avec M. Abel et avec moi, vous faites schisme avec vous-même, puisque, après avoir appelé fonctions elliptiques les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude, vous êtes encore obligé d'appeler fonctions de troisième espèce celles que je désigne sous le même nom . . . Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste, je vous fait part confidentiellement de ces observations, dont vous ferez tel usage que vous voudrez, et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance."

Jacobi, bereits auf seiner längst geplanten Reise nach

Paris begriffen, schreibt ihm am 19. August 1829 aus Frankfurt: „Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin am, cos am, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites circulaires. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des fonctions elliptiques au calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'analyse, et qui ont été accueillies pour tous les géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom des fonctions elliptiques de la première, seconde, troisième espèce intégrales elliptiques de la première, seconde, troisième espèce et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de fonctions elliptiques aux sin am, cos am, Δ am, analogiquement comme on nomme fonctions circulaires les sinus, cosinus etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet."

Trotz dieser gewichtigen Gründe scheint sich aber Legendre selbst nach der persönlichen Bekanntschaft, die er wenige Wochen später mit Jacobi in Paris machte, bis zu seinem Tode nicht mehr mit der Wahl der Jacobischen Benennungen befreundet zu haben — sein letzter Brief an denselben vom 30. Juni 1832 sagt: „J'aurais un double plaisir si ces nouveaux résultats étaient obtenues par le secours de nos fonctions elliptiques, qui vous appartiennent autant qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chose par le même nom."

Vom Ende August bis zur Mitte des Oktober hielt sich Jacobi in Paris auf, in vollem Genuß von Natur und Kunst, aber auch in beständigem wissenschaftlichen Verkehr mit Legendre, Fourier, Poisson und anderen hervorragenden Mathematikern und Physikern, die ihn später zum Teil noch überlebt haben. Leider befand sich Legendre damals in einem körperlichen Zustande, der ihm einen regeren geselligen Verkehr mit Jacobi unmöglich machte, und er entschuldigte sich wiederholt bei ihm in liebenswürdigen Zeilen, daß er ihn wegen Krankeit nicht so aufnehmen könne, wie er es wünschte; bezüglich des Befindens Legendres schreibt ihm auch Mlle. Sophie Germain gelegentlich einer Dinereinladung: „. . . il n'a pas été en mon pouvoir, de faire accepter la même invitation à Monsieur Fourier, la santé de Monsieur le Gendre ne lui permet pas non plus de diner hors de chez lui, mais il m'a promis de venir passer la soirée. J'avais à regretter de ne pouvoir tenir complétement l'engagement d'offrir à Monsieur Jacobi une réunion digne de lui . . ."

Von seiner Reise wieder nach Königsberg zurückgekehrt, wo er insofern etwas veränderte Verhältnisse antraf, als Dove inzwischen im September nach Berlin versetzt und Neumann an Stelle des im März verstorbenen Professor Hagen zum Ordinarius ernannt worden war, hielt Jacobi zum ersten Male neben der Vorlesung über die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung eine öffentliche Vorlesung über die Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Transzendenten, von der eine Ausarbeitung von Sanio sich in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin befindet.

Gerade diese Vorlesung über elliptische Funktionen, die erste an einer Universität und gerade von Jacobi unmittelbar nach dem Erscheinen der Fundamenta gehalten, ist von großem geschichtlichen Interesse. Nachdem er die von Fagnano, Euler, Landen und Lagrange über elliptische Integrale erhaltenen Resultate skizziert und den von Legendre gemachten Fortschritt gekennzeichnet, hebt er hervor, daß noch die Beantwortung zweier Hauptfragen offen geblieben, wie nämlich die Multiplikation dieser Transzendenten zu veranstalten, und ob die Substitution von Landen die einzig mögliche sei. Er betont in seiner knappen Einleitung, daß Abel die algebraische Auflösbarkeit der Divisionsgleichungen nachgewiesen und für die Lemniskate das Teilungsproblem vollständig gelöst habe, während er selbst den Satz von der Existenz unendlich vieler Transformationen aufgestellt und die Multiplikation aus zwei Transformationen zusammengesetzt habe. Als wichtigstes Prinzip hebt er aber das der doppelten Periodizität hervor; indem er bemerkt, daß die trigonometrische sinus-Funktion alle Eigenschaften der ganzen, die sin am alle Eigenschaften der gebrochenen Funktionen besitzt, bespricht er die einfache und doppelte Periodizität, beweist, daß Funktionen mit zwei reellen Perioden nicht existieren und spricht schon hier den Satz aus, daß eine Funktion nie drei selbständige Perioden besitzen kann. „Man könnte die Behandlung der elliptischen Funktionen füglich die Theorie der doppelt periodischen Funktionen nennen, denn der erste Namen erscheint ganz unpassend, wenn man nicht die Geschichte der Erfindung der Theorie kennt." Die beiden Perioden der elliptischen Funktionen leitet er aus der Entwicklung von $(1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Fourierschen cosinus-Reihe und aus der Beziehung $\sin \operatorname{am} (iu, \varkappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am} (u, \varkappa')$ ab. Er legt auf die Einführung der Fundamental-Transzendenten Θ besonderen Wert: „diese neuen Funktionen stehen höher, weil man aus ihnen die Eigenschaften der elliptischen Transzendenten ableiten kann, aber nicht umgekehrt", zeigt ihre Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung, und geht zur Entwicklung der Θ in unendliche Doppelprodukte und in Reihen über, die einem ganz neuen Gesetze folgen, indem die Exponenten arithmetische Reihen der 2. Ordnung bilden, deren allgemeines Glied durch $e^{-(an+b)^2}$ dargestellt ist; „von hier aus ist ein Übergang zur höheren Arithmetik oder der Theorie der Zahlen gegeben, denn so aufgefaßt ergeben sich die Eigenschaften der elliptischen Transzendenten als Eigenschaften der Zahlen, insofern sie sich aus Quadratzahlen zusammensetzen lassen." Die Einleitung zu dieser Vorlesung schließt mit den Worten: „Man könnte

von diesen Reihen, welche immer konvergieren, als Definitionen ausgehen und von diesen rückwärts alle übrigen Sätze ableiten, denn Reihen, die immer konvergieren, sind die besten Definitionen der Transzendenten; die Art vom Integral auszugehen, hat viel weniger Anschaulichkeit, wenn man die Grenzen imaginär nimmt."

Die eigentliche Vorlesung selbst beginnt mit der Entwicklung des Abelschen Theorems für hyperelliptische Integrale und der Ableitung des Eulerschen Additionstheorems, und behandelt als Anwendung desselben die Aufgabe, die Relation zwischen den Radien zweier Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte zu finden, wenn diese einem Vieleck ein- und umgeschrieben sind. Er schließt daran die Addition und Multiplikation der elliptischen Umkehrungsfunktionen, geht weiter ausführlich auf das Divisionsproblem ein und hebt auch hier wieder, wie schon wiederholt in seinen Briefen an Legendre, hervor, daß, indem Abel, um die Multiplikation, er selbst, um verschiedene Transformationen zu erklären, die imaginären Größen einführten, sich das wichtige Theorem $\sin \operatorname{am} (iu, \varkappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am} (u, \varkappa')$ ergab, welches für $\varkappa = 0$ in eine bekannte Beziehung übergeht, welche zwischen den Kreisfunktionen und den Exponentialgrößen besteht. Aus dem Multiplikationstheorem wird die Entwicklung des Zählers und Nenners der elliptischen Funktionen in unendliche Doppelprodukte und Doppelreihen hergeleitet, und die Ausdrücke durch q für den Integralmodul und die Perioden entwickelt. Eine genauere Behandlung der Transformationstheorie des elliptischen Integrales 1. Gattung nach der in den Fundamenten angezeigten Methode, und eine kurze Besprechung der Integrale 2. und 3. Gattung beschließen die Vorlesung.

Der ständige Verkehr mit Bessel veranlaßte jetzt Jacobi, sich auch wieder allmählich Problemen anderer Natur zuzuwenden; die Besprechung von Fragen, welche die Theorie der algebraischen Gleichungen betrafen und Bessel besonders interessierten, waren die Veranlassung, daß er sich mit den Arbeiten von Sturm beschäftigte, bezüglich welcher er am 9. November 1829 Bessel ein kurzes Exposé schickte: „Dieses in der Kürze der mir von Sturm mitgetheilte Beweis. Ich bemerke noch, daß die Betrachtung der Reste der Division ihm eigenthümlich ist. Fourier betrachtet nur die höheren Differentiale. Aber der Geist der Fourierschen Betrachtung ist derselbe." So wird er auch durch Integraluntersuchungen von Bessel veranlaßt, sich mit interessanten Entwicklungsformen von Funktionen mehrerer Variabeln zu beschäftigen, die noch im Jahre 1829 unter dem Titel „Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum quae plures variabiles involvunt" erschienen. Jacobi geht in dieser Arbeit von der Identität aus:

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')} = L + L_1 + L_2,$$

worin

$$L = \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'} \cdot \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't},$$

$$L_1 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'} \cdot \frac{b}{x+by-t},$$

$$L_2 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't} \cdot \frac{a'}{b'y+a'x-t'},$$

und zeigt, daß, wenn man die beiden Seiten der Gleichung nach fallenden Potenzen von a und b' entwickelt, die Größen L, L_1, L_2 die drei Teile liefern, in denen entweder beide Potenzen von x und y negativ, oder die von x negativ, die von y positiv, oder die von x positiv, die von y negativ sind, woraus sich, da die Koeffizienten der x- und y-Potenzen in L, L_1, L_2 endliche Werte haben, während die des gegebenen Ausdruckes auf der linken Seite unendliche Reihen sind, Summationen oder Transformationen von unendlichen Reihen ergeben. Eine einfache Umformung liefert den Satz, daß

$$\left[\frac{1}{(ax+by)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b'y+a'x)^{n+1}}\right]_{x^{-\mu}y^{-\nu}}$$

$$= \frac{(\mu-1)!(\nu-1)!}{m!n!} \frac{1}{(ab'-a'b)^{m+n+1}} \left[(b'x-a'y)^m (ay-bx)^n\right]_{x^{\mu-1}y^{\nu-1}}$$

ist, und ähnliche Theoreme für mehr Variable. Um nun Anwendungen dieser Sätze auf die Theorie der bestimmten Integrale zu machen, folgert Jacobi, daß, wenn man den Koeffizienten von $\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$ in dem Ausdrucke

$$\left[\left(a+b\frac{y}{x}\right)\left(b'+a'\frac{x}{y}\right)\right]^{-n-1}$$

mit P_λ, den Koeffizienten von $\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda$ in dem Ausdrucke

$$\left[\left(b'-a'\frac{y}{x}\right)\left(a-b\frac{x}{y}\right)\right]^n$$

mit Q_λ bezeichnet,

$$P_\lambda = \frac{(n+\lambda)!(n-\lambda)!}{n!n!(ab'-a'b)^{2n+1}} Q_\lambda$$

ist, und hieraus ergibt sich für $\frac{y}{x} = e^{i\varphi}$, $a = b' = 1$, $b = a' = -\alpha$ die Entwicklung der Funktionen $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-n-1}$ und $(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^n$ nach der Fourierschen cosinus-Reihe mit den Koeffizienten P_λ und Q_λ, und daraus die von Euler gefundene Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+\lambda)!(n-\lambda)!}{n!n!} \int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi\,(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^n}{(1-\alpha^2)^{2n+1}}.$$

Gleichfalls einer Anregung von Bessel verdankt auch die in derselben Zeit verfaßte, „De resolutione aequationum per series infinitas" betitelte Arbeit ihre Entstehung. „Theoriam resolutionis aequationum per series infinitas principiis novis superstruam, quae maxime in eo versantur, ut indagetur serei eruendae functio generatrix sive functio, in cujus evolutione certa quadam ratione instituta inveniamus seriem, quae radicem exprimat ut certi cujusdam termini coefficientem." Jacobi übertrug die Untersuchung von Lagrange, welcher als generatrix für Funktionen einer

Variabeln, aus deren Entwicklung die Reihen für die Auflösungen der Gleichung $f(x) = 0$ hergeleitet werden, die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gefunden, nach einer Methode, die Ähnlichkeit hat mit der Residuenmethode von Cauchy, auf beliebig viele Funktionen mit mehr Variabeln, und entwickelt zunächst einen grundlegenden Hilfssatz, welcher für zwei Funktionen mit zwei Variabeln, für die er als generatrix $\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}$ findet, aussagt, daß, wenn die Potenzen der Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ nach fallenden Potenzen der Glieder $ax^{\mu}y^{\nu}$, $bx^{\mu'}y^{\nu'}$ entwickelt werden, in dem Ausdrucke $f^m \varphi^n \{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)\}$ der Koeffizient des Gliedes $\frac{1}{xy}$ gleich Null wird, wenn nicht zu gleicher Zeit $m = -1$, $n = -1$ ist, in welchem Falle der Ausdruck $\frac{1}{xy}$ den Koeffizienten $\mu\nu' - \mu'\nu$ hat; den Beweis führt er durch Logarithmierung der Funktionen und Entwicklung nach fallenden Potenzen der Variabeln und dehnt den Satz auf n Funktionen von n Variabeln aus. Aus der Anwendung dieses Lemmas auf die Umkehrung der Reihen und die Auflösung der Gleichungen durch unendliche Reihen folgt, wie schon Lagrange für die Gleichung $\alpha - x + yf(x) = 0$ die Entwicklung $\psi(x) = \psi(\alpha) + y\psi'(\alpha)f(\alpha) + \frac{y^2}{2!}\frac{d[\psi'(\alpha)f(\alpha)^2]}{d\alpha} + \cdots$ gefunden, daß für eine Gleichung $f(x, y) = 0$ die von x abhängigen Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion $\psi(x, y) = P + P'y + P''y^2 + \cdots$ wegen der Beziehung $\psi(x, y) = \psi(0, y) - \left[\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} \log f(x, y)\right]_{x^{-1}}$ durch $P^{(n)} = A^{(n)} - [T^{(n)}]_{x^{-1}}$ gegeben sind, wenn man mit $A^{(n)}$ und $T^{(n)}$ die Koeffizienten von y^n in der Entwicklung der Ausdrücke $\psi(0, y)$, $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} \log f(x, y)$ bezeichnet. Jacobi dehnt nun mit Hilfe der Sätze und Entwicklungen in seiner früheren Abhandlung „Exercitatio algebraica etc." dieses Theorem auf zwei und drei Gleichungen aus und findet, daß, wenn zwei Glei-

chungen zwischen zwei Variabeln $\tau = a'x + a_1 y + a''x^2 + a_1'xy + a_2 y^2 + \cdots$, $v = b'x + b_1 y + b''x^2 + b_1'xy + b_2 y^2 + \cdots$, zunächst, indem man $b_1 a_n^{(m)} - a_1 b_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)}$, $a'b_n^{(m)} - b'a_n^{(m)} = \beta_n^{(m)}$, $a'b_1 - a_1 b' = \Delta$, $b_1\tau - a_1 v = X$, $a'v - b'\tau = Y$ setzt, in die einfachere Form $X = \Delta \cdot x + \alpha''x^2 + \alpha_1'xy + \alpha_2 y^2 + \cdots$ $Y = \Delta \cdot y + \beta''x^2 + \beta_1'xy + \beta_2 y^2 + \cdots$ transformiert werden, die Frage, wie sich eine Funktion von x, y in die entsprechende von X, Y umgestaltet, dahin zu beantworten ist, daß, wenn $\psi(x, y) = \Sigma C_n^{(m)} X^m Y^n$ gesetzt wird, die Koeffizienten der Entwicklung durch den Ausdruck

$$C_q^{(p)} = \left[\psi(x, y)\frac{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}}{X^{p+1}Y^{q+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

bestimmt sind.

Die hervorragenden Mathematiker Frankreichs suchten sich nun sogleich nach dem Erscheinen der Fundamenta mit der Theorie der neuen Transzendenten bekannt zu machen. Am 21. Dezember 1829 gab Poisson in der Académie des Sciences einen „Rapport sur l'ouvrage de M. Jacobi intitulé: fundamenta etc.", in dem er nach Erwähnung der Arbeiten von Fagnano und Legendre eine in Form und Inhalt ausgezeichnete Übersicht von dem großen Werke entwarf. „. . . . L'étude que je viens de faire de l'ouvrage de M. Jacobi n'a fait que confirmer l'idée que j'avais déjà du mérite de ses découvertes en analyse et de la haute capacité, qu'elles supposent." Jacobi war jedoch mit diesem Berichte, von dem er erst einige Monate später Kenntnis erhielt, nicht ganz zufrieden, weil er mehr die Entdeckung der Θ-Funktion hervorgehoben zu sehen wünschte; er schreibt am 19. Juni 1830 an Bessel: „Poissons Rapport, den ich Ihnen zuzuschicken die Ehre hatte, enthält gegen Ende einiges Neue, die Übersicht und Einsicht in den Zusammenhang des großen Ganzen konnte man bei der fragmentarischen Bekanntmachung der weiteren Hauptmomente als Notizen u. s. w. von ihm nicht erwarten.

Auf die neuen Transcendenten Θ, H hat er zu wenig Werth gelegt; Gauss hatte auch darauf alles basirt, und Cauchy zeigte sogleich sich als Mathematiker von Fach, indem sein erstes Wort darüber war, daß das die Hauptsache sei. Jedenfalls ist es viel, daß er sich so schnell so weit hineingearbeitet hat." In seiner Antwort vom 19. Juni meint jedoch Bessel: „Sie scheinen mit Poissons Rapport nicht ganz zufrieden zu sein. Mir ist er äußerst klar erschienen ..... Daß er die Reihen nicht würdigt, habe ich für eine Übereinstimmung mit Legendres Meinung, der Sie einmal daran erinnerte, daß die elliptischen Functionen ihre Merkwürdigkeit durch ihre endlichen Relationen erhielten, angesehen."

Der Ruhm des 25jährigen Königsberger Mathematikers verbreitete sich immer weiter, und wissenschaftliche Ehrungen wurden ihm in reichem Maß zuteil; im Dezember 1829 war er bereits zum korrespondierenden Mitglied der Berliner Akademie gewählt worden, und schon am 8. Februar 1830 ernannte ihn auf Betreiben Legendres und Poissons die französische Akademie zum correspondant de la section de géometrie; am 24. Juli erhielt er von Arago, dem sécrétaire perpétuel de l'Académie, die Mitteilung: „.... de vous annoncer, que l'académie royal des sciences dans sa séance publique du 26. courrant décernera sollénement son grand prix de mathématiques. Ce prix de la valeur de 3000 frcs. a été partagé entre vous, Monsieur, et la famille de feu Mr. Abel de Christiania"; noch in demselben Jahre wurde er korrespondierendes Mitglied der Akademie zu Petersburg, und es beeilte sich auch die preußische Regierung, ihm am 1. Februar 1830 „in Rücksicht auf Ihre bisherige verdienstvolle Wirksamkeit und Ihre beifallswerthen litterarischen Leistungen" eine Gehaltszulage von 200 Talern zu bewilligen.

Eine Frucht seiner letzten Wintervorlesungen waren zwei kleinere Noten, welche im Jahre 1830 erschienen; die erste, „Problèmes d'analyse", betitelt, stellt die in seinen

Übungen behandelten Aufgaben, aus $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ den allgemeinen Ausdruck für $\frac{d^n y}{dx^n}$ zu entwickeln, und ferner wenn $r, r', r'', \cdots r^{(n)}$ irrationale Zahlen bedeuten, welche auf beliebig viel Dezimalstellen gegeben sind, für die Auffindung der unbekannten ganzen Zahlen in der Gleichung $Ar + A'r' + \cdots + A^{(n)}r^{(n)} = 0$ eine allgemeine und direkte Methode zu liefern, die zweite, „Theorème de géométrie", par un anonyme, wovon sich das Manuskript in seinem Nachlasse vorgefunden, behandelt kurz die Bewegung des Scheitels eines Winkels von gegebener Größe, der beständig eine vorgelegte Kurve berührt.

Nachdem der Briefwechsel mit Legendre durch die Pariser Reise eine kurze Unterbrechung erfahren, nahm Jacobi denselben am 2. Juli 1830 wieder auf, um Legendre den Dank für die Übersendung der 3. Ausgabe seiner théorie des nombres abzustatten und zugleich eine Bemerkung Fouriers allgemein-wissenschaftlicher Natur zu rektifizieren: „ ... Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion, que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde ..." Neben einigen Andeutungen, welche eine Richtigstellung mehrerer zahlentheoretischer Behauptungen von Legendre zum Gegenstand haben, kommt Jacobi in diesem Briefe wieder auf das Abelsche Theorem, „ein besonders wirksames Hülfsmittel zur Erweiterung der Grenzen der Analysis" zurück: „En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1 x + \cdots + a_n x^n}}$. Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues, auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de x."

In der Antwort vom 1. Oktober 1830 erkennt Legendre zunächst die Berichtigung jener von ihm in seiner théorie des nombres veröffentlichten zahlentheoretischen Sätze bereitwillig an und fährt fort: „j'ai vu avec plaisir dans la lettre, que vous avez écrite à l'académie, que vous vous occupez à perfectionner la théorie des perturbations, et que vous avez l'espoir d'y employer utilement la théorie des fonctions elliptiques. C'est un objet très digne de vos recherches et qui a été fort négligé par nos devanciers; j'avais eu quelques idées là-dessus, mais sans rien approfondir; j'en ai fait mention dans mes exercices et dans mon traité des fonctions elliptiques, espérant qu'un jour les géomètres s'en occuperaient sérieusement, et une pareille entreprise ne saurait être mieux placée qu'entre vos mains ... Vous auriez pu, Monsieur, me faire un pareil reproche, car je n'ai pu, par la même cause, vous faire l'accueil que j'aurais voulu vous faire pendant votre voyage à Paris. Je me suis acquitté de votre commission auprès de ma femme et de Mlle. Germain; elles vous remercient de votre bon souvenir, et vous souhaitent toute espèce de bonheur. Mlle. Germain était malade, quand vous l'avez vue, son état a malheureusement fort empiré depuis."

Außer mit den von Legendre hier erwähnten Störungsuntersuchungen beschäftigte sich Jacobi im Sommer 1830, in welchem er nur eine öffentliche Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen und Kurven hielt, mit der Fortführung seiner im vorigen Jahre erschienenen Unter-

suchungen über elliptische Funktionen, die noch im Jahre 1830 unter dem Titel „De Functionibus ellipticis commentatio altera" im Crelleschen Journal erschien. „Proponemus in sequentibus formulas quasdam elementares circa summas functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arithmeticam constituunt"; wenn die Summe $F(u) + F(u+a) + F(u+2a) + \cdots + F(u+(n-1)a)$ mit $\Sigma^{(n)} F(u)$ bezeichnet wird, so ergeben sich leicht für $\sin \operatorname{am} \frac{na}{2} = 0$ Beziehungen von der Form

$$\sum^{(n)} \{ \cos \operatorname{am} u \, \varDelta \operatorname{am}(u + pa) + \cos \operatorname{am}(u + pa) \, \varDelta \operatorname{am}(u) \} = 0$$

und analoge, woraus, wenn $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$ gesetzt wird, die Transformationsformeln der Fundamenta in:

$$\frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$$

$$= \sin \operatorname{am} u + \sin \operatorname{am}(u + 4\omega) + \cdots + \sin \operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega)$$

übergehen, und ähnliche für $\cos \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ und $\varDelta \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, wie er sie schon in seiner ersten Vorlesung über elliptische Funktionen entwickelt hat.

Im Winter 1830/31 konnte Jacobi, da er nur publice über Kegelschnitte, privatim über höhere Arithmetik las und die letztere Vorlesung sich nur auf die Elemente der Zahlenlehre erstrecken sollte, die große öffentliche für das nächste Sommersemester in Aussicht genommene achtstündige Vorlesung über elliptische Transzendenten vorbereiten, und war bereits in umfassenden, darauf bezüglichen Untersuchungen begriffen, um dem Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen eine völlig neue Gestalt zu geben, als der Beginn des Jahres 1831 eine entscheidende Wendung in seinem Leben herbeiführte.

„Liebe Marie! Es ist eine besondere Angelegenheit, die mich treibt Ihnen zu schreiben, und ich mag Ihnen ohne weitere Vorbereitung die Sache einfältiglich eröffnen", so beginnt der erste Brief Jacobis an seine zukünftige Braut, die

Tochter des Kommerzienrat Schwinck in Königsberg, welche eben im Begriff war nach Frankfurt a. O. zu dem Regierungspräsidenten v. Wißmann zu eilen, um dessen schwer erkrankter Frau, ihrer älteren und von ihr verehrten Schwester, ein ganzes Jahr hindurch die liebevollste Pflege zu widmen. „Wenn nämlich, seitdem ich das erste Mal das Glück hatte, Sie zu sehen, mir es klar wurde, daß sich mir hier ein Wesen zeige von einer Bedeutung, wie ich sie früher niemals angetroffen, niemals wieder anzutreffen hoffen dürfe, wenn in entlegenen Zwischenräumen die Augenblicke, in welchen sich mir jenes Glück wiederholte, mir immer die bedeutendsten meines Lebens wurden, so mußte die stille Gewalt, welche eine Erscheinung wie diese, wie die Ihre, unwiderstehlich auf den ausübt, den Sie einmal ergriffen, endlich mein ganzes Sein und meine Gedanken auf diesen einen Punkt richten und ihn zum Mittelpunkt meines ganzen künftigen Lebens machen. Von früh auf mit den ernstesten Arbeiten beschäftigt, in ihnen den Kreis meines Daseins erschöpft glaubend, von ihnen volle Befriedigung alles dessen erhaltend, was jugendliche Ruhmbegierde nur träumen konnte, mußte ich mir selbst befremdlich vorkommen, als ein scheinbar reiches Dasein mir mit einem Male leer, und Ruhm und Ehre und Wissenschaft garnicht mehr wesentlich schienen und gering gegen einen freundlichen Blick von Ihrem Auge, wenn mir dieser würde. Und so war mir die gewöhnliche Ruhe und Heiterkeit unter der Hand entwendet, und ich mochte doch die Unruhe und Angst um alles nicht missen. Bei dieser schlimmen Lage der Dinge sehen Sie nun wohl, Sie wunderbares Mädchen, daß nur Sie mir Heilung und Heil gewähren können, die Sie mir die Ruhe genommen haben, und daß Sie, die Sie mein altes Dasein zerstört haben, mir ein neues gründen müssen. Und so frage ich Sie denn herzlich, aufrichtig und wohlmeinend, und so als wenn ich Ihnen in's Auge sähe, ob Sie der treuen Neigung, welche mein Herz Ihnen bietet, nicht zürnen und

ob Sie mir erlauben, bei Ihren Aeltern um Ihre Hand zu werben . . .“,

und bald darauf darf er ihr schreiben: „Ihr Brief hat mich sehr glücklich gemacht, nicht grade bloß seines Inhaltes wegen, sondern weil es etwas von Ihnen ist, und was von Ihnen ist, kann mir nur frommen. Ihrer Andeutung, mit einer Erwiederung zu warten, bis Sie von Frankfurt Antwort erhalten, kann ich nicht nachkommen; es wäre Verrath an mir und Ihnen gewesen. Ich habe nie gezweifelt, kann garnicht mehr zweifeln, habe mich nicht übereilt. Ich habe immer den Grundsatz gehabt, einen solchen Schritt nie zu thun, wenn ich ihn nicht thun mußte, so lange ich es noch vermeiden, noch lassen kann. Er ist geschehen mit solcher Nothwendigkeit, bedingt durch die innerste Art Ihres Seins und des meinen, wie etwa die ewigen Gesetze der Natur und des Geistes erfolgen mögen: hier war keine willkürliche Entschließung erst zu fassen und mithin keine Übereilung. Und so geschah es mir wohl oft in entscheidenden Augenblicken meines Lebens, wie es gewiß dem ungetrübten Geiste immer geschieht, daß ihm eine nothwendige That klar vor der Seele steht, selbst wenn er sich Gründe des Verstandes dagegen, so gut wie jeder andere, an den Fingern abzählen kann . . . Ich hätte es nicht ausgehalten, mit der gewöhnlichen Rede neben Ihnen herzugehen und mit der Leidenschaft im Herzen; ich hätte diese Unwahrheit nicht ausgehalten, die meiner und Ihrer mir unwürdig dünkt. Giebt es hier etwas verworrenes, was ich nicht lösen kann, zu wem sollte ich meine Zuflucht nehmen als zu Ihrem Verstande, Ihrer Güte, Ihrer Reinheit; ich gebe mich Ihnen ganz, machen Sie mit mir, was Sie wollen“ . . .

Am 10. Mai 1831 schreibt er seiner Braut nach Frankfurt: „Ich fühle nur Sie, ich denke nur Sie, ich lebe nur durch Sie, Sie sind mir die ganze Welt; ich schenke ihr alles, Ruhm und Ehre und Reichthum und Ansehen und Glück, wenn ich nur Sie habe . . .“.

Trotz der großen und schwierigen Sommervorlesung waren seine Gedanken doch ganz von dem bräutlichen Glück in Anspruch genommen; „Heiterkeit und Laune", schreibt er am 6. Juli 1831 seiner Schwester, „sind ihre Grundstimmung, die ich ihr gewiß nicht zu verderben hoffe. Der Vater meiner Braut ist einer der interessantesten Menschen, wegen seines ausgezeichneten Verstandes vielfach bekannt und berühmt; er hat Geschäfte in die Millionen gemacht, jetzt ist er durch Speculationen gänzlich verarmt. Marie hat die glänzenden Zeiten, die schon den Keim des Unglücks in sich trugen, garnicht mehr mit Bewußtsein erlebt, was sie selbst für ein Glück hält ... die Mutter soll früher ausgezeichnet schön und geistreich, vorzüglich musikalisch gewesen sein ... es ist sehr interessant mit dem Vater zu reden, die großartigen Verhältnisse erzeugten großartige Ansichten, Kant nannte ihn immer einen ungeschliffenen Juvel, da er unterrichtet eigentlich nicht ist ...",
und seinem Bruder Moritz ruft er jubelnd zu:

„Das Leben der Götter ist Mathematik, sagt Novalis mit Recht, denn mein Leben jetzt ist das Leben der Götter. Du aber bist, was Du bist, aber bleibe nicht, was Du bleibst. Mache daß Du bald erkennen mögest, wie ich seit 8 Tagen, daß das Absolute kein Jenseits ist. Und somit ist der Inbegriff des höchsten Wunsches, den ich zu Deinem Geburtstage Dir hegen kann, Dir offenbart ... Mit meinen Arbeiten aber steht es so, daß ich viele Jahre nur zu schreiben brauchte, indem die seltensten Resultate gesammelt sind, bei vielem, was schon fleißig ausgearbeitet ist, nur die letzte Hand fehlt, aber ich konnte bisher nie die Freudigkeit finden, die zum Vollenden nöthig ist. Bin ich jetzt nun freudig wie je, zu jeder Unternehmung und Arbeit, so ist Hoffnung für manches."

Es war nur zu natürlich, daß die große achtstündige Vorlesung über die elliptischen Transzendenten, welche ungleich reichhaltiger und umfassender geplant war als die

erste von ihm in Königsberg gehaltene, und von der ebenfalls eine Nachschrift von Sanio vorliegt, durch die seelischen Aufregungen, welche Jacobi in dieser Zeit beherrschten, eine unverkennbare Einbuße erlitt; er behielt ganz gegen seine ursprüngliche Absicht genau den in seiner früheren Vorlesung genommenen Gang bei mit geringer Abänderung in der Reihenfolge der Untersuchung der elliptischen Integrale der drei Gattungen, und es trat im wesentlichen nur die Besprechung des arithmetisch-geometrischen Mittels nach der Gaussschen Darstellung und die Entwicklung des Abelschen Theorems für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung neu hinzu. „Hier zeigt sich schon ein großer Unterschied zwischen diesen und den vorigen Transzendenten, denn man kann die Summe mehrerer Integrale nicht wie bisher auf eins reduzieren, sondern nur bis auf 2, deren Argumente Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind. Dieser Umstand verändert ganz den Charakter der Transzendenten, so daß auf gewöhnliche Art keine Folgerungen aus denselben gezogen werden können." Die Einführung der θ-Funktion erfolgt nur an einer Stelle und auch dort mehr andeutungsweise.

Nur eine kurze, wahrscheinlich aus der Vorlesung hervorgegangene Arbeit wurde noch im Sommer 1831 von ihm fertiggestellt, betitelt „Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre."

„Dans une des notes sur les fonctions elliptiques j'ai avancé que les fonctions elliptiques doivent entrer dans toutes les parties de l'analyse mathématique et contribuer essentiellement à leurs progrès." Es handelt sich hier um die Entwicklung einer Quadratwurzel aus einem Polynome 4. Grades in einen Kettenbruch, und zwar ergibt sich für

$$R = z(z-1)\left(z - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(z - \frac{1}{\Delta^2\alpha}\right) = z^4 - az^3 + bz^2 - cz$$

der Kettenbruch

$$\sqrt{R}=z^2-\tfrac{1}{2}az+$$
$$i_1+\frac{1}{M_1 z+m_1}+\frac{1}{M_2 z+m_2}+\cdots+\frac{1}{M_{n-1}z+m_{n-1}}+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{R}+z^2-\frac{1}{2}az+i_n}{q_n(r_n z-1)}},$$

worin, wenn $\alpha = \operatorname{am} u$, $\alpha_n = \operatorname{am} nu$ gesetzt sind,

$$i_n = \frac{1}{2\cos^2\alpha\,\varDelta^2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right), \quad r_n = 1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n+1}}$$

und für ungerade n:

$$q_n = \frac{1}{4\cos^4\alpha\,\varDelta^4\alpha}\left\{\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right\}^2$$

ist, und ähnlich, wenn n gerade. „Lorsque R surpasse le quatrième degré, la fraction continue dans laquelle on convertit $\sqrt{R}$ dépend des formules de multiplication des transcendantes plus élevées que les transcendantes elliptiques.“

Aus eben dieser Zeit liegen zwei aus seinen nachgelassenen Papieren veröffentlichte kurze Aufzeichnungen vor, die wahrscheinlich für den in Aussicht genommenen zweiten Band der Fundamenta bestimmt waren und an sich ein großes historisches Interesse haben. Die erste, betitelt „De divisione integralium ellipticarum in n partes aequales“, von Borchardt 1891 herausgegeben, führt ähnlich wie in den früheren an Legendre gerichteten Mitteilungen aus, daß Abel zuerst die Teilung des elliptischen Integrales in n Teile von der Auflösung einer algebraischen Gleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades abhängig gemacht und gezeigt hat, daß diese Gleichungen allgemein auf 2 vom n^{ten} Grade zurückgeführt werden können, die algebraisch auflösbar sind. „Quo egregio invento maxime ille de hac theoria meritus est vastumque altissimarum quaestionum campum aperuit.“ Als Jacobi in den „Astronomischen Nachrichten“ die algebraische Auflösung der Teilungsgleichung 9^{ten} Grades veröffentlichte, war jedoch

die Arbeit von Abel noch nicht erschienen; er führt nun in dieser Aufzeichnung allgemein, um zu dem schon früher veröffentlichten Resultate zu gelangen, das Problem nicht auf 2 Gleichungen n^{ten} Grades zurück, sondern löst die Teilungsgleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades direkt auf, wobei in diesen algebraischen Auflösungen gewisse konstante Größen vorkommen, welche von der Teilung des vollständigen Integrales in n gleiche Teile abhängen und welche, wie Abel nachher gezeigt hat, die Lösungen einer allgemein nicht, aber für gewisse spezielle Werte des Moduls wohl algebraisch auflösbaren Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades sind. „Grave quidem videri possit incommodum, quod pro modulo certe indefiniti valoris ad aequationem irresolubilem deferamus; accuratius autem inspicienti inde vel magnum commodum analysi algebraicae nasci posse elucebit. Inventum enim est genus aequationum algebraicarum, quarum radices nullo modo per extractionem radicum exhibere licet, quae tamen per divisionem integralium ellipticorum resolvi possunt“, und er schließt mit den Worten: „Eodem tempore quo Cl. Abel haec et alia praeclare et eleganter invenit, ipse theoriam generalem transformationis functionum ellipticarum condidi, et a principio duplicis periodi, ad quod et ipse deveneram, et a principio novo profectus, quod in Fundamentis principium transformationis vocavi.“

In der zweiten von Mertens ebenfalls 1891 aus dem Nachlasse Jacobis veröffentlichten Arbeit, die mit der ersten in engster Verbindung steht, „De multiplicatione functionum ellipticarum per quantitatem imaginariam pro certo quodam modulorum systemate“ will er die Fälle untersuchen, in welchen ein Modul bei einer Transformation in seinen komplementären übergeht, und er folgert aus dem Ausdrucke für den Multiplikator durch $\varkappa$ und λ, wenn $\lambda^2 = 1-\varkappa^2$ gesetzt wird oder auch unmittelbar aus der Identität der komplementären und supplementären Transformation den