Jacobi als Privatdozent an der Universität zu Königsberg von Ostern 1826—Dezember 1827.

Jacobi hatte durch seine Dissertation sowie durch den für die damaligen mathematischen Verhältnisse Berlins ganz ungewöhnlichen Lehrerfolg die Aufmerksamkeit des Unterrichtsministeriums auf sich gelenkt, und dieses ging bereitwillig auf den von ihm geäußerten Wunsch ein, seine Lehrtätigkeit als Privatdozent in Königsberg an Stelle des eben verstorbenen ordentlichen Professors der Mathematik Wrede fortsetzen zu dürfen, um dem jungen Dozenten mehr Aussichten für eine etwaige Beförderung bieten zu können. Am 26. April 1826 erhielt er das nachfolgende ministerielle Schreiben: „Das Ministerium eröffnet Ihnen auf die Vorstellung vom 20. d. M., daß es Ihre Absicht, bei der Universität in Königsberg als Privatdocent aufzutreten, unter den von Ihnen angeführten Umständen billigt und Ihnen, vorausgesetzt, daß Sie den dortigen Studirenden durch Ihre Vorlesungen nützlich werden, eine jährliche außerordentliche Remuneration von 200 Thalern hierdurch zusichern will. Übrigens erwartet das Ministerium von Ihnen, daß Sie baldigst nach Königsberg abgehen und noch in dem laufenden Semester Ihre Vorlesungen beginnen werden.“

So übersiedelte nun Jacobi, nachdem er bereits für das Sommersemester in Berlin Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Gleichungen und über reine Analysis angekündigt hatte, schon Anfang Mai 1826 nach Königsberg, wo sich

um dieselbe Zeit Franz Ernst Neumann und Heinrich Dove habilitierten, und wo ihm Bessel, der die ungewöhnliche Bedeutung Jacobis sogleich erkannte, mit der wohlwollendsten Freundlichkeit entgegenkam. Enthusiastisch berichtet Jacobi über seine neue Tätigkeit und die nahen Beziehungen zu Bessel seinem Bruder Moritz, welcher ihm teilnehmend an seinem Glück und seiner Zufriedenheit am 5. August 1826 heiter und scherzhaft antwortet:

„Wenn sich die transcendentale Universalität meines Geistes manifestirt im Erkennen und Auffassen der Qualitäten der Mauersteine und des Gemäuers überhaupt, so machst Du mir diese Universalität gewiß und mit vollem Rechte streitig, indem Du durch und in Deinem Briefe darlegst, mit welcher Leichtigkeit Du ein Feld bebaust, das bisher Deiner innersten Natur fremd zu sein schien, Astronomie und Physik, Pendelversuche, Dreiecksnetze und Karten. Das freut mich, weil es mich vielleicht rächt, und Du erkennst, daß eben das nur Werth hat, was sich bethätigen läßt ... Die wahrhaft begeisterte Schilderung von Bessel hat mich sehr ergötzt ... was wird Steiner, was Rötscher, was Hegel sagen, wenn er hört, daß Du dem Werth beilegst, was das Resultat schlichter Wiederholung, beharrlicher Beobachtung ist ... Mit Schrecken lese ich, welche demagogischen Umtriebe Bessel im Sinne hat, es ist alles so hübsch in Ordnung mit den Maßen, die Schwere und Gravitation sind abgethan, was will man weiter — findet man, daß etwas falsch ist, so muß man es lieber vertuschen, um die doch stattfindende Confusion nicht zu vergrößern — alle neuen Entdeckungen müssen desavouirt werden, das ist das beste.“

Während nun Jacobi durch seine Versetzung nach Königsberg für seine Lehrtätigkeit ein reiches und fruchtbares Feld eröffnet wurde, war es für seine schriftstellerische Betätigung ein glückverheißendes Ereignis, daß Crelle sich damals bereits mit dem Gedanken der Gründung einer mathematischen Zeitschrift trug und denselben in kürzester Zeit, wenn auch unter den schwierigsten Verhältnissen, zum Segen der Mathematik und der exakten Naturwissenschaft in Ausführung zu bringen wußte. Das Journal sollte schon am 1. Januar 1826 zu erscheinen beginnen. „La possibilité de voir ses mémoires imprimés et publiés tout de suite, dès qu'ils seraient achevés, électrisa Abel, et ce fut dans la maison am Kupfergraben un travail intrépide, infatigable", und auch Jacobi beeilte sich, einige bereits fertiggestellte kleinere Arbeiten Crelle zur Veröffentlichung zu übersenden. Auf die Anfrage Crelles, ob er den Druck der ihm geschickten Abhandlungen gestatte, antwortet Jacobi aus Königsberg am 8. Oktober 1826:

„In Antwort auf Ihr geehrtes Schreiben bemerke ich, daß ich nicht erlaube, sondern überaus wünsche, daß Sie meinen kleinen Arbeiten in Ihrem Journal einen Platz einräumen möchten, welche es sich gewiß zur größten Ehre anrechnen werden, in so anständiger Gesellschaft zu erscheinen. Da ich in meinen beiden vorigen Briefen Ihnen dieselbe Versicherung gegeben habe und Sie noch im Vorigen zum Herrn über Leben und Tod der kleinen Geschöpfe autorisirte, so bedurfte es von meiner Seite keines zu fassenden Entschlusses, noch von der Ihrigen, einen solchen abzuwarten. Es wäre mir angenehm, wenn, wo möglich, das 4. Heft sie aufnähme. Die kleinere von den beiden nachgeschickten Abhandlungen hätte füglich mit der über Gauss' Methode zusammengeworfen werden können, da beide Eigenschaften derselben Functionen betreffen. Die Besorgniß, die Sie mir eingeflößt haben und welche gewiß jedes analytische Herz theilen wird über die Zweifelhaftigkeit des Fortbestehens des Journals hat mich gehindert, Ihnen mehrere nicht uninteressante Abhandlungen, die ich bereit habe, zuzuwenden, andere bedürften nur der Ausarbeitung; es dürften sich auch einige neuere Theoreme aus der Theorie der Zahlen darunter befinden."

Inzwischen waren die gleich zu Anfang gehegten Be-

sorgnisse Crelles wegen des Fortbestehens des Journals immer ernster geworden; er bat am 14. Oktober 1826 die Regierung für 2—3 Jahre um einen jährlichen Zuschuß von 800 Talern, damit auch der Verleger imstande sei, ein Honorar zu bewilligen, und der Minister von Altenstein sowie der General-Leutnant von Müffling befürworteten in einem Bericht an den König seine Bitte, indem sie den Vorschlag machten, die jährlich nicht abgesetzten Exemplare bis auf höchstens 200 zu dem Preise von 4 Talern abzunehmen und „diese Exemplare unter die höheren Civil- und Militairbildungsanstalten der Monarchie zu vertheilen, auch zu Praemien für junge Männer, die sich im Studium der Mathematik auszeichnen, zu bestimmen".

„Käme nur mein Project mit dem Journal zu Stande", schreibt Crelle am 24. November 1826 nach Paris an Abel, den er gern zur Unterstützung in der Leitung des Journals in seine Nähe gezogen hätte, „dann könnte ich Ihnen sogar einige Geldmittel verheißen. Es ist zwar noch Hoffnung da, aber noch nichts entschieden. Ich wollte Ihnen anfangs nicht eher davon erzählen, bis die Entscheidung erfolgt wäre, aber da es so lange dauert, will ich Ihnen meinen Plan sagen. Vielleicht macht Ihnen schon die Hoffnung, die ich darauf gründe, einiges Vergnügen . . . Ich werde gewiß keine Mühe sparen, doch kann man freilich nichts bestimmtes vorhersagen. Wird meine Bitte genehmigt, dann kann ich, unter uns gesagt, Ihnen ein Honorar zahlen. Es bleibt aber unter uns, denn ich kann es nicht jedem andern ebenfalls geben."

Erst am 14. Februar 1827 erhielt Crelle die Mitteilung, daß sein Gesuch aus Mangel an Mitteln durch Kabinettsordre zurückgewiesen sei, und daß nur 20 Exemplare jährlich vom Unterrichtsministerium und einige vom Kriegsministerium übernommen werden könnten; diesen wenig erfreulichen Bescheid konnte er Abel mündlich mitteilen, der am 10. Januar auf der Rückreise von Paris in Berlin eingetroffen war und dort bis Anfang Mai sich aufhielt.

Inzwischen war die schon im Laufe des Sommers 1826 von Jacobi der Redaktion überschickte Arbeit: „Über Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden" in dem ersten Bande des Journals erschienen; er hebt in derselben hervor, daß Gauss in den Göttinger Kommentarien für die von Newton mit Hilfe des Interpolationsproblems aufgestellte Berechnung der bestimmten Integrale den Grad der Näherung dadurch auf das Doppelte getrieben habe, daß er nicht gleiche Intervalle der Abszissen zugrunde legte, für welche die Ordinaten berechnet werden, sondern eine schickliche Wahl derselben, und daß die Bestimmung derselben unabhängig sei von der zu quadrierenden Kurve. „Gauss gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induktion"; Jacobi will auf einem einfachen und direkten Wege eben diese Resultate herleiten. Wenn $\int f(x)\,dx$ zu berechnen und $\varphi(x) = (x-\alpha')\ldots(x-\alpha^{(n)})$ gesetzt wird, so ist auf Grund der Newtonschen Näherungsmethode, welche für $f(x)$ die ganze Funktion U vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade substituiert, welche für die Abszissen α die Werte von $f(x)$ annimmt, und die sich unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ den Charakter einer ganzen Funktion hat, unmittelbar ergibt, wenn man aus $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ die darin enthaltene ganze Funktion V absondert, die Aufgabe gestellt, die Größen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n)}$ so zu bestimmen, daß der Fehler $\varDelta = \int f(x)\,dx - \int U\,dx = \int V\varphi(x)\,dx$ möglichst gering oder die Annäherung möglichst genau werde. Indem nun Jacobi $f(x) = a + a'x + a''x^2 + \cdots + a^{(n)}x^n + a^{(n+1)}x^{n+1} + \cdots$, und in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \cdots$ setzt, so daß die in jenem rationalen Bruche enthaltene ganze Funktion $V = a^{(n)}A' + a^{(n+1)}(A'x + A'') + a^{(n+2)}(A'x^2 + A''x + A''') + \cdots$ wird, ferner bemerkt, daß, was auch $\alpha', \alpha'', \ldots$ waren, in dem Ausdrucke für den Fehler $\varDelta$ die Koeffizienten $a, a', a'', \ldots a^{(n-1)}$ nicht vorkommen, so erreicht er den doppelten Grad der Annäherung und dadurch für rasch abnehmende Koeffizienten von $f(x)$ eine brauchbare Näherungsmethode, wenn er die $\alpha', \alpha'', \ldots$ so bestimmen kann, daß noch die mit $a^{(n)}$, $a^{(n+1)}, \ldots a^{(2n-1)}$ behafteten Glieder verschwinden, wozu, wie aus dem Ausdrucke für V ersichtlich, nur eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ erforderlich ist, daß, wenn $\int_0^1 f(x)\,dx$ ermittelt werden soll, die Integrale $\int_0^1 \varphi(x)\,dx, \int_0^1 x\varphi(x)\,dx, \ldots \int_0^1 x^{n-1}\varphi(x)\,dx$ verschwinden. Durch Reduktion dieser Ausdrücke auf iterierte Integrale findet er, daß dann auch $\int \varphi(x)\,dx, \int^{(2)} \varphi(x)\,dx^2, \ldots \int^{(n)} \varphi(x)\,dx^n$, zwischen denselben Grenzen genommen, verschwinden müssen und umgekehrt, oder daß, wenn $\int^{(n)} \varphi(x)\,dx^n = \pi(x)$ gesetzt wird, eine Funktion $\pi(x)$ zu suchen ist, welche für $x=0$ und $x=1$ zugleich mit ihrem $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten verschwindet. Setzt man daher

$$\varphi(x) = M\frac{d^n x^n (x-1)^n}{dx^n}, \text{ worin } M = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n},$$

so folgt für den Fehler die Gausssche Formel

$$\varDelta = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_0^1 x^n(x-1)^n \frac{d^n V}{dx^n}\,dx.$$

Eine Anzeige dieses Memoires findet sich im „Bulletin de Férussac"; „il est bien possible", sagt Holst in seiner Biographie Abels, „que ce soit Abel lui-même, qui se serait alors pour la première fois occupé de Jacobi dans un bref compte-rendu de l'objet du mémoire."

Noch im August hatte Jacobi die mit der ersteren in engem Zusammenhange stehende und „Über eine besondere

Gattung algebraischer Funktionen, die aus der Entwicklung der Funktion $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen" betitelte Arbeit an das Journal gesandt. Er zeigt in derselben, wie aus den Beziehungen der Legendreschen Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} X_m^2 dx = \frac{2}{2m+1}$$

die Entwicklung einer jeden Funktion nach Kugelfunktionen hergeleitet werden kann, und ergänzt die Untersuchungen von Legendre über diese Funktionen durch Herleitung des Ausdruckes

$$X_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

woraus der Zusammenhang derselben mit der von Gauss zur annäherungsweisen Berechnung der Integrale gebrauchten ersichtlich ist. Die weiter ermittelte Relation

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-r)} \frac{d^{n-r}(x^2-1)^n}{dx^{n-r}} = \frac{(x^2-1)^r}{1 \cdot 2 \ldots (n+r)} \frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}} \quad (r \leq n)$$

findet er mit Hilfe der schon in seiner Dissertation gegebenen Methode durch Vergleichung der Entwicklungskoeffizienten zweier verschiedener Formen einer Funktion von h nach steigenden h-Potenzen.

Jacobi beschäftigte sich nun in den Herbstferien bei Gelegenheit eines wiederholten tieferen Studiums der Gaussschen Disquisitiones arithmeticae mit der Fortführung äußerst schwieriger zahlentheoretischer Untersuchungen, deren er schon in dem letzten Briefe an Crelle Erwähnung getan, und zu denen ihm die von Bessel übersandte kurze Notiz von Gauss über biquadratische Reste die unmittelbare Veranlassung gab.

„Diese Ankündigung", sagt Kummer, „welche einige der Gaussschen Resultate gab, deren Beweis auf einem ganz neuen Prinzip der Zahlentheorie beruhen sollte, erregte

zugleich Jacobis und Dirichlets Wißbegierde in hohem Grade, beide suchten auf ganz verschiedenem Wege in das Gausssche Geheimnis einzudringen, und beiden gelang es auch, in diesem Gebiete der höheren Potenzreste eine Fülle neuer Sätze zu finden, obgleich das neue Prinzip, welches in der Einführung der komplexen ganzen Zahlen bestand, ihnen damals noch verborgen blieb."

Schon am 26. Oktober 1826 berichtet Jacobi an Bessel in einem kurzen Billett über seine Erfolge auf diesem Gebiete:

„Gauss hat in den Göttinger Anzeigen, wo er den Auszug einer gelesenen Abhandlung giebt, den Satz bekannt gemacht: es sei p eine Primzahl von der Form $8n + 1$ und gleich $e^2 + f^2$, wo e^2 das ungrade Quadrat, f^2 das grade; geht f durch 8 auf, so ist 2 biquadratischer Rest; wo nicht, nicht. Sein Weg muß nach dem Auszug zu urtheilen, äußerst schwierig sein, die aufgewandte Kraft außerordentlich. Die Sätze über andere Zahlen als 2, ob sie biquadratische Reste sind, sagt er, könne er nicht geben, ohne noch bei weitem größere Zurüstungen und eine eigenthümliche Erweiterung der höheren Arithmetik; daher er den Satz über 2 voraufgenommen. Ich bin im Besitze einer allgemeinen, leichten, directen Methode, zu den Fundamentaltheoremen über die Reste aller Potenzen zu gelangen. Als ich sie auf die biquadratischen Reste anwendete, fand ich, was folgt: Es sei p Primzahl von der Form $4n + 1$ und gleich $e^2 + f^2$, wo e^2 das ungrade, f^2 das grade Quadrat ist. Zuvörderst sind alle Primzahlen, die Factoren von f sind und quadratische Reste von p, auch biquadratische; ferner alle Primzahlen von der Form $8n \pm 1$, die Factoren von e sind und quadratische Reste von p, auch biquadratische...", und er führt noch eine Methode an, um zu untersuchen, ob eine andere Primzahl q, die quadratischer Rest ist und nicht zu dieser Reihe gehört, auch biquadratischer Rest sei, wonach z. B. 3 und 5, wenn sie quadratische Reste sind, dann und nur dann auch biquadratische Reste sein werden, wenn f resp. durch 3 und 5 aufgeht. Zugleich schreibt er aber auch am folgenden Tage an Gauss:

„Ew. Hochwohlgeboren bin ich so frei, einiges von Untersuchungen über die Reste von Potenzen mitzutheilen, welche ich vor Kurzem angestellt habe, als dieser Gegenstand sowohl durch sich selbst, als auch durch die Autorität Ihres Namens großes Interesse erlangt hat. Ich gerieth nämlich zufällig, als ich einige in Ihren Disquisitiones angestellte Betrachtungen verfolgte, auf eine einfache und directe Methode, die Fundamentaltheoreme über die Reste der Potenzen zu erforschen. Als ich dieses Gegenstandes gegen den Herrn Professor Bessel erwähnte, gab er mir die interessante Notiz von dem Auszug, den Ew. Hochwohlgeboren in den Göttinger Anzeigen von einer der Göttinger Societät über die biquadratischen Reste vorgelegten Abhandlung gegeben haben. Ich nahm daher Gelegenheit, meine Methode zu prüfen. Als ich sie, nachdem ich sie zuvor nur auf die Reste der 3ten und 5ten Potenzen angewendet hatte, nun auch auf die biquadratischen Reste anwandte, fand ich alsbald das von Ew. Hochwohlgeboren über die Zahl 2 gegebene Theorem. Allgemein aber fand ich was folgt: Es sei p Primzahl von der Form $4n+1$, q Primzahl und quadratischer Rest von p, ferner $p = e^2 + f^2$, wo e das ungrade Quadrat bedeute; I) es sei nicht zusammen p von der Form $8n+5$, q von der Form $4n-1$: wenn q Theiler von f ist, so ist es biquadratischer Rest; wenn q Theiler von e ist, so ist es biquadratischer Rest, wenn es zugleich die Form $8n \pm 1$ hat; ist es Theiler von e von einer andern Form, so ist es biquadratischer Nichtrest ... II) Ist zu gleicher Zeit p von der Form $8n+5$, q von der Form $4n-1$, so findet das Gegentheil statt. Wollten Ew. Hochwohlgeboren sich so weit herablassen, mir den Zusammenhang, in welchem die sonstigen in den Göttinger Anzeigen mitgetheilten, äußerst merkwürdigen Sätze mit den biquadratischen Resten stehen, mitzutheilen, so würde ich dies als Erlaubniß ansehen, Ew. Hochwohlgeboren mehreres von diesen Untersuchungen, welche in mehr als einer Beziehung sich an die berühmten Arbeiten von Ew. Hochw. knüpfen, vorzulegen; auch dürfte aus etwaiger Vergleichung Vortheil für die Wissenschaft resultiren. Nur der Eifer für diese konnte einem unbekannten jungen Mann die Kühnheit einflößen, aus seinem Dunkel zu einem Mathematiker, der in solchem Ruhmesglanze dasteht, zu reden. Ich verbleibe ehrfurchtsvoll ..."

Diese briefliche Mitteilung erregte sogleich die Aufmerksamkeit von Gauss, der am 26. November 1826 an Bessel schreibt: „Einlage bitte ich Herrn Jacobi zu übergeben. Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir etwas Näheres über diesen wie es scheint sehr talentvollen jungen Mann, auch über seine persönlichen Verhältnisse anzeigen wollten", und von Bessel am 12. Dezember 1826 die interessante Antwort erhält:

„Jacobi ist seit Anfang des Sommers hier und bezieht, als Privatdocent, ein kleines Gehalt; förmlich angestellt ist er noch nicht, ich hoffe aber, daß es bald geschehen wird. Er ist gewiß sehr talentvoll, allein er hat sich hier fast alle zu Feinden gemacht, weil er, als er hier ankam, jedem etwas unangenehmes sagte: den geborenen Königsbergern versicherte er, daß er seinen hiesigen Aufenthaltsort als ein Exil betrachte, den Philosophen lobte er Hegel, den Philologen Boeckh, alles auf eine Art, die man ihm nicht verzeihen will. Doch hoffe ich, daß solche kleine Albernheiten bald nicht mehr werden erwähnt werden. Mir ist er immer als ein artiger junger Mann erschienen. Von seinen sonstigen Verhältnissen weiß ich nichts näheres, als daß sein Vater ein Jude und Geldwechsler in Potsdam ist. Mit Dirksen soll er nicht freundschaftlich gestanden haben; allein das sagt in Berlin garnichts."

Weder die oben von Gauss erwähnte und für Jacobi bestimmte briefliche Einlage noch irgendeine spätere schriftliche Mitteilung von Gauss an Jacobi hat sich in den nachgelassenen Papieren vorgefunden.

Der Winter 1826/27, in welchem Jacobi über Trigonometrie und analytische Geometrie las und analytische Übungen zu leiten anfing, mit denen, wie Richelot sich später ausdrückte, der großartige Geist Jacobis zu wirken begann, war für ihn eine der arbeitsvollsten Perioden seines Lebens, indem er die schwierigsten Probleme auf den verschiedensten mathematischen Gebieten zu gleicher Zeit in Angriff nahm.

Zunächst führte ihn der überaus anregende tägliche Verkehr mit Bessel einem Probleme aus der Theorie der Gleichungen zu, dessen Behandlung den Gegenstand der Arbeit „Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale" bildete. Nachdem Parseval 1805 die Lagrangesche Reihe, welche die Wurzeln einer gegebenen Gleichung darstellt, mit Hilfe bestimmter Integrale summiert und Bessel Anwendungen davon auf das Keplersche Problem gemacht hatte, will Jacobi die von Parseval begonnenen Untersuchungen vervollständigen, veranlaßt durch eine Arbeit von Cauchy, welche wieder die Aufmerksamkeit der Analysten auf die Art, die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen, gelenkt hatte. Indem er von der Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe durch Multiplikation der hypothetisch angenommenen Entwicklung mit cosinus- und sinus-Funktionen und Integration zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ausgeht und nach Cauchy bei der Entwicklung eindeutiger Funktionen nach Potenzen von e^{zi} und e^{-zi} verschiedene Entwicklungen in verschiedenen Bereichen findet, folgert er, daß, wenn die Funktion $\varphi(x)$, je nach den verschiedenen Grenzen, innerhalb welcher sich x befindet, anders entwickelt werden muß, damit man konvergierende Reihen erhalte, für jene analog bestimmten Integrale nach den verschiedenen Werten

des absoluten Betrages von x oft wesentlich verschiedene Resultate sich ergeben werden, und er gelangt so zu Anschauungen und analytischen Formulierungen, wie sie jetzt der Funktionentheorie geläufig sind. Er wählt zur Erläuterung seiner Überlegungen und Behauptungen $\varphi(x) = \log(a + bx + cx^2 + \cdots + x^p) = \log(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots(x-\alpha^{(p)})$ und erhält für $x = re^{iz}$ und $x = re^{-iz}$ aus $\varphi(re^{iz}) + \varphi(re^{-iz}) = \log\{(a + br\cos z + cr^2\cos 2z + \cdots)^2 + (br\sin z + cr^2\sin 2z + \cdots)^2\} = \log(U^2 + V^2)$, indem die Entwicklungen von $\log(x-\alpha')$, $\log(x-\alpha'')$, $\ldots$ je nach der Lage von z verschieden sind, durch dieselbe Operation, wie sie zur Koeffizientenbestimmung der Fourierschen Reihe angewandt wird, für die verschiedenen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommenen Integrale dieses Ausdruckes die Werte $2\pi p\log r^2$, wenn $r >$ als alle Wurzeln, $2\pi\log a^2$, wenn $r <$ als alle Wurzeln, $2\pi\{\varkappa\log r^2 + \log\alpha^{(\varkappa+1)^2} + \log\alpha^{(\varkappa+2)^2} + \cdots + \log\alpha^{(p)^2}\}$, wenn $\alpha^{(\varkappa)} < r < \alpha^{(\varkappa+1)}$, und ähnliche Beziehungen, in denen *arc·tg*-Funktionen unter dem Integral vorkommen, und aus denen sich dann z. B. für die n. Potenzsumme einer beliebigen Anzahl der Wurzeln Ausdrücke durch die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommenen Integrale von $\log(U^2 + V^2)$ und $arctg\,\frac{V}{U}$ ergeben. Das von Jacobi befolgte Prinzip steht im engsten Zusammenhang mit den Untersuchungen von Cauchy, welche die Nullwerte einer innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes eindeutigen Funktion durch das Randintegral dieses Raumes bestimmen.

Mit diesen Fragen, welche ein theoretisches und praktisches Interesse zugleich haben und Bessels Aufmerksamkeit in hohem Grade fesselten, liefen parallel die abstraktesten Untersuchungen aus der Theorie der Zahlen und der Kreisteilung, aus denen er einiges, da ihm eine zusammenhängende Darstellung seiner Resultate noch im Winter auszuarbeiten unmöglich war, am 8. Februar 1827 brieflich Gauss mitteilte:

„Die Güte, mit welcher Ew. Hochwohlgeboren die unbedeutenden arithmetischen Sätzchen, die ich mich Ihnen zu übersenden unterstand, aufgenommen haben, hätte mich schon längst verpfllichten sollen, Ihnen für Ihr gütiges Schreiben zu danken; doch als ich von Ihrer gütigen Erlaubniß Gebrauch machen wollte, Ihnen mehreres von den von mir angestellten Untersuchungen mittheilen zu dürfen, fühlte ich deren Dürftigkeit so tief, daß ich dies unterlassen zu müssen glaubte. Erst als ich vor Kurzem nach längerer Unterbrechung zu diesem Gegenstande zurückkehrte, boten sich mir einige Sätze dar, welche mir nicht ganz unwürdig schienen, sich ihrem hohen Gönner vorzustellen: Ist p eine Primzahl, x primitive Wurzel der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ (man darf sich ja wohl dieses Ausdruckes bedienen), g primitive Wurzel der Congruenz $\frac{x^{p-1}-1}{x-1}\equiv 0$ mod. p, und setzt man $\xi(r)$, wo r primitive Wurzel der Gleichung $\frac{x^l-1}{x-1}=0$, l aber Factor von $p-1$, setzt man also $\xi(r)=x+rx^g+r^2x^{g^2}+\cdots+r^{p-2}x^{g^{p-2}}$, so findet sich Folgendes:

I. $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})}$ ist eine ganzzahlige Function von r, d. h. ist gleich $A+A'r+\cdots+A^{(l-1)}r^{l-1}$, wo A, A', ... $A^{(l-1)}$ ganze Zahlen sind.

II. $\xi(r)\xi\left(\frac{1}{r}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{l}}p$. Dieser Fundamentalsatz für die Theorie der Kreistheilung machte mir eine dunkle Andeutung zu den Disqu. Ar. pag. 651 klar.

III. Setzt man $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})}=\psi(r)$, so wird $\psi(r)\psi\left(\frac{1}{r}\right)=p$.

Aus diesen drei Sätzen folgt sogleich für $l=2, 3, 4$: 1) für $l=2$, wo $r=\frac{1}{r}$, $\xi(r)\xi\left(\frac{1}{r}\right)=\{\xi(r)\}^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, $\xi(r)=\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, 2) für $l=3$, $\{\xi(r)\}^2=\psi(r)\xi(r^2)$, $\{\xi(r)\}^3=p\psi(r)$, wo $\psi(r)$ von der Form $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ und $a^2+3b^2=4p$. Es läßt sich dann leicht weiter zeigen, daß $a-1$ und b durch 3 aufgehen müssen. Diese beiden Sätze stehen in den Disquisitiones. 3) für $l=4$, $m=1$ wird $\{\xi(r)\}^2=\psi(r)\xi(r^2)=\psi(r)\sqrt{p}$, wo $\psi(r)$ die Form $a+b\sqrt{-1}$ hat und $a^2+b^2=p$. b geht durch 2 auf und $a+1$ durch 4, was das Zeichen von a bestimmt, wie sich sonst leicht zeigen läßt. Für höhere Zahlen als 4 wird die Sache weitläufiger; dafür wird aber der Blick eröffnet in ein weites unausgebautes Feld der quadratischen Formen.“

Jacobi zeigt sodann an einem Beispiel für $l=7$, welchen Vorteil man aus den drei Fundamentalsätzen ziehen kann, und fährt fort:

„... Aber ich habe in diesen Tagen eine directe Bestimmung für $\psi(r)$ für jedes l gefunden, welche, wenn gleichwohl weitläufiger als das Versuchen, doch wegen ihrer extremen Eleganz angeführt zu werden verdient. Es sei also $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})}=\psi(r)$; ferner setze man in Bezug auf den Modul $l: m+1\equiv a_1$, $2(m+1)\equiv a_2$, ... $(l-1)(m+1)\equiv a_{l-1}$; ferner bezeichne man $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\ldots\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$; setzt man nun in $\psi(r)$ für r eine primitive Wurzel der Congruenz $\frac{x^l-1}{x-1}\equiv 0$ mod. p, so wird, wenn $p=ln+1$, $\psi(r)\equiv-\left(\frac{a_1 n}{n}\right)$, $\psi(r^2)\equiv-\left(\frac{a_2 n}{2n}\right)$, ... $\psi(r^{l-1})\equiv-\left(\frac{a_{l-1}n}{(l-1)n}\right)$ in Bezug auf den Modul p; woraus sich sogleich, wenn man nur eine Wurzel der Congruenz $\frac{x^l-1}{x-1}\equiv 0$ mod. p kennt, $\psi(r)$ finden läßt, wenn r im ersten Sinne genommen wird. Ew. Hochwohlgeboren bemerken sogleich, wie hierunter der Satz begriffen ist, den Sie in den Göttinger Anzeigen für $l=4$ angekündigt haben.“ Nach Anwendung dieses Satzes auf $l=3$ und $l=7$ bemerkt er weiter:

„Die Theorie der Reste habe ich bis jetzt nur in dem

Zusammenhange betrachtet, wie sie aus der Kreistheorie unmittelbar hervorgeht. Setzt man nämlich, wenn q eine Primzahl ist, $\{\xi(r)\}^q = \varphi(r)\xi(r^q)$, wo $\varphi(r)$ eine ganzzahlige Funktion von r ist, so muß, wenn q Rest einer l^{ten} Potenz in Bezug auf den Modul p sein soll, $\varphi(r) \equiv 1 \bmod. q$ sein (daraus das Fundamentaltheorem für quadratische Reste). Ist q ebenfalls wie p von der Form $ln+1$, so werden die allgemeinen Sätze über die Reste eleganter. Setzt man nämlich $\{\xi(r)\}^l = \varphi(r)$ und in $\varphi(r)$ statt r eine Wurzel der Congruenz $\frac{x^l-1}{x-1} \equiv 0 \bmod. q$, so wird q Rest der l^{ten} Potenz in Bezug auf p, wenn $\varphi(r)$ Rest der l^{ten} Potenz in Bezug auf q ist, . . . Ew. Hochwohlgeboren können sich denken, wie sehnsüchtig ich die erste Abhandlung über biquadratische Reste erwarte. Wenn Sie mir doch nur etwas von der noch allgemeineren Theorie und der eigenthümlichen Erweiterung der höheren Arithmetik schreiben wollten. Die Anwendung der höheren Arithmetik auf die Theilung der elliptischen Transcendenten ist in den Disquisitiones versprochen, o würde doch das Versprechen erfüllt! Verzeihen Sie, hochgeehrter Herr Hofrath, das Flüchtige und Schülerhafte der gemachten Mittheilung, und nehmen Sie die Versicherung der unbegrenzten Verehrung . . .“

Erst im Laufe des Sommers, im Juni 1827, gelang es ihm, wenigstens eine Mitteilung über die Resultate seiner zahlentheoretischen Untersuchungen fertigzustellen und unter dem Titel „De residuis cubicis commentatio numerosa“ zu veröffentlichen.

„. . . Ante biennium fere Vir ille Clarissimus [Gauss] commentationem primam de residuis biquadraticis conscriptam societati Göttingensi tradidit, quae tamen diu desiderata nondum lucem vidit. Quam ne nimis graviter ferant arithmetici moram, ipse praecipua, quae ibi adornaverat, theoremata jam tum temporis publici juris facere voluit . . . Equidem dum ad egregia Viri inventa probe intelligenda animum bene praeparatum esse volebam, hisce quaestionibus intentus casu, ut fit, in methodum satis generalem incidi, cujus ope plurima de residuis dignitatum theoremata investigare, vel undecunque cognita comprobare posse mihi videor. Cujus ope eruta de residuis cubicis theoremata fundamentalia arithmeticis jam proponam.“

Jacobi spricht in dieser Arbeit die Sätze aus, daß, wenn p und q zwei Primzahlen von der Form $6n+1$, $4p = L^2 + 27M^2$, $x^2+3 \equiv 0 \bmod q$ ist, q ein kubischer Rest der Primzahl p dann und nur dann sein wird, wenn $\frac{p(L+3Mx)}{2}$ oder $\frac{L+3Mx}{L-3Mx}$ ein kubischer Rest von q ist; ist die Primzahl p jedoch von der Form $6n+1$, und $4p = L^2 + 27M^2$, ferner q von der Form $6n-1$, so ist q dann und nur dann kubischer Rest von p, wenn $\frac{L+M\sqrt{-3}}{L-M\sqrt{-3}}$ kubischer Rest von q ist. Nach Ausführung der Grundzüge einer mit Hilfe dieser beiden Sätze zu entwerfenden Tabelle verallgemeinert er noch einen von Gauss gegebenen Satz dahin, daß, wenn für eine Primzahl p von der Form $3n+1$ $4p = L^2+27M^2$ gesetzt wird, L kleinster Rest der durch p dividierten Zahl $-\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\ldots n}$ ist, und dieser Rest, durch 3 dividiert, immer $+1$ als Rest liefert, und ähnlich wird für eine Primzahl p von der Form $7n+1$, wenn $p = L^2 + 7M^2$ gesetzt wird, L kleinster Rest der durch p dividierten Zahl $\frac{1}{2}\,\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}{1\cdot 2\ldots n}$ sein, und dieser Rest durch 7 dividiert immer den Rest $+1$ lassen.

„Die Arbeit über die kubischen Reste“, sagt Dirichlet, „enthält zwar nur Sätze ohne Beweis, aber diese Sätze sind derart, daß sie nicht das Ergebnis der Induktion sein können und keinen Zweifel darüber lassen, daß Jacobi schon damals in dem wissenschaftlichen Gebiete, welches Gauss ein Vierteljahrhundert früher der mathematischen Spekulation eröffnet hatte, und welches ebensosehr der höheren Algebra als der

Theorie der Zahlen angehört, im Besitze neuer, fruchtbarer Prinzipien sein mußte, was auch durch eine spätere Publikation bestätigt wird, in der er ausdrücklich erwähnt, daß er diese Prinzipien schon damals Gauss brieflich mitgeteilt habe."

Ob Gauss sich mündlich Dirichlet gegenüber, der ihn auf der Reise von Paris nach Breslau am 18. März 1827 besucht hatte, über Jacobis zahlentheoretische Arbeiten geäußert hat, wissen wir nicht — es fehlen alle näheren Nachrichten über jenes Zusammentreffen.

Die Vorlesungen des Sommersemesters über die Theorie der krummen Flächen und über Elementargeometrie waren die Veranlassung zu zwei kleineren Notizen, die vom Mai und Juni datiert sind. In der „Über die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung" betitelten Arbeit soll, von einem schiefwinkligen Koordinatensysteme ausgehend, der Ausdruck $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy$ durch lineare Transformationen in einen andern der Form $L\xi^2 + M\eta^2 + N\zeta^2$ übergeführt werden, und es wird von Jacobi hierfür der Einfachheit halber der umgekehrte Weg der Verwandlung des zweiten Ausdruckes in den ersten gewählt. „Dieser zweite Weg bewährt sich als der vortheilhaftere. Wir werden ihn Gauss nachgehen, welcher ihn bei einer Untersuchung eingeschlagen, die von der unsrigen dem Gegenstande nach gänzlich fernliegend gleichwohl die nämliche Analyse erfordert. Man vergleiche die berühmte Abhandlung: Determinatio attractionis etc.", und Jacobi führt das Problem auf die Auflösung von 12 Gleichungen in den Größen L, M, N und den 9 Koeffizienten der linearen Transformationen zurück, die er in einfacher und völlig symmetrischer Form durchführt, und aus denen er die bekannten Ausdrücke für ein ursprünglich rechtwinkliges oder ein schiefwinklig konjugiertes Koordinatensystem herleitet. In der zweiten kurzen Notiz: „Euleri formulae de transformatione coordinatarum" reproduziert Jacobi nur die Formeln von Euler und Lexell, die für die Koeffizienten der Koordinatentransformation Ausdrücke durch 3 Winkel φ, ψ, ϑ gefunden, welche für die Behandlung mechanischer Probleme wesentlich in Frage kommen. „Demonstrationes quas illi V. V. Cll. dederunt, hodie elegantiores reddi possunt. Hic tamen rem tantum modo indicatam volo, atque juvat, formulas maxime memorabiles oblivioni eripuisse."

Den Winter 1826/27 hindurch war Jacobi bereits mit den Vorbereitungen zu seinen großen Untersuchungen beschäftigt, welche sehr bald in Gemeinschaft mit denen von Abel für die moderne Analysis eine neue Basis bilden sollten, von denen jedoch zunächst nur Sätze mehr formaler Natur, die Reduktion eines elliptischen Integrales betreffend, in einer an Bessel gerichteten brieflichen Notiz vom 1. März 1827, nach welcher die Substitution, welche $\cos\varphi$ als gebrochene rationale Funktion 3. Grades von x ausdrückt, das elliptische Differential erster Gattung in x in ein solches in φ überführt, dessen Irrationalität die Form $\sqrt{A + B\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi}$ hat, sowie in der vom Juni datierten Abhandlung: „De singulari quadam duplicis integralis transformatione" in die Öffentlichkeit traten.

„Celeberrima illa dissertatio Gaussiana inscripta 'Determinatio attractionis etc.' in eo maxime versatur, ut expressio data $\dfrac{dE}{\sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}}$ in formam simpliciorem redigatur hanc $\dfrac{dP}{\sqrt{G + G'\cos^2 P + G''\sin^2 P}}$, id quod fieri a Cl.º autore demonstratur per substitutionem factam: $\cos E = \dfrac{\alpha + \alpha'\cos P + \alpha''\sin P}{\gamma + \gamma'\cos P + \gamma''\sin P}$, $\sin E = \dfrac{\beta + \beta'\cos P + \beta''\sin P}{\gamma + \gamma'\cos P + \gamma''\sin P}$, novem coefficientibus rite determinatis. Dum egregiae illi commentationi identidem incumbebam, non fugit me, eandem fere analysin ad duplicis Integralis cujusdam insignem transformationem adhiberi posse, quam communicare cum geometris eo minus dubito, quod duplicium Integralium theoria adhuc valde jacet", und Jacobi zeigt nun, daß, wenn $e = a + a'\cos^2\psi + a''\sin^2\psi\cos^2\varphi + a'''\sin^2\psi\sin^2\varphi + 2b'\cos\psi$

$+ 2b'' \sin\psi \cos\varphi + 2b''' \sin\psi \sin\varphi + 2c' \sin^2\psi \cos\varphi \sin\varphi$ $+ 2c'' \cos\psi \sin\psi \sin\varphi + 2c''' \cos\psi \sin\psi \cos\varphi$ gesetzt wird, worin e außer der Konstanten die Ausdrücke $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\sin\varphi$, deren Quadrate und Produkte zu je zweien enthält, das Doppelintegral

$$\int\int \frac{\sin\psi\, d\psi\, d\varphi}{e}$$

sich in

$$\int\int \frac{\sin P\, dP\, d\vartheta}{G + G' \cos^2 P + G'' \sin^2 P \cos^2\vartheta + G''' \sin^2 P \sin^2\vartheta}$$

transformieren läßt durch Ausdrücke für $\cos P$, $\sin P\cos\vartheta$, $\sin P\sin\vartheta$, welche linear gebrochene Funktionen von $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\sin\varphi$ darstellen.

Die zunächst noch ganz im ursprünglichen Legendreschen Sinne auf die Umformung der elliptischen Integrale gerichteten Bestrebungen führten Jacobi jedoch sehr bald zu Überlegungen völlig anderer Natur.

Nachdem jener ausgezeichnete französische Mathematiker bereits 1786 und 1793 in seinen Mémoires „Sur les intégrations par d'arcs d'ellipse“ und „Sur les Transcendantes elliptiques“ eine allgemeinere analystische Auffassung der Elemente der Transformationstheorie der elliptischen Integrale kundgegeben und deren Einteilung in verschiedene Gattungen sowie deren Reduktion auf die Normalformen ausführlich entwickelt hatte, faßte er alle diese Untersuchungen in seinen „Exercices de calcul intégral sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures“ (1811—19) zusammen, aus deren Studium Jacobi zuerst die Grundlagen der bisher über die elliptischen Integrale angestellten Untersuchungen kennen lernte.

„Aber der junge Mathematiker, der sich schon in so vielen Richtungen mit Erfolg versucht hatte“, erzählt Dirichlet, „schien längere Zeit in der Theorie der elliptischen Funktionen vom Glücke nicht begünstigt zu werden. Einer seiner Freunde, der ihn eines Tages auffallend verstimmt fand, erhielt auf die Frage nach dem Grunde dieser Verstimmung die Antwort: Sie sehen mich im Begriff, dieses Buch (Legendres exercices) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt, und ist dabei etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspiriert worden.“ ... „Wenn die eignen Gedanken“, fügt Dirichlet hinzu, „in diesem Falle etwas lange auf sich warten ließen, so stellten sie sich später dafür um so reichlicher ein.“

Die Untersuchungen Abels, die, wie sich später aus dessen nachgelassenen Papieren ergab, damals schon ein großes Gebiet der Transzendentenlehre beherrschten, waren Jacobi völlig unbekannt geblieben; es kann kein Zweifel darüber obwalten, daß Abel bereits im Jahre 1825 im Besitz der Kenntnis der doppelten Periodizität der Umkehrungsfunktionen der elliptischen Integrale gewesen, und daß er nicht etwa nur an einer erweiterten und auf neuer Grundlage aufgebauten Theorie der elliptischen Transzendenten arbeitete, sondern daß sein Streben von vornherein darauf gerichtet war, eine allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentiale zu entwickeln; wir wissen, daß er schon im Jahre 1825 damit umging, eine systematisch und einheitlich angelegte Theorie der elliptischen Transzendenten zu veröffentlichen. Am 4. März 1827 schreibt er an Holmboe aus Berlin: „Mais ce que j'ai de plus beau, c'est dans la théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier; mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour.“ In der Tat schickt er auch Crelle sogleich den ersten Teil seiner berühmten „Recherches sur les fonctions elliptiques“, der im September 1827 erschien — aber inzwischen hatte schon Jacobi an Schumacher, den Herausgeber der „Astronomischen Nachrichten“, zwei vom 13. Juni und 2. August aus

Königsberg datierte Mitteilungen gesandt, welche im September in dieser Zeitschrift veröffentlicht wurden und Sätze enthielten, welche Abel damals ebenfalls bereits gefunden, aber erst in dem zweiten Teile seiner recherches, also später als Jacobi, veröffentlicht hat.

„Ayant terminé", sagt Abel in einem Zusatze zu dem am 12. Februar 1828 an Crelle übersandten zweiten Teile seiner recherches, „le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. J. Jacobi inserée dans le No. 123 année 1827 du recueil de Mr. Schumacher, qui a pour titre 'Astronomische Nachrichten' m'est venu sous les yeux. Mr. Jacobi donne le théorème suivant... Ce théorème élégant, que Mr. Jacobi donne sans démonstration, est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270). Nous allons démontrer cela." Daß Abel in der Tat in dieser Zeit schon im Besitze der allgemeinen algebraischen Transformationstheorie war, geht übrigens auch aus dem am Ende des Jahres 1827 ohne Angabe des Beweises unter dem Titel „Aufgaben und Lehrsätze" im Crelleschen Journale von ihm ausgesprochenen Theoreme hervor: Si l'équation différentielle séparée $\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ $= \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, a$ sont des quantités réelles, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre rationnel.

In dem ersten der beiden unter dem Titel „Extraits de deux lettres de M. Jacobi de l'université de Königsberg à Mr. Schumacher" mitgeteilten Briefe sagt Jacobi:

„Veuillez bien, Monsieur, insérer dans votre journal les notices sur les transcendantes elliptiques, que j'ai l'honneur de vous adresser. C'est que je me flatte d'avoir fait quelques découvertes assez intéressantes dans cette théorie, dont je vais soumettre l'exposé au jugement des géomètres.

Les intégrales de la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$ appartiennent d'après la diversité du module c à des transcendantes diverses. On ne connait qu'un seul système de modules qu'on peut réduire l'un à l'autre, et Mr. Legendre dans ses Exercices dit même, qu'il n'y avait que ce seul. Mais en effet il y a autant de ces systèmes qu'il y a de nombres premiers, c'est à dire il y a un nombre infini de ces systèmes indépendants l'un de l'autre, dont chacun répond à un nombre premier, et dont le système connu répond au nombre premier 2."

Jacobi spricht in dieser Notiz bereits, wenn auch ohne Beweis, den allgemeinen Satz von der rationalen Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung aus, daß $\sin\varphi = \frac{u}{v}$ gesetzt, worin u eine gewisse unpaare Funktion n^{ten} Grades von $\sin\psi$, v eine bestimmte paare Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades eben dieser Größe bedeutet, die Beziehung

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = m\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$$

liefert, und hebt hervor, daß man jetzt $\sin\psi$ auf fast analoge Art durch $\sin\vartheta$ so ausdrücken kann, daß man durch Zusammensetzung der beiden Integralgleichungen

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = n\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta}}$$

erhält, worin sich $\sin\varphi$ durch einen rationalen Bruch in $\sin\vartheta$ darstellt, dessen Zähler die unpaaren Potenzen bis zur n^2., der Nenner die paaren bis zur n^2-1. enthält. Dieser noch ohne Beweis und ohne Angabe des allgemeinen analytischen Transformationsausdruckes mitgeteilte Satz ist für die Transformation 3. und 5. Grades weiter ausgeführt und mit der Multiplikation und Division für diese Gradzahlen in Verbindung gebracht, wobei Jacobi bemerkt: „ainsi je donne ici pour la première fois la solution algébrique de l'équation du $9^{\text{ième}}$ degré, dont la trisection de notre transcendante dépend." Die Transformation 3. Grades war jedoch inzwischen schon von Legendre in dem im Januar 1827 ausgegebenen „Traité des fonctions elliptiques" veröffentlicht worden, ohne daß Jacobi zur Zeit der Veröffentlichung seiner Notiz davon Kenntnis hatte.

Schumacher hatte sogleich, nachdem er von den Untersuchungen Jacobis nur andeutungsweise Kenntnis erhalten, Gauss eine Mitteilung darüber gemacht, welcher den dringenden Wunsch äußerte, zu wissen, in welcher Richtung sich die Forschungen Jacobis bewegten. Nach Empfang des ersten Jacobischen Briefes schreibt Schumacher am 24. Juli 1827 an Gauss: „Von Jacobi ist beifolgender Brief gekommen, den ich Ihnen nur schicke, weil Sie es ausdrücklich verlangten und mir noch auf dem Erinnerungszettel notirt haben. Seinem Verlangen gemäß will ich hinzusetzen, daß er Legendre's neues Werk damals noch nicht gesehen habe; ich bitte Sie aber sehr, wenn Sie sonst mögen und können, senden Sie mir ein Paar Worte Anmerkung", worauf ihm Gauss am 2. August erwiderte: „Es scheint mir nach Erwägung aller Umstände am schicklichsten, wenn ich dabei ganz aus dem Spiele bleibe", und am 6. August in seinem Tagebuch eine Notiz machte, aus der hervorgeht, daß, während Jacobi in seinem ersten Briefe nur die Darstellung der Transformation 3. und 5. Grades durchgeführt hat, Gauss bereits längst im Besitze der Transformationsformeln 7. Grades war.

Am 2. August hatte Jacobi in einem zweiten, zugleich mit dem ersten veröffentlichten Briefe den allgemeinen analytischen Transformationsausdruck, wenn auch noch ohne Beweis, wirklich hingestellt, und zwar in der Form

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\psi}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right)}\,\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'''+\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'''-\varphi}{2}\right)}\cdots\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)}\pm\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)}\mp\varphi}{2}\right)}\operatorname{tg}\left(45^0\mp\frac{\varphi}{2}\right),$$

worin die Amplituden $\varphi^{(m)}$ durch die Beziehung der ersten elliptischen Integrale

$$F(\varkappa,\varphi^{(m)})=\frac{m}{p}F(\varkappa,90^0)$$

definiert werden, und p eine beliebige unpaare Zahl bedeutet.

Kurz zuvor hatte er diese Notiz Bessel mit den Worten gesandt: „Ihrer gütigen Erlaubniß gemäß überschicke ich Ihnen hier das bewußte für die A. N., nicht ohne Zittern und Zagen. Aber zürnen Sie nicht, wenn alles die Mängel eines ersten Beweises verräth; es hat wahrlich nicht an meiner Bemühung gelegen."

Auch diese zweite Mitteilung Jacobis schickte Schumacher noch vor dem Drucke am 14. August 1827 an Gauss: „Ich sende Ihnen noch folgenden Brief von Jacobi (diesmal mit seinem eignen Pettschafte gesiegelt), ich werde ihn einrücken und damit, denke ich, ist die Communication geschlossen", worauf ihm Gauss am 19. August erwiderte:

„Hieneben erhalten Sie zuvörderst den Jacobi'schen Brief zurück. Auch das darin enthaltene Theorem wird ganz leicht aus meinen Untersuchungen über die Transcendenten abgeleitet. Aus einer Andeutung Ihres Briefes scheint es mir fast, als ob sie abgeneigt sind, ähnliche nackte Aufstellungen von Sätzen ohne Begründung in Ihr Blatt aufzunehmen. Ich enthalte mich ganz, ein eignes Urtheil über diese Manier, die wenigstens nicht die meinige ist, zu fällen; aber auf den Fall, daß ich Ihre Andeutung recht verstanden haben sollte, bitte ich Sie, wenn künftig solche Briefe eingehen sollten, die sie nicht publiciren wollen, sie mir nicht zu schicken."

„Meine Absicht ist es allerdings", lautete die Antwort Schumachers vom 28. August, „künftig nicht nackte Aufstellungen ohne Begründung zu publiciren, wenn nicht die besondern Umstände der Sache die Publication rathsam machen. Da ich aber wegen dieser Umstände von Niemandem bessern Rath haben kann als von Ihnen, so setzt mich ihre Weigerung, solche Papiere zu sehen, etwas in Verlegenheit. Doch bescheide ich mich gern, daß mein

Wunsch, Ihren Rath zu erhalten, Sie nicht bestimmen kann, Papiere, die Sie nicht interessiren, durchzusehen ...";

aber Gauss beruhigte ihn am 9. September in einer des großen Mathematikers würdigen Form:

„Es hat mich geschmerzt, daß Sie meine Äußerungen über die Jacobi'schen Mittheilungen auf eine für mich so ungerechte Art ausgelegt haben. Ich werde stets gern bereit sein, auch etwas, was mich nicht interessirt, durchzugehen, wenn ich Ihnen damit einen Dienst erweisen kann. Aber wenn ich wünsche, solche Mittheilungen von Herrn Jacobi, die Sie nicht drucken lassen wollen, nicht mitgetheilt zu erhalten, so ist der Grund ja bloß der, daß ich in so fern Partei bin, als die Mittheilungen nur Stücke meiner eignen ausgedehnten Untersuchungen sind, die ich, wenn der Himmel mir in Zukunft noch Leben, Kräfte und Muße schenkt, zu einem umfassenden Werke ausarbeiten werde, und wobei es mir nicht gleichgültig sein kann, ob Jemand sagen kann, Theile davon seien mir durch Privatmittheilung bekannt geworden."

Unmittelbar nach Absendung seiner Briefe an Schumacher hatte Jacobi am 5. August 1827 ein Schreiben an Legendre gerichtet, in welchem er die in den beiden Noten erwähnten Resultate skizziert, das jedoch durch Nachlässigkeit des Überbringers erst einige Monate später Legendre eingehändigt wurde. Hiermit beginnt der für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften so hochinteressante Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi, der sich bis zum Jahre 1832, ein halbes Jahr vor Legendres Tode hinzog; die Briefe Jacobis an Legendre wurden zuerst von Bertrand publiziert, kurz bevor sie bei einem der Brände in der Communezeit verloren gingen; der Briefwechsel zwischen beiden wurde von Borchardt im 80. Bande seines Journals veröffentlicht.

Dieser erste Brief Jacobis beginnt mit den schönen Worten:

„Monsieur, un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques,

auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'analyse doit le haut degré de perfectionnement, auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance."

Die Existenz einer Transformation 5. Grades überraschte Legendre in hohem Grade, und er konnte sich mit dem in dem Schreiben Jacobis an ihn ausgesprochenen Gedanken von der Existenz einer zu einem beliebigen Grade gehörigen algebraischen Transformation so wenig vertraut machen, daß er — ganz anders als Gauss — bestimmt glaubte, daß Jacobi durch eine Induktion irregeführt worden; erst das Studium der beiden Briefe Jacobis in den „Astronomischen Nachrichten" überzeugte ihn sehr bald davon, daß die allgemeine Transformationstheorie auf einer festen Basis beruhe, und daß die Existenz einer unendlichen Anzahl von Modulnketten nicht mehr anzuzweifeln war.

„Ici je n'ai plus été de l'avis de Mr. Jacobi", sagt Legendre in einer in der Akademie gegebenen Besprechung dieser Jacobischen Sätze, „et j'ai même cru pouvoir lui écrire une lettre, dans laquelle je lui indiquais ce qui, suivant moi, l'avait induit en erreur. Heureusement l'envoie de cette lettre a été assez retardé pour que j'aie pu reconnaître, que c'était moi-même qui me trompais, et que Mr. Jacobi sur ce point comme sur les autres avait complétement raison; et je l'ai reconnu avec d'autant plus de plaisir que c'est sur un sujet dont je m'occupe depuis plus de quarante ans que j'ai été ainsi surpassé par Mr. Jacobi, mon émule."

Aber durchaus nicht einverstanden war Legendre mit den Schlußworten des Jacobischen Briefes vom 5. August: „il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire, qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante." Legendre wies vielmehr die Behauptungen von Gauss als unberechtigt zurück — und doch beruhten nicht bloß diese Angaben des großen Mathematikers, wie wir jetzt aus seinen Aufzeichnungen wissen, auf strenger Wahrheit, er war vielmehr schon seit länger Zeit vielen bis zur Mitte des Jahrhunderts auf diesem Gebiete gemachten Entdeckungen weit vorausgeeilt.

Auch die Antwort Jacobis: „Quant à Mr. Gauss, il n'a rien encore publié sur les fonctions elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux", konnte Legendre für Gauss nicht günstiger stimmen; er häufte in seinem Berichte an die Akademie vom 29. November alles Lob auf Jacobi:

„Ce n'est pas par induction que Mr. Jacobi est parvenu aux résultats qu'il a publiés; c'est par une théorie profonde et infaillible et à l'aide de deux théorèmes, entièrement nouveaux, qu'il a fait cette découverte, qui agrandit considérablement la théorie des fonctions elliptiques et en fait une branche d'analyse parfaite dans son genre et qui ne peut-être comparée à aucune autre."

Jacobis Plan, während der Herbstferien eine ausführlichere Darstellung der Transformationstheorie sowie seiner weiteren, bereits durchgeführten Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Funktionen zu entwerfen, erlitt zunächst dadurch eine kurze Verzögerung, daß er durch seine Vorlesung über Variationsrechnung, die er im Sommer gehalten, veranlaßt worden, sich mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu beschäftigen, und auch hier wieder zu neuen und interessanten Resultaten gelangt war, von denen er einen Teil am 12. August 1827 unter dem Titel „Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung" an das Journal sandte.

„Die Entstehung und Ausbildung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bildet einen der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts. Euler hatte diesen so fruchtbaren Zweig der Analysis ans Licht gerufen, und in einer großen Zahl von Beispielen durch besondere, dem jedesmaligen Falle angepaßte Kunstgriffe die Integration bewerkstelligt. Lagrange gab hierauf die ersten allgemeinen Vorschriften, die linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen jeder Anzahl von Variabeln und insbesondere jede auch nicht lineare zwischen 3 Variabeln auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die von Lagrange zu letzterem Zwecke angewendete Methode schien keiner Ausdehnung auf jede Anzahl von Variabeln fähig zu sein, da die Analysten, die dieses versuchten, die ihnen aufstoßenden Schwierigkeiten nicht überwinden konnten. Pfaff betrachtete daher den Gegenstand aus einem von allen bisherigen gänzlich verschiedenen Gesichtspunkte. Er sah nämlich das ganze Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als speziellen Fall des weit umfassenderen an, jede gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren; und indem er dieses Problem vollständig löste, hat er zugleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vollendet. Ich werde im folgenden diesen Gegenstand wieder aufnehmen, und ihn einer, wie ich glaube, neuen Behandlung unterwerfen, welche sich vielleicht durch ihre Leichtigkeit den Analysten empfiehlt. Durch sie werden die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf jede Anzahl von Variabeln entgegenstanden, so-weit die Natur dieser Methode es möglich macht, gehoben werden, und man wird so auf dem entgegengesetzten Wege zu denselben Resultaten gelangen, welche Pfaff gefunden hat."

Zunächst wird in der Arbeit von Jacobi hervorgehoben, daß, wie Lagrange gezeigt hat, die Integration der Differentialgleichungen $dx : dx' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : \ldots : X^{(n)}$ mit der Lösung der Aufgabe übereinkommt, n verschiedene Funktionen F zu finden, von denen jede der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$ identisch genügt, und daß jede willkürliche Funktion von solchen Integralfunktionen wieder eine Integralfunktion darstellt, wodurch Lagrange die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung auf die eines Systems totaler Differentialgleichungen zurückgeführt hat. Jacobi verallgemeinerte nun das Lagrangesche Theorem dahin, daß, wenn $F_1, F_2, \ldots F_n$ solche Funktionen der Variabeln $x, x', \ldots x^{(n)}$ darstellen, welche, für F gesetzt, die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$ identisch erfüllen oder welche nach Lagrange, willkürlichen Konstanten gleich gesetzt, die Gleichungen $dx : dx' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : \ldots : X^{(n)}$ integrieren, dann das System der m Gleichungen

$$X^{(i)} = X^{(m)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(n)}}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots m-1),$$

worin $x^0, x', \ldots x^{(m-1)}$ als Funktionen von $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots x^{(n)}$ betrachtet werden, integriert wird durch die m Gleichungen $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_m = 0$, wenn $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_m$ willkürliche Funktionen von $F_1, F_2, \ldots F_n$ sind, wobei das Jacobische System linearer partieller Differentialgleichungen dadurch charakterisiert ist, daß in jeder Gleichung nur die partiellen Ableitungen einer Variabeln vorkommen, und daß in allen Gleichungen die Koeffizienten der nach derselben Variabeln genommenen Ableitung dieselben sind.

Von diesem Systeme linearer partieller Differentialgleichungen kann er nun den Übergang zu der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung machen, indem er aus einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung $\varphi(x, x', \ldots x^{(n)}, p', \ldots p^{(n)}) = 0$ mit einer abhängigen und n unabhängigen Variabeln durch Differentiation nach diesen n Variabeln und Hinzufügung einer identischen Gleichung ein System von $n+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen der obigen von ihm aufgestellten Form herleitet, zu deren Integration somit nur ein System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ausreicht. Bildet man nun n willkürliche Funktionen $\Pi_1, \ldots \Pi_n$ der $2n-1$ Integralfunktionen $\varphi_1, \ldots \varphi_{2n-1}$ des totalen Systems, so liefert das System der $n+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen integriert Gleichungen von der Form $\varphi = 0, \Pi_1 = 0, \ldots \Pi_n = 0$. Wie nun Lagrange die Bestimmung der bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln vorkommenden zwei willkürlichen Funktionen von der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln durch das System zweier Gleichungen abhängig macht, so zeigt Jacobi, daß in dem von ihm betrachteten allgemeinen Falle die Bestimmung der willkürlichen Funktionen die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n-1$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen oder, indem man eine der Variabeln konstant setzt, zwischen $2n-2$ Variabeln durch ein System von $n-1$ Gleichungen erfordert.

„Wie nun aber diese letztere immer und allgemein geleistet werden kann, ist erst durch die berühmte Pfaffsche Arbeit den Analysten kund geworden. Wenngleich also im allgemeinen das Problem immer nur durch diese schließlich gelöst werden kann, so schien es uns doch der Mühe wert, die Lagrangesche Methode so weit zu verfolgen, wie sie zu führen imstande ist... Ich werde die

Pfaffsche Methode in mehreren Abhandlungen besonders behandeln, wo ich auch diesen Gegenstand wieder aufzunehmen gedenke."

Schon zwei Tage später, am 14. August, verfaßte er die erste dieser in Aussicht gestellten Abhandlungen und gibt in der unter dem Titel „Über die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren", veröffentlichten Arbeit zunächst nur eine klare und etwas weiter ausgeführte Darstellung der Pfaffschen Methode.

„Pfaff hat in einer Abhandlung (Berl. Akad. 1814—15) gezeigt, wie man jede Gleichung von der Form $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$, wo $X_1, \cdots X_{2n}$ beliebige Funktionen von $x_1, \ldots x_{2n}$ sind, durch ein System von n Gleichungen integrieren kann, von welcher Aufgabe die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen n Variabeln nur ein besonderer Fall ist. Zu diesem Ende drückt er $2n - 1$ von den Variabeln $x_1, \ldots x_{2n}$ durch die übrige x_m und durch $2n - 1$ neue Größen $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ aus, wo $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ gewisse Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ sind. Nach solcher Substitution verwandelt sich die Gleichung $X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ immer in eine andere von der Form $U dx_m + A_1 da_1 + \cdots + A_{2n-1} da_{2n-1} = 0$, wo $U, A_1, \ldots A_{2n-1}$ Funktionen von $x_m, a_1, \ldots a_{2n-1}$ sind. Die Funktionen $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ bestimmt nun Pfaff so, daß $U = 0$, und daß x_m in den Größen $A_1, \ldots A_{2n-1}$ nur in einem allen gemeinschaftlichen Faktor vorkommt. Dividiert man mit diesem, so hat man die gegebene Gleichung in eine andere ähnliche, aber nur zwischen $2n - 1$ Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ verwandelt . . ."

Jacobi führt nun die allgemeine Methode, eine Gleichung $X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0$ in eine andere $U dx + A_1 da_1 + \cdots + A_p da_p = 0$ zu verwandeln, in welcher $U = 0$ sein soll und x in $A_1, \ldots A_p$ nur in einem allen

gemeinschaftlichen Faktor M vorkommt, in eleganter und symmetrischer Form näher aus, und findet, wenn er $\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x} = N$, $\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha} = (\alpha, \beta)$ setzt, die bereits bekannten $p + 1$ zu erfüllenden Gleichungen in der Form:

$$N X_i = (i, 0) + (i, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + (i, p)\frac{\partial x_p}{\partial x} \quad (i = 0, 1 \ldots p);$$

es werden daher, wenn sich in leicht kenntlichen Bezeichnungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{NV_1}{\Delta}, \quad \ldots \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{NV_p}{\Delta}, \qquad N = \frac{\Delta}{V}$$

ergibt, $a_1, a_2, \ldots a_p$ diejenigen Funktionen sein, welche bei Integration der Gleichungen $dx : dx_1 : \ldots : dx_p = V : V_1 : \ldots : V_p$ den p willkürlichen Konstanten gleich gesetzt werden. Er behandelt nun einige merkwürdige Eigenschaften des obigen, für die spätere Eliminationstheorie wichtigen Gleichungssystems, in welchem die Vertikalreihen der Koeffizienten das Negative der Horizontalreihen sind, und findet leicht, daß die Anzahl der Variabeln $x, x_1, \ldots x_p$ eine gerade sein muß. „Es ist nämlich bekannt, daß man bei jedem System von n Gleichungen zwischen n unbekannten Größen darauf zu sehen hat, ob nicht der den Werten der Unbekannten gemeinsame Nenner, welchen Gauss in den Disqu. Arithm. mit dem Namen Determinante bezeichnet, verschwinden könne, welches ein Zeichen ist, daß das System der n Gleichungen nicht bestehen kann, wofern nicht etwa eine Bedingungsgleichung zwischen den Konstanten stattfindet, vermöge welcher die n^{te} Gleichung eine Folge der übrigen $n - 1$ Gleichungen ist."

Die Arbeit, welche bereits deutlich das Eindringen in weit tiefere algebraische und analytische Probleme erkennen läßt, schließt mit den Worten: „Da die Pfaffsche Methode auf Variation der Konstanten beruht, und Lagrange und Poisson in der Mechanik bei der Methode der Variation der Konstanten auf ein ebensolches Gleichungssystem gekommen sind, so scheint dieses System vorzugsweise bei dieser Methode der Variation der Konstanten vorzukommen", und weist schon auf weit spätere bahnbrechende Untersuchungen in der analytischen Mechanik hin.

Arbeiten von Bessel und mündliche Erörterungen astronomischer Fragen mit demselben führten Jacobi noch zu einer kleinen, vom 20. August 1827 datierten Arbeit „Über die Bestimmung der Rektaszension und Deklination eines Sternes aus den gemessenen Distanzen desselben von zwei bekannten Sternen", in welcher zum Teil bekannte, aber komplizierte und zu einer eleganten Methode der Berechnung noch nicht geeignete Formeln auf einem kurzen und direkten Wege ohne Beihilfe der sphärischen Trigonometrie entwickelt werden.

Kaum hatte er diese Arbeiten niedergeschrieben, so wendet er sich wieder mit seinem unermüdlichen Wissensdrange und der eminenten Kraft seines Geistes der Theorie der elliptischen Funktionen zu, wird aber durch die Fülle der Entdeckungen, die ihn täglich neue und ungeahnte Wahrheiten erkennen lassen, gehindert, alles methodisch zusammenzustellen oder auch nur strenge Beweise und klare Ausführungen für seine Theoreme zu liefern. Inzwischen war auch das Heft des Crelleschen Journals, worin der erste Teil der Abelschen recherches veröffentlicht wurde, im September 1827 ausgegeben und wohl noch am Ende dieses Monats in Königsberg eingetroffen, wie aus einem vom 4. Oktober datierten Schreiben der Bibliotheksverwaltung an das Ministerium hervorgeht, worin letzteres ersucht wird, dafür zu sorgen, daß Reimer nicht, wie bei dem letzten Heft, diese wieder per Post schickt, da sie einen Taler Porto gezahlt habe und „gar keine Eile nöthig ist". Zunächst ging dieses Heft aber an Bessel, der erst nach einiger Zeit Jacobi davon Mitteilung macht: „Es ist ein neues Heft des Crelle'schen Journals angekommen

(B. 2. H. 2) mit einer Abhandlung über elliptische Transcendenten von Abel. Sie werden mir am besten sagen können, ob der Gesichtspunkt, unter welchem er sie ansieht, interessant ist." Zu einem wirklichen Studium der recherches wird Jacobi nach allem, was wir wissen, wohl kaum vor Ende des Jahres gekommen sein.

Die von Gauss geäußerten Bedenken in betreff der von Jacobi gewählten Art der Veröffentlichung in kurzen Anzeigen, sowie der ausdrücklich von Legendre ausgesprochene Wunsch, den Beweis Jacobis für das allgemeine rationale Transformationsproblem kennen zu lernen, veranlaßten Schumacher, sich am 5. November direkt an Jacobi zu wenden: „Aufrichtig gesagt bin ich auch insofern Legendre's Meinung, als es mir auch am besten scheint, wenn man solche brillante Entdeckungen wie die Ihrigen bekannt macht, nicht bloß das Enoncé zu geben, sondern sie gleich zu beweisen. Jeder, der die Wissenschaft wirklich liebt, ist immer zwischen der Erscheinung des Enoncés und der Erscheinung des Beweises in einer unangenehmen gespannten Stimmung und kann die heimliche Furcht, daß es nicht bewiesen werde, nicht unterdrücken. Erlauben Sie mir also eine Bitte, reißen Sie uns alle bald aus dieser Spannung und geben Sie die Deduction."

Glücklicherweise gaben die Vorlesungen im Wintersemester über Kegelschnitte und Elementargeometrie Jacobi wenig zu tun, und er stellte zunächst in einer vom 18. November 1827 datierten Arbeit „Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis", welche im Dezember in Schumachers „Astronomischen Nachrichten" veröffentlicht wurde, die wesentlichsten von ihm gewonnenen Resultate zusammen und lieferte zugleich den Beweis für das in seinem zweiten Briefe an Schumacher ausgesprochene Transformationsproblem.

„Proprietates functionum ellipticarum quasdam in No. 123 Astr. N. tradidi, quae novae atque attentione geometrarum non indignae videbantur. Disquisitiones, quibus illae originem debent, exinde ulterius continuatae sunt egregiamque, ni fallor, amplificationem theoriae a Legendre datae praebent. Cum autem tempus, quo tractavi, hasce disquisitiones complectenti, finem imponere licebit, definire nondum queam, geometris non ingratum fore spero, si fragmentum harum disquisitionum, demonstrationem scilicet theorematis in doctrina de transformatione functionum ellipticarum fundamentalis, hic breviter exponam. Multifariis idem modis variari posse, quisquis, perlecta demonstratione, facile intelliget."

Der Beweis beruht auf der Abzählung der Konstanten in der rationalen Substitution $y = \frac{U}{V}$ und der Aufstellung der Bedingungen dafür, daß diese Substitution die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-\alpha y)(1-\alpha' y)(1-\alpha'' y)(1-\alpha''' y)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)}}$$

nach sich ziehen soll; indem nun Jacobi, unabhängig von Abel, die eindeutige Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrales einführt, die er als sin am bezeichnet, spricht er das Theorem aus, daß jener Differentialgleichung in der Normalform mit den Integralmoduln λ und $\varkappa$ durch den Ausdruck

$$1 - y = \frac{(1 \mp x)\left(1 \pm \dfrac{x}{\operatorname{sincoam} \dfrac{2K}{2n+1}}\right)^2 \cdots \left(1 \pm \dfrac{x}{\operatorname{sincoam} \dfrac{2nK}{2n+1}}\right)^2}{\left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2K}{2n+1}\right) \cdots \left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2nK}{2n+1}\right)}$$

genügt wird, und fügt hinzu: „Theorema hoc generaliter valet, non tamen omnes problematis solutiones amplectitur. Ulteriores vero hujus argumenti disquisitiones in tractatu supra nominato reperientur." Zugleich wird der analytische Ausdruck für $\sqrt{\lambda}$ durch $\sqrt{\varkappa}$ gegeben, von dem Legendre

in dem ersten Supplement zu seinem traité sagt: „cette équation transcendante peut être regardée comme l'un des théorèmes les plus beaux et les plus féconds de cette branche d'analyse."

Nach Empfang dieser Arbeit schreibt Schumacher Ende November an Gauss:

„An Jacobi hatte ich, wie Sie sich vielleicht erinnern, geschrieben, daß mir das Einrücken solcher Enoncés nicht ganz passend erschien. Er hat mir jetzt den Beweis seines Fundamentaltheorems geschickt und will die ganze Analyse nachsenden. Mir scheint seine Ableitung sehr scharfsinnig, ich bin aber zu neu in diesen Untersuchungen, um meinem Urtheile zu trauen. Es wird bald gedruckt und dann werden Sie am besten entscheiden. Legendre hat einem französischen Officier erklärt, er glaube nicht, daß Jacobi seine Enoncés beweisen könne. Er wolle aber, falls dieser Beweis geführt werde, daraus ein Supplement zu seiner Theorie machen. Ich habe Ihnen nicht das Papier vorher gesandt, da ich in Bezug auf Jacobi's Mittheilungen Ihren Wunsch weiß. Jacobi ist übrigens derselbe, von dem Bessel mir so viele sonderbare Sachen erzählt hat",

und zugleich erhielt Gauss, noch bevor er die Arbeit zu Gesicht bekam, von Bessel eine vom 30. November datierte Mitteilung, die uns keinen Zweifel darüber läßt, daß Jacobi schon vor dem Erscheinen der recherches die Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrals in seine Transformationsausdrücke eingeführt hatte:

„So sehr mich die schönen Resultate von Jacobi über die elliptischen Transcendenten erfreut haben, so sehr habe ich auch bedauert, daß er und Abel, der vielleicht noch stärker ist als Jacobi, Ihnen viele Resultate rauben, welche Sie vermuthlich früher schon besessen haben. Zu einer Bezeichnung dieser Functionen habe ich Jacobi aufgefordert; Sie werden bald die Probe sehen, die er damit gemacht hat. Den Sinn, diese Theorie so geschmeidig zu machen, wie sie sich ohne Zweifel machen läßt, hat Jacobi nicht. Hier und in jeder andern Hinsicht wird Ihre Arbeit wieder classisches Muster werden. Möchten Sie doch, da sie längst reif sein muß, eine Anwendung derselben ausarbeiten und dadurch Ihren Besitz sichern!"

An demselben Tage, als Bessel an Gauss diese Mitteilung richtete, schrieb Legendre an Jacobi, ohne noch von dessen neuer Arbeit etwas zu wissen:

„.... Mais ayant reçu votre lettre j'y ai vu les deux formules générales sous forme trigonométrique, dont toute votre théorie dépend; je vois dès lors que ce n'est pas sur l'induction, mais bien sur une analyse profonde et rigoureuse, que vous avez établi votre proposition générale. Maintenant je ne puis que vous témoigner le désir que j'éprouve d'avoir communication de l'analyse qui vous a conduit à ces deux formules; la grand habitude que j'ai de la matière me fera contenter d'une simple indication de la méthode, ou de son principe fondamental."

Legendre erkannte wohl die ungeheure Tragweite der Jacobischen Prinzipien, ohne jedoch noch die Quelle zu ahnen, aus der alle diese Entdeckungen flossen; „die Scheu des hauptsächlich numerische Werthbestimmungen bezweckenden Mathematikers vor dem Imaginären", sagte später einmal Jacobi in einer für Alexander v. Humboldt gemachten geschichtlichen Aufzeichnung, „war die Ursache, daß Legendre der wichtigste Fortschritt der neueren Analysis, die Einführung der doppelt periodischen Functionen entgangen ist." Dagegen erkannte Abel, welcher im Besitze der meisten damals von Jacobi veröffentlichten Resultate war, ebenso wie Gauss, daß der Weg, den Jacobi eingeschlagen, unaufhörlich zu neuen Entdeckungen führen mußte.

„En décembre", sagt Holst, „les Astron. Nachr. publièrent la démonstration de Jacobi pour l'une des propositions et ce fut cet article, qui, arrivant à Christiania, effraya tout à coup Abel. Bjerknes présume que, à cause des difficultés des communications postales en hiver, Abel n'a guère dû connaître la démonstration de Jacobi avant le printemps. Ce qui le frappa, ce fut, comme il a été dit, l'usage de l'inversion par Jacobi, et alors il se sentit envahi dans son propre domaine. Hansteen, dans une lettre à Schumacher, a raconté à sa manière sèche, amusante, qu' Abel „devint tout pâle", lorsque lui Hansteen avait mis sous ses yeux le numéro des Astr. Nachr. avec le mémoire de Jacobi. Abel dut, écrit-il, courir chez le pâtissier et prendre un petit verre d'eau de vie „pour maîtriser son émotion". Schumacher communique l'histoire à Gauss et il ajoute: Si vous faites un jour connaître vos recherches, ça lui coûtera probablement encore plus cher d'eau de vie."

Inzwischen hatte sich der Ruhm Jacobis in der mathematischen Welt immer mehr verbreitet, teils durch das günstige Urteil, welches Gauss über dessen Arbeiten ausgesprochen, teils aber auch und vorzüglich durch das begeisterte Lob, welches Legendre ihm in der Akademie gespendet und welches in deutschen Zeitungen Widerhall gefunden. Jacobi, der noch immer Privatdozent mit 200 Talern Gehalt, obwohl der einzige Lehrer der Mathematik an der Universität zu Königsberg war, wandte sich am 22. Oktober 1827 an das Ministerium mit der Bitte um eine Anstellung, „an die er einige Ansprüche zu haben glaube, sei es hier oder anderswo ..."

„Nachdem ich zwei Semester auf der Berliner Universität mit vielem Beifall gelesen hatte, wie ein hohes Ministerium in einem Schreiben an die hiesige Universität zu bezeugen die Geneigtheit hatte, versehe ich bereits während 3 Semester die erledigte Stelle des verstorbenen ordentlichen Professors Wrede, ohne Anstellung und ohne einen der Vortheile zu genießen, welche mit derselben verbunden waren. Ich hatte mir seitdem durch glänzende Entdeckungen einen nicht unbedeutenden Ruf in der Gelehrtenwelt gegründet, und ausgezeichnete Mathematiker, wie der Herr Hofrath Gauss in Göttingen und der Herr Professor Bessel hierselbst werden einem hohen Ministerium gern bezeugen, daß diese zu den wichtigsten und bedeutendsten Erweiterungen der Mathematik in der neueren Zeit gehören. Ich schmeichle mir daher, daß auch ein hohes Ministerium meinen Bestrebungen den Beifall nicht versagen wird, welcher ihnen von den ersten Mathematikern der Zeit geworden ist."

Die Fakultät, vom Minister zu einem Gutachten aufgefordert, erklärte, daß sie nach Befragen Bessels in Jacobis ausgezeichnete wissenschaftliche Leistungen keinen Zweifel setze, aber den Wunsch hege, mit ihm nicht in kollegialische Verbindung zu treten, der unangemessenen Art wegen, wie sich derselbe über die Universität und die akademischen Lehrer geäußert habe. Der Kurator hebt dem gegenüber in erfreulicher Objektivität in seinem Berichte an den Minister hervor, daß sich die Bemerkungen der Fakultät auf Jacobis erstes Auftreten beziehen, wobei er sich über die Universitätslehrer mit Ausnahme der von ihm verehrten Professoren Bessel, Lobeck und einigen andern mit nicht hinlänglicher Achtung geäußert haben solle, und daß es ihm verargt wurde, weil er nur mit den gleichzeitig an die Universität gekommenen jüngeren Dozenten — Neumann, Dove u. a. — in Verbindung getreten sei. „Da derselbe als professor extraordinarius nicht in die Facultät tritt, so halte ich auch die Besorgniß derselben für voreilig, und sie dürfte es selbst nicht wünschen, einen so tüchtigen Mathematiker von der Universität zu weisen . . ."

Das günstige Urteil, welches Bessel über die wissenschaftliche Bedeutung Jacobis abgab — daß er, wiewohl einziger Dozent der Mathematik, nur vor 4 Zuhörern las, lag an der überaus großen Schwierigkeit, den Geist all-

mählich umzugestalten, in dem die mathematischen Studien damals meist an allen deutschen Universitäten betrieben wurden — war entscheidend für die Entschlüsse des Ministeriums. Am 28. Dezember 1827 wurde Jacobi zum außerordentlichen Professor mit einem Gehalte von 400 Talern ernannt; die Ernennung von Neumann und Dove erfolgte im März 1828. Gerade in dieser Zeit siedelte Dirichlet von Breslau nach Berlin über, wo er sich, wiewohl schon außerordentlicher Professor in Breslau, als Privatdozent habilitieren mußte, während seine definitive Versetzung als außerordentlicher Professor in Berlin erst im Jahre 1831 erfolgte.

Sehr glücklich über diesen ersten Erfolg auf seiner Dozentenlaufbahn, meldet er Legendre, daß er wesentlich ihm seine Professur verdanke, da eine Berliner Zeitung die Mitteilung gebracht habe, welche Legendre in der Pariser Akademie über seine Arbeiten gemacht, und daß die Autorität seines Namens die Ursache war, daß der Minister ihn anstellte. Eben diese Zeitungsnotiz hatte auch Jacobis Eltern zuerst Kunde gebracht von dem Ruhme ihres Sohnes; am 18. Dezember schreibt ihm sein Vater, noch bevor die Ernennung Jacobis zu seiner Kenntnis gekommen: „Wo soll ich Worte des Dankes gegen den Allmächtigen hernehmen für die große Gnade, die er mir durch meine lieben, guten Kinder erzeigt; ich habe ja nur meine Pflicht als Vater erfüllt, und das Bewußtsein, dies gethan zu haben, ist ja schon der süßeste Lohn für mich; auf die große Freude aber, die ich gestern hatte, war ich nicht vorbereitet. Aus inliegendem wirst Du sehen, was gestern in der Vossischen Zeitung aus Paris stand über den jungen 25jährigen Jacobi aus Königsberg . . . . ", und sein Bruder Moritz fügt hinzu: „Legendre hat den Neid gemordet und an den Galgen gebracht; denn ist er es nicht, so darf niemand neidisch sein, selbst nicht einmal ich, der ich doch im 3. Crelle'schen mit meinem angewandten Windhundsflügel aufgetreten bin — nun lebe wohl und sei fidel sehr baldiger Professor." Pietätvoll bewahrte Jacobi die Zeilen seines Vaters auf, die sich noch heute in seinem Nachlaß befinden. Am 16. Januar 1828 folgten die Glückwünsche der Eltern zu der fröhlichen Neujahrsbotschaft von der Ernennung zum Extraordinarius.

Jacobi als außerordentlicher Professor an der Universität zu Königsberg vom Januar 1827—Juli 1832.

Kaum war der erste Teil der recherches von Abel erschienen, die es nicht zweifelhaft ließen, daß dieser schon seit fast zwei Jahren in dem Besitze einer allgemeinen und umfassenden Theorie der elliptischen Transzendenten war, und daß ihm jedenfalls in sehr vielen Punkten auf diesem Gebiete die Priorität der Entdeckung gebühre, als der wunderbare, in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften fast einzig dastehende Wettkampf zwischen „den beiden Athleten" begann, der Jacobi zunächst keine Zeit ließ zu der geplanten Ausarbeitung einer zusammenhängenden, in allen Teilen wohlbegründeten Theorie. Nur Einer sah still und nicht ohne Bewunderung diesem geistigen Ringen zu, er, der schon seit mehr als 30 Jahren im Besitze der meisten Resultate und Methoden war, welche in der nächsten Zeit auf dem so unerwartet entstandenen neuen und großen Gebiete der mathematischen Wissenschaften erobert werden sollten.

Jacobi vertiefte sich nun zunächst in das Studium des ersten Teiles der recherches und schreibt darüber am 12. Januar 1828 aus Königsberg an Legendre:

„Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les fonctions elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être