hundsflügel aufgetreten bin — nun lebe wohl und sei fidel sehr baldiger Professor.“ Pietätvoll bewahrte Jacobi die Zeilen seines Vaters auf, die sich noch heute in seinem Nachlaß befinden. Am 16. Januar 1828 folgten die Glückwünsche der Eltern zu der fröhlichen Neujahrsbotschaft von der Ernennung zum Extraordinarius.

Jacobi als außerordentlicher Professor an der Universität zu Königsberg vom Januar 1827—Juli 1832.

Kaum war der erste Teil der recherches von Abel erschienen, die es nicht zweifelhaft ließen, daß dieser schon seit fast zwei Jahren in dem Besitze einer allgemeinen und umfassenden Theorie der elliptischen Transzendenten war, und daß ihm jedenfalls in sehr vielen Punkten auf diesem Gebiete die Priorität der Entdeckung gebühre, als der wunderbare, in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften fast einzig dastehende Wettkampf zwischen „den beiden Athleten“ begann, der Jacobi zunächst keine Zeit ließ zu der geplanten Ausarbeitung einer zusammenhängenden, in allen Teilen wohlbegründeten Theorie. Nur Einer sah still und nicht ohne Bewunderung diesem geistigen Ringen zu, er, der schon seit mehr als 30 Jahren im Besitze der meisten Resultate und Methoden war, welche in der nächsten Zeit auf dem so unerwartet entstandenen neuen und großen Gebiete der mathematischen Wissenschaften erobert werden sollten.

Jacobi vertiefte sich nun zunächst in das Studium des ersten Teiles der recherches und schreibt darüber am 12. Januar 1828 aus Königsberg an Legendre:

„Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les fonctions elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être

vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un mémoire de Mr. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du Journal des Mathématiques pures et appliquées publié à Berlin par Mr. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est pas encore parvenue. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation, dont je me sers ordinairement."

Er hebt in diesem Briefe die Lösung des Divisionsproblems besonders hervor, durch welche Abel die algebraische Auflösbarkeit der Divisionsgleichung n^{ten} Grades nachgewiesen und die Teilung einer beliebigen elliptischen Funktion auf die Teilung der ganzen Funktion K zurückgeführt, bemerkt jedoch schon hier, daß sich die algebraische Auflösung der Teilungsgleichung einfacher, als es bei Abel geschehen, mit dessen Bezeichnungen in der Form darstellen läßt:

$$\sum_{-n}^{+n} p^m \sum_{-n}^{+n} q^u \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega + 2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) p^m q^u$$

$$= \sqrt{A + Bf(2n+1)\beta F(2n+1)\beta},$$

worin p und q $2n+1$. Einheitswurzeln, A und B ganze Funktionen von $\varphi(2n+1)\beta$ sind, und durch Variation der Größen p und q die $(2n+1)^2$ Posten der linken Seite sich, ohne noch eine Gleichung n . Grades auflösen zu müssen, linear durch die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen ausdrücken lassen, ein Resultat, das er in einer vom 25. Januar 1828 datierten Notiz „Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques Vol. II. p. 101 du Journal de M. Crelle“ in eben diesem Journal veröffentlichte.

„Nicht minder erfolgreich“, sagt Dirichlet, „griff Jacobi in die von Abel gegebene Theorie der allgemeinen

Teilung ein. Die Art, wie Abel das Problem gelöst hatte, zeigte zwar, daß die Wurzeln immer algebraisch ausdrückbar sind, erforderte aber zur wirklichen Darstellung derselben die Bildung von gewissen symmetrischen Wurzelverbindungen, die nur in jedem besonderen Falle bewerkstelligt werden konnte. Aus einem neuen Prinzip leitete Jacobi die schließlichen, für jeden Grad geltenden und unmittelbar aus den Daten des Problems gebildeten Ausdrücke der Wurzeln ab, welche Ausdrücke überdies vor den Abel'schen eine größere Einfachheit ihrer Form voraushaben. Es war das der Gedanke, die unendlichen Produkte, durch deren Quotienten Abel die elliptischen Funktionen ausgedrückt hatte, als selbständige Transzendenten in die Analysis einzuführen."

Der Brief Jacobis an Legendre vom 12. Januar, welcher zunächst der Darstellung der Abelschen Entdeckungen gewidmet war, enthält aber auch eigne, für den weiteren Ausbau der Theorie der elliptischen Funktionen höchst bedeutungsvolle Resultate. Er spricht in demselben bereits von den allgemeinen algebraischen Modulargleichungen zwischen den vierten Wurzeln der Integralmoduln, jenen Gleichungen, welche später eine Brücke bilden sollten zwischen der Theorie der elliptischen Transzendenten und der Algebra, hebt hier schon den Satz hervor, daß die zu einem beliebigen Transformationsgrade gehörigen Modulargleichungen ein und derselben Differentialgleichung dritter Ordnung genügen, „un resultat curieux, qui d'abord m'a frappé un peu“, und fügt noch die Bemerkung hinzu: „aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module ... ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, κ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$, ... c'est un genre de multiplication, qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle.“ Es ist endlich noch für den weiteren Verlauf der Parallelität seiner und Abels Untersuchungen nicht un-

wesentlich, aus jenem Briefe die Stelle hervorzuheben, in welcher er für die Relation $\sin am(u, \kappa) = i \operatorname{tg} am(u, \kappa)$ die Priorität Abel zuspricht: „théorème fondamental d'Abel“, so daß hiernach in dieser Gleichung allein, wie wir sehen werden, nicht die Entdeckung der doppelten Periodizität durch Jacobi zu suchen ist.

Am 6. Februar 1828 sendet Legendre eine „Note sur les nouvelles propriétés des fonctions elliptiques découvertes par M. Jacobi“ an Schumacher, in der er die Jacobischen Transformationsarbeiten ausführlich bespricht und, indem er den direkten Weg verläßt, eine Verifikation des Jacobischen Theorems zu geben versucht. Aber noch immer kann er seine Verwunderung darüber nicht unterdrücken, daß Transformationen beliebigen Grades ein elliptisches Integral in ein gleichgestaltetes verwandeln, „ce qui multipliera d'une manière encore plus prodigieuse les transformations de la fonction F , véritable Protée analytique“, und bei aller Bewunderung der Jacobischen Entdeckungen wiederholt sich immer wieder die Klage über die Undurchsichtigkeit des von ihm für das Transformationstheorem gegebenen Beweises: „Ici on doit regretter que l'auteur remplisse la tâche, qu'il s'est imposée par une sorte de divination, sans nous mettre dans le secret des idées, dont la filiation l'a amené progressivement à la forme que doit avoir $1 - y$, pour satisfaire aux conditions du problème. Au reste cette suppression des idées intermédiaires s'explique assez naturellement par la nécessité de ne pas donner trop d'étendue à une démonstration, qui devait être insérée dans un journal scientifique; et il est à croire que quand l'auteur donnera un libre cours au développement de ses idées, dans un ouvrage composé ad hoc, il rétablira les intermédiaires dont l'absence se fait remarquer.“ Dieselbe Klage läßt er am 9. Februar in einem direkten Briefe an Jacobi laut werden: „Vous verrez dans ma note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante, si vous y eussiez

joint quelques détails sur la série des idées, qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1 - y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier.“

Am 14. Februar, nachdem bereits zwei Tage zuvor der zweite Teil der recherches von Abel in die Hände von Crelle gelangt war, erhält Jacobi den traité von Legendre und teilt dies am folgenden Tage Bessel mit: „Ew. Hochw. beehre ich mich einen Gruß des Baron v. Humboldt zu bestellen, den er mir in einem Schreiben, das ich gestern von ihm erhielt nebst dem Werke von Legendre aufgetragen hat. Ich erlaube mir, Ihnen diesen Brief selber mitzutheilen, weil ein passus daraus Sie vielleicht interessirt, wie er ganz Deutschland interessiren muß. Denn der Mann, der die Zierde seines Jahrhunderts ist, ist es doch zunächst seiner Zeit und seines Landes, das ihn besitzt. Wir aber, denen das Glück geworden ist, Sie näher kennen zu lernen, dürfen zu der allgemeinen Bewunderung, welche der Geschichte anheimfällt, noch die besondere der persönlichen Tugenden fügen.“

Trotz der wiederholten dringenden Bitten Legendres kommt Jacobi noch immer nicht dazu, ihm genauere Mitteilungen über den Beweisgang für all seine umfassenden Theoreme zu machen; denn beständig drängen sich ihm neue Probleme in der Theorie der elliptischen Transzendenten auf, die immer wieder mit wunderbarer Leichtigkeit bewältigt werden. So schreibt er im März 1828 ein kurzes

Billet an Bessel: „Sei $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, so wird

$$\sin am(u, \kappa) = \frac{2\sqrt{q} \sin \frac{\pi u}{2K} - q^1 \sin \frac{3\pi u}{2K} + q^2 \sin \frac{5\pi u}{2K} - \dots}{\sqrt{x} \left(1 - 2q^1 \cos \frac{\pi u}{2K} + 2q^2 \cos \frac{2\pi u}{2K} - \dots \right)}$$

hieraus für $u = K$:

$$\sqrt{x} = 2\sqrt{q} \frac{1 + q^2 + q^6 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots},$$

die beiden wichtigsten Formeln vielleicht für die Theorie.

$$\text{Nachschrift: } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$\kappa \cdot \kappa + \kappa' \cdot \kappa' = 1$ “, und sendet am 1. April eine Arbeit — „fort ingenieur“ bezeichnet sie Legendre — „Über die Anwendung der elliptischen Transzendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie“ betitelt, an das Crellesche Journal, in der er sich die Aufgabe stellt, die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäßigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist. Diese schon von Euler für das Dreieck behandelte Aufgabe war von Steiner, „der es gewohnt ist, die bekannten Grenzen hinter sich zu lassen“, für das Fünfeck, Sechseck und Achteck gelöst worden, nachdem bereits Fuss dieselben Resultate und außerdem noch die Beziehung für das Siebeneck — bei weitem die schwierigste der hierher gehörigen Aufgaben — schon früher hergeleitet hatte, und es spricht Jacobi diesem die Priorität vor Steiner zu, weil die beschränkende Annahme, die Fuss dadurch machte, daß das ein- und umgeschriebene Polygon einen Durchmesser habe, der durch beide Centra geht und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Teile teilt, wie Jacobi nachweist, durch einen Satz von Poncelet beseitigt werden kann.

Jacobi entwickelt in dieser Arbeit einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen dem bekannten Ponceletschen Schließungsproblem und der Theorie der elliptischen Funktionen. Zieht man nämlich aus einem Punkte A eines Kreises mit dem Mittelpunkte C und dem Radius R eine Tangente an einen innerhalb gelegenen Kreis mit dem Mittelpunkte c und dem Radius r , legt ferner von dem Schnittpunkte A' jener Tangente mit dem ersten Kreise wieder an den innern Kreis eine Tangente bis A'' , u. s. w., verlängert

endlich $cC = a$ bis zum Schnittpunkte P mit dem ersten Kreise und nennt die Winkel $ACP = 2\varphi$, $A'CP = 2\varphi'$, $A''CP = 2\varphi''$, u. s. w., so findet Jacobi die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi^{(r+1)} + \varphi^{(r-1)}}{2} = \frac{R-a}{R+a} \operatorname{tg} \varphi^{(r)},$$

welche mit denjenigen übereinstimmen, die zur Vervielfachung des Argumentes t der elliptischen Funktion am $(u+t)$ aufgestellt werden, und folgert daraus leicht den Satz, daß, wenn man die Größen α und κ aus den Gleichungen bestimmt $\cos \alpha = \frac{r}{R+a}$, $\kappa^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}$, die Beziehung, welche zwischen R , r und der Distanz a der beiden Mittelpunkte stattfindet, wenn der erste Kreis einem n -Eck umgeschrieben, der zweite diesem eingeschrieben ist und h die Zahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet, in Legendrescher Bezeichnung in der einfachen Form gegeben ist: $F(\alpha, \kappa) = \frac{h}{n} F(\pi, \kappa)$.

Schon am folgenden Tage, am 2. April 1828, sendet er noch ohne Kenntniß des zweiten Teiles der in demselben Hefte des Journals veröffentlichten recherches von Abel an Crelle eine „Note sur les fonctions elliptiques“ betitelte Arbeit, welche die Ausführung der Bessel bereits früher mitgeteilten Resultate enthält. An die Darstellung der elliptischen Funktionen als Quotienten zweier Fourierschen Reihen schließt sich die Entwicklung von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ nach den

Potenzen von $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlen sind, ein Ausdruck, von dem Jacobi später sagt: „me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie“ — „formule due à M. Jacobi“, sagt Abel bei der Zitierung dieser Arbeit, „où ce géomètre présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes“. Es folgen ferner in dieser kurzen, aber fundamentalen Note Jacobis, welche nur die Resultate seiner Untersuchungen bringen

sollte, die für die weitere Entwicklung der Algebra und Zahlentheorie so wichtig gewordene Darstellung von $\sqrt{x}$ als Quotient von zwei nach quadratischen Exponenten von q und $q^{\frac{1}{4}}$ fortschreitenden Reihen, von denen Jacobi später in einem Briefe an Legendre sagt: „toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'analyse“, und weiter das auch von Abel nur in etwas anderer Form im zweiten Teil der recherches veröffentlichte Resultat, daß für einen Primzahlgrad der Transformation einem gegebenen Modul immer $n + 1$ andere transformierte Moduln entsprechen, die man erhält, wenn man q durch $q^n, q^{\frac{1}{n}}, \alpha q^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$, worin $\alpha^n = 1$, ersetzt, zu welchem Theorem Jacobi später in einem Briefe an Legendre die Bemerkung hinzufügt: „M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées.“ Jacobi stellt endlich noch die schon in dem Briefe an Legendre erwähnte Differentialgleichung 3. Ordnung für den transformierten Integralmodul auf und hebt die Fundamenteigenschaften der Modulargleichungen bei Anwendung zweier linearer Transformationen auf den primären und transformierten Modul hervor. Das von Abel in seinen „Aufgaben und Lehrsätze“ ausgesprochene Theorem gibt ihm Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über die komplexe Multiplikation, die er mit den Worten begleitet: „tout cela découle immédiatement des principes établis par M. Abel.“

Zu gleicher Zeit theilt Jacobi am 12. April Legendre die in dieser Note besprochenen Entwicklungsformen der $\sin am$, des Integralmoduls und der Periode K mit und weist darauf hin, daß der Zähler und Nenner seiner $\sin am$ den mathematischen Physikern Frankreichs bereits bekannte Funktionen sind. „Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres, qui s'occupent

du mouvement de la chaleur; les numérateurs et les dénominateurs des fractions, par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question.“ Indem er nun aber auf die Klagen Legendres über die Undurchsichtigkeit der leitenden Ideen in seinen ersten Transformationsarbeiten näher eingeht, gesteht er zunächst zu, daß Legendre mit seiner Vermutung recht hatte, daß er anfänglich nur durch Induktion zu seinen allgemeinen Transformationsausdrücken gelangt sei.

„Vous auriez voulu, que j'eusse donné la chaîne des idées, qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre, sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant: La première chose, que j'avais trouvée (dans le mars 1827) c'était l'équation $\frac{T}{M} = V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}$; de là je reconnus, que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'analyse algébrique déterminé, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à Mr. Schumacher, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^2}$, $y = \frac{\alpha x + \beta x^3}{1 + \epsilon x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin am \frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme,

dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à Mr. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin \operatorname{am}(i\xi, \kappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(\xi, \kappa)$, j'en tirai la transformation de κ' en λ' . J'avais donc deux transformations différentes, l'une de κ dans un module plus petit λ , l'autre de κ' dans un module plus grand λ' . De là, je fis la conjecture, qu'en échangeant entre eux κ' et λ , κ et λ' on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci après.

Dieser durch Form und Inhalt so hochinteressante Brief, aus dem besonders hervorzuheben, daß, wenn auch Jacobi in einem früheren Schreiben an Legendre in betreff der Auffindung der Relation $\sin \operatorname{am}(i\xi, \kappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(\xi, \kappa)$ Abel die Priorität der Veröffentlichung zugestanden, er doch selbständig und zwar vor Abfassung seiner vom 18. November 1827 datierten Arbeit „demonstratio theorematis etc.“, wahrscheinlich im Juli dieses Jahres, diese Beziehung gefunden, kreuzte sich mit einem Briefe von Legendre vom 14. April 1828, in welchem derselbe erwähnt, daß er von Schumacher, und dieser von Bessel, die Mitteilung erhalten habe, Jacobi sei mit der Abfassung eines großen Memoires über die Theorie der elliptischen Funktionen beschäftigt, und hinzufügt: „mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail. . . Si Mr. Gauss était tombé sur de pareilles découvertes, qui surpassent à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier“ — und doch hatte Gauss so viele dieser Entdeckungen schon längst gemacht, ohne je etwas darüber zu veröffentlichen!

Noch vor Beginn des Sommersemesters, für das er, weil mit Arbeiten überhäuft, nur eine öffentliche Vorlesung über Arithmetik angekündigt hatte, sandte Jacobi eine vom 24. April 1828 datierte Arbeit „Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés“ an Crelle, welche eine zahlentheoretische Anwendung der kurz zuvor gefundenen Reihenentwicklungen nach Potenzen der Größe q ohne Beweis mit den Worten ankündigt:

„Je tire de la théorie des fonctions elliptiques le théorème suivant: Soit n un nombre impair quelconque, si l'on peut trouver de m manières quatre nombres impairs a, b, c, d tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4n$, en ayant attention de compter une même solution autant de fois que les quatre carrés peuvent être permutés entre eux, m sera égal à la somme des facteurs du nombre n . . . Ce théorème remarquable paraît être assez difficile à démontrer par les méthodes connues de la théorie des nombres. La démonstration fournie par la théorie des fonctions elliptiques est entièrement analytique.“

Am 7. Mai 1828 schreibt Schumacher an Gauss:

„Ich habe hier einen Brief von Jacobi erhalten, von dessen Inhalt ich Sie doch in Kenntniß setzen muß, um zu erfahren, ob das, was ich ihm zu antworten denke, Ihren Beifall hat. Er schreibt, daß mein Brief aus Altona, der während Ihrer Anwesenheit und, wie ich glaube, mit Ihrer Approbation geschrieben ward, folgende Stelle enthalte: 'Gauss hat schon im Jahre 1808 die 3theilung, 5theilung und 7theilung entwickelt und dabei die neuen sich darauf beziehenden Modulscales gefunden.' Nun verlangt er zu wissen, was ich mit dem Worte 'entwickeln' verstanden habe? Ob es heißen solle, daß Sie die Gleichungen vom 9^{ten}, 25^{ten} und 49^{ten} Grade, wovon dieses abhängt, wirklich aufgelöst und die Wurzeln algebraisch dargestellt hätten? In diesem Falle, setzt er hinzu, müßten Sie im Besitz von Hilfsmitteln und Methoden sein, und Schwierigkeiten überwunden haben, wogegen alles, was er gethan habe, Kinder-

spiel sei, indem die ganze allgemeine analytische Theorie, wie glänzend sie auch sein möge, nicht so viel Schwierigkeiten darbiete als die Entwicklung (er hat es unterstrichen) selbst des einfachsten Falles, der Dreitheilung u. s. w. Ich denke nun, sobald ich Ihre Billigung weiß, ihm zu antworten: ich habe damals ihm Ihre Äußerungen, so wie ich sie von Ihnen verstanden zu haben glaubte, mitgeteilt, könne aber, da ich in diesen Sachen fremd sei, nicht verbürgen, ob ich sie wörtlich oder nach dem diesen Äußerungen von mir untergelegten Sinne übersandt habe. Soviel erinnere ich mich bestimmt, daß Sie mir gesagt hätten, diese Untersuchungen seien nur specielle Fälle einer weit allgemeineren Theorie. Er würde also in jeder Hinsicht am besten thun, bei Ihnen selbst Auflösung seiner Zweifel zu suchen. Es ist wie es mir scheint ganz unnatürlich, daß ich in einer mir gänzlich fremden Sache ihm als Mittelperson dienen soll, wo es weit sicherer ist und vor allen Mißverständnissen schützt, wenn er gradezu an Sie schreibt und um Belehrung bittet.“

Gauss antwortet Schumacher am 30. Mai 1828:

„Ich kann Ihnen nicht widersprechen, wenn Sie es unnatürlich finden, daß Herr J. Sie mit Fragen, wie die mir von Ihnen aus Copenhagen gemeldete, behelligt, noch weniger es mißbilligen, wenn Sie ihm das Angezeigte antworten. Die ausdrückliche Aufforderung, sich deßhalb an mich zu wenden, könnte vielleicht auch weg — und dies ihm selbst überlassen bleiben, falls Sie es nicht dazu nothwendig finden, für die Zukunft ähnliches bei ihm zu coupiren. Schreibt er deßhalb an mich, so werde ich ihm Rede stehen, obwohl seine Frage unklar ausgedrückt, und meines Erachtens nach dem Erscheinen von Abel's Arbeit (die, Ihnen gesagt, mir von meinen eignen Untersuchungen wohl $\frac{1}{3}$ weggenommen hat, und mit diesem zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt) sehr müßig ist.“

Was Jacobi unter der Entwicklung der Lösungen der

Teilungsgleichungen verstanden, erhellt aus einem späteren Briefe an Legendre.

Inzwischen war das Heft des Crelleschen Journals mit dem zweiten Teile der recherches nach Königsberg gelangt. „Was sagen Sie zu Abels Abhandlung?“ schreibt der über den Gang der Untersuchungen Jacobis genau unterrichtete Bessel an diesen am 21. Juni 1828. „Hat er mit Ihrem Kalbe gepflügt oder mit eignen kräftigen Stieren? Auf keinen Fall kann Ihnen die Priorität Ihrer Entdeckung genommen werden . . . Legendre thut Gauss Unrecht, aber Gauss hat eine Manier, welche ich auch nicht entschuldige. Ich glaube, Sie werden wohl thun, sich vor dieser Ansicht von Gauss zu hüten, denn sie ist sicher die unrechte.“

Der beständige persönliche Verkehr und wissenschaftliche Briefwechsel von Haus zu Haus zwischen Bessel und Jacobi führte ununterbrochen zu neuen und interessanten Ergebnissen auf den verschiedensten mathematischen Gebieten, zu denen Jacobi durch Fragen von Bessel geleitet wird, und die im Sommer 1828 sich meist auf die Eigenschaften und Entwicklungen der Besselschen Funktionen bezogen.

Während dieser Zeit nun entwickelten sich in Berlin die Verhältnisse des Crelleschen Journals in eigentümlicher Weise, und wenn auch von denselben wesentlich nur Abel betroffen wurde, so müssen sie doch an dieser Stelle eine Erwähnung finden, weil auch Jacobis Name vielfach damit in Verbindung gebracht worden ist. Nachdem am 20. April 1827 einige das Journal betreffende Wünsche Crelles, welche rein formaler Natur waren, von dem Unterrichtsminister erfüllt worden, wandte sich derselbe zuerst im November 1827, dann wiederum in den ersten Monaten 1828 wiederholt mit dem Ansuchen an das Ministerium, ihn wegen einer unheilbaren Augenkrankheit von seinem Amte zu entbinden; zugleich fügt er am 14. Mai 1828 die Bitte hinzu, das Gedeihen des Journals auch ferner zu fördern, und kommt wiederum auf eine etwaige Berufung Abels zurück, auch zu seiner eignen

Unterstützung bei der Direktion des Journals; er rühmt dessen Arbeiten über die Theorie der Gleichungen und der elliptischen Funktionen: „ein junger Norweger und vielleicht eines der ersten jetzt existirenden Talente für die höhere Mathematik, der leider nur in seinem Vaterlande fast übersehen wird und gegen ungünstige Verhältnisse kämpft“, während er zugleich von Jacobi lobend anerkennt, daß durch denselben die Theorie der elliptischen Funktionen nach Legendres eigenem Geständnis weiter gebracht worden sei.

„Das äußerst günstige Urtheil“, lautet die entgegenkommende Antwort des Ministers, „welches Sie in Ihrem Schreiben über das ausgezeichnete Talent des Herrn Abel für die höhere Mathematik und über seine bisherigen Leistungen ausgesprochen haben, veranlaßt mich zu dem Wunsche, diesen jungen Gelehrten dem diesseitigen Staatsdienste zuführen zu können. Da indessen für den Augenblick keine Gelegenheit vorhanden ist, ihm eine bestimmte Stelle anzutragen, so würden Sie mich verpflichten, wenn Sie es gefälligst übernehmen wollten zu erforschen, ob er geneigt sein möchte, gegen Zusicherung einer angemessenen jährlichen Remuneration als Privatdocent bei der hiesigen Universität in Wirksamkeit zu treten“, und Crelle nimmt am 21. Juni dankbar den Auftrag an: „Der Erwerb dieses Mannes für den diesseitigen Staatsdienst nach Ew. Exc. gnädiger Absicht würde gewiß ein Gewinn für den Dienst und die Wissenschaft sein, und ich freue mich darauf, daß der Staat und die Wissenschaft Ew. Exc. diese neue Acquisition zu verdanken haben werden. Ich habe sogleich durch einen Brief die Neigung des Herrn Abel, als Privatdozent bei der hiesigen Universität sich hierher zu begeben, zu erforschen gesucht, ohne dabei, wie ich thun zu müssen glaubte, meine Autorisation zu der Frage für jetzt näher zu bezeichnen. Ich werde die Ehre haben, Ew. Exc. von der Antwort Anzeige zu machen.“

In der am 11. Juli an Abel gerichteten Anfrage Crelles

deutet dieser ihm zugleich an, daß plötzlich ein anderer Kandidat für die in Aussicht genommene Stelle an der Universität seine Rechte geltend mache, und Abel schreibt in hohem Grade bestürzt am 21. Juli 1828 an Madame Hansteen:

„Hélas, par ce mot fatal commence une lettre de Crelle que j'ai reçue hier, datée du 11. juillet, et je dois avouer hélas, que la lettre m'a beaucoup abattu. Il n'en sortira rien . . . Un autre s'est présenté, comme tombé du ciel, qui a fait valoir ses droits, et qu'il faut inévitablement caser avant que l'on pense à moi. Crelle n'écrit pas, qui est cet autre, et je ne connais personne d'un tel calibre . . . Aussi dit-il que l'on ne peut me donner aucune réponse décisive avant le mois d'octobre de cette année“ — Abel hatte recht, wenn er in seinem Gegenkandidaten eine minderbedeutende Persönlichkeit vermutete.

In diesem Stadium verblieb die Angelegenheit zunächst bis zum Winter dieses Jahres.

Eine im Crelleschen Journal gestellte Aufgabe: „Kann $x^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl kleiner als μ und größer als 1 ist, durch μ^2 teilbar sein“, erregte Jacobis Interesse, aber die sich immer weiter ausdehnenden Arbeiten über die Theorie der elliptischen Funktionen ließen ihm nicht die hinreichende Zeit, das Problem zu erledigen, und er ließ nur hierher gehörige vorbereitende Rechnungen durch einen seiner Schüler ausführen, welcher die Kongruenz $x^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{\mu^2}$ für die Primzahlen bis 37 nach allen ihren Wurzeln auflöste, wobei sich z. B. $3^{10} \equiv 1 \pmod{11^2}$ ergab, u. a. m.

Wir stehen jetzt mitten in der Zeit des wunderbaren Wettstreites der beiden großen Mathematiker, wir staunen das gegenseitige Ineingreifen und sich Ergänzen ihrer Untersuchungen an, das sich Stützen des einen auf die Resultate und Methoden des andern; „je puis me reposer“, schreibt Legendre einige Monate später an Jacobi, „sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel . . . je me

félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la science dont ils reculent de plus en plus les limites . . .“

Die Legendre von Jacobi gegebene Erläuterung seiner Transformationssätze beantwortet dieser dankend schon am 11. Mai mit einigen Bemerkungen über das Divisionsproblem, fügt aber mit Bezug auf eine im Briefe Jacobis enthaltene Äußerung die Worte hinzu:

„pour établir le princip de votre démonstration il faut, dites vous, recourir aux formules analytiques concernant la multiplication, données pour la première fois par M. Abel. Cet aveu qui prouve votre candeur, qualité qui s'accorde si bien avec le vrai talent, me fait quelque peine; car tout en rendant justice au beau travail de M. Abel, et le mettant cependant fort au-dessous de vos découvertes, je voudrais, que la gloire de celles-ci, c'est-à-dire de leurs démonstrations, vous appartînt tout entière“,

eine Bemerkung, welche Jacobi in seiner Antwort zu der Äußerung veranlaßt: „ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci.“

Ohne noch die Antwort Jacobis abgewartet zu haben, schreibt ihm Legendre, in feiner und geistvoller Weise auf das früher gemachte Geständnis Jacobis von der ursprünglichen Induktion seiner Transformationssätze näher eingehend, am 16. Juni: „Je n'ai pu que toucher très-légèrement dans ma dernière lettre ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise, que vous m'avez faite de la filiation des idées, qui vous ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques, je vois que nous avons couru tous deux des dangers, vous en annonçant

des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse et moi en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous repentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avons chacun nos raisons de nous conduire ainsi; je ne dirai rien des vôtres, quant à moi je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus, ne pouvaient être l'effet ni du hasard ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses“

Inzwischen war außer dem zweiten Teil der über alle bisherigen Resultate weit hinausgehenden recherches noch eine vom 27. Mai datierte Note von Abel im Juni 1828 erschienen. „Vous y auriez vu“, schreibt Jacobi einige Wochen später an Legendre, „que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second mémoire, inséré dans le recueil de M. Schumacher No. 138, contient une déduction rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.“ Und einige Monate nachher fügt er hinzu: „. . . que le mérite principal d'Abel dans la théorie de la transformation consiste dans sa démonstration, que nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.“

Alles dies treibt Jacobi zu immer größerer Eile und unaufhaltsamer Arbeit an, denn er fürchtet, daß Abel ihm überall zuvorkomme. Am 21. Juli sendet er eine neue Arbeit: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques“, an Crelle; hier führt Jacobi die Θ - und H -Funktionen, die späteren ϑ_0 und ϑ_1 , als selbständige Transzendenten ein, welche erst den elliptischen Funktionen ihre Entstehung

geben sollen — wiederum gleichzeitig mit Abel, welcher genau dem von Jacobi in dieser Arbeit entwickelten Prinzipie gemäß die Eigenschaften dieser neuen Transzendenten gesondert von der Umkehrfunktion der elliptischen Integrale behandeln wollte, der aber, da er nicht mehr zur Ausarbeitung des zweiten Teiles seines „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques“ kam, die Priorität der Durchführung dieses Gedankens Jacobi überlassen mußte. Es folgen in dieser Note die schönen und fruchtbaren Sätze, nach welchen die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sich durch ϑ -Funktionen ausdrücken lassen, in deren Argument das Integral erster Gattung linear eintritt, und es wird auf die Transformation der ϑ -Funktionen hingewiesen, aus der die Transformationsformeln der elliptischen Funktionen unmittelbar entspringen: „Les résultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. La première partie de cet ouvrage paraîtra incessamment.“ Jacobi geht nun weiter zur Entwicklung der partiellen Differentialgleichung der ϑ -Funktionen als Funktion des Arguments und des ϑ -Moduls über; die Herstellung des eleganten Ausdruckes für den Multiplikator der Transformation $M = \frac{n(x-x^2)}{\lambda-x^2} \frac{d\lambda}{dx}$ führt ihn auf die Definition der Multiplikatorgleichungen und auf jene merkwürdige Eigenschaft der Lösungen derselben, wonach man für einen primzahligen Transformationsgrad die Quadratwurzeln aus den $n+1$ Multiplikatoren als lineare Funktionen von $\frac{1}{2}(n+1)$ mit n Einheitswurzeln multiplizierten Größen darstellen und somit die Hälfte der Werte von $\sqrt{M}$ linear mit Hilfe der andern Hälfte ausdrücken kann: „cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques.“

Nach Veröffentlichung dieser kurzen, in ihrem Inhalte

so überreichen Arbeit beginnen sich die Wege, welche die beiden großen Mathematiker in ihren Untersuchungen eingeschlagen, immer mehr und mehr zu trennen, begründet sowohl in der Natur ihrer Anlagen und in den verschiedenartigen Ausgangspunkten ihrer Arbeiten, wohl aber auch veranlaßt durch das Streben, ihre Untersuchungen nicht gegenseitig zu kreuzen.

Am 9. September 1828 kündigt Jacobi brieflich Legendre das bevorstehende Erscheinen seines klassischen Werkes an: „Mes recherches seront rassemblées dans un petit ouvrage d'environ 200 pages in 4^o qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum... Cependant la fin de mon ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches...“ In diesem Briefe gibt er weiter Legendre einzelne Erläuterungen zu der eben veröffentlichten Arbeit, hebt in betreff der dort gegebenen Reduktionsformel des Integrales 3. Gattung mit Hilfe der ϑ -Funktionen eine charakteristische Eigenschaft ausdrücklich hervor: „d'ailleurs elle montre que les fonctions elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendentes qui n'en ont que deux, découverte qui vous intéressera beaucoup“, und macht ihn noch besonders auf die in seiner ersten Note gefundene Entwicklung von $\sqrt{x}$ als Quotienten von zwei nach quadratischen Exponenten von q und $q^{\frac{1}{2}}$ fortschreitenden Reihen aufmerksam: „Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'analyse“, „je les regarde“, antwortet ihm Legendre, „comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants et il en est de même de vos nouvelles fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$.“

Inzwischen war das vom 12. August 1828 datierte erste Supplement des Legendreschen traité erschienen, nachdem

dieser durch seinen Briefwechsel mit Jacobi sich die Prinzipien der Transformationstheorie zu eigen gemacht und einen klaren Einblick in den weiteren Ausbau der Theorie der elliptischen Functionen gewonnen hatte. „Après m'être occupé pendant un grand nombre d'années de la théorie des fonctions elliptiques, dont l'immortel Euler avait posé les fondements, j'ai cru devoir rassembler les résultats de ce long travail dans un traité, qui a été rendu public au mois de janvier 1827. Jusque là les géomètres n'avaient pris presque aucune part à ce genre de recherches; mais à peine mon ouvrage avait-il vu le jour, à peine son titre pouvait-il être connu des savants étrangers, que j'appris avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes géomètres, M. M. Jacobi (C.-G.-J.) de Königsberg et Abel de Christiania avaient réussi, par leurs travaux particuliers, à perfectionner considérablement la théorie des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés. . . . La science a pris dans leurs mains un tel essor, qu'il est à croire, que les résultats qu'ils ont déjà obtenus seront suivis d'un grand nombre d'autres non moins intéressants. . .“

Trotz der höchsten Bewunderung der Arbeiten Abels enthält das erste Supplement doch wesentlich nur eine Darstellung der Untersuchungen Jacobis; „votre manière d'écrire“, sagt er bei anderer Gelegenheit, „est plus clair pour moi que celle de M. Abel, qui en général ne me paraît pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre.“ Legendre setzt hierin die beiden ersten Transformationssätze von Jacobi klar und präzise auseinander, indem er das zweite Theorem direkt aus dem ersten durch eine Beweisart herleitet, die Jacobi selbst später aufgenommen, und entwickelt dann nach dessen Methoden die verschiedenen Modulnketten. „Lorsque deux fonctions de cette nature peuvent être exprimées l'une par l'autre, on peut supposer qu'elles appartiennent à la même échelle, et alors il existe entre leurs modules une équation très

simple, quoique sous forme transcendante, laquelle tient lieu d'une équation algébrique, qui est en général d'une recherche très difficile. Cette équation transcendante peut être regardée comme l'un des théorèmes les plus beaux et les plus féconds de cette branche d'analyse.“

Während sich nun Abel der Untersuchung der Integrale algebraischer Functionen und der Frage der Reduktion derselben auf niedere Transzendenten zuwendet, sucht Jacobi die Eigenschaften der Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale tiefer zu ergründen und wird dadurch zu Untersuchungen von sehr allgemeiner und rein funktionentheoretischer Natur geführt; „les fonctions elliptiques“, sagt er in der letzten oben erwähnten Arbeit, „diffèrent essentiellement des transcendentes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principale est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet, les fonctions trigonométriques ayant une période réelle, les exponentielle une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas . . . D'ailleurs on démontre aisément, qu'une fonction analytique ne saurait avoir plus de deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires“.

Mit der Ausarbeitung seiner Fundamenta beschäftigt, veröffentlichte er zunächst nur noch unter dem Titel „Suite des notices sur les fonctions elliptiques“ eine vom 3. Oktober 1828 datierte Arbeit, in welcher er darauf hinweist, daß die früher von ihm gemachte wichtige Entdeckung von der Zurückführung der Integrale 3. Gattung auf die von nur zwei Größen abhängige Transzendente ϑ die Theorie der elliptischen Integrale auf den Eigenschaften dieser Fundamentaltranszendenten zu begründen gestatte; er leitet weiter durch Benutzung der linearen Transformationsformeln der ϑ -Functionen Beziehungen zwischen den elliptischen Transzendenten mit verschiedenen Moduln her, und geht endlich noch auf die Koeffizientenbestimmung der allgemeinen

Transformations- und Multiplikationsformeln des elliptischen Integrals erster Gattung näher ein: „je suis parvenu à résoudre un problème, dont la difficulté avait éludé longtemps tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication

Or, $z = \frac{U}{V}$ étant une substitution rationnelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution, à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation à différences partielles entre x et z . Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de A' , A'' , A''' , On trouve très facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}$, $A^{(m-4)}$, qui le précèdent.“

Am 15. Oktober übersendet Legendre Jacobi das erste Supplement seines traité zugleich mit einem Schreiben voll des Lobes und der Bewunderung der Jacobischen Entdeckungen, aber auch immer noch voll von Zweifeln und Unmut darüber, daß Gauss schon viele von diesen lange Zeit vor Jacobi gemacht zu haben behauptet. Mit diesem Briefe tritt nun für die letzten beiden Monate des Jahres 1828 eine Unterbrechung in der Korrespondenz mit Legendre ein, da Jacobi mit Hast an der Fertigstellung seiner Fundamenta arbeitete, und Legendre ein zweites Supplement zu seinem traité zu verfassen begonnen hatte, in welches er die weiteren Untersuchungen von Abel und Jacobi aufnehmen wollte, und dessen Bearbeitung ihm eine Veranlassung bot, auch mit Abel in Korrespondenz zu treten. Auf die Mitteilung Abels, daß er im Begriff sei, ein großes Mémoire in zwei Teilen über die Theorie der elliptischen Funktionen abzufassen, welche nunmehr unter einem ganz allgemeinen Gesichtspunkte betrachtet werden solle, antwortet Legendre am 25. Oktober: „mais ce qu'il

y a de sur, c'est que je n'ai aucune idée des moyens que vous avez pu employer pour vaincre de pareilles difficultés. Quelle tête que celle d'un jeune Norvégien Peut-être n'êtes vous pas à portée maintenant de publier un semblable ouvrage — wie Jacobi — qui contienne l'ensemble de vos découvertes; il nous intéresserait beaucoup, Monsieur . . .“, worauf ihm aber Abel am 25. November erwidern mußte: „Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui fera l'imprimer à ses frais.“ So war Abel genötigt, den ersten Teil seiner bahnbrechenden Arbeit unter dem Titel „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques“ Crelle zur Veröffentlichung im Journal zu übersenden.

Nun war auch die Zeit herangekommen, für die Crelle im Frühjahr Abel die Entscheidung seiner Angelegenheit in Berlin in Aussicht gestellt hatte. Am 28. Dezember 1828 schreibt Crelle an den Minister: „Ich habe zu meinem Vergnügen vernommen, daß Herr Abel völlig geneigt und bereit ist, als Privatdocent bei der hiesigen Universität sich in den diesseitigen Dienst zu begeben. Er hat gegen mich vertraulich geäußert, daß er zwar durchaus keine großen Ansprüche mache, jedoch, weil er ganz ohne Vermögen, und durch seine Studien selbst in einige Schulden gekommen sei, auch noch zum Theil für Geschwister zu sorgen habe (er ist einer der Söhne eines unbemittelten Pfarrers), wünschen müsse, im Anfange wenigstens nicht unter 500, und womöglich 600 Thaler jährlich, auch außerdem einiges Reisegeld, etwa im Betrage eines vierteljährlichen Gehaltes, zu erhalten. So ausgestattet würde er sehr gern seinen dortigen Aufenthalt, wo seine Subsistenz nur erst für einige Zeit, durch die Anstellung als Privatdocent bei der dortigen Universität und durch das Vicariat für Herrn Professor Hansteen während dessen Reise nach Sibirien, keineswegs aber für die Folge gesichert sei, alsbald verlassen und vor-

zugsweise gern hierher kommen, weil es ihm bei seinem früheren längeren Aufenthalte hieselbst und auf einer Reise, die er in den Jahren 1825, 26 und 27 durch Frankreich, Deutschland und Italien gemacht hat, nicht entgangen sei, daß jetzt von dem erlauchten Preuß. Gouvernement die Wissenschaften mehr und kräftiger beschützt und befördert werden als irgendwo. Die Gelegenheit und die Absicht, Herrn Abel für die diesseitigen Dienste zu gewinnen, ist also vorhanden, und die Wissenschaft wird Ew. Exc. durch die Heranziehung dieses ausgezeichneten Talentes einen neuen Gewinn verdanken. Ich habe nur noch den Wunsch hinzuzufügen, daß Ew. Exc. geruhen möchten, die Erwerbung des Herrn Abel möglichst bald in Ausführung bringen zu lassen, weil es sonst möglich wäre, daß man ihn, jetzt aufmerksam gemacht auf sein großes Talent, anderswo zu fixiren suchte. In der That soll, wie ich zufällig vernommen, von einem Plane die Rede sein, ihn für Copenhagen zu gewinnen, wodurch er also alsdann vielleicht dem diesseitigen Dienste entzogen werden könnte. Ich freue mich zugleich noch ein neues gewichtiges Zeugniß der ausgezeichneten Qualification des Herrn Abel vorlegen zu können. Herr Legendre in Paris nämlich hat sich in einem, durch die Arbeiten der Herrn Jacobi und Abel veranlaßten Schreiben an Herrn Alex. v. Humboldt auch über Herrn Abel auf eine Weise geäußert, die diesem ebenso sehr zum Ruhme gereicht, als dem ehrwürdigen Veteran, der das Schreiben verfaßte, zur Ehre . . . Das Schreiben ist beigelegt. Die Herren Dirichlet, Abel, Jacobi und Steiner, von denen der erste und die beiden letzten schon im Preußischen Staate sich befinden, bilden in der That eine Vereinigung von jungen Mathematikern, aus welcher dieser Wissenschaft die schönsten Hoffnungen aufblühen und vielleicht einst Geometer vom ersten Range hervorgehen können; denn so jung sie sind, verdankt ihnen schon die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen . . .“

In dem vom November 1828 datierten Briefe an Humboldt sagt Legendre: „Depuis que j'ai exprimé mon opinion sur les premiers travaux de M. Jacobi, qui étaient parvenus à ma connaissance, ses titres à mon estime et je puis dire, à mon admiration, se sont considérablement multipliés, soit par les morceaux qu'il a publiés dans le journal de M. Crelle et dans celui de M. Schumacher, soit par les communications qu'il m'a faites dans des lettres particulières. C'est un génie, fait pour les sciences, qui unit l'analyse la plus difficile avec une adresse inconcevable et qui en tire les résultats les plus beaux et les plus attendus. S'il montre une pareille sagacité dans des recherches d'un autre genre, il deviendra sans aucun doute un des savants les plus distingués de l'Europe, et il occupe déjà parmi eux une place fort honorable. Mais ce que je dis de M. Jacobi ne dois je pas, pour être juste, le dire aussi de son digne émule Mr. Abel? . . . dans les sciences le concours de divers savants semble nécessaire, pour rendre les idées fécondes; la théorie de la perturbation aurait fait moins de progrès si elle n'avait été traitée presque en même temps par Lagrange et Laplace, et on peut dire, qu'ils se doivent mutuellement une partie de leurs succès . . . Vous voudrez peut-être savoir, Monsieur, le quel de nos deux jeunes savans je préfère à l'autre. Ils sont tous deux aussi avancés de mon estime. M. Jacobi a publié le premier ses deux théorèmes généraux de transformation que je regarde comme une grande découverte analytique et que j'ai insérés dans un premier supplément de mon traité. M. Abel a déduit ces mêmes théorèmes des méthodes, qu'il avait publiées dans le journal de M. Crelle, et la démonstration qu'il en a donnée dans le journal cité de M. Schumacher est singulièrement remarquable par la sagacité que l'auteur y déplie. M. Jacobi lui-même rend justice dans une lettre, qu'il m'a adressée . . . L'esprit d'invention se montre également dans les deux jeunes savants.

Mr. Jacobi a publié le premier ses principaux résultats, mais M. Abel semble avoir plus de profondeur dans les vues générales, qui ont dirigé ses recherches. Ils sont dignes tous deux de la considération des savants et de leur appui bienveillant.“

Die tatsächliche Berufung Abels war jedoch nicht leicht zu bewerkstelligen und blieb zunächst im Ministerium Gegenstand längerer Verhandlungen.

Jacobi, dessen Zeit die Vorlesung über die Theorie der Kegelschnitte wenig in Anspruch nahm, war jetzt vollauf mit der Ausarbeitung seiner Fundamenta beschäftigt, und selbst sein wissenschaftlicher Verkehr mit Bessel erlitt dadurch eine kurze Unterbrechung; dieser schreibt am 2. Januar 1829 an Gauss: „Jacobi arbeitet immer an den elliptischen Transcendenten; so wie früher die Multiplication, hat er jetzt auch die Division derselben gefunden. Er kommt in große Verlegenheit, indem er etwas darüber drucken läßt, und der Stoff sich fortwährend vermehrt. Da Sie mir geschrieben haben, daß Sie vorläufig nichts bekannt machen werden, so bedaure ich doppelt, daß weder Abel noch Jacobi Interesse und Geschick zu haben scheinen, mit fortwährender Rücksicht auf astronomische oder andere Anwendungen zu arbeiten.“

Die Veröffentlichung der während der Ausarbeitung seiner Fundamenta sich ergebenden Resultate setzt Jacobi in einer vom 11. Januar 1829 datierten Arbeit: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques“ weiter fort und zeigt, indem er die schon früher Legendre gegenüber gemachte Andeutung näher ausführt, daß, wenn $z = \frac{U}{V}$ eine beliebige rationale zur Transformation oder Multiplikation n . Grades dienliche Funktion ist, Zähler und Nenner, wenn $\alpha = \frac{1+x^2}{x}$, $x = \sqrt{x} \sin \operatorname{am}(u, x)$ gesetzt wird, der partiellen Differentialgleichung $n(n-1)x^2z + (n-1)(\alpha x - 2x^3) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \alpha x^2 + x^4)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2n(\alpha^2 - 4) \frac{\partial z}{\partial \alpha}$ genügen. Wie er schon früher hervorgehoben, daß man aus der Transformation der ϑ -Funktionen unmittelbar die Transformationsformeln der elliptischen Funktionen herleiten kann, so bedient er sich hier eben dieses Prinzips zur Aufstellung der Transformationsformeln der Integrale 2. und 3. Gattung; „on peut aussi parvenir directement de la fonction $\theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement en produit infini; de là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur-le-champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et en différentiant, celles de la transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce.“ Indem er nun die schon erwähnte Beziehung für das Integral 3. Gattung aufstellt: $\Pi(u, a) = uZ(a) + \log \sqrt{\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}}$,

betont er hier wiederum: „cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, qui dépendent de trois éléments, peuvent être réduites à d'autres transcendentes qui n'en ont que deux“, wogegen Legendre Abel gegenüber das Bedenken äußern zu müssen glaubte, daß durch Einführung eines imaginären Parameters wieder drei unabhängige Größen in das Integral 3. Gattung eingeführt würden. Nachdem er weiter das Theorem bewiesen: „étant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné κ à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n , on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin^2 \operatorname{am} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation algébrique“, drückt er endlich noch $\sin \operatorname{am}(u, \kappa)$ durch $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$ und $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$ durch $\sin \operatorname{am}(nu, \kappa)$ aus und leitet mittels der algebraischen Auflösbarkeit der Divisionsgleichung die Divisionsformeln in einfachster Gestalt ab.

Auf diesen letzteren Punkt der algebraischen Auflösbarkeit der Divisions- und Transformationsgleichungen kommt er wenige Tage darauf in dem am 18. Januar 1829 an Legendre gerichteten Schreiben wieder zurück:

„Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des fonctions elliptiques, nous remarquâmes en même temps, Mr. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2 , de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la fonction elliptique deux transformations l'une par l'autre. En lisant avec attention le premier Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son Mémoire, que c'était le medium des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin am nu$, $x = \sin am u$, n étant un nombre impair quelconque, si l'on a

$$(1) \quad z = \frac{b'y + \dots + b^{(n)}y^n}{b + \dots + b^{(n-1)}y^{n-1}}, \quad (2) \quad y = \frac{a'x + \dots + a^{(n)}x^n}{a + \dots + a^{(n-1)}x^{n-1}},$$

y étant le sinus amplitude de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z , exprimer en premier lieu x en y , en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n , on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut

présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section dans une petite Addition faite au premier mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, et laquelle se trouve dans le 3. vol. du Journal de M. Crelle. Elle est fondée sur une formule très remarquable et dont je veux vous parler en peu de mots . . .“ Nach Mitteilung der in seiner letzten Arbeit veröffentlichten Resultate fügt Jacobi hinzu: „A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon ouvrage en deux parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ; je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première partie j'exposerai ce qui est particulier à Mr. Abel, en rapprochant les méthodes de cet Auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.“

Legendre spricht in seiner Antwort vom 9. Februar 1829 seine Bewunderung über die Bewältigung des Divisionsproblems aus: „je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré n^2 et de former d'une manière praticable les différents termes de la formule“, und fordert Jacobi im Hinblick auf Abel nochmals dringend zur Herausgabe einer zusammenhängenden Darstellung aller seiner Arbeiten in der Theorie der Transzendenten auf: „il obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient en faisant paraître votre ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible.“

Mitten in dieser durch aufreibende Arbeit schweren Zeit vollzog sich eine erfreuliche Änderung in der äußeren Lage Jacobis. Am 28. Februar 1829 berichtet der Minister an den König, daß sowohl der stellvertretende außerordentliche Regierungsbevollmächtigte als auch die philosophische Fakultät in Königsberg Jacobi der Beförderung zu einer ordentlichen Professur in allen Beziehungen für

würdig halten, und beantragt eine Gehaltszulage, um ihn dadurch wenigstens gegen drückende Nahrungssorgen sicherzustellen; durch Kabinettsorder vom 8. März 1829 wird Jacobi zum ordentlichen Professor für das Fach der Mathematik mit einer Gehaltszulage von 200 Thalern ernannt.

Die letzte Mitteilung Jacobis über Abels und seine eigne Methode der algebraischen Auflösung der Divisionsgleichung hatte Legendre zu einer irrthümlichen Auffassung veranlaßt, die Jacobi in einem sehr ausführlichen und hochinteressanten Schreiben vom 14. März 1829 berichtigt: „Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous designez par α_m , en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez, est une chose tout à fait impossible dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module. Ma formule qui donne l'expression algébrique de $\sin am u$ au moyen de $\sin am (nu)$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss . . . Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier Mémoire sur les fonctions elliptiques, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveraient une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.“ Auch der Nachweis von der Unmöglichkeit, die

Gleichungen für die getheilten Perioden algebraisch aufzulösen, ist nach Jacobi ganz das Verdienst Abels: „J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n + 1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique puisse être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant . . . Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 am 2p\omega$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n = 5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement . . .“ Vor allem aber sucht Jacobi Legendres Aufmerksamkeit auf seine Untersuchungen in betreff der Multiplikatorgleichungen hinzuwenden: „Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs . . . c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs racines carrées au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n + 1$ “, und hebt die partielle Differentialgleichung hervor, mit Hilfe deren man die Transformationskoeffizienten durch die beiden Moduln aus-

drücken kann, „de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque indéfini, chose très difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4^e cahier du vol. III dudit Recueil. Il sera de même, si l'on fait tout dépendre de l'équation, dont les racines donnent les valeurs de ce qui vous appelez le régulateur, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples.“ Endlich sieht er sich noch mit Bezug auf die Äußerung Legendres in betreff des merkwürdigen Zusammentreffens seiner Arbeiten mit denen Abels und die daran geknüpfte Aufforderung zur beschleunigten Veröffentlichung seines großen Werkes zu den Worten veranlaßt: „Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel: presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les fonctions elliptiques contient des vues nouvelles; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'occuper.“

Die Ausarbeitung der Fundamenta war bereits im Februar beendet, und der Druck näherte sich auch seinem Abschluß, als das inzwischen von Abel veröffentlichte Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale Jacobis Aufmerksamkeit in hohem Grade fesselte und ihn schon in dem letzten Briefe an Legendre zu den Schlußworten angeregt hatte: „Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégral d'Euler! A-t-on jamais vu pareille chose! Mais comment s'est il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères?“

Aber es bedurfte nicht erst dieses Hinweises von Jacobi, um Legendre die Bedeutung jenes Theorems erkennen zu lassen; schon am 16. Januar 1829 hatte er an Abel geschrieben: „Mais le mémoire . . . me paraît surpasser tout ce que vous avez publié jusque à présent par la profondeur de l'analyse qui y règne, ainsi que par la beauté et la généralité des résultats“, und Jacobi berichtet er auf dessen Anfrage, aus welchem Grunde die bereits im Jahre 1826 der Pariser Akademie eingereichte Arbeit Abels nicht veröffentlicht worden, am 8. April 1829, daß das Manuskript desselben unleserlich gewesen und dieser selbst sich nicht weiter um das Schicksal desselben bekümmert habe: „cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit, qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention, qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.“

In diesem Briefe berührt aber Legendre noch eine andere Frage, welche zu einer weiteren interessanten Korrespondenz zwischen ihm und Jacobi Veranlassung gab. Es hatten sich ihm schon früher bei der Bearbeitung der Theorie der Integrale 3. Gattung für seinen traité vermöge des Hinzutretens einer dritten sie bestimmenden Größe, des Parameters, sowohl für die Aufstellung der Additionstheoreme derselben bezüglich des Arguments und des Parameters als auch für ihre numerische Berechnung große Schwierigkeiten entgegengestellt; er nimmt daher die ihm schon am 9. September 1828 von Jacobi mitgeteilte Entdeckung, der zufolge sich die Integrale 3. Gattung mit Hilfe der ϑ -Funktion, also einer Transzendenten mit nur zwei Variablen ausdrücken lassen, mit großem Interesse auf, findet jedoch, wie er schon am 16. Januar 1829 Abel mitgeteilt hatte, Schwierigkeiten in der Einführung eines imaginären Parameters und wendet sich nun jetzt mit seinen Bedenken an Jacobi: „Mais les efforts que j'ai faits pour parvenir à ce résultat ont été