Traduction française intégrale du document II/25 du fonds Jacobi.

F. Ollivier (CNRS)
LIX FRE CNRS 2341
École polytechnique, F-91128 Palaiseau CEDEX
Mél `francois.ollivier@lix.polytechnique.fr`.

22 octobre 2006

Le document II/25 du fond Jacobi est constitué en fait de plusieurs documents distincts, tous de la main de Borchardt. Nous avons, d'une part, une table des matières suivie de bribes (termes à définir, une ligne mystérieuse $(ik)(kl)(lm)(mi)$), puis d'un résumé en allemand du contenu de l'article, de la main de Borchardt, avec en marge un redécoupage du texte en section. Cette note marginale en kurrentschrift resemble à indication typographique semblable dans le document suivant. Les pages 14 a et 14 b sont le recto et le verso d'un même feuillet et référencées dans la table des matières. Très travaillé, avec de nombreux ajouts et ratures, ce texte ne semble pas l'œuvre d'un copiste. Seule la dernière formule suivie de « ubi, etc. » se trouve p. 503. L'abbréviation « etc » suggère une insertion destinée à établir une transition entre deux fragments du texte original, ce qui est compatible avec la fin du second feuillet : « ubi etc. » qui pourrait indiquer la fin d'une insertion. Ce texte n'est pas sans rappeler les ajouts de Borchardt en marge de la transcription de Cohn [II/13c] qui servit de base à l'article *De investigando...* Il comporte aussi une indication typographique de la même main. Néanmoins, ce texte ne se retrouve pas dans la version publiée du § 3 de De aequationum[1].

Ce texte et le résumé contenu dans la notices doivent être confronté au manuscrit [II/23b] qui, selon la lettre de Cohn [II/13a] en a fourni la matière.

[1] Il commence par la mention § 6 qui correspond au début du § 3 dans le redécoupage effectué par Borchardt. *Cf. infra*

Nous indiquons les limites de pages des documents d'origine par des trait horizontaux centrés, ou par des sections et sous sections.

Dans les limites de la lisibilité des manuscrits, l'orthographe d'origine a été conservée, qui peut différer de celle actuellement en usage, *e. g.* Theil, sämmtlich, etc. Il est en revanche possible que cette transcription comporte des erreurs de lecture ou de frappe, et nous prions le lecteur de bien vouloir nous en excuser, et nous les signaler.

1 Table des matières de la main de Borchardt

Disposition[2]
De aequationum differentialium systemate
non normali ad formam normalem revocando

(Il existe deux versions que nous désignerons par Cn[3] et Bt.)

Bt Introduction p. 1a tirée de Bt ensuite suit

Cn § 1 p. 1–4 nécessite une profonde réflexion. Il serait peut être mieux de tout laisser tomber.[4]
Cn § 2 p. 4–6a Contient la reductio brevissima.
Cn § 3 p. 6a–10 11 et 11a quelques lignes À partir d'un canon, trouver le simplic.
Cn § 4 p. 11a–15 Division en 3 classes. produit le can. simpl.
Bt § p. 5–8
Bt p. 9 Depuis Si secundum jusqu'à adhibitas esse[5]
Bt p. 11 Eum termini jusqu'à p. 12 max. fit 508[6]
p. 13 Ut jusqu'à inventum
Bt p. 14a[7], 14b[8], 15, 16, 17 jusqu'à it brevissimam
Bt p. 17 bas, 18, 19 etc — jusqu'à 25 tradidi[9] (*Une* équ. diff.)
Bt p. 25 bas Jam etc. 26 27 Conclusion

[2]Souligné deux fois
[3]Sigismund Cohn ?
[4]Ligne entièrement barrée au crayon.
[5]P. 497, l. -13.
[6]P. 500, l. 12.
[7]Voir sous-section 4.1.
[8]Voir sous-section 4.2.
[9]P. 512, l. 10

2 Liste de termes à définir, et bribes au crayon

Definitionen

$$\left.\begin{array}{l} \text{canon} \\ \text{canon simplic.} \\ \text{series immutate} \\ \text{series} = \text{series horiz.} \\ \text{max.} = \text{max. in vert.} \\ \text{max. seriei} = \text{term. seriei} \\ \qquad\qquad\quad \text{in sua vert. max.} \end{array}\right\} p.\ 7$$

$(ik)(kl)(lm)(mi)$

3 Notes de Borchardt

[Dans la traduction, nous nous sommes efforcés de rendre le style de ces notes, contenant de nombreuses abréviations et des termes en latin, que nous laissons non traduits. En dépit de son caractère elliptique, ce texte est lisiblement écrit, avec peu de corrections et une disposition structurée dont nous avons conservé les indentations.]

(Une note marginale peu lisible en kurrentschrift indique la correspondance entre les sections figurant dans les notes de Borchardt et celles retenues pour le découpage du texte publié.)

Zum Drück ... die Eintheilung(sic)

...

§ 1 u. 2 .... § 1
§ 3, 4, 5 .... § 2
§ 6 .... § 3
§ 7, 8, 9 .... § 4
§ 10 .... § 5

§ 1 Les eqdiff. proposées $u_i = 0$ ($i = 1$ à $i = n$) contiennent les variables x_κ ($i = 1$ à $i = n$) et x_κ intervient dans u_i jusqu'à sa dérivée d'ordre $a_{i,\kappa}$. Alors, l'ordre du système est

$$\mathcal{O} = a_{i_1,1} + a_{i_2,2} + \cdots + a_{i_n,n}$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation de $1, 2, \ldots, n$ et $\mathcal{O}$ la plus grande valeur de la somme transversale. (p. 1) ceci est le théor. 1.

Pour réduire le système proposé, $u_i = 0$ sera dérivée ℓ_i fois, ainsi, il y a seulement *une* reduction (*brevissima*) pour laquelle chaque ℓ_i a une valeur la plus petite. (p. 2)

Problème. Trouver la réduction brevissima, c.-à-d. pour nn nombres a donnés, trouver les plus petits nombres ℓ_i.

Solution. Les nombres $a_{i,\kappa}$ seront posés en un système carré. Dans chaque verticale on recherchera son maximum ou ses maxima, quand plusieurs nombre ont la même valeur la plus haute. Dans chaque horizontale dans laquelle il ne s'est pas trouvé de maximum, on ajoutera le plus petit nombre, qui rendra un de leurs termes égal à un max. de la même vert. Durant cette préparation A sera changé en B, $a_{i,\kappa}$ en $b_{i,\kappa}$.

Dans B on cherchera le plus grand nombre de maxima transversalia gesucht s'il s'en plusieurs syst. de la même taille, on en prendra un arbitraire. Les horizontales et verticales auxquelles celles-ci appartiennent s'appellent H, V; les autres H', V'. Les maxima transversaux choisis et les maxima dans V' seront marqué avec des étoiles. Les termes qui sont égaux aux *Stellati* dans les mêmes verticales seront *soulignés.*

Soit dans l'horizontale h_1 un terminus *stellatus*, dans la verticale de celui-ci un *subnotatus* c.--d. gal au premier, qui appartient l'horizontale h_2, dans h_2 soit de nouveaau un stellatus dans la verticale duquel soit un *subnotatus*, qui appartient h_3 etc. En continuant, on arrive h_α, ce qui s'exprime ainsi: il y a un transitus de h_1 h_α. ($h_1, h_2, \ldots h_{\alpha-1}$ doive tous appartenir H, h_α peut appartenir H ou H', car les stellati sont tous dans H.) S'il y a dans h_1 un second stellatus, alors il n'y a pas de passage vers H', car sinon le systme de maxima transversalia choisi ne serait pas de taille la plus grande. Dans $H'V'$[10] il ne peut pas non plus y avoir de maximum pour la mme raison.

Maintenant B va tre partag en 3 classes

Premire classe Toutes les horizontales avec plus d'un stellatus et toutes les horizontales relies celles-ci par un transitus, appartenant toutes H.

[10]Il s'agit de l'intersection des lignes de H' et des colonnes de V'.

Deuxime classe Toutes les horizont. H qui ne sont pas de la premire classe et depuis lesquelles un transitus vers H' n'a pas lieu

Troisime Toutes les horizont. H depuis lesquelles un transitus vers H' a lieu et toutes les Horizont. H'.

On ajoutera alors toutes les horizont. de la 3^{ter} Klasse une mme quantit, la plus petite telle qu'un terme de la 3^{e} classe devienne gal un terme des autres classes. S'il devient gal un terme de la 2^{e} cl., alors la deuxime cl. diminue d'une horizont. qui passe la 3^{e} cl. S'il devient gal un terme de la 1^{re} cl. il s'ensuit l'augmentation du nombbre des maxima transversaux d'une unit. Comme le dernier cas doit se produire au plus tard avec l'puisement de la 2^{e} cl., on parvient toujours aussi par l'opration donne l'augmentation des maxima transversaux et donc finalement un systema completum, avec lequel le problme est rsolu. (p. 1–5)

---

§ 2 Exemple (p. 5-8)

§ 3 Depuis le Schema $a_{i,\kappa}$ donn, on construit par l'addition de grandeurs ℓ_i un canon $p_{i,\kappa}$. Ce canon est-il le simplicissimus?

Rgle. Parmi les ℓ, certains doivent tre $= 0$. J'apelle S_1 les horizontales associes. Dans S_1 je cherche les subnotatos, dans les mme verticalles qu'eux les stellatos. J'appelle S_2 les horizontales de celles-ci qui sont diffrentes de S_1 verschieden sind, j'y cherche les subnotatos, les stellatos dans la mme verticale que ceux-ci. J'appelle S_3 les horizontales de ces derniers, qui sont diffrentes de S_1, S_2 etc. Si l'on puise de cette manire toutes les horizontales, alors le canon est le simplicissimus. Si elles ne sont pas puis, alors on retranche de toutes celles qui restent le plus petit nombre par lequel on passe du groupe dj construit l'une des horizontales restantes. Continuant ainsi, on arrive au simplicissimus.

Regel der simplicissimus zu erkennenn (8–9) Beispiel

Regel aus irgend einem canon den simplicissimus abzuleiten (p. 9–10) Jedes complete System von Transversalmaxima in irgend einem aus A abgeleitenen Canon giebt eine Lösung für die grösste in A mögliche Transversalsumme. Die completen Syst. von Transversalmaxima erhält man so. Man setze in dem aus A derivaten canon alle Terme $= 0$ ausser den sstellatis und subnotatis.

Jeden Glied der nun übrig bleibenden Determinante enspricht ein System von Transversalmaxima. (P. 10–11)

§ 4 Beispiel (p.11–12)

§ 5 Wenn in dem gegebenen Quadrat A ein System von Transversal termen bekannt ist, deren summe das Maximum ist, wie findet man hieraus die kleinsten Zahlen ℓ_i, durch deren Addition zu den horizontalreihen A in den canon simplicissimus verwandelt wird?

Regel. Das gegebene System von transversaltermen wird mit Sternen versehen. Wird ein terminus stellatus der Horizontalen h angehörig in seiner Verticalen von einem Term übertroffen und zwar von dem größten der verticalen um α, so werden alle Terme von h um α vermehrt und die neueReihe für h substituirt. Indem man von h zu den übrigen Horizontalen fortgeht, und von diesen, wenn es nöthig ist, zu den früheren zurück; gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu dem Canon simplicissimus (p. 12)

Beispeil dazu (P. 13). Hierdurch kann man auch wenn *ein* completes System von Transversal Maxima gegeben ist, die übrigen finden. Die in § 5 gegebene Regel giebt auch eine kürzere Lösung des in § 3 behandelten Problem.[11]

§ 6. Anwendung der bisherigen Zahlenproblems auf das in § 1 aufgestellte System simultaner Differentialgleichungen. Jedes complete System von Transversalmaxima giebt eine Normalform, auf welche sich das gegebene System Diffgl. reduciren läßt. Die einzelnen Zahlen, welche das System der Transversalmaxima bilden, zeigen die Ordnung der Differentiale an, bis auf welche die einzelnen Variablen in der Normalform steigen. Soviel complete Systeme von Transversalmaxima in dem Quadrat A existiren, auf soviel verschiedene einfachste Normalformen kann man das gegebene System reducieren (p. 14, 15) Die Größen ℓ_i geben die niedrigste Anzahl von Differentiation welche man für die Gleichungen $u_i = 0$ auszuführen hat, um eine Normalform daraus herzuleiten. Anwendung auf ein System von 10 Gleichungen u, welche dem Quadrat A entsprechen. Dasselbe läßt sich auf 4 verschiedene niedrigste Normalformen reduciren. (p 16, 17). Sowie aus irgend einem

---

[11] Phrase insérée après coup entre deux lignes.

aus dem Quadrat A derivirten Canon der simplicissimus hergeleitet wurde, so kann man aus irgend einer Normalform, die aus dem System der u's entspringt, die reductio brevissima herleiten. Das Letztere ist nur die Anwendung des Ersteren. (p. 17)

§ 7. Das System der Differentialgleichungen $u = 0$ ist gegeben. Man will daraus dasjenige Normalsystem herleiten in welchen außer t nur eine Variable x_κ vorkommt, während die übrigen x's durch t, x_κ und dessen Differentiale (die aber nicht bis zum höchsten in der Diffgl. zwischen t und x_κ vorkommenden steigen) auszudrücken sind. — Regel dies System aus dem Canon simplicissimus, der aus A herrührt, abzuleiten. (p 17–19).[12] Diese Regel ist folgende:

Regel. A' sei der aus dem Quadrat A hergeleitete Canon simplicissimus. In A' suche man den terminus stellatus der κ^{ten} Verticalen derselbe stehe in der i^{ten} Horizontalen. In der i^{ten} Horizontalen sucht man die termini subnotati. Von jedem subnotatus geht man zu dem stellatus derselben Verticalen über,[13] der in der i^{ten} Horizontalen liege u.s.w. Alle Horizontalen, zu welchen auf diese Weise von der i^{ten} ein transitus möglich ist, heissen der i^{ten} annexae. Diese Horizontalen, die i^{te} und die derselben annexae werden alle um dieselbe und zwar kleinste Zahl der Beschaffenheit vermehrt, daß ein Term derselben, der weder stellatus noch subnotatus ist, dem in seiner Verticalen stehenden stellatus gleich wird. Hierdurch ist zu den seriebus i^{tae} annexis eine hinzugefügt. Diese Operation wird solange forgesetzt, bis alle Horizontalen der i^{ten} annextirt sind.

Das so aus A' gebildete Quadrat heisse A'' oder, wenn die Operation für verschiedene Variablen x_κ ausgeführt wird, A''_κ.

Aus diesem Canon A''_κ der schon nicht mehr der simplicissimus ist, wird nun ein neuer gebieldet. Der terminus stellatus in A''_κ, welcher die κ^{te} Verticale und die κ^{te} Horizontale einnimmt, also derselbe, von dessen Ort in A' ausgegangen wurde, heisse S_κ. Das Maximum der Transversalterme in A heisse wie gewöhnlich $\mathcal{O}$. Dann vermehre man alle Terme des Quadrats A''_κ um $\mathcal{O} - S_\kappa$, so daß an die Stelle des derminus stellatus S_κ jetzt $\mathcal{O}$ tritt. Das so entstehende Quadrat heisse A'''_κ.

[12] Début de phrase barré : “Der in der κ^{ten} Verticalen stehende terminus”

[13] Barré : “u.s.w”

Die Zahlen um welche man die Horizontalreihen von A vermehren muß um A'''_κ zu erhalten, gebebn an, wie oft man die inzelnen Gl. $u = 0$ differenziren muß.

§ 8. Beispiel dazu. Das frühere Beispiel eines Systems mit 10 abhängigen Variablen x wird für das vorliegende Problem durchgeführt. Für $\kappa = 6$ wird zunächst aus dem Canon simplicissimus A' (das frühere H) A'' abgeleitet und hieraus A'''.

Bezeichnet man mit $h_1^{(\kappa)}$, $h_2^{(\kappa)}$, $\dots h_m^{(\kappa)}$ die Zahlen, um welche die einzelnen Horizontalen von A vermehrt werden müssen, um A''_κ daraus herzuleiten und, wie oben, unter S_κ den in A''_κ in der κ^{ten} Verticalen stehenden terminus stellatus, so werden für alle 10 Werthe von κ die Werthe von $h_1^{(\kappa)}$, $h_2^{(\kappa)}$, $\dots h_{10}^{(\kappa)}$ und S_κ berechnet (p. 19–22)

§ 9 Theorem. Wenn man von dem Quadrat m^{ter} Ordnung A''_κ die κ^{te} Verticale und irgend eine Verticale[14], die wir die i^{te} nennen wollen, fortlässt, so haben die so entstehenden m Quadrate $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung alle dieselbe Maximums Transversalsumme. Sie ist um S_κ niedriger als die Maximums Transversalsumme von A''_κ. (p. 22, 23)

Mit Hülfe dieses Theorems findet sich das Resultat, daß wenn man von dem ursprüngglichen Quadrat A die κ^{te} Verticale und i^{te} Horizontale fortlässt, das übrig bleibenden Quadrat die Maximums Transversalsumme $\mathcal{O} - S_\kappa + h_i^{(\kappa)}$ hat. (p. 23, 24)

Aber $\mathcal{O} - S_\kappa + h_i^{(\kappa)}$ is die Zahl um welche die i^{te} Horizontale von A vermehrt muß, um A'''_κ hieraus herzuleiten. Daher hat man für das § 7 gelößte Problem die neue elegantere Lösung:

Regel. Um das System der Differentialgleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\dots u_m = 0$ auf eine einzige Differentialgleichung zwischen t und x_κ zurückzuführen, denke man sich von dem Zahlen Quadrat m^{ter} Ordn. die κ^{te} Verticale und irgend eine Horizontale, die i^{te} fortgelassen. In dem übrigbleibenden Quadrat $m - 1^{\text{ter}}$ Ordn. sei $b_{i,\kappa}$ die Maximums Transversalsumme, sodaß $b_{i,\kappa}$ zugleich als die Ordnung desjenigen Systems von $m - 1$ simultanen Differentialgleichungen definirt werden kann, welches aus dem vorgelegten entsteht, wenn die Gl. $u_i = 0$ fortläßt und in den übrigen x_κ constant setzt.

[14] Il faut lire « Horizontale »

Dies vorausgesetzt, so is $b_{i,\kappa}$ die Zahl, welche anzeigt, wie oft man $u_i = 0$ differentiiren muss, um aus dem vorgelegten System durch bloß Eliminationen die gesuchte Diffgl. zwischen t und x_κ herzuleiten. (p. 24, 25)

§ 10 In besonderen Fällen kannn es vorkommen, daß die Ordnung des vorgelegten Systems nicht die Ordnung $\mathcal{O}$ erreicht, welche durch die größte Transversalsumme des Quadrats A bezichnet wird. Analytische Bedingung dafür, daß dieser Ausnahmefall eintritt. (p. 25–27)

4 Deux pages d'un manuscrit de la main de jacobi

Ceci semble une rédaction antérieure de *De aequationum* § 3, probablement de la main même de Jacobi, le nombre de passages barrés et réécrits de la même main excluant un travail de copiste.

Ce texte ne se retrouve pas dans la version publié, sauf éventuellement sa dernière formule. Si le texte du § 3 a été tronqué, c'est sans doute l'œuvre des éditeurs, car ce feuillet figure dans la table des matières de Borchardt (voir section 1).

4.1 Page 14 a

§ 6

[Note marginale de la même main en kurrentschrift :] « Hunten. muß x_κ und $a_\kappa^{(i)}$ überhalls aus dem laufenden **illisible** heraustreten(?) ». [En dépit de la différence des lettres latines et allemandes, il est visible que x_κ et $a_\kappa^{(i)}$ sont tracés de façon exactement semblable.]

Après que j'ai achevé[15] la recherche de la réduction d'un [tableau] carré de nombre à un canon, je reviens[15] au système d'équations différentielles donné au §[16] :

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_n = 0^{17}$$

[15] Dans le manuscrit, « nous avons achevé » et « nous revenons » on été corrigés.

[16] Un espace a été laissé pour le numéro manquant

[17] Cette équation est suivie de 8 lignes barrées, comportant elles-mêmes surcharges et ratures : « (dans la i^{e} de ces équations $u_i = 0$) [inséré entre l'équation et la ligne débutant

dans la i$^{\text{ème}}$ desquelles $u_i = 0$ j'ai supposée que chacune des variables dépendantes x_κ se trouve avec ses dérivées par rapport à la variables indépendante t jusqu'à l'ordre $a_\kappa^{(i)}$.

Nous dérivons l'équation $u_i = 0$ $\ell^{(i)}$ fois de suite, les nombres $\ell^{(i)}$ étant supposés positifs ou nuls, et nous désignons toutes les

$$L = \ell' + \ell'' + \cdots + \ell^{(n)}$$

équations que nous dérivons des équations données par le nom d'équations *auxiliaires.*

Soit

$$\mathcal{O} = a_1^{(i_1)} + a_1^{(i_1)} + \cdots + a_n^{(i_n)}$$

la somme transversale maximale (ou l'une des maximales) qui peut être formée à partir des nombres $a_\kappa^{(i)}$.

Ceci posé[18], si les nombres $\ell^{(i)}$ sont choisis de telle sorte que

$$p_\kappa^{(i)} = a_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$$

forme(sic)[le mot, barré, est souligné d'un trait ondulé] un canon carré, j'ai déjà expliqué dans mon article du multiplicateur etc. (§ 33)[19] comment en appliquant des opérations ssuccessives aux $n + L$ équations données et auxiliaires sont éliminées les dérivées d'ordres $a_\kappa^{(i)} + 1$ $a_\kappa^{(i)} + 2$ etc. $a_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$[20] de chaque variable x_κ afin que ces L dérivées étant éliminées, on fasse apparaître un système *normal* d'éq. diff. d'ordre $\mathcal{O}$, dans lequel les dérivées de la variable x_κ se trouvent jusqu'à l'ordre $a_\kappa^{i_\kappa}$. Qu'une telle élimination

par « Variabilium »] Parmi les variables (x_1, x_2, $\ldots x_n$) [texte inséré] *chaque* [Le nominatif a été corrigé en accusatif] (x_κ) [barré] avec ses différentielle ces équations de telle manière[texte supposant le nominatif, probablement barré avant ce qui suit, où le choix d'une proposition infinitive implique l'accusatif] avec ses dérivées (par rapport à la variable indépendante t) [insertion] jusqu'à l'ordre $a_\kappa^{(i)}$ dans l'équation $u_i = 0$ j'ai supposé se trouver [j'ai dû conserver l'ordre de la phrase pour ne pas obscurcir davantage les corrections successives]. J'ai appelé quantités ℓ, ℓ' $\ldots\ell^{(n)}$ les nombres tels qu'additionnés aux différentes horizontales des nombres $a_\kappa^{(i)}$, ils produisent les nombres

$$p_\kappa^{(i)} = a_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$$

constituant un canon. »

[18]Texte barré : « j'ai déjà exposé dans mon article du multiplicateur etc. § 33, quand ».

[19]Voir p.372 du Journal de Crelles. Cette numérotation de section n'a pas été reprise dans les œuvres complètes

[20]Il faut lire $a_\kappa^{(i_\kappa)}$ et ℓ_{i_κ}.

4.2 Page 14 b

ne puisse être effectuée que si les nombres $p_\kappa^{(i)}$ constitue un canon se comprend aisément. Car si le nombres $p_\kappa^{(i_\kappa)}$ ne constituent pas un canon, il existe des valeurs de l'indice κ pour lesquels $p_\kappa^{i_\kappa}$ n'est pas le terme le plus élevé de sa verticale, ou de manière équivalente $p_\kappa^{i_\kappa}$ n'est pas l'ordre le plus élevé jusqu'où montent les dérivées de la variable x_κ. C'est pourquoi pour parvenir à un système d'équ. diff. d'ordre $\mathcal{O}$, il faudrait parmi les $n + L$ équations données et auxiliaires élimininer un nombre de dérivées plus grand que L[21]. Comme cela ne peut se produire, les nombres $p_\kappa^{(i)}$ doivent constituer un canon[22].

Donc si chaque $\ell^{(i)}$ des nombres ℓ', ℓ'' ...$\ell^{(n)}$ indique combien de fois successives l'équation $u_i = 0$ doit être dérivée, pour obtenir des équations auxiliaires à l'aide desquelles par de simples éliminations le système donné puisse être réduit à un autre [système] normal, ces nombres ℓ', ℓ'' ...$\ell^{(n)}$ sont tels qu'en les additionnant aux horizontales du carré A ils produisent un canon. Ainsi, il existe une *manière unique* qui nécessite le *moins* de dérivations differentiationes poscat, c'est-à-dire que de toute autre manière, une ou plusieurs des équations données devront être dérivées un plus grand nombre de fois que dans celle-ci et il ne pourra se faire que l'une des équations différentielles soit dérivée moins de fois.

Nous désignons cette manière la plus simple sous le nom de *reduction la plus courte*. Les nombres Differentiationum iteratarum ad eam reductionem brevissimam necessariarum numeri ℓ', ℓ'' ...$\ell^{(n)}$ de dérivations successives nécessaires à cette réduction la plus courte sont ceux qui se rapportent au *canon le plus simple*.

Les equations différentielle possédant une forme normale auxquelles le système des [équations] données (sont ramenées par la réduction la plus courte)[23] sont les suivantes

$$x_1^{(a_1)} = X_1 \qquad\qquad x_n^{(a_n)} = X_n$$

où etc.[24]

[21] Il faut comprendre $n + L$.

[22] Suit le début barré d'un nouveau paragraphe : « Tout ceci bien considéré, on comprend que les nombres $\ell^{(i)}$ »

[23] Insertion marginale remplaçant « est réduit », barré.

[24] On retrouve ici la formule de *De aequatione* p. 503, également suivi du mot *où*. S'agit-il d'un développement du début du § 3 non retenu pour la publication ?