Question des Sciences physiques et mathématiques.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

Par Louis HOUTAIN,

CANDIDAT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
ÉLÈVE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

1852

ÉNONCÉ DE LA QUESTION.

« *Exposer et discuter les méthodes indiquées par les géomètres pour la* « *détermination des* SOLUTIONS PARTICULIÈRES *des équations différentielles.* »

> « Les mathématiques forment en quelque sorte la « transition des sciences intellectuelles et morales aux « sciences purement physiques. »
>
> DE LAMENNAIS (*Som. d'un syst. des conn. hum.*, § V.)

INTRODUCTION.

Une équation en termes finis *satisfait* à une équation différentielle, quand cette équation différentielle devient identique en y substituant, pour les variables dépendantes et leurs dérivées des divers ordres, leurs valeurs tirées de l'équation finie et de ses dérivées des mêmes ordres. Les équations finies qui satisfont à une équation différentielle donnée, de la manière la plus générale dans leur espèce, sont de deux sortes : l'INTÉGRALE GÉNÉRALE, qui renferme autant de constantes arbitraires distinctes, ou, *au plus*, autant de fonctions arbitraires distinctes qu'il y a d'unités dans l'ordre de l'équation différentielle ; et les SOLUTIONS SINGULIÈRES qui ne peuvent rentrer dans l'intégrale générale, en donnant des valeurs particulières aux constantes arbitraires ou des formes déterminées aux fonctions arbitraires que renferme cette intégrale. L'intégrale générale toujours, et les solutions singulières quand elles renferment des constantes arbitraires ou des fonctions arbitraires, peuvent fournir, par la détermination de ces constantes ou de ces fonctions, un nombre infini d'équations particulières en termes finis, qui satisfont à l'équation différentielle donnée. Les cas particuliers de l'intégrale générale se nomment INTÉGRALES PARTICULIÈRES ; ceux des solutions singulières n'ont pas reçu de nom spécial.

Les solutions singulières que Lagrange expliqua le premier en 1774, furent d'abord appelées par cet auteur *intégrales particulières :* il réservait le nom de *solutions particulières* aux différents cas de l'intégrale générale. Laplace emploie ces dénominations en sens inverse. Lacroix a conservé la nomenclature de Laplace : « Il m'a « semblé, dit-il, que les équations primitives qui résolvent les « équations différentielles sans être comprises dans leur intégrale « générale, ne s'obtenant point par les procédés de l'intégration, « ne doivent pas porter un nom qui rappelle ces procédés. » Lagrange abandonna plus tard le nom qu'il leur avait d'abord imposé et les appela *équations singulières,* à cause des rapports qu'il leur trouva avec les valeurs qui rendent inapplicable la série de Taylor, et qu'il nommait *valeurs singulières.* Jean Trembley adopte, pour les solutions singulières, la dénomination d'*intégrales particulières* employée d'abord par Lagrange, et désigne par l'expression d'*intégrales incomplètes* les divers cas particuliers de l'intégrale générale. Legendre se sert de la même nomenclature. A. Cournot appelle aussi les premières : *intégrales singulières,* nom que quelques auteurs lui semblent leur refuser à tort : « C'est qu'en effet, dit-il (*Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal,* t. II, p. 346), quand le temps joue explicitement ou implicitement le rôle de variable indépendante, le problème de l'intégration proprement dite, qui consiste à assigner la somme des accroissements infiniment petits de la fonction dans un intervalle de temps donné, est résolu successivement au moyen d'une intégrale particulière et de l'intégrale singulière ; de sorte que la solution n'est complète que quand on joint l'intégrale singulière au système des intégrales particulières ou à l'intégrale générale. » Ce nom d'*intégrales singulières* se trouve également dans Cauchy, Moigno, Duhamel. Mais la dénomination généralement adoptée, et dont nous nous servirons exclusivement, est celle de *solution singulière*.

La terminologie expliquée, jetons un coup d'œil sur l'histoire des solutions singulières. Nous y voyons trois phases : dans la première, on rencontre des solutions singulières et on ne songe pas à se demander la raison de leur existence ; dans la deuxième, on découvre le moyen de les obtenir d'une façon régulière ; mais on les qualifie de *paradoxes,* parce qu'on n'a pas su encore les rattacher aux intégrales ; dans la troisième, on parvient enfin à connaître la véritable raison d'être de ces solutions, et on fait ainsi rentrer sous la loi commune des phénomènes analytiques qu'on avait d'abord jugés contraires aux apparences. Reprenons brièvement chacune de ces périodes pour avoir l'occasion de citer les sources principales de notre travail.

1re Période. — Les premiers géomètres qui cultivèrent l'analyse infinitésimale furent, dès le principe, conduits à des problèmes dépendants des solutions singulières, mais qu'ils ne parvinrent à résoudre que par des artifices particuliers. On trouve de ces problèmes dans un mémoire de Leibnitz, intitulé : *Nova calculi differentialis applicatio* (inséré dans les *Actes de Leipsick* de 1694, *vid.* n° LXI, OEuvres de Jacques Bernouilli) et dans la XIVe des *Leçons de calcul intégral* de Jean Bernouilli (t. III de ses OEuvres). En lisant ces auteurs, on est surpris de voir qu'ils ne se soient pas aperçus que les problèmes dont ils ont donné des solutions différentes, quoique conduisant aux mêmes résultats, semblaient devoir dépendre du calcul intégral, tandis que les procédés dont ils avaient fait usage étaient entièrement indépendants de toute intégration. Il y avait là une sorte de contradiction dont il est étonnant que ces savants ne se soient pas douté. Taylor (p. 17 de son livre intitulé : *Methodus incrementorum,* 1715), paraît à Lagrange (XIIe cahier du *Journal de l'École polytechnique,* p. 228), le premier qui ait tiré d'une équation différentielle elle-même, sa primitive singulière (*singularis quædam solutio*) :

c'est la différentiation qui le conduisit à ce résultat. Le même procédé fit voir à Clairault (*Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1734, p. 209) qu'il y avait des équations différentielles capables de deux espèces de solutions : l'une, qui n'a pas besoin de calcul intégral; l'autre, qui s'obtient par les procédés ordinaires d'intégration. Mais Clairault se trompa en ce qu'il crut que la première était plus générale que la seconde, et en ce qu'il confondit souvent des intégrales particulières avec des solutions singulières.

2e Période. — Euler aussi, dans sa *Mécanique* (t. II, art. 268, 303 et 333), avait trouvé divers exemples de ces solutions sans constante arbitraire, qui ne rentrent pas dans l'intégrale générale et qu'il obtenait généralement par la différentiation. Il avait même donné des règles pour les découvrir dans certains cas; mais ce n'est que quelques années après qu'il s'occupa expressément de ces solutions singulières, dans un mémoire dont le titre : *Exposition de quelques paradoxes du calcul intégral* (*vid. Recueil de l'Acad. de Berlin*, 1756), montre assez qu'il ne pouvait encore s'expliquer ces solutions ni concevoir comment la différentiation peut, dans certains cas, suppléer à l'intégration. Les travaux de d'Alembert (*Mém. de l'Ac. des sc. de Paris*, 1769, p. 84 et *seq.*) et du marquis de Condorcet (*Calcul intégral*, p. 67; *Mém. de Turin*, t. IV, p. 7 et *seq.*), appartiennent à cette 2e période.

3e Période. — Jusque là on n'avait aucun moyen de distinguer, *à priori*, les primitives singulières des intégrales particulières : Euler, le premier, donna une règle pour cet objet (*Institutiones calculi integralis*, t. I, sect. II, cap. IV), d'où Laplace (*Mém. de l'Ac. des sc. de Paris*, Ire partie, p. 343 et 651) déduisit les caractères qui font dériver les solutions singulières de leurs équations différentielles. Restait à examiner leur liaison avec l'intégrale complète : la gloire de cette découverte était réservée à Lagrange (*Recueil de l'Acad. de Berlin*, ann. 1774, p. 198, et ann. 1779, p. 121 et *seq.*; *vid. Théorie des fonctions analytiques*, 2e éd., p. 92; et *Leçons sur le calcul des fonctions*, 14e, 15e, 16e et 17e leçon). Legendre (*Mém. de l'Ac. des sc. de*

Paris, 1790, p. 218) a cherché à prouver que les solutions singulières sont toujours comprises dans une expression finie, où le nombre des constantes arbitraires est moindre que dans l'intégrale complète : sa démonstration est vicieuse, ainsi que nous le montrerons en son lieu. La même année, Jean Trembley (*Mém. de l'Ac. des sc. de Turin*, ann. 1790-1791, p. 1 et *seq.*, 2e pagination) montra quel parti l'on pouvait tirer de ces solutions pour la découverte du facteur d'intégrabilité. Il donna aussi un procédé *à posteriori* pour l'obtention de ces solutions. En 1806, dans le *Journal de l'École polytechnique*, t. XIII, p. 60, Poisson reprit la théorie de Laplace et la perfectionna. Toutefois il crut aussi, avec Laplace et d'autres géomètres, que le caractère distinctif des solutions singulières est de rendre infinie la dérivée partielle relative à y de l'équation différentielle. Cauchy montra que cette condition est nécessaire, mais non suffisante, ce qui résulte aussi de la *Théorie des solutions singulières* due à M. Timmermans, et dans laquelle ce savant s'est proposé de montrer d'une nouvelle manière la liaison des solutions singulières avec la composition de l'intégrale générale et avec celle de l'équation différentielle (*). Malgré tous ces travaux, la théorie des solutions singulières présente encore des lacunes dans les équations aux différentielles totales et aux différentielles partielles des ordres supérieurs et à un nombre quelconque de variables, et dans les équations simultanées.

Dans le travail que nous avons entrepris, nous avons essayé d'exposer d'une manière claire, complète et méthodique, les recherches des divers géomètres sur la question proposée, de faire ressortir l'enchaînement des résultats auxquels elles ont abouti, de généraliser et d'étendre ces résultats, et d'en déduire les conséquences les plus importantes. Nous nous sommes efforcé aussi de prouver qu'un grand nombre de propositions, qu'on énonce ordinairement d'une

(*) Nous aurions voulu pouvoir consulter la thèse sur les solutions singulières que J.-Fr. Lemaire soutint pour son doctorat, le 21 avril 1821, et qu'il dédia à M. Vantoers, alors secrétaire-inspecteur à l'université de Gand. Mais il nous a été impossible de nous procurer ce travail. Voici ce que nous lisons dans une Notice sur l'auteur, écrite par M. Ch. de Cuyper, professeur à l'université de Liége : « ... Le Mémoire de Lemaire, coordonnant les travaux des savants qui avaient suivi Lagrange dans cette nouvelle voie ouverte à leurs recherches, en présentait une exposition nette et méthodique. »

façon absolue, ne sont vraies que moyennant certaines restrictions; et peut-être avons-nous réussi à faire disparaître certaines incorrections, légères, à la vérité, mais qu'il était bon de relever, parce que la rigueur nous semble de toute nécessité en mathématiques. Parfois encore nous avons cru pouvoir présenter des démonstrations nouvelles de théorèmes connus, jugeant ces démonstrations mieux adaptées à l'esprit général des méthodes qui servent à la détermination des solutions singulières. Qu'il nous soit permis d'espérer qu'on voudra bien reconnaître quelque utilité à l'accomplissement d'une tâche qui, au premier abord, pourrait paraître assez humble!

Nous avons divisé notre Mémoire en deux parties : dans la première, nous avons considéré la théorie des solutions singulières en elle-même; dans la seconde, nous avons donné quelques applications des principes émis dans la première. Ces applications sont de trois ordres (*analytiques, géométriques, mécaniques*) correspondants aux trois divisions des mathématiques pures. Quant aux subdivisions de la première partie, elles se fondent sur la classification des équations différentielles et se trouvent renfermées dans le tableau synoptique suivant :

Solutions singulières des équations différentielles

- isolées ou à une seule variable dépendante
  - Éq. à deux variables, et à une seule var. ind.
    - *du premier ordre.*
    - *des ordres supérieurs.*
  - et à plusieurs var. ind.
    - *Éq. diff. totales :*
      - *du premier ordre,*
        - *satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.*
        - *ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité.*
      - *des ordres supérieurs,*
        - *satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.*
        - *ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité.*
    - *Éq. diff. partielles :*
      - *du premier ordre.*
      - *des ordres supérieurs.*
- *simultanées* ou à plusieurs var. dép.
  - *Ces équations laissent une seule variable indépendante.*
  - *Ces équations laissent plus. var. ind.*
    - *aux différentielles totales.*
    - *aux différentielles partielles.*

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

LIVRE PREMIER.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ISOLÉES.

SECTION PREMIÈRE.

ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES.

Introduction.

On sait qu'une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables a n *intégrales premières*, renfermant chacune une constante arbitraire ; $\frac{n^{2/-1}}{2!}$ *intégrales deuxièmes*, renfermant chacune deux constantes arbitraires ; et ainsi de suite ; et généralement $\frac{n^{i/-1}}{i!}$ *intégrales $i^{èmes}$*, renfermant i constantes arbitraires. Ce sont là les *intégrales générales* ou *complètes* des divers ordres. Si, dans ces intégrales, on donnait à une ou plusieurs des constantes arbitraires qui y entrent des valeurs constantes déterminées, on aurait des *intégrales particulières*. Cela posé, toute équation en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^iy}{dx_i}$ qui satisfait à une équation différentielle donnée du $n^{ème}$ ordre, $n > i$, sans satisfaire à aucune des intégrales générales, c'est-à-dire sans pouvoir jamais coïncider avec aucune des intégrales particulières, se nomme *solution singulière*. L'existence de ce genre de solutions est un fait d'analyse ; mais, pour pouvoir parvenir à leur théorie, il est nécessaire, comme nous le verrons, de prouver tout d'abord que :

La solution singulière la plus étendue que puisse avoir une équation différentielle de l'ordre n *à deux variables, ne saurait renfermer plus de* n — 1 *constantes arbitraires.*

Démonstration. — (*Voyez* Duhamel, *Analyse*, II[e] partie.) Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \qquad (1)$$

l'équation différentielle proposée. Elle détermine $\frac{d^ny}{dx^n}$ en fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; et si on la différentie successivement, les coefficients différentiels $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}$, ... seront déterminés en fonction des mêmes quantités. Or toute fonction de x peut, en général, être développée par la série de Taylor, suivant les puissances ascendantes de la différence $x - x_0$, x_0 étant une valeur particulière arbitrairement attribuée à x, pourvu qu'on choisisse x_0 de façon à ce qu'aucun des coefficients du développement ne devienne infini ou indéterminé. Alors la série obtenue sera nécessairement convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre certaines limites déterminées, quelquefois même pour toute valeur de x. Soit donc y la valeur la plus générale qui satisfasse à l'équation $f = 0$, on aura :

$$(2) \qquad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdot \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdot \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots$$

$$+ \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 \cdot \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots,$$

et si l'on remplace tous les coefficients à partir de celui de $(x - x_0)^n$

par leurs valeurs en fonction des précédents, déterminées comme nous l'avons dit plus haut, la fonction cherchée sera nécessairement comprise parmi celles que représente ce développement, puisque l'on n'aura exprimé que les conditions auxquelles elle doit satisfaire. Et réciproquement la fonction ainsi déterminée, satisfait nécessairement à l'équation différentielle (1), car en différentiant n fois de suite les deux membres de (2), on obtient nécessairement le développement de l'équation (1) résolue par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$. L'équation (2), qui renferme n constantes arbitraires, est l'intégrale générale, et elle donnerait la solution complète de la question traduite analytiquement par l'équation (1), si toutes les valeurs de y qui satisfont à (1) étaient développables de cette manière. Mais il ne peut manquer, dans tous les cas, que celles pour lesquelles certains coefficients différentiels cesseraient d'être finis et déterminés pour la valeur $x = x_0$. Sans doute, si les coefficients de (2) ne dépendaient que de x_0, on pourrait toujours choisir x_0, de façon à ce qu'aucun d'eux ne devînt ni infini ni indéterminé ; mais comme ils renferment en outre les valeurs, correspondant à x_0, de y et de ses dérivées, il pourra arriver qu'une fonction $y = \psi(x)$, tout en satisfaisant à l'équation différentielle, rende infinis ou indéterminés certains coefficients de (2), quel que soit x_0. Cette fonction sera une solution singulière de la proposée. Maintenant, comme les coefficients de (2) ne renferment que des dérivées d'ordre inférieur à n, il en résulte que la valeur $y = \psi(x)$, qui constitue une solution singulière de l'équation (1), doit satisfaire en même temps à cette équation et à une autre équation différentielle d'ordre inférieur à n, dans laquelle il n'entre aucune constante arbitraire. Cette dernière équation sera donc tout au plus de l'ordre $n - 1$, et comme la valeur $y = \psi(x)$ doit y satisfaire, elle renfermera tout au plus $n-1$ constantes arbitraires, ce qu'il faut prouver.

Conséquence I. — *Les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables ne peuvent renfermer de constante arbitraire.*

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} + (y-x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.$$

On en tire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}-1\right)}{(y-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{3}(y-x)^{\frac{1}{3}}}{(y-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{9}(y-x)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy}{dx}-1\right) = \frac{1}{9}(y-x)^{-\frac{4}{3}}(y-x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}(y-x)^{-1}$$

. . . .

d'où, par la formule (2) et en posant $x = x_0 = 0$:

$$y = y_0 + (1-y_0)^{\frac{1}{3}}\frac{x}{1} + \frac{1}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}.\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{9}y_0^{-1}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Maintenant si on pose :

$$y_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

il viendra :

$$y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.\left\{a^{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{1}a^{\frac{1}{2}}x + \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}}{1.2}.a^{-\frac{1}{2}}x^2 - \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2.3}a^{-\frac{3}{2}}x^3 + \ldots\right\}$$

ou, par le binôme de Newton :

$$y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

C'est l'intégrale générale de la proposée. Mais on satisfait encore à cette proposée par l'équation :

$$y - x = 0, \qquad (4)$$

que ne renferme pas l'équation (3). Ce qui nous montre que le développement (2) ne donne pas toutes les solutions de l'équation (1), et que, partant, il existe des solutions singulières. Voyons ce que deviennent les coefficients de (2) pour la solution (4). Or on s'aperçoit aisément que pour $x = y$ toutes les dérivées de y, à partir de $\frac{d^2y}{dx^2}$, deviennent infinies; et qu'elles se seraient présentées sous la forme $\frac{0}{0}$, si on n'avait pas supprimé les facteurs communs à leurs deux termes.

CONSÉQUENCE II. — Certaines solutions singulières peuvent être obtenues par les séries. Ainsi : *s'il arrive que l'une des équations obtenues par la différentiation de la proposée soit décomposable en deux facteurs dont l'un soit d'un ordre inférieur à l'autre, et que l'on égale à zéro celui de l'ordre le moins élevé, on obtient une équation de plus entre les dérivées déjà considérées ; il y aura, par conséquent, une arbitraire de moins dans le développement de* y *qu'on obtiendra en tenant compte de cette équation de plus ; et ce développement ne sera en général pas contenu dans celui qui renferme* n *constantes arbitraires.*

C'est ce que nous allons montrer par un exemple que, pour plus de facilité, nous prendrons dans le premier ordre. Soit l'équation

$$\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0;$$

$y' = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + y}$

différentions, il viendra :

$$\left(2\frac{dy}{dx} + x\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

équation qui se partage en deux autres, savoir :

$$2\frac{dy}{dx} + x = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

La deuxième donne :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0, \ldots.$$

et, partant, si on substitue dans le développement (2), et qu'on fasse $\cancel{x = x_0 = 0}$, on aura :

$x_0 = 0$,

$$y = y_0 + x\sqrt{y_0};$$

c'est l'intégrale générale de la proposée. Maintenant si on considère l'équation

$$2\frac{dy}{dx} + x = 0,$$

on en tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \quad, \ldots$$

y_0 n'est plus arbitraire, car on a deux équations entre x, y, $\frac{dy}{dx}$; on en conclut, en effet, $y_0=0$; donc la série de Mac-Laurin donne :

$$y=-\frac{x^2}{4},$$

valeur qui, n'étant pas contenue dans l'intégrale générale, est une solution singulière de l'équation différentielle proposée.

Nous avons maintenant à examiner successivement les équations différentielles à deux variables du premier ordre et celles des ordres supérieurs, ce que nous ferons dans deux chapitres distincts.

CHAPITRE I.

Des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

Nous avons à examiner trois points :

1° Déterminer des solutions d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, de manière que toutes les solutions singulières soient comprises parmi elles ;

2° Discerner, parmi ces solutions, celles qui sont singulières de celles qui sont intégrales particulières ;

3° Transformer une équation différentielle donnée, de manière à y introduire ou à y supprimer des solutions singulières.

ARTICLE I. — DÉTERMINATION D'ÉQUATIONS PRIMITIVES COMPRENANT TOUTES LES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Quand on cherche ces équations primitives, ou bien on ne connaît que l'intégrale générale, ou que l'équation différentielle, ou bien on connaît simultanément l'équation différentielle et des intégrales particulières de cette équation. De là trois paragraphes. Mais disons d'abord un mot des notations que nous employerons. Nous représenterons l'équation différentielle par

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \varpi(x, y);$$

son intégrale générale par

$$F(x, y, a) = 0, \text{ ou } a = \Pi(x, y),$$

a désignant la constante arbitraire; enfin l'équation qui renferme les solutions singulières par

$$s = 0.$$

Nous ferons souvent aussi

$$\frac{dy}{dx} = p, \ \frac{d^2y}{dx^2} = q, \ldots$$

§ I. — PAR L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

On peut déduire de l'intégrale générale d'une équation différentielle donnée des équations primitives, parmi lesquelles soient comprises toutes les solutions singulières de la proposée. Il existe, pour atteindre ce but, deux méthodes distinctes : l'une, exposée en 1774 par Lagrange, dans les *Mém. de l'Ac. de Berlin,* est basée sur la théorie si féconde de la variation des constantes arbitraires; l'autre, donnée en 1842 par M. Timmermans, dans les *Mém. de l'Ac. de Bruxelles,* est fondée sur la théorie des racines égales. La première donne la raison de l'existence des solutions singulières, et les caractères qui indiquent leur présence; la seconde montre comment ces caractères sont liés à la composition même de l'intégrale générale, et comment ils dépendent de la forme de celle-ci, quand cette forme est algébrique. Les méthodes de Lagrange et de M. Timmermans se complètent donc réciproquement, et constituent ensemble une théorie parfaite de la détermination des solutions singulières par l'intégrale générale.

I. — Théorie de Lagrange.

On peut la renfermer en trois théorèmes :

Théorème I. — *On obtient toutes les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables en prenant, parmi toutes les équations primitives que donne l'élimination de la constante arbitraire de l'intégrale générale entre cette intégrale, d'une part, et, d'autre part, sa dérivée partielle relative à la constante égalée à zéro, ou ses dérivées partielles relatives à* x *et à* y *égalées à l'infini, celles qui satisfont à l'équation différentielle sans satisfaire à l'intégrale générale* (*).

Première démonstration. — Soit

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à

(*) Dans la plupart des Traités que nous avons eus entre les mains, on semble dire que les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, ne sont jamais applicables quand l'intégrale générale $F = 0$ n'est pas résolue par rapport à la constante, tandis qu'il résulte de notre analyse (ainsi qu'on le verra) et des exemples nombreux qu'on trouvera à la fin de ce premier paragraphe, que les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, doivent être essayées toutes les fois que l'intégrale générale n'est pas telle ou rendue telle qu'elle ne renferme absolument aucune fonction de x ou de y qui puisse acquérir un dénominateur par la dérivation, ou dont la dérivée puisse devenir infinie par des valeurs finies de x ou de y. Les mêmes Traités semblent dire aussi que les équations $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, et $\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ tirées de l'intégrale générale mise sous la forme $a - \Pi(x, y) = 0$, doivent toujours avoir lieu simultanément pour les solutions singulières; or il résulte encore de la démonstration du théorème I, et des exemples que nous avons traités, qu'elles peuvent très-bien avoir lieu séparément; et ce serait le cas, par exemple, si la fonction $\Pi(x, y)$ était fonction algébrique, rationnelle et entière de x en même temps que fonction de y pouvant acquérir un dénominateur par la dérivation, ou réciproquement. Nous devons pourtant remarquer que les équations $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ n'auront pas toujours lieu séparément, car autrement il en résulterait que toute solution singulière rendrait nulle ou infinie la dérivée $\frac{dy}{dx}$ (qui est égale à $-\frac{\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)}$), ce qui n'est pas.

deux variables, a étant la constante arbitraire qui, éliminée entre l'équation (a) et sa dérivée complète immédiate

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)p=0, \qquad (b)$$

conduit à l'équation différentielle proposée, que nous représenterons par

$$f(x, y, p)=0.$$

Cela étant, si, au lieu de supposer a constante, nous la supposons une fonction quelconque de x et de y, que nous représenterons par

$$a=\varphi(x, y),$$

l'équation (a) deviendra :

$$F[x, y, \varphi(x, y)]=0, \qquad (\alpha)$$

et prendra une extension telle qu'elle pourra représenter une équation primitive quelconque à deux variables, et par conséquent aussi toutes les solutions singulières de l'équation $f=0$, s'il en existe, puisqu'on sait d'ailleurs que ces solutions ne renferment pas de constante arbitraire. Or la valeur de y tirée de (a) et la valeur de p tirée de (b), vérifiant, indépendamment de a, l'équation $f=0$, il est évident qu'on peut regarder a comme variable avec x et y, pourvu que la loi de sa variation soit telle que la dérivée complète de (α) conserve en x, y et φ la même forme que l'équation (b) en x, y, a, car l'élimination de φ entre cette dérivée et l'équation (α), produira identiquement le même résultat que l'élimination de a entre les équations (b) et (a). Mais, en différentiant l'équation (α), on trouve :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dx}\right)p+\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dx}=0; \qquad (\beta)$$

et l'on voit que si l'on porte dans cette équation la valeur de φ tirée de (α), on produira dans les deux premiers termes le même effet que si l'on tire a de l'équation (a) pour la porter dans (b). Donc, pour que la valeur de p tirée de (β), savoir :

$$p=-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}-\frac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dx}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},$$

soit identique à celle qu'on tire de (b), savoir :

$$p = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},$$

après qu'on aura substitué dans la deuxième pour a sa valeur tirée de (a), et dans la première pour φ sa valeur tirée de (α), c'est-à-dire pour que l'équation $F[x, y, \varphi(x, y)] = 0$ satisfasse à l'équation $f(x, y, p) = 0$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dx}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0. \qquad (1)$$

La valeur de φ tirée de cette équation et substituée dans (α), donnera une relation $s = 0$ qui, lorsqu'elle ne satisfera pas à l'équation (a), renfermera toutes les solutions singulières de la proposée qui contiennent y.

Les solutions singulières de la proposée $f = 0$ qui ne contiendraient que x, pourraient échapper à l'analyse précédente, où y a été considéré comme fonction de x; il faut donc aussi considérer x comme fonction de y. Or, dans cette hypothèse, la dérivée complète de l'équation (a) est :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{dF}{dy}\right) = 0, \qquad (b')$$

et celle de l'équation (α) :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dy} = 0 \text{ (*)}, \qquad (\beta')$$

(*) Nous croyons devoir dire un mot des notations que nous avons employées pour indiquer les diverses espèces de coefficients différentiels qu'on peut rencontrer dans l'analyse, car il règne à cet égard une certaine confusion résultant de ce qu'on a oublié de faire certaines distinctions essentielles. Lorsqu'on a une fonction d'une seule variable ou une fonction de fonction d'une seule variable, il n'y a qu'une espèce de coefficient différentiel à considérer : on peut le représenter par la notation pure et simple de Leibnitz. Soit, par exemple :

$$u = F_1(x_1),\ x_1 = F_2(x_2),\ x_2 = F_3(x_3), \ldots x_{n-1} = F_n(x),$$

et pour que la valeur de $\frac{dx}{dy}$ tirée de (β'), savoir :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dy}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)},$$

on peut écrire sans ambiguïté :

$$\frac{du}{dx} = \frac{dF_1}{dx_1} \cdot \frac{dF_2}{dx_2} \cdot \frac{dF_3}{dx_3} \cdots \frac{dF_n}{dx}.$$

Si l'on a une fonction explicite de plusieurs variables (indépendantes par conséquent), on aura à distinguer le quotient de la différentielle totale par l'une des différentielles des variables indépendantes, des divers coefficients différentiels partiels. Pour noter les quotients, nous employerons la notation de Fontaines, et pour les dérivées partielles, la notation d'Euler. Ainsi, si on a :

$$u = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ étant n variables indépendantes, nous écrirons :

$$\frac{1}{dx_i} du = \frac{1}{dx_i} \cdot \left[\left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_i}\right) dx_i + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right) dx_n\right].$$

Enfin, si nous considérons des fonctions implicites de plusieurs variables ou des fonctions explicites de plusieurs fonctions, il faudra distinguer le quotient de la différentielle totale par la différentielle d'une des variables indépendantes (quotient que nous indiquerons par la notation de Fontaines), des *dérivées totales relatives* aux diverses variables indépendantes (dérivées que nous marquerons par la notation de Leibnitz, pure et simple), et des *dérivées partielles* proprement dites, que nous noterons à la manière d'Euler, par les parenthèses. Nous appelons *dérivée totale relative* à une variable indépendante, la dérivée qu'on obtient en faisant varier dans la fonction donnée non-seulement cette variable indépendante, mais encore toutes les autres variables qui dépendent de celle-là. Ainsi, si on a l'équation

$$u = F(x, y, z) = 0,$$

z étant une fonction de x et de y, nous écrirons :

$$\frac{1}{dx} du = \frac{1}{dx} \cdot \left[\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dz}\right) \cdot \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy\right\}\right] = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right).$$

Ainsi, dans le texte, $\frac{d\varphi}{dx}$ représente la somme $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{dx}{dy}$.

Il pourrait se présenter des cas plus compliqués encore que ceux que nous avons examinés et où les notations précédentes deviendraient insuffisantes.

devienne identique à celle qu'on tire de (b'), savoir :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)},$$

après qu'on aura substitué dans la deuxième pour a sa valeur tirée de (a), et dans la première pour φ sa valeur tirée de (α), il faut et il suffit qu'on ait la relation :

$$\frac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dy}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0. \qquad (2)$$

La valeur de φ tirée de cette relation et substituée dans (α) donnera une équation $s' = 0$ qui, lorsqu'elle ne satisfera pas à l'équation (a), renfermera toutes les solutions singulières de la proposée qui contiennent x.

Par conséquent, toutes les solutions singulières de la proposée $f = 0$, s'il en existe, seront données par l'élimination de φ,

entre les équations $\left\{\begin{array}{l} F(x, y, \varphi) = 0, \ (\alpha) \\ \text{et } \dfrac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dx}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, (1) \end{array}\right.$ ou entre les éq. $\left\{\begin{array}{l} F(x, y, \varphi) = 0, \\ \text{et } \dfrac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dy}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0, \ (2) \end{array}\right.$

ce qui revient à éliminer a

entre les équations $\left\{\begin{array}{l} F(x, y, a) = 0, (a) \\ \text{et } \dfrac{\left(\frac{dF}{da}\right)\frac{da}{dx}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \ (3) \end{array}\right.$ ou entre les éq. $\left\{\begin{array}{l} F(x, y, a) = 0, \\ \text{et } \dfrac{\left(\frac{dF}{da}\right)\frac{da}{dy}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0. \ (4) \end{array}\right.$

Mais on peut satisfaire aux relations (3) et (4) de différentes manières :

Premièrement, on satisfait à (3) en posant $\frac{da}{dx} = 0$, et à (4) en posant $\frac{da}{dy} = 0$; chacune de ces équations donne $a =$ const. ; dans ce cas, la solution $F(x, y, a) = 0$, coïncide avec une intégrale particulière.

Deuxièmement, on satisfait simultanément à (3) et à (4) en posant $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$; séparément à (3) en posant $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \infty$; et séparément à (4) en posant $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \infty$.

Donc, en dernière analyse, toutes les relations primitives $s = 0$, $s' = 0$ qui résulteront de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des trois systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ système}: \left\{\begin{array}{l} F(x,y,a)=0 \\ \left(\frac{dF}{da}\right)=0, \end{array}\right. \quad 2^{\text{e}}\text{ système}: \left\{\begin{array}{l} F(x,y,a)=0 \\ \left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}, \end{array}\right. \quad 3^{\text{e}}\text{ système}: \left\{\begin{array}{l} F(x,y,a=0 \\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}, \end{array}\right.$$

seront des solutions singulières de l'équation $f = 0$, si elles satisfont à cette dernière équation sans satisfaire à son intégrale générale, ce qu'il fallait prouver.

Remarque première. — On sera sûr que les équations $s = 0$, $s' = 0$, satisferont à l'équation $f = 0$, si elles rendent réellement nuls les rapports :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\frac{da}{dx}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\frac{da}{dy}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}.$$

Ainsi, au cas où ces deux conditions se présenteraient sous la forme $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, il faudra vérifier si leur valeur réelle est nulle.

Remarque deuxième. — Comme, d'une part, les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ ne peuvent être satisfaites par des fonctions finies de x, y et a, que si les dérivées partielles $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ sont des fonctions algébriques ayant des dénominateurs qu'on puisse égaler à zéro, ou des fonctions transcendantes pouvant aller à l'infini pour des valeurs finies des variables dont elles dépendent; et comme, d'autre part, il n'y a parmi les fonctions algébriques que les radicaux et les diviseurs qui puissent donner lieu à des dénominateurs par la différentiation, il en résulte que, lorsque la fonction F est une fonction algébrique de x, qui ne renferme x ni en dénominateur ni sous un radical, l'équation $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ ne peut être satisfaite ; et que, de même, l'équation $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ne peut rien donner si F est une fonction algébrique de y telle que y n'y entre ni en dénominateur, ni sous un radical. Par conséquent, quand l'intégrale générale de l'équation $f=0$ sera une fonction algébrique, rationnelle et entière de x et y à la fois, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ pourra seule donner des solutions singulières. Lorsque l'intégrale renferme a isolé, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme $a-\Pi(x,y)=0$, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ ne peut rien donner, car elle conduit à l'équation contradictoire $1=0$; on ne peut recourir alors qu'aux équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, qui deviennent $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)=\infty$, $\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)=\infty$. Il résulte de la remarque présente que si l'intégrale générale était à la fois une fonction algébrique, rationnelle et entière de x et de y, et renfermait a isolé, il n'y aurait pas de solution singulière.

Remarque troisième. — Si la fonction qui, égalée à zéro, satisfait à l'une des trois équations $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\infty$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\infty$, ne renferme pas la constante a, alors il n'y a plus lieu à l'élimination exigée par le théorème I, et, par conséquent, cette fonction sera une solution singulière, si toutefois elle satisfait à l'équation différentielle proposée sans satisfaire à l'intégrale générale de cette équation différentielle.

Deuxième démonstration. — Pour démontrer le théorème I, nous avons considéré tour à tour y comme fonction de x, et x comme fonction de y; autrement dit, nous avons regardé les variables x et y comme dépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons démontrer le même théorème en regardant x et y comme indépendantes l'une de l'autre. En effet, puisque l'équation différentielle

$$f(x, y, p)=0,$$

provient de l'élimination de la constante a entre son intégrale générale

$$F(x, y, a) = 0, \tag{a}$$

et la différentielle immédiate de cette intégrale, savoir :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = 0, \tag{b}$$

il est évident que si, au lieu de supposer a constante, on la suppose une fonction quelconque de x et de y, le résultat de l'élimination précédente ne sera pas changé, pourvu que l'équation (b), c'est-à-dire la différentielle immédiate de (a), ne soit pas changée. Or si on différentie (a) complétement en y faisant varier a, on aura :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{da}\right)\left[\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{da}{dy}\right) dy\right] = 0,$$

ou

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dy}\right) dy = 0,$$

équation qu'on peut identifier avec (b) :

Premièrement, soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{da}{dx}\right) = 0, \left(\frac{da}{dy}\right) = 0,$$

équations qui indiquent que a ne renferme ni x, ni y, ou que a est une constante arbitraire, ce qui ramène à l'intégrale générale ;

Deuxièmement, soit en posant :

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = 0;$$

Troisièmement, soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0};$$

Quatrièmement, soit en posant simultanément :

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dx}\right)=\infty,\\&\left(\frac{da}{dy}\right)=0,\end{aligned}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dy}\right)=\infty,\\&\left(\frac{da}{dx}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

ce qui montre que les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ne peuvent subsister indépendamment l'une de l'autre que lorsqu'elles donnent respectivement à a une valeur fonction de x seulement ou fonction de y seulement. — On voit que les solutions singulières devront satisfaire à l'une des trois équations :

$$\left(\frac{dF}{da}\right)=0,\quad\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0},$$

en même temps qu'à l'équation différentielle proposée, sans satisfaire à l'intégrale générale de cette équation différentielle, ce qui démontre le théorème I.

Corollaire. — Supposons que la solution singulière $s=0$ renferme x et y, en en tirant la valeur de y, que nous représenterons par $y=\xi\,(x)$, et la substituant dans l'intégrale générale, on aura l'équation $F\,[x, \xi\,(x), a]=0$, d'où on tirera une valeur de a en x qui, substituée dans l'intégrale générale, reproduira la même solution singulière $s=0$. — Si la solution singulière ne renferme que y, cette remarque est encore applicable. Si elle ne renferme que x, alors en en tirant la valeur de x et la substituant dans $F(x,y,a)=0$, on aura une équation en y, qui donnera pour a une fonction de y qui, substituée dans l'intégrale générale, reproduira encore la solution singulière $s=0$.

Théorème II. — *Quelle que soit la forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, l'application des procédés propres à en déduire les solutions singulières de cette équation différentielle conduit toujours aux mêmes résultats.* Ce théorème est dû, croyons-nous, à Duhamel (*vid.* son *Cours d'analyse*, IIᵉ part.)

Dém. — L'intégrale générale $F(x, y, a) = 0$ qui sert de point de départ dans l'application du théorème I, peut prendre un nombre infini de formes diverses, sans que la relation qu'elle établit entre x et y en soit changée. On peut se demander si ces formes influent sur les solutions auxquelles on est conduit. Nous disons que non. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le rapport des deux dérivées $\left(\frac{dF}{da}\right)$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ sera toujours le même après y avoir substitué la valeur de y tirée de $F = 0$, quoique chacune de ces deux dérivées change quand on transforme l'équation $F = 0$. En effet, si on a une équation quelconque $F(x, y, z, u) = 0$, le rapport des deux dérivées partielles du premier membre par rapport à deux des variables u et z par exemple, lequel rapport est $\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{du}\right)}$, exprime toujours, au signe près, la dérivée de l'une des variables u et z par rapport à l'autre; dérivée qui est, en effet, $\frac{du}{dz} = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{du}\right)}$; par conséquent après l'élimination d'une des variables, le rapport en question ne dépend plus de la forme de l'équation qui lie ces variables. Si le rapport $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ est constant, il s'ensuit que, lorsque par une transformation de l'équation $F(x, y, a) = 0$, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ perdra une solution, l'équation $\frac{1}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0$, l'acquerra. On dira la même chose du rapport $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$. Donc, puisque les rapports $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$ et $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ sont constants, il en résulte que les hypothèses qui rendent ces deux rapports isolément ou simultanément nuls seront toujours les mêmes et en même nombre, quelle que soit la forme de l'équation $F = 0$.

THÉORÈME III. — *Lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables est une fonction algébrique de* x *et de* y, *on peut toujours la mettre sous une forme telle que les solutions singulières de l'équation différentielle se déduisent de l'intégrale transformée, uniquement par l'élimination de la constante arbitraire entre cette intégrale et sa dérivée partielle relative à la constante égalée à zéro.*

Dém. — En effet, puisque l'intégrale générale $F(x,y,a)=0$, est supposée une fonction algébrique de x et de y, en la multipliant par une fonction convenable de x et de y, et en l'élevant à une puissance convenable, on la délivrera de radicaux et de dénominateurs ; et les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ tirées de la transformée, ne pouvant plus être satisfaites en termes finis, il faut uniquement avoir recours à l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ (*).

(*) Nous allons prouver ici que :

1° *On peut multiplier l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, par une fonction quelconque de* x *et de* y *sans que l'intégrale transformée cesse de satisfaire à l'équation différentielle donnée.* — Soit $F(x, y, a)=0$, l'intégrale générale de $f(x, y, p)=0$. L'équation $f=0$ résulte de l'élimination de a entre les équations $F=0$, et $\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy=0$. Or si on multiplie l'intégrale générale $F=0$, par une fonction quelconque $\varphi(x,y,a)$, nous disons que l'équation $\varphi.F=0$, satisfera encore à l'équation $f=0$. En effet, la différentielle de $\varphi.F=0$ est $\varphi dF+Fd\varphi=0$, ou $\varphi dF=0$, puisque $F=0$; mais φ étant quelconque, on aura $\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy=0$; or $a=\chi(x,y,p)$ étant la valeur de a tirée de cette dernière équation, si on substitue cette valeur dans l'équation $\varphi.F=0$, on aura : $\varphi(x,y,\chi)\times F(x,y,\chi)=0$, équation qui n'est autre que la proposée dont les deux membres ont été multipliés par le facteur $\varphi(x,y,\chi)$.

2° *Il est permis d'élever à une puissance quelconque l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables.* — Supposons que l'intégrale générale ait la forme $\varphi_1(x,y,a)-\varphi_2(x,y,a).\sqrt[m]{\varphi_3(x,y,a)}=0$, (α), sa différentielle sera :

$$d\varphi_1-d\varphi_2\sqrt[m]{\varphi_3}-\varphi_2.\frac{d\varphi_3}{m\sqrt[m]{\varphi_3^{\,m-1}}}=0. \qquad (\beta)$$

Mais, en élevant à la puissance m les deux membres de l'équation $\varphi_1=\varphi_2\sqrt[m]{\varphi_3}$, on obtient :

$$\varphi_1^{\,m}=\varphi_2^{\,m}.\varphi^3; \qquad (a)$$

Rem. — Si l'intégrale générale renfermait des fonctions transcendantes de x et de y, on pourrait à la vérité concevoir à la place de ces fonctions leurs développements en séries procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une fonction algébrique donnée de x et de y, de sorte que, par cette transformation, l'intégrale générale deviendrait algébrique sous forme de série. Mais alors il pourrait arriver que les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \infty$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \infty$, fussent encore applicables, puisque les dérivées $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ se présenteraient généralement sous forme de séries, et que des séries peuvent devenir infinies, c'est-à-dire divergentes pour des valeurs finies des variables suivant lesquelles elles sont ordonnées. Le théorème III n'est donc vrai que lorsque l'intégrale générale est algébrique sous forme finie.

et en différentiant :

$$m\varphi_1^{m-1}\, d\varphi_1 = m.\, \varphi_2^{m-1} .\, \varphi_3 .\, d\varphi_2 + \varphi_2^{m} .\, d\varphi_3,$$

ou

$$d\varphi_1 - \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{m-1} \varphi_3 .\, d\varphi_2 - \frac{\varphi_2^{m}}{m.\, \varphi_1^{m-1}}\, d\varphi_3 = 0. \qquad (b)$$

Mais (a) donne :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \sqrt[m]{\varphi_3},$$

d'où

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt[m]{\varphi_3},$$

équation qui, multipliée par $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^m \varphi_3 = 1$, devient $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^{m-1} \cdot \varphi_3 = \sqrt[m]{\varphi_3}$. (1)

Mais (a) donne encore $\frac{1}{\varphi_3} = \frac{\varphi_2^{m}}{\varphi_1^{m}}$, d'où $\frac{1}{\sqrt[m]{\varphi_3}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, $\frac{1}{\sqrt[m]{\varphi_3^{m-1}}} = \frac{\varphi_2^{m-1}}{\varphi_1^{m-1}}$; et, partant :

$$\frac{\varphi_2}{\sqrt[m]{\varphi_3^{m-1}}} = \frac{\varphi_2^{m}}{\varphi_1^{m-1}}. \qquad (2)$$

En substituant les valeurs (1) et (2) dans (b), cette équation (b) se confondra avec l'équation (β).

REMARQUES GÉNÉRALES.— 1° *Signification géométrique de certaines solutions singulières.* — Supposons que l'intégrale générale $F(x,y,a)=0$ représente une courbe plane, et que x et y soient les coordonnées courantes de cette courbe. Si, dans l'équation $F=0$, on remplace a par $a+da$, la nouvelle équation $F(x,y,a+da)=0$, représentera la courbe contiguë à la première (*) ; et les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes seront les valeurs de x et de y déduites du système des deux équations : $F(x,y,a)=0$, $F(x,y,a+da)=0$; mais,

$$F(x,y,a+da)=F(x,y,a)+\left(\frac{d.\,F(x,y,a)}{da}\right)=0\,;$$

or

$$F(x,y,a)=0\,;$$

donc

$$\frac{d_a.\,F(x,y,a)}{da}=0.$$

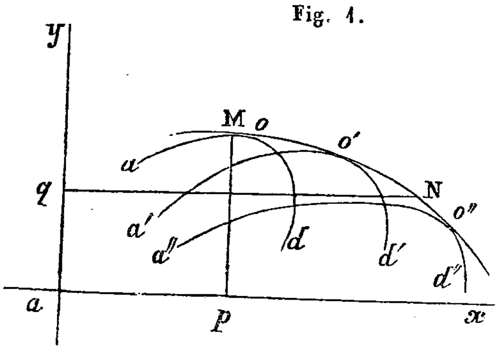
Le système précédent se réduit donc à $F(x,y,a)=0$, et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$. Si l'on élimine a entre ces deux équations, on trouvera une équation finale $s(x,y)=0$, dans laquelle les coordonnées x, y ne cesseront pas d'appartenir aux points d'intersection de deux courbes consécutives, mais celles-ci n'étant plus particularisées par une valeur attribuée à a, x et y pourront représenter les points d'intersection de deux courbes consécutives quelconques. Donc l'équation $s(x,y)=0$ appartiendra à la courbe lieu géométrique des intersections successives des courbes représentées par l'équation $F(x,y,a)=0$, lorsqu'on y fait varier le paramètre a d'une manière continue. Par conséquent, si nous appelons *enveloppées* ces dernières courbes, et *enveloppe* celle qui est le lieu de leurs intersections successives, et si nous remarquons que la solution singulière se déduit de l'intégrale générale (quand celle-ci est algébrique et mise sous forme rationnelle et entière) de la même manière que l'équation de l'enveloppe se déduit de l'équation générale des enveloppées, nous pourrons conclure que : *Les solutions singulières d'une équation différentielle du*

(*) Nous suivons ici la métaphysique du calcul différentiel, exposée dans les *Notions préliminaires* de l'*Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies*, par A. MEYER ; 1851.

premier ordre à deux variables, dont l'intégrale générale est une fonction algébrique, représente les enveloppes des courbes que représentent les intégrales particulières de l'équation différentielle donnée. Ce théorème suppose que la fonction $F(x,y,a)=0$ n'ait qu'une seule valeur pour un même système de valeurs de x, y, a; car, sans cela, il serait possible qu'on dût prendre deux des formes différentes de cette fonction dans les équations des deux courbes voisines; et alors on ne pourrait plus supprimer $F(x, y, a)$ dans la seconde. Mais la fonction $F=0$ pourra toujours être préparée, de façon à devenir *uniforme* de *multiforme* qu'elle était, pourvu qu'elle soit algébrique. Il suffira, pour cela, d'en faire disparaître les radicaux. — Nous devons remarquer que le théorème précédent s'applique aussi aux intégrales particulières déduites de $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$; et enfin à toutes les solutions singulières des équations différentielles dont l'intégrale générale, quoique transcendante, est telle que ses dérivées partielles relatives à x et à y ne peuvent devenir infinies pour des valeurs finies en x et en y. Mais il pourrait être en défaut pour les solutions singulières des équations différentielles dont l'intégrale générale renfermerait des fonctions transcendantes de x et de y, dont les dérivées pourraient devenir infinies pour des valeurs finies de x et de y. — Si l'équation $F=0$ était linéaire par rapport aux variables x, y, c'est-à-dire si elle avait la forme $y=x\varphi(a)+\varphi_1(a)$, ou la forme équivalente $y=cx+\psi(c)$, le système des enveloppées se confondrait manifestement avec le système des tangentes à l'enveloppe ; et l'équation différentielle de toutes ces lignes serait $y=x\frac{dy}{dx}+\psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$. — *L'enveloppe est tangente à toutes les positions successives de la courbe enveloppée.* Cela résulte immédiatement de ce que l'enveloppe et l'enveloppée satisfont à la même équation différentielle du premier ordre, qui donne une même valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour des valeurs de x et de y appartenant à un point commun aux deux courbes. Il ne faut pourtant pas conclure de là que la courbe enveloppe soit nécessairement tangente à toutes les courbes variables ; cela n'a lieu que pour celles qui sont coupées par les courbes contiguës, et les raisonnements précédents ne s'appliquent qu'à celles-là. Or il peut arriver que ce ne soit qu'entre certaines limites de la constante que cette intersection ait lieu.

2° *Signification des équations* $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$. — Lorsque l'équation $F(x,y,a)$ est algébrique, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ est l'indice de valeurs égales attachées à l'existence des solutions de cette équation $F=0$, que ces solutions soient des intégrales particulières ou des solutions singulières, car on sait qu'une équation algébrique est pourvue de racines égales quand elle subsiste avec sa dérivée égalée à zéro. — On justifie facilement cette remarque par des considérations géométriques. En effet, considérons un point quelconque de la courbe enveloppe, ayant pour coordonnées x et y. En ce point se couperont au moins deux enveloppées ; donc pour les valeurs des coordonnées de ce point, la valeur de a tirée de $F=0$ en fonction de x et de y sera au moins double, puisqu'il doit y avoir une valeur de a correspondante à chacune des enveloppées qui se coupent en ce point. Mais, sur l'enveloppe, l'intersection devient contact ; d'où l'on doit conclure que plusieurs des valeurs de a en fonction de x et de y tirées de $F(x,y,a)=0$, deviennent égales pour les valeurs de x et de y, qui satisfont à l'équation de l'enveloppée. — Quand les courbes représentées par $F(x,y,a)=0$, ont pour enveloppes les solutions singulières de l'équation différentielle dont $F=0$ est l'intégrale générale, il est facile de déterminer la signification des équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\infty$; $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\infty$. En effet, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\infty$

Fig. 1.



détermine évidemment alors la valeur de a qui, pour un même $x=AP$ (fig. 1), rend $y=PM$ un *maximum* ou un *minimum* dans l'ensemble des courbes aod, $a'o'd'$, $a''o''d''$, ... représentées par l'équation $F(x,y,a)=0$, ce qui est un des caractères de l'enveloppe.

— De même $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ détermine la valeur de a qui, pour un même $y = AQ$ rend $x = NQ$ un *maximum* ou un *minimum* dans l'ensemble des courbes enveloppées. — La signification que nous venons de reconnaître à l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, F étant une fonction algébrique de x, y, et a explique maintenant pourquoi cette équation se présente sous la forme contradictoire $1 = 0$, lorsque l'intégrale générale $F = 0$, dont elle se déduit, est résolue par rapport à a. En effet, lorsque l'intégrale générale est de la forme $a - \Pi(x, y) = 0$, Π étant une fonction algébrique de x et de y, il faut concevoir que cette équation est multiple à cause des radicaux qui entrent dans sa composition, et des valeurs multiples de ces radicaux, de sorte qu'elle équivaut à plusieurs équations distinctes :

$$a - \Pi_1(a, y) = 0,\ a - \Pi_2(x, y) = 0, \ldots\ a - \Pi_\mu(x, y) = 0.$$

Or les portions de courbes représentées par l'une de ces dernières équations n'ont plus de points d'intersection ; chacune d'elles ne peut plus donner qu'une seule valeur à a; l'équation qui exprimait l'égalité de plusieurs racines de l'équation en a ne peut donc plus subsister ; et c'est ce que l'analyse nous prouve en nous conduisant à une égalité absurde. C'est, du reste, ce qui deviendra manifeste par l'un des exemples que nous traiterons tantôt.

3° *Démonstration géométrique du théorème I dans le cas où l'intégrale générale est une fonction algébrique.* — Nous distinguerons deux cas :

A. L'équation $F(x, y, a) = 0$, n'est pas résolue par rapport à la constante, et a été préparée de manière à être rationnelle et entière. Dans ce cas, et indépendamment de la théorie des solutions singulières, on sait que l'enveloppe des courbes $F = 0$, s'obtient uniquement par l'élimination de a entre les équations $F = 0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$. Cela posé, une équation différentielle du premier ordre à deux variables exprime une propriété commune à une infinité de courbes planes ; elle donne pour un système de valeurs de x et de y, la direction de la tangente au point dont les coordonnées sont x et y. Mais comme cette direction est la même en ce point pour les courbes représentées successivement par l'intégrale générale lorsqu'on y fait varier la constante arbitraire d'une façon continue, et pour les osculatrices de ces courbes, il s'ensuit que l'équation différentielle appartient non-seulement aux courbes représentées par les intégrales particulières, mais aux courbes d'une nature généralement différente, qui sont osculatrices de l'ensemble des précédentes, c'est-à-dire qui les enveloppent. Or, dans l'hypothèse où nous raisonnons, toutes les enveloppes s'obtiendront en éliminant a entre les équations $F(x, y, a)$ et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$. On aura donc aussi, s'il y en a, toutes les solutions de l'équation différentielle autres que les intégrales particulières en éliminant a entre $F=0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, ce qu'il faut prouver. — Remarquons pourtant que les osculatrices, pouvant se confondre avec l'une des courbes osculées, les équations $F=0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ peuvent renfermer aussi des intégrales particulières outre toutes les solutions singulières de la proposée.

B. L'équation $F(x, y, a)=0$ est résolue par rapport à la constante et mise sous la forme $a-\Pi(x, y)=0$. — Pour un même système de valeurs de x et de y appartenant au point d'intersection de deux ou de plusieurs enveloppées consécutives, l'équation $a-\Pi(x, y)=0$ doit donner pour a des valeurs inégales en général, mais qui deviennent égales lorsque les valeurs de x et de y satisfont à l'équation de l'enveloppe, parce que, sur cette enveloppe, l'intersection de deux enveloppées devient contact. Ce posé, si nous regardons la fonction $\Pi(x, y)$ comme le z vertical d'une surface dont x et y sont les coordonnées horizontales rectangulaires, la surface $z-\Pi(x, y)=0$, devra avoir une forme telle que le z la coupant en général en deux points au moins, la coupe en un seul quand les abscisses x et y satisfont à l'équation de l'enveloppe, c'est-à-dire soit tangent à la surface pour ces valeurs de x et de y. Le plan tangent au point de la surface qui a pour projection sur le plan des xy le point (x, y) sera donc perpendiculaire à xy, c'est-à-dire que le cosinus de l'angle du plan tangent et du plan xy, lequel cosinus a pour expression :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\pi}{dy}\right)^2+1}}$$

est nul; or la valeur précédente ne peut devenir nulle que si l'on a isolément ou simultanément $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$. Donc les valeurs de a, qui conduisent aux solutions singulières de l'équation $a-\pi(x,y)=0$ sont contenues dans les équations $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, ce qu'il faut prouver. — Remarquons que la surface $z-\pi(x,y)=0$ est touchée par le cylindre vertical qui a pour base l'enveloppe; et ce cylindre devient un plan vertical qui touche la surface tout le long d'une génératrice rectiligne, lorsque l'enveloppe est une ligne droite.

Éclaircissons la théorie que nous venons d'exposer en l'appliquant à des exemples.

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$(x^2-y^2)\frac{dy^2}{dx^2}-4xy\frac{dy}{dx}-x^2=0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$y^2-2ay+x^2-a^2=0.$$

Solution. — Les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ne peuvent rien donner; on ne peut faire usage que de l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, qui donne ici :

$$-2y-2a=0,$$

et, partant,

$$a=-y,$$

valeur qui, substituée dans l'intégrale générale, donne l'équation primitive :

$$2y^2+x^2=0.$$

Cette équation satisfait à la proposée, car elle annulle les rapports :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = \frac{-2(a+y)}{2x} \text{ et } \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = \frac{-2(a+y)}{2(y-a)};$$

et, de plus, elle y satisfait comme solution singulière, car on ne peut la déduire de l'intégrale générale par aucune valeur constante de a.

Ex. II. — *Chercher les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f = \left\{\frac{2(x+m)}{(y-mx)^3} - 1\right\}\left(m - \frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{(y-mx)^2} = 0 \qquad (1)$$

dont l'intégrale générale est :

$$F = \frac{x+m}{(y-mx)^2} + (y-mx) - a = 0. \qquad (2)$$

Sol. — L'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ est ici contradictoire; on doit donc recourir aux équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \infty$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \infty$. Or on a :

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = 1 - \frac{2(x+m)}{(y-mx)^3} = \frac{(y-mx)^3 - 2(x+m)}{(y-mx)^3},$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left[\frac{2(x+m)}{(y-mx)^3} - 1\right]m + \frac{1}{(y-mx)^2} = \frac{2m(x+m) - (y-mx)^3 m + (y-mx)}{(y-mx)^3},$$

et la valeur qui rend infinies ces deux expressions est :

$$s = y - mx = 0. \qquad (3)$$

Cette équation $s=0$ est une solution de l'équation (1), car elle annulle les rapports : $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$ et $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$; et, de plus, elle est une solution singulière, car on ne peut la déduire de (2) par aucune valeur constante attribuée à a.

Ex. III. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f = \left[1 - \frac{3(x+m)}{y^4}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^3} - m = 0, \qquad (1)$$

dont l'intégrale générale est :

$$F = \frac{x+m}{y^3} + y - mx - a = 0. \qquad (2)$$

Sol. — L'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ est contradictoire. Il faut donc recourir aux équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. Elles donnent :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 1 - \frac{3(x+m)}{y^4} = \frac{y^4 - 3(x+m)}{y^4},$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{y^3} - m = \frac{1 - my^3}{y^3}.$$

Or une seule et même valeur $s = y = 0$, rend infinies ces deux dérivées. Nous disons maintenant que cette valeur est une solution de l'équation (1), car elle rend nuls les rapports :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} \text{ et } \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)};$$

mais elle est une intégrale particulière correspondante à une valeur infinie de la constante a.

Ex. IV. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f = \frac{dy}{dx} - (y-n)^{\frac{3}{4}} m = 0, \qquad (1)$$

dont l'intégrale générale est :

$$F = 4(y-n)^{\frac{1}{4}} - mx + a = 0. \qquad (2)$$

Sol. — L'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ ne peut rien donner, car (2) contient a isolé ; l'équation $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ ne peut conduire à rien non plus, car (2) est algébrique rationnelle et entière par rapport à x. L'équation $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ doit donc seule être essayée ; elle donne :

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = (y-n)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(y-n)^3}}.$$

On rend cette dérivée infinie en posant $y-n=0$. Cette dernière équation est une solution singulière de (1), car elle annulle le rapport $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$, et ne peut se déduire de l'intégrale générale par aucune valeur constante attribuée à a.

Ex. V. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle*

$$f=\frac{dy}{dx}-m(x-n)^{-\frac{3}{4}}=0, \qquad (1)$$

dont l'intégrale générale est :

$$F=4y-m(x-n)^{\frac{1}{4}}+a=0. \qquad (2)$$

Sol. — On a : $\left(\frac{dF}{da}\right)=1=0$, et $\left(\frac{dF}{dy}\right)=4=\infty$, équations absurdes. L'équation

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}=\frac{m}{4(x-n)^{\frac{3}{4}}}$$

peut donc seule donner les solutions singulières, s'il y en a. Or, on satisfait à cette équation en posant $x-n=0$. L'équation $x=n$ est une solution singulière de la proposée, car elle annulle le rapport $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$, et ne peut se déduire de l'intégrale générale par aucune valeur constante attribuée à a.

Ex. VI. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f=y-x\frac{dy}{dx}-x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$F=x^2+y^2-2ax=0.$$

Sol. — L'équation $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$ peut seule être appliquée ici ; or elle donne :

$$\left(\frac{dF}{da}\right)=-2x=0;$$

d'où

$$x = 0,$$

solution de la proposée, car elle annule les rapports $\dfrac{\left(\dfrac{dF}{da}\right)}{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)} = -\dfrac{x}{x-a}$, et $\dfrac{\left(\dfrac{dF}{da}\right)}{\left(\dfrac{dF}{dy}\right)} = -\dfrac{x}{y}$. Mais l'équation $x = 0$ ne satisfait à la proposée que comme intégrale particulière correspondante à une valeur infinie de la constante de l'intégrale générale.

Ex. VII. — *Chercher les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt{y},$$

dont l'intégrale générale est :

$$y = (x + a)^2, \text{ ou } x = \sqrt{y} - a.$$

Sol. — Sous la première forme, il faut employer l'équation $\left(\dfrac{dF}{da}\right) = 0$, qui donne :

$$x + a = 0,$$

et conduit, par conséquent, à l'équation primitive :

$$y = 0.$$

Quand l'intégrale générale est sous la forme : $x + a = \sqrt{y}$, on doit employer l'équation $\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = \infty$, qui donne immédiatement $y = 0$. Cette équation $y = 0$ satisfait évidemment à la proposée; et elle est une solution singulière, car on ne peut la déduire de l'intégrale générale par aucune valeur constante attribuée à a.

Ex. VIII. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 8y^2 - 4xy\frac{dy}{dx},$$

dont l'intégrale générale est :

$$y = a\,(x + a)^2.$$

Sol. — Il faudra employer l'équation $\left(\dfrac{dF}{da}\right) = 0$, qui donne :

$$(x + a)^2 + 2a\,(x + a) = 0,$$

équation dont les deux solutions sont $a = -x$ et $a = -\frac{x}{3}$. La première de ces deux valeurs substituées dans l'équation $y = a(x+a)^2$ fournit l'intégrale particulière $y=0$, qui correspond aussi à une valeur nulle de la constante. La seconde conduit à la solution singulière

$$y - \frac{4}{27}x^3 = 0.$$

Supposons l'intégrale générale mise sous la forme $\sqrt{y} - x\sqrt{a} - \sqrt{a^3} = 0$, il faudra alors employer les deux équations $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ et $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. La première donne $a = -\frac{x}{3}$ qui conduit à la solution singulière ; et la seconde donne l'intégrale particulière $y=0$.

Ex. IX. — *Déterminer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\left[\frac{x}{y} + \frac{(x-m)^{\frac{1}{2}} \mp (x-m)^{\frac{1}{4}} \sqrt{(x-m)^{\frac{1}{2}} + 4xy}}{2\,y^2}\right]\frac{dy}{dx} =$$
$$1 + \frac{(x-m)^{\frac{1}{4}} \mp \sqrt{(x-m)^{\frac{1}{2}} + 4xy}}{8y^2\,(x-m)^{\frac{3}{4}}}$$

au moyen de son intégrale générale :

$$a\,(x-m)^{\frac{1}{4}} + a^2\,y - x = 0.$$

Sol. — Il faudra employer ici les équations $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ et $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \infty$. La première donne :

$$(x-m)^{\frac{1}{4}} + 2ay = 0,$$

d'où l'on tire la valeur :

$$a - \frac{(x-m)^{\frac{1}{4}}}{2y},$$

qui, substituée dans l'intégrale générale, conduit à la solution singulière :

$$4xy + \sqrt{x-m} = 0.$$

L'équation $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ donne :

$$\frac{a - 4\,(x-m)^{\frac{3}{4}}}{4\,(x-m)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{0},$$

d'où l'on tire la nouvelle solution singulière :

$$x - m = 0.$$

Ex. X. — *Déterminer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{2}{\sqrt{y-n}} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{y-n}}{x-m}} = 0,$$

au moyen de son intégrale générale :

$$a\sqrt{x-m} + \sqrt{y-n} - a^2 = 0.$$

Sol.—Il faudra employer les trois équations $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0, \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. La première donne $a = \frac{1}{2}\sqrt{x-m}$ qui, substituée dans l'intégrale générale, fournit la solution singulière :

$$x - m + 4\sqrt{y-n} = 0.$$

La deuxième donne immédiatement la nouvelle solution singulière :

$$x - m = 0.$$

Enfin, la troisième donne aussi immédiatement une autre solution singulière encore, savoir :

$$y - n = 0.$$

Donnons maintenant quelques exemples géométriques.

Ex. XI. — *Trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes à cette courbe soient égales.*

Sol. — Prenons pour origine des coordonnées le point donné ; soit (x, y) un point de la courbe cherchée ; la tangente en ce point à cette courbe sera :

$$\upsilon - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x);$$

et la perpendiculaire à cette tangente menée de l'origine sera :

$$\upsilon = -\frac{dx}{dy}\xi,$$

υ et ξ désignant les coordonnées courantes des deux droites. Les coordonnées de leur point de rencontre seront :

$$\xi = \frac{\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad \upsilon = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Mais, d'après l'énoncé, la distance de ce point à l'origine doit conserver une valeur constante, malgré les variations de x et de y. Appelons ρ une valeur constante, on aura :

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \upsilon^2}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc :

$$x\frac{dy}{dx} - y - \rho\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 0. \tag{1}$$

Il s'agit maintenant de voir si l'équation en termes finis de cette courbe satisfait à l'équation précédente comme intégrale générale ou comme solution singulière; or, l'énoncé du problème nous fait voir que la courbe cherchée doit être l'enveloppe de toutes ses tangentes : elle doit donc être comprise dans l'équation différentielle comme solution singulière. Pour obtenir cette solution, il nous faut déterminer l'intégrale générale de (1); or, cette intégrale générale est :

$$y - ax - \rho\sqrt{1 - a^2} = 0. \tag{2}$$

L'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ est seule applicable ici ; elle donne :

$$x + \frac{a\rho}{\sqrt{1 + a^2}} = 0. \tag{3}$$

L'élimination de a entre (2) et (3) donne la solution singulière de (1), savoir :

$$x^2 + y^2 - \rho^2 = 0, \tag{4}$$

équation d'un cercle ayant ρ pour rayon, et l'origine pour centre (fig. 2).

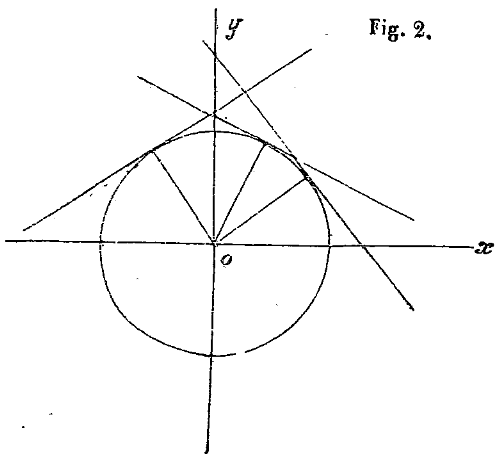


Fig. 2.

L'intégrale générale (2) appartient au système des droites, dont la plus courte distance à l'origine est ρ, et qui coupent l'axe des y à une distance $\rho\sqrt{1 + a^2}$ de l'origine. Il est clair que ces droites satisfont, dans la généralité mathématique, à la condition du problème; mais que la seule solution qu'on ait pu avoir en vue est donnée par le cercle (4). Cette remarque est applicable à tout problème géométrique qui conduit à déterminer une courbe par une équation différentielle de la forme :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

forme dans laquelle se trouve comprise l'équation (3).

Ex. XII. — *On donne une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; et on demande la courbe enveloppe de toutes les positions d'un cercle variable de rayon, et dont le centre se meut sur le grand axe de l'ellipse, de manière que l'abscisse du centre de ce cercle et son rayon soient toujours l'abscisse et l'ordonnée de l'ellipse.*

Sol. — Soit :

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

l'ellipse donnée. Cherchons l'équation du cercle variable; a désignant l'abscisse du centre, l'ordonnée sera nulle, puisque ce centre est sur le grand axe de l'ellipse que nous prenons pour axe des abscisses; son rayon sera la valeur de y tirée de l'équation de l'ellipse quand on y fait $x = a$, c'est-à-dire $\frac{n}{m}\sqrt{m^2 - a^2}$. Donc, si nous nommons ξ et υ les coordonnées courantes de ce cercle, son équation sera :

$$(\xi - a)^2 + \upsilon^2 - \frac{n^2}{m^2}(m^2 - a^2) = 0; \qquad (1)$$

et la courbe cherchée sera la solution singulière de l'équation différentielle dont (1) est l'intégrale générale. Prenons donc la dérivée partielle de (1) relativement à a, et éliminons a entre cette dérivée égalée à zéro, savoir :

$$m^2\xi - a(m^2 + n^2) \qquad (2)$$

et l'équation (1), et nous aurons :

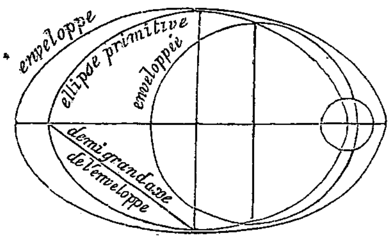
$$\frac{\xi^2}{m^2 + n^2} + \frac{\upsilon^2}{n^2} = 1, \qquad (3)$$

pour l'équation de la courbe cherchée. Cette courbe (fig. 3) est encore une ellipse concentrique avec la première, ayant le même petit axe $2n$ et un grand axe $2\sqrt{m^2 + n^2}$ plus grand que celui $2m$ de l'ellipse primitive : c'est, comme on le voit, le double de l'hypothénuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les demi-axes de l'ellipse primitive.

Nous allons montrer que, dans le problème qui nous occupe, l'enveloppe n'est tangente qu'à une partie de la série des enveloppées. En effet, des équations (2) et (3) on tire :

$$\xi = \frac{a(m^2+n^2)}{m^2}, \upsilon = \pm n\sqrt{1 - \frac{(m^2+n^2)a^2}{m^4}},$$

Fig. 3.



pour les coordonnées du point de contact de l'enveloppe avec les enveloppées qui répondent à deux valeurs contiguës du paramètre a. Il y aura donc contact de l'enveloppe avec les circonférences dont l'abscisse du centre satisfera à la condition de réalité de la valeur de υ, savoir :

$$a < \pm \frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

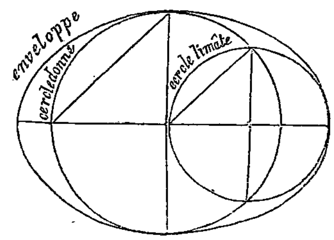
(On ne considère que la valeur absolue du second membre). L'abscisse du centre de la dernière circonférence touchée par l'enveloppe sera :

$$a = \pm \frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Les circonférences pour lesquelles $a > \pm \frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$ et $a < m$ sont intérieures à l'enveloppe et ne sont plus touchées par elle.

Les deux circonférences (symétriquement placées par rapport aux axes) qui limitent de part et d'autre la région des enveloppées que touche l'enveloppe, se construiraient facilement dans le cas où l'ellipse primitive deviendrait un cercle

Fig. 4.



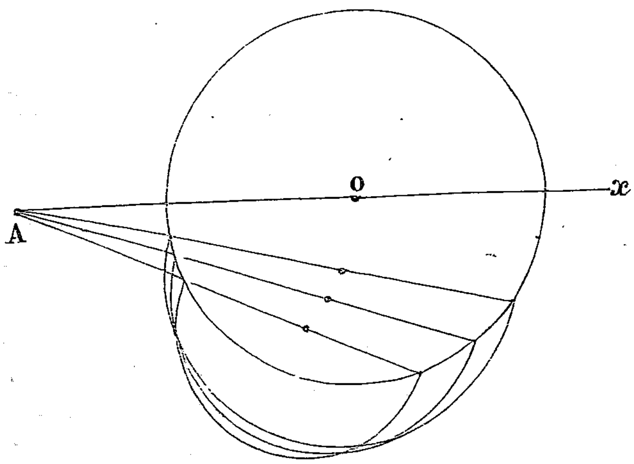
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En effet, sans répéter des calculs parfaitement analogues aux précédents, remarquons qu'on identifie les équations $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ et $x^2+y^2=r^2$ en posant $m=n=r$, en sorte que, dans le cas actuel, les abscisses des centres des circonférences limites seront $a = +\frac{1}{2} r\sqrt{2}$ pour celle de droite; et $a = -\frac{r\sqrt{2}}{2}$ pour celle de gauche, quantités qu'on construira facilement, car elles sont (abstraction faite du signe) le sinus de 45° dans le cercle donné.

Ex. XIII. — *Étant donné un cercle invariable et un point fixe, trouver la courbe enveloppe de toutes les circonférences qui ont pour diamètres les cordes du cercle donné, déterminées par les sécantes menées du point fixe.*

Sol. — Prenons pour origine le point fixe donné A; et prenons pour axe des x, le diamètre du cercle donné dont le prolongement passerait par le point A. En désignant par m l'abscisse OA du centre du cercle invariable, et par ρ son rayon, l'équation de ce cercle sera :

Fig. 5.



$$y^2 + (x-m)^2 = \rho^2.$$

Soit $y = ax$, l'équation de l'une des sécantes; les points d'intersection de cette sécante avec le cercle O seront :

$$1^{\text{er}}\text{ point :}\left\{\begin{aligned} x &= \frac{m+\sqrt{\rho^2(1+a^2)-m^2a^2}}{1+a^2},\\ y &= \left[\frac{m+\sqrt{\rho^2(1+a^2)-m^2a^2}}{1+a^2}\right]a; \end{aligned}\right.$$

$$2^{\text{e}}\text{ point :}\left\{\begin{aligned} x &= \frac{m-\sqrt{\rho^2(1+a^2)-m^2a^2}}{1+a^2},\\ y &= \left[\frac{m-\sqrt{\rho^2(1+a^2)-m^2a^2}}{1+a^2}\right]a. \end{aligned}\right.$$

La longueur de la corde qui joint ces points sera :

$$2\sqrt{\rho^2 - \frac{m^2a^2}{1+a^2}},$$

et les coordonnées ξ, υ du milieu de cette corde :

$$\xi = \frac{m}{1+a^2}, \quad \upsilon = \frac{am}{1+a^2}.$$

L'équation du cercle décrit sur cette corde sera donc :

$$\left(\xi - \frac{m}{1+a^2}\right)^2 + \left(\upsilon - \frac{am}{1+a^2}\right)^2 = \rho^2 - \frac{m^2 a^2}{1+a^2}.$$

Il nous faut maintenant chercher la solution singulière de l'équation différentielle dont l'équation précédente est l'intégrale générale, a étant la constante arbitraire. Pour cela, il faudra éliminer a entre cette équation et sa dérivée partielle relative à a, savoir :

$$a\,(\xi^2 + \upsilon^2 + m^2 - \rho^2) - m\upsilon = 0,$$

ce qui donne pour l'enveloppe une courbe du 4ᵉ degré, ayant pour équation :

$$(\xi^2 + \upsilon^2 - \rho^2 + m^2)^2 - m^2\,(\xi^2 + \upsilon^2) = 0.$$

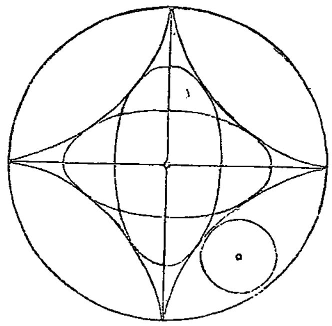
Ex. XIV. — *Trouver la courbe enveloppe de toutes les ellipses concentriques dont les directions des axes coïncident et dont la somme des diamètres principaux est constante.*

Sol. — Prenons pour axes coordonnés les directions des axes de toutes ces ellipses; appelons m la somme constante des diamètres principaux et a le demi-diamètre dirigé suivant l'axe des x d'une quelconque des ellipses; son équation sera :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(m-a)^2} = 1. \qquad (a)$$

La solution singulière de l'équation différentielle dont l'équation précédente est l'intégrale générale, c'est-à-dire l'équation de l'enveloppe cherchée, s'obtiendra en éliminant a entre les équations (a) et

Fig. 6.



$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{(m-a)^3} = 0. \qquad (b)$$

Cette élimination paraît, au premier abord, très-difficile, car l'équation (a) est du quatrième degré, et l'équation (b) du troisième degré par rapport à a; mais l'emploi des exposants fonctionnaires la rendra en réalité très-simple. En effet, mettons d'abord l'équation (b) sous la forme :

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^3}{(m-a)^3},$$

nous en tirerons :

$$\frac{a}{m-a}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}};$$

et, par suite :

$$a=\frac{mx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}} \text{ et } m-a=\frac{my^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}},$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (a), donnent :

$$\frac{x^2\,(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2}{m^2\,x^{\frac{4}{3}}}+\frac{y^2\,(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2}{m^2\,y^{\frac{4}{3}}}=1,$$

ou

$$x^{\frac{2}{3}}\,(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2+y^{\frac{2}{3}}\,(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2=m^2,$$

ou enfin :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{2}{3}},$$

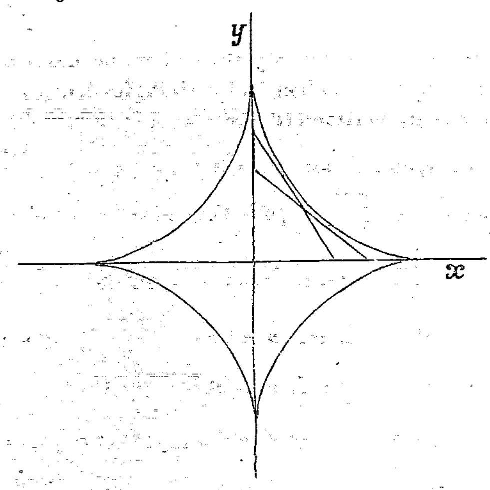
équation d'une épicycloïde engendrée par le roulement d'un cercle de rayon $\frac{m}{4}$ sur la concavité d'un cercle de rayon m.

Ex. XV. — *Trouver la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante et de direction variable, mais dont les extrémités sont assujetties à rester, l'une sur l'axe des* x, *l'autre sur l'axe des* y.

Sol. — Soit :

$$y=ax+b,$$

Fig. 7.



la droite donnée, et λ sa longueur constante. Cette droite coupera les axes des x et des y à des distances de l'origine exprimées respectivement par $-\frac{b}{a}$ et b; on doit donc avoir par les conditions du problème :

$$\lambda^2=\frac{a^2+1}{a^2}b^2,$$

d'où

$$b=\frac{a\lambda}{\sqrt{1+a^2}}.$$

L'équation des droites enveloppées est donc :

$$y=ax+\frac{a\lambda}{\sqrt{1+a^2}} \qquad (a)$$

Pour avoir la courbe enveloppe, il nous faut éliminer a entre (a) et sa dérivée partielle relative à a, savoir :

$$x + \frac{\lambda}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{b}$$

Cette dernière donne :

$$(1+a^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},\ 1+a^2 = \frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},\ a^2 = \frac{\lambda^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},\ a = \frac{[\lambda^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

valeurs qui, substituées dans (a), donnent :

$$y = x^{\frac{2}{3}}(\lambda^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{2}{3}}(\lambda^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$

ou :

$$y = -[\lambda^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}},$$

ou, enfin :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \lambda^{\frac{2}{3}},$$

ce qui est la même épicycloïde que dans l'exemple précédent.

Ex. XVI. — *Concevons un point matériel pesant lancé de l'origine des coordonnées et dans le vide sous un angle de projection ayant* a *pour tangente; si nous comptons les ordonnées* y *verticalement de bas en haut, l'équation de la trajectoire du mobile sera la parabole :*

$$F = y - ax + \frac{1+a^2}{2p}x^2 = o\ (^*). \tag{a}$$

* Soit (x, y) le lieu du mobile au bout du temps t, compté à partir de l'origine des coordonnées; appelons v_0 la vitesse initiale, α l'angle de projection sur l'horizon; les deux composantes de la vitesse seront : $v_0 \cos \alpha$ suivant l'axe horizontal des x; et $v_0 \sin \alpha$ suivant l'axe vertical des y; donc si g représente la pesanteur, on aura : $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$; et, en éliminant t, on obtiendra : $y = x \text{ tang.} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ pour l'équation de la trajectoire. Si, dans cette équation, nous faisons : $p = \frac{v_0^2}{g}$ et tang. $\alpha = a$, et si nous remarquons que $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \frac{1}{1+tg^2 \alpha} = \frac{1}{1+a^2}$, elle deviendra : $y = ax - \frac{1+a^2}{2p}x^2$, qui est justement l'équation (a) du texte. Elle représente une parabole dont le grand axe est vertical, et dont le sommet, qui répond à $\frac{dy}{dx} = 0$, a pour coordonnées : $x = \frac{ap}{1+a^2}$, $y = \frac{a^2 p}{2(1+a^2)}$. Elle coupe l'axe des x à l'origine et à une distance de l'origine exprimée par $x = \frac{2ap}{1+a^2}$; c'est cette dernière quantité qu'on nomme *amplitude du jet*.

Maintenant on fait varier sans discontinuité l'angle de projection, et, par suite, le paramètre a, *et l'on demande la courbe enveloppe de toutes les paraboles qu'on obtiendrait ainsi.*

Sol. — On a :

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = \frac{ax^2}{p} - x = 0, \qquad (b)$$

d'où :

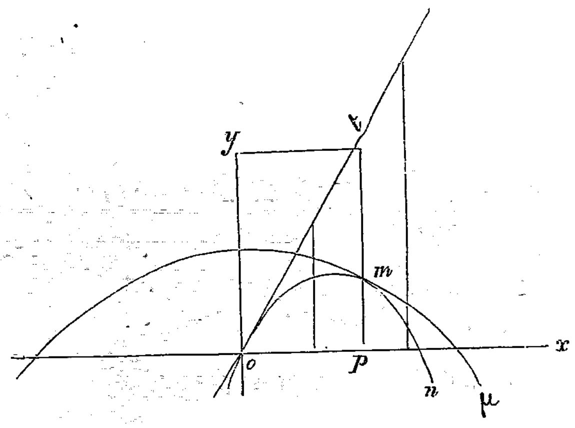
$$a = \frac{p}{x} \text{ et } x = 0.$$

Cette dernière valeur n'est qu'une intégrale particulière de l'équation différentielle dont (a) est l'intégrale générale; et elle correspond à une valeur infinie de la constante a. Mais si l'on substitue la valeur $a = \frac{p}{x}$ dans (a), on aura l'équation de l'enveloppe cherchée. Cette équation est :

$$p^2 - 2py - x^2 = 0, \qquad (\alpha)$$

c'est-à-dire une parabole ayant son foyer à l'origine, l'axe des y pour grand axe, et $2p$ pour paramètre. — Montrons, sur cet exemple, comment il se fait que l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ ne soit pas applicable, lorsque $F = 0$ est résolue par rapport à a. A cet effet, résolvons l'équation (a) par rapport à a, il viendra :

Fig. 8.



$$a = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x}. \qquad (c)$$

On voit que a a deux valeurs en général inégales, mais qui deviennent égales par les valeurs de x et de y, qui satisfont à l'équation (α) de l'enveloppe. L'équation (c) équivaut donc aux deux suivantes :

$$a = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \; (c'), \quad a = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \; (c'').$$

L'équation (c'') subsiste pour tous les points de la parabole enveloppée situés sur la portion $\overline{mo}$ de la courbe (m est le point de contact de la parabole enveloppe et de la parabole enveloppée); et l'équation (c') subsiste à son tour pour tous les points situés sur la portion $\overline{mn}$. En effet, le binôme $ax - p$ (qui a pour valeur $\pm \sqrt{p^2 - 2py - x^2}$) et dont le premier terme représente l'ordonnée de la tangente $\overline{ot}$ menée à la parabole enveloppée par l'origine des coordonnées et dont le second terme est une constante égale au demi-paramètre de la parabole enveloppe, est évidemment négatif pour $x = 0$. Il diminue numériquement de valeur pour des valeurs croissantes de x, tout en restant négatif, jusqu'à ce qu'il s'annulle quand x satisfait à l'équation $p^2 - 2py - x^2 = 0$, de l'enveloppe, c'est-à-dire quand x devient l'abscisse du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée, abscisse qui, en effet, est égale à p. Si x continue à croître, le binôme $ax - p$ devient positif, et sa valeur n'est plus donnée par l'équation (c''), mais par l'équation (c'). Ainsi le point de contact de chaque enveloppée avec l'enveloppe divise l'enveloppée en deux arcs paraboliques, sur l'un desquels la valeur de a est donnée par l'équation (c''), tandis que sur l'autre elle est donnée par l'équation (c'). Toutes les portions de paraboles représentées par l'équation (c'') n'ont donc d'autres points communs entre elles que l'origine; toutes les portions de paraboles représentées par l'équation (c') n'ont aucun point de commun; voilà pourquoi l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ appliquée à ces équations ne peut rien donner, bien que les paraboles (a) aient des intersections successives; c'est que, justement, ces intersections sont les points de raccordement des arcs de la série (c') avec ceux de la série (c''). — Quand l'équation (a) a la forme (c), on emploie, comme on sait, les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, qui donnent :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{\mp p^2 \pm 2py - p\sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x^2\sqrt{p^2 - 2py - x^2}},$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = \mp \frac{p}{x\sqrt{p^2 - 2py - x^2}},$$

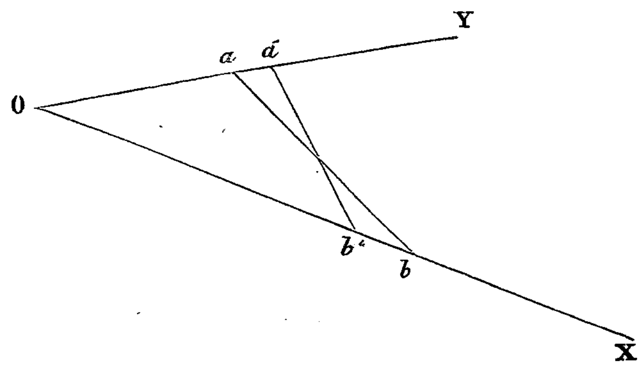
valeurs qu'on rend simultanément infinies par l'intégrale particulière $x = 0$, ou la solution singulière :

$$p^2 - 2py - x^2 = 0.$$

Ex. XVII. — *On donne deux droites de longueurs déterminées et ayant une extrémité commune; et on demande la courbe enveloppe de toutes les droites qui divisent ces deux longueurs en parties réciproquement proportionnelles.*

Sol. — Prenons les droites données OX et OY, comme axes coordonnés obliques; la droite $\overline{ab}$ aura pour équation :

Fig. 9.



$$y = ax + b,$$

d'où l'on tire :

$$\overline{Oa} = b, \overline{Ob} = -\frac{b}{a};$$

donc, si nous faisons

$$\overline{OX} = m, \overline{OY} = n;$$

d'où résulte :

$$\overline{aY} = n - b$$

et $\overline{bX} = m + \dfrac{b}{a}$,

on aura, par les conditions du problème :

$$\overline{Oa} : \overline{aY} = \overline{bX} : \overline{Ob},$$

ou

$$b : n - b = m + \frac{b}{a} : -\frac{b}{a};$$

d'où l'on tire :

$$b = \frac{amn}{am - n},$$

valeur qui, substituée dans l'équation : $y = ax + b$, donne :

$$y = ax + \frac{amn}{am - n},$$

pour l'équation générale des enveloppées, a étant la constante arbitraire.

Cette équation doit être combinée avec $\left(\dfrac{dF}{da}\right) = 0$, ou $x - \dfrac{mn^2}{(am - n)^2} = 0$, pour en éliminer a. Cette élimination effectuée, on obtient pour la courbe enveloppe la parabole :

$$m^2y^2 - 2mn\,xy + n^2x^2 - 2m^2ny - 2mn^2x + m^2n^2 = 0.$$

Les courbes obtenues ainsi par des systèmes de lignes droites se nomment *courbes de raccordement.*

Ex. XVIII. — *Déterminer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} - \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$F = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4} + \sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}$$
$$- (x - y)\sqrt{\alpha + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2} = 0.$$

Sol. — On trouve :

$$(1)\left\{\begin{aligned} \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} &= \frac{(x - y)\sqrt{A}}{\left(\frac{dA}{dx}\right)\sqrt{a + C} - \left[\left(\frac{dC}{dx}\right)(x - y) + 2(a + C)\right]\sqrt{A}} = 0,\\ \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} &= \frac{(x - y)\sqrt{B}}{\left(\frac{dB}{dy}\right)\sqrt{a + C} - \left[\left(\frac{dC}{dy}\right)(x - y) + 2(a + C)\right]\sqrt{B}} = 0,\end{aligned}\right.$$

en posant :

$$A = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
$$B = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4,$$
$$C = \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2.$$

On satisfait aux équations (1) de l'une des trois manières suivantes :

$$x - y = 0, \qquad (2)$$
$$A = 0, \qquad (3)$$
$$B = 0. \qquad (4)$$

L'équation (2) est une intégrale particulière correspondante à $a = \infty$. En effet, l'équation $F = 0$, donne :

$$a = \frac{[A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}]^2}{(x - y)^2} - C,$$

valeur qui devient infinie pour $x = y$. L'équation (3) sera une solution singulière, pourvu que $\left(\frac{dA}{dx}\right)$ ne soit pas nul. De même $B = 0$, sera une solution singulière de la proposée, pourvu que $\left(\frac{dB}{dy}\right)$ ne soit pas nul. Toutes les solutions singulières de l'équation différentielle donnée sont donc de la forme : $x = u$, $y = u$, u étant une des racines simples quelconques de l'équation :

$$\varepsilon u^4 + \delta u^3 + \gamma u^2 + \beta u + \alpha = 0.$$

II. — Théorie de M. Timmermans.

Soit $F(x, y, a) = 0$ l'intégrale générale supposée algébrique de l'équation différentielle $f(x, y, p) = 0$. Imaginons-la délivrée de dénominateurs et de radicaux, et appelons μ l'exposant de la plus haute puissance de a qu'elle renferme. On en tirera pour a, μ valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\mu$ en fonction de x et de y, en sorte qu'on aura identiquement :

$$F \Leftrightarrow (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) \ldots (a - a_\mu) = 0 \ (^*).$$

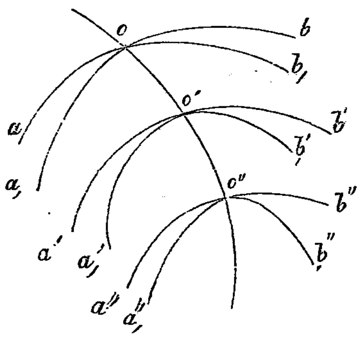
Or si on combine l'équation $F = 0$ avec sa dérivée partielle relative à a égalée à zéro, c'est-à-dire avec l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, il est visible qu'on exprime par là l'égalité de plusieurs valeurs de a, en sorte que le système des deux équations $F = 0$, $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, tient lieu de l'une des équations que l'on déduit de la suivante : $a_i = a_k$ en donnant à i et à k successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots \mu$. Maintenant, quant à la signification géométrique de cette équation $a_i = a_k$, on reconnaît aisément qu'elle appartient à tous les points d'intersection des courbes représentées par $a - a_i = 0$, et $a - a_k = 0$, et pour lesquels la constante arbitraire a la même valeur de part et d'autre. Donc l'équation finale, résultant de l'élimination de a entre les équations $F = 0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, appartient aux différentes courbes lieux géométriques des intersections deux à deux des intégrales :

$$a - a_1 = 0,\ a - a_2 = 0,\ a - a_3 = 0,\ \ldots\ a - a_\mu = 0.$$

Cela posé, si les fonctions $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\mu$ sont rationnelles, les équations précédentes appartiendront en général à des courbes distinctes $\overline{ab}$, $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\ldots \overline{a_{\mu-1}\, b_{\mu-1}}$ (fig. 10) et qui pourront être

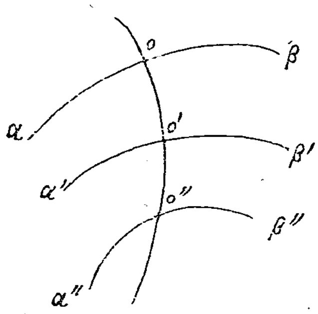
(*) Ce signe $\Leftrightarrow$ signifie *identique à*. Il a été employé par M. Pagani, dans une *Note sur l'équation* $A^B = C$ (*Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, t. XI).

Fig. 10.



d'une nature différente. Mais si la résolution par rapport à a de l'équation $F(x, y, a) = 0$ introduit un radical dans a_1, a_2, a_3, ... a_μ, ces fonctions ne différeront que par le fait de la multiplicité des valeurs de ce radical ; et les équations $a - a_1 = 0$, $a - a_2 = 0$, ... $a - a_\mu = 0$ devront alors être considérées comme des cas particuliers d'une équation plus générale, dans laquelle le radical aurait conservé toute sa généralité ; les courbes $\overline{ab}$, $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, ... $\overline{a_{\mu-1}b_{\mu-1}}$ ne seront plus alors que les différentes branches d'une même courbe $\overline{\alpha o \beta}$ (fig. 11), et l'équation $a_i = a_k$ appartiendra encore aux lieux géométriques des points qui séparent les différentes branches, c'est-à-dire des points pour lesquels les racines a_i et a_k sont égales. Maintenant, comme l'équation $F = 0$ est est du $\mu^{\text{ème}}$ degré, les valeurs de a qu'on en tirera renfermeront en général plusieurs radicaux, et l'on aura toutes les racines a_1, a_2, a_3, ... a_μ en combinant de toutes les manières possibles les valeurs de ces radicaux. L'équation $a_i = a_k$ qui exprime l'égalité de deux au moins des valeurs de a, entraînera donc l'évanouissement de l'un des radicaux. Or on peut faire disparaître un radical, soit en égalant à zéro la fonction Φ placée sous lui, soit en égalant à zéro un facteur Ψ placé en dehors, de sorte que les équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, remplaceront l'équation $a_i = a_k$ et représenteront encore la courbe $oo'o''$ ... (fig. 11). Supposons, actuellement, que l'une des équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, satisfasse à l'équation différentielle $f(x, y, p) = 0$, ce qu'on vérifiera aisément, alors la courbe $oo'o''o'''$ ... (fig. 1) sera enveloppe de toutes les courbes $\overline{aod}$, $\overline{a'o'd'}$, $\overline{a''o''d''}$, ... ; et cette équation $\Phi = 0$, ou $\Psi = 0$, sera une solution

Fig. 11.



singulière de $f=0$, si la courbe $oo'o''\ldots$ est distincte de toutes les courbes $\overline{aod}$, $\overline{a'o'd'}$, $\overline{a''o''d''}$, ..., c'est-à-dire si elle n'est pas renfermée comme cas particulier dans l'intégrale générale. De plus, les solutions singulières obtenues ainsi seront les seules, car, par le théorème III, n° I, elles sont toutes renfermées dans l'équation résultant de l'élimination de a entre $F=0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, et cette équation est identique avec l'équation $a_i=a_k$. On a donc le théorème suivant :

Pour obtenir les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables dont l'intégrale générale est une fonction algébrique, il faut résoudre cette intégrale par rapport à la constante arbitraire. Si la valeur de a *ne renferme pas de radical, il n'y aura pas de solution singulière; dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux ou les fonctions qui les multiplient; et si ces équations satisfont à l'équation différentielle proposée, sans satisfaire à son intégrale générale, elles seront les solutions singulières cherchées.*

Rem. I. — M. Timmermans a tiré de sa théorie un moyen très-simple de distinguer parmi les équations qui font évanouir les divers radicaux de la fonction $a-\Pi(x,y)=0$, et qui satisfont à cette équation, celles qui sont des solutions singulières de celles qui sont des intégrales particulières. D'après le plan que nous avons adopté, nous devons renvoyer l'exposé de ce moyen à l'art. II de ce chapitre.

Rem. II. — Il pourra arriver que la résolution de l'équation $F(x,y,a)=0$ par rapport à a, soit impossible; mais le problème n'en doit pas moins être regardé comme résolu, puisqu'il est ramené à un autre qui le précède dans l'ordre analytique.

Exemple. — *Chercher les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{2}{\sqrt{y-n}}\cdot\frac{dy}{dx}+1\pm\sqrt{1+\frac{4\sqrt{y-n}}{x-m}}=0,$$

au moyen de son intégrale générale :

$$a\sqrt{x-m}+\sqrt{y-n}-a^2=0.$$

Sol. — Résolvons l'intégrale générale par rapport à la constante, nous aurons :

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x-m} \pm \sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}}\right] = 0.$$

Or on fait disparaître successivement chacun des trois radicaux qui entrent dans cette expression, en posant :

$$x - m + 4\sqrt{y-n} = 0,$$
$$x - m = 0,$$
$$y - n = 0.$$

Ce sont les trois solutions singulières que nous avons déterminées plus haut par la méthode de Lagrange.

§ II. — SOLUTIONS SINGULIÈRES DÉDUITES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Nous verrons ici que les solutions singulières peuvent encore être assignées sans qu'on ait besoin de connaître ni intégrale générale, ni intégrales particulières, et lors même qu'il y aurait impossibilité d'assigner à ces intégrales une expression analytique sous forme finie, ce qui est le cas le plus ordinaire. Nous aurons à exposer trois théories. La troisième, due à M. Timmermans, montre la liaison des solutions singulières avec la composition même de l'équation différentielle, lorsque celle-ci est algébrique en x, y, p. Les deux premières donnent les caractères analytiques par lesquels on déduit de l'équation différentielle elle-même toutes ses solutions singulières. Ces caractères consistent en ce que ces solutions ont la propriété de rendre nulles, infinies ou indéterminées, certaines fonctions qu'on déduit immédiatement de l'équation différentielle. La première théorie (théorie de Laplace et de Legendre) se base sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent nulles ou infinies. La deuxième (théorie de Lagrange et de Poisson) se base sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent indéterminées.

I. — Théorie de Laplace et de Legendre.

Nous attachons les noms de Laplace et de Legendre à la théorie que nous allons exposer, bien que ces auteurs ne l'aient pas présentée sous la forme que nous allons lui donner, parce que les caractères que nous reconnaîtrons aux solutions singulières ont été, les uns, découverts par Laplace, les autres, par Legendre.

Cette théorie se renferme dans trois théorèmes.

Théorème I. — *On obtient toutes les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables en prenant parmi toutes les solutions que donne l'élimination de la dérivée* $\frac{dy}{dx} = p$ *entre l'équation différentielle, d'une part, et, d'autre part, sa dérivée partielle relative à* p *égalée à zéro, ou ses dérivées relatives à* x *et à* y *égalées à l'infini, celles qui satisfont à l'équation différentielle sans satisfaire à son intégrale générale* (*).

Démonstrations. — Nous donnerons du théorème I une première démonstration applicable à toutes les formes possibles de l'équation $f(x, y, p) = 0$; puis deux autres, l'une analytique, l'autre géométrique, pour le cas où l'équation $f = 0$ est une fonction algébrique de x, y, p.

A. — Première démonstration.

Soient $f(x, y, p) = 0$, l'équation différentielle proposée et $F(x\ y, a) = 0$ son intégrale générale. La différentielle immédiate de cette dernière sera :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) p = 0.$$

(*) La note que l'on trouve au théorème I du § I est entièrement applicable ici relativement aux équations $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. Ces deux équations (ou au moins la seconde) ont été découvertes par Laplace. L'équation $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, l'a été par Legendre.

Or nous pouvons évidemment considérer l'intégrale générale comme résultant de l'élimination de p entre les équations :

$$f(x, y, p) = 0 \text{ et } \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) p = 0.$$

Donc, si nous tirons de cette dernière la valeur de p, que nous représentions cette valeur par

$$p = \psi(x, y, a),$$

et que nous la substituions dans la première, l'équation résultante :

$$f[x, y, \psi(x, y, a)] = 0,$$

représentera l'intégrale générale $F(x, y, a) = 0$. Mais les solutions singulières résultent de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des trois systèmes suivants :

$$1^{\text{er}} \text{ système : } \left\{\begin{array}{l} F = 0, \\ \left(\frac{dF}{da}\right) = 0; \end{array}\right. \quad 2^{\text{e}} \text{ système : } \left\{\begin{array}{l} F = 0, \\ \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}; \end{array}\right. \quad 3^{\text{e}} \text{ système : } \left\{\begin{array}{l} F = 0, \\ \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}. \end{array}\right.$$

1° Examinons donc le premier système d'abord; il équivaut à celui-ci :

$$f[x, y, \psi(x, y, a)] = 0, \quad \left(\frac{dF}{da}\right) = 0.$$

Cette dernière équation équivaut à celle-ci : $\left(\frac{df}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{da}\right) = 0$, puisque ψ seule renferme a; et, de plus, comme ψ doit renfermer a, pour que $f[x, y, \psi] = 0$ soit l'intégrale de $f(x, y, p) = 0$, on ne peut jamais avoir $\left(\frac{d\psi}{da}\right) = 0$; il faut donc que l'on ait $\left(\frac{df}{d\psi}\right) = 0$. Ainsi, il faudra éliminer a entre les équations :

$$f[x, y, \psi] = 0, \text{ et } \left(\frac{df}{d\psi}\right) = 0;$$

et puisque a n'est contenu que dans ψ, on obtiendra le même résultat en éliminant ψ au lieu de a entre les équations :

$$f[x, y, \psi] = 0, \text{ et } \left(\frac{df}{d\psi}\right) = 0,$$

ou, en éliminant p entre les équations :

$$(A)\ \begin{cases} f(x, y, p) = 0, \\ \left(\dfrac{df}{dp}\right) = 0. \end{cases}$$

2° Examinons maintenant le deuxième système : $F = 0$, et $\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}$.

En vertu de l'identité $F(x, y, a) \backsim f[x, y, \psi(x, y, a)]$, ce système revient au suivant :

$$f[x, y, \psi(x, y, a)] = 0, \text{ et } \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{1}{0}.$$

Mais l'élimination de a entre ces équations ne peut donner un résultat différent de celui auquel on serait conduit par l'élimination de ψ entre ces mêmes équations. Et cette dernière élimination revient, à son tour, à celle de p entre les équations :

$$f(x, y, p) = 0, \text{ et } \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{0}. \qquad (\alpha)$$

Donc ces deux équations peuvent remplacer celles du deuxième système, pourvu que p joue le même rôle dans celles-là que a dans celles-ci.

Maintenant on satisfait à (α) en posant :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0} \text{ ou } \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{0}.$$

Mais l'équation $\left(\dfrac{dp}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}$ rentre dans l'une ou l'autre des équations $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}$ et $\left(\dfrac{df}{dp}\right) = 0$, vu que $\left(\dfrac{dp}{dx}\right) = -\dfrac{\left(\dfrac{df}{dx}\right)}{\left(\dfrac{df}{dp}\right)}$ ne peut devenir infini que si $\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ devient infini ou $\left(\dfrac{df}{dp}\right)$ nul.

On peut aussi satisfaire à (α) en posant $\left(\dfrac{df}{dp}\right) = \dfrac{1}{0}$. Mais cette équation doit être rejetée, car pour que les solutions qu'on en tirerait pussent satisfaire à l'équation différentielle proposée, il faudrait qu'elles satisfissent à la condition :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,$$

ce qui n'est pas, puisqu'en vertu de l'identité :

$$F(x, y, a) \backsim f[x, y, \psi(x, y, a)],$$

cette condition devient :

$$\frac{\left(\frac{df}{dp}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dp}\right)}$$

et est évidemment rendue indéterminée par l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=\frac{1}{0}$ (*).

Ainsi les solutions singulières qui résulteraient de l'élimination de a entre les équations du deuxième système, résulteront aussi de l'élimination de p entre :

$$(B)\left\{\begin{array}{l} f(x, y, p)=0 \\ \left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}. \end{array}\right.$$

(*) La vraie valeur de ce rapport pour $\left(\frac{df}{dp}\right)=\infty$ est, comme on s'en assure aisément, $\frac{1}{\left(\frac{dp}{dx}\right)}$, et on doit observer qu'on peut encore le rendre nul en posant en même temps $\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, ce qui exige $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$. Ainsi, toute solution singulière qui rendrait infinie la dérivée $\left(\frac{df}{dp}\right)$ donnerait $\left(\frac{df}{dx}\right)=\infty$, et serait contenue dans cette dernière équation. On n'a donc aucun besoin de tenir compte de l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=\infty$ pour la détermination des solutions singulières. La même observation est applicable au rapport :

$$\frac{\left(\frac{df}{dp}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

quand on y fait $\left(\frac{df}{dp}\right)=\infty$.

3° Enfin, si nous examinons le troisième système $F=0$, et $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, et que nous raisonnions comme tantôt, nous trouverons que les solutions singulières qui résultaient de l'élimination de a entre les équations de ce système résulteront aussi de l'élimination de p entre :

$$(C)\quad \begin{cases} f(x, y, p) = 0 \\ \left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}. \end{cases}$$

Ainsi, toutes les solutions singulières de l'équation $f(x, y, p) = 0$, résulteront de l'élimination de p entre les deux équations de chacun des trois systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.} : \begin{cases} f(x, y, p) = 0, \\ \left(\frac{df}{dp}\right)=0; \end{cases} \quad 2^{\text{e}}\text{ syst.} : \begin{cases} f(x, y, p) = 0, \\ \left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}; \end{cases} \quad 3^{\text{e}}\text{ syst.} : \begin{cases} f(x, y, p) = 0, \\ \left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}, \end{cases}$$

ce qu'il fallait prouver.

Rem. — 1° Comme, d'une part, les équations $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, et $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ne peuvent être satisfaites par des fonctions finies de x, y, p que si les dérivées partielles $\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{df}{dy}\right)$ sont des fonctions algébriques ayant des dénominateurs qu'on puisse égaler à zéro, ou des fonctions transcendantes pouvant aller à l'infini pour des valeurs finies des variables dont elles dépendent; et comme, d'autre part, il n'y a parmi les fonctions algébriques que les radicaux et les diviseurs qui puissent donner lieu à des dénominateurs par la différentiation, il en résulte que, lorsque la fonction f est une fonction algébrique de x, qui ne renferme x ni en dénominateur ni sous un radical, l'équation $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ ne peut être satisfaite ; et que, de même, l'équation $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ne peut rien donner si f est une fonction algébrique de y, telle que y n'y entre ni en dénominateur ni sous un radical. Par conséquent, quand l'équation différentielle sera une fonction algébrique, rationnelle et entière, relativement à x aussi bien qu'à y, l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$

pourra seule donner des solutions singulières. Lorsque l'équation différentielle renferme p isolé, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme $p - \varpi(x, y) = 0$, l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ devient contradictoire, et on ne peut plus avoir égard qu'aux équations $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ et $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ qui deviennent $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. — Il résulte encore de la remarque présente que si l'équation $f(x, y, p) = 0$ est une fonction algébrique, rationnelle et entière de x et de y, et que p y soit isolé, elle n'aura pas de solutions singulières.

2° Si la fonction, qui, égalée à zéro, satisfait à l'une des trois équations $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, ne renferme que la dérivée p, alors il n'y a plus lieu à l'élimination exigée par le théorème I; et cette fonction est une solution singulière, si toutefois elle satisfait à cette proposée, sans satisfaire à son intégrale générale.

B. — DEUXIÈME DÉMONSTRATION.

Nous supposerons que l'équation $f(x, y, p) = 0$ est une fonction algébrique et qu'on l'a délivrée de radicaux et de dénominateurs; puis nous examinerons deux cas.

a. Premier cas. — L'équation f (x, y, p) = 0, *n'est pas résolue par rapport à* p. — Nous disons que, dans ce cas, toutes les solutions singulières de la proposée sont données par l'élimination de p entre les équations $f = 0$ et $\left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{1}{0}$. En effet :

1° Imaginons, avec Legendre, qu'on connaisse une valeur de y en fonction de x qui satisfasse à la proposée; et supposons qu'on cherche une fonction $y + \delta y$ de x contiguë à la précédente. Il ne s'agira, pour obtenir cette seconde fonction, que de faire varier y et $\frac{dy}{dx}$ dans la proposée $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, et comme on a : $\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$, le résultat de cette variation pourra toujours être mis sous la forme :

$$A \frac{d\delta y}{dx} + B\,\delta y = 0. \qquad (a)$$

Les coefficients A et B pouvant être regardés comme des fonctions de x seul, puisque y est donné en x, δy sera donc donné par une équation linéaire du premier ordre. Maintenant si la valeur connue de y est renfermée dans l'intégrale générale $y = \varphi\,(x, a)$, elle résultera de cette intégrale en donnant à a une valeur constante déterminée; et la valeur $y + \delta y$ s'obtiendra en faisant varier cette constante de δa, ce qui donne :

$$\delta y = \left(\frac{d\varphi}{da}\right) \delta a. \tag{b}$$

Cette valeur de δy doit donc satisfaire à l'équation (a) et, par conséquent, en est l'intégrale générale, δa étant la constante arbitraire; et comme cette valeur de δy renfermera toujours l'arbitraire δa, l'équation (a) doit être du premier ordre, et A ne saurait être nul. Si, au contraire, la valeur donnée de y est comprise dans une solution singulière, c'est-à-dire dans une équation primitive sans constante arbitraire, $y = \psi\,(x)$ étant cette équation, la valeur de δy ne pourra renfermer de constante arbitraire; et l'équation (a), qui donne δy, devra se réduire à l'ordre 0, ce qui exige qu'on ait $A = 0$. Par conséquent, si cette équation $A = 0$ s'accorde avec la proposée, l'élimination de p entre $A = 0$ et $f = 0$ donnera toutes les solutions singulières de la proposée. On comprend maintenant pourquoi nous avons supposé l'équation $f\,(x, y, p) = 0$ algébrique en x, y, p, et mise sous forme rationnelle et entière. C'est que les raisonnements précédents supposent que l'hypothèse qui annulle A ne rende pas infini B; et, comme on ne peut assurer d'une manière générale que B ne saurait devenir infini pour la valeur d'y qui fait évanouir A, que lorsque B est une fonction algébrique entière, il a fallu supposer que l'équation $f = 0$, d'où B se déduit, était une fonction algébrique délivrée de radicaux et de dénominateurs. Des raisonnements analogues, faits en regardant x comme fonction de y, conduisent au même résultat.

2° Legendre, après avoir constaté que toutes les solutions singulières sont renfermées dans l'équation $A = 0$, après qu'on y a mis pour p sa valeur tirée de $f = 0$, s'est arrêté. Il nous reste donc à former la fonction A; or, en variant l'équation $f(x, y, p) = 0$, dans l'hypothèse de $\delta x = 0$, on a :

$$\left(\frac{df}{dy}\right) \delta y + \left(\frac{df}{dp}\right) \delta p = 0,$$

ou

$$\left(\frac{df}{dp}\right) \frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{df}{dy}\right) \delta y = 0.$$

Cette équation comparée avec (a) donne :

$$A = \left(\frac{df}{dp}\right);$$

ce qu'il fallait prouver.

b. Deuxième cas. — L'équation f (x, y, p) = 0 *est résolue par rapport à* p. — Elle est donc de la forme : $p - \varpi(x, y) = 0$. Dans ce cas, nous disons que toutes les solutions singulières sont comprises dans les équations :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \text{ et } \left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0},$$

Pour le prouver, nous employerons le tour de démonstration (*) qui se trouve dans le *Traité élémentaire de calcul intégral* du R. P. Caraffa, professeur de mathématiques transcendantes au collége romain. — Soit

$$F(x, y, a) = 0,$$

l'intégrale générale de l'équation :

$$f(x, y, p) = 0.$$

Appelons :

$$a = \varphi(x, y, p) = 0,$$

la valeur de a tirée de la dérivée complète de $F = 0$, savoir :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) p = 0.$$

(1) Nous l'avons légèrement modifié au profit de l'exactitude.

En substituant cette valeur de a dans $F = 0$, on aura :

$$F \left\{ x, y, \varphi\,[x, y, p] \right\} = 0,$$

et si, dans cette dernière équation, on substitue à p sa valeur $\varpi\,(x, y)$, on tombera évidemment sur une identité, savoir :

$$F \left\{ x, y, \varphi\,[x, y, \varpi\,(x, y)] \right\} \equiv 0.$$

Or, en dérivant cette identité partiellement, d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, on aura :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right) \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)\right] = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right) \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\right] = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)},$$
$$\left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)},$$

Mais les solutions singulières résultent des trois équations :

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = \left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}.$$

Or l'équation $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$, donne à la fois : $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$; l'équation $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ donne $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$; et l'équation $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ donne $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. Ainsi, quand l'équation différentielle proposée a la forme $p - \varpi\,(x, y) = 0$, toutes ses solutions singulières résultent des équations $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, prises séparément ou simultanément, ce qu'il fallait prouver. — Remarquons que la démonstration du deuxième cas ne suppose pas, comme celle du premier, que la fonction $f(x, y, p)$ soit algébrique.

C. — TROISIÈME DÉMONSTRATION.

Nous supposons encore que la fonction $f(x, y, p) = 0$ est algébrique et préparée de manière à n'avoir plus de dénominateurs et à ne plus renfermer de radicaux.

Premier cas. — L'équation n'est pas résolue par rapport à p. — Prouvons d'abord que : « *L'équation différentielle du premier ordre à deux variables n'aura pas de solutions singulières si, résolue par rapport à* p, *elle ne donne qu'une seule valeur réelle pour cette dérivée ou que des valeurs imaginaires.* » En effet, la ligne enveloppe, qui est l'expression concrète de la solution singulière (dans l'hypothèse où nous raisonnons), ne peut exister que lorsqu'il y a intersection entre les enveloppées que représentent les intégrales particulières et qui répondent à des valeurs distinctes de la constante arbitraire. Donc $\frac{dy}{dx} = p$ doit être réel, car s'il était imaginaire, il n'y aurait pas de tangente, par conséquent pas d'intersection. Il doit avoir au moins deux valeurs, c'est-à-dire que l'équation différentielle doit être au moins du second degré par rapport à p. En effet, au point d'intersection, il y a au moins deux courbes, et, par conséquent, au moins deux tangentes. Ainsi, pour qu'il y ait solution singulière, il faut que $\frac{dy}{dx}$ ait au moins deux valeurs réelles distinctes, ce qu'il fallait prouver. — Cela posé, comme pour les points de l'enveloppe, les intersections deviennent contacts, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent égales pour ces points. Ainsi les solutions singulières doivent offrir ce triple caractère : 1° de satisfaire à l'équation différentielle ; 2° de rendre égales deux au moins des valeurs réelles de $\frac{dy}{dx}$ qui satisfont à cette équation ; 3° de ne pouvoir être déduites de l'intégrale générale par une détermination convenable de la constante arbitraire. Or l'existence de deux ou de plusieurs valeurs égales de p données par l'équation $f(x, y, p) = 0$, est exprimée par l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, lorsque la fonction f n'a jamais qu'une seule valeur pour un même système de valeurs de x, de y et de p, ce qui se présente toujours dans l'hypothèse où nous raisonnons, savoir : que l'équation $f(x, y, p) = 0$ est algébrique, rationnelle et entière. La condition de satisfaire à l'équation différentielle se vérifiera en examinant si on peut faire subsister simultanément les deux équations $f = 0$, et $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$. D'où l'on conclut que l'on aura les solutions singulières de l'équation $f(x, y, p) = 0$ en prenant, parmi les solutions qui résultent de l'élimination de p entre cette équation et sa dérivée partielle relative à p égalée à zéro, celles qui satisfont à l'équation différentielle sans satisfaire à son intégrale générale, ce qu'il fallait prouver.

Deuxième cas. — L'équation $f(x, y, p) = 0$ *est résolue par rapport à* p *et mise sous la forme* $p - \varpi(x, y) = 0$. — La démonstration que nous allons donner de la règle applicable dans ce cas, se trouve dans Navier (*) (*Cours d'Analyse de l'école polytechnique,* 2^me^ année). Cette démonstration suppose connue la signification géométrique de la solution singulière, en tant que résultant de l'élimination de p entre les équations $f = 0$ et $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$. Or, si nous regardons p comme un paramètre arbitraire, l'équation $f = 0$, pour être considérée comme représentant une courbe plane dont x et y sont les coordonnées rectangulaires courantes, et, par conséquent, si nous employons un raisonnement analogue à celui dont nous avons fait usage pour déterminer la signification géométrique des solutions singulières, en tant que résultant de l'élimination de a entre les équations $F = 0$, $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, F étant algébrique, nous en conclurons que l'équation résultant de l'élimination de p entre $f = 0$ et $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ représente

(*) C'est cette démonstration que nous avons fait servir, au § 1er, à l'établissement des équations $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, et $\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, application que ne semble pas avoir aperçue Navier.

la courbe enveloppe de toutes les courbes que représente l'équation $f=0$, supposée algébrique, lorsqu'on y donne à p, considéré comme un paramètre arbitraire, toutes les valeurs continues possibles. Cela posé, puisque, pour un même système de valeurs de x et de y appartenant au point d'intersection de deux ou de plusieurs enveloppées consécutives, l'équation $p - \varpi(x, y) = 0$ doit donner pour p des valeurs, inégales en général, mais qui deviennent égales lorsque les valeurs de x et de y considérées, satisfont à l'équation de l'enveloppe, attendu que sur cette enveloppe l'intersection de deux enveloppées devient un contact, il en résulte que si nous regardons la fonction $\varpi(x, y)$ comme le z vertical d'une surface dont x et y sont les coordonnées horizontales, la surface $z - \varpi(x, y) = 0$ devra avoir une forme telle que le z, la coupant en général en deux points au moins, la coupe en un seul, lorsque les abscisses x et y satisferont à l'équation de l'enveloppe, c'est-à-dire soit tangent à la surface pour ces valeurs de x et de y. Le plan, tangent à la surface au point qui a pour projection sur le plan des xy, le point (x, y) sera donc perpendiculaire à xy; par conséquent le cosinus de l'angle du plan tangent avec le plan des xy, lequel cosinus a pour expression :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)^2 + 1}}$$

sera nul; or la valeur précédente ne peut devenir nulle que si on a isolément ou simultanément : $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. Donc toutes les solutions singulières de l'équation $p - \varpi(x, y) = 0$ sont renfermées dans les équations : $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$; ce qu'il fallait prouver.

Rem. — On voit que la surface $z - \varpi(x, y) = 0$ est touchée par le cylindre vertical, qui a pour base l'enveloppe. Ce cylindre vertical dégénère en un plan vertical tangent tout le long d'une génératrice, lorsque l'enveloppe devient une ligne droite, et, par conséquent, lorsque son équation ne contient que x ou que y.

Théorème II. — *Quelle que soit la forme de l'équation différentielle* *donnée, l'application des procédés propres à en déduire les solutions singulières conduira toujours aux mêmes solutions et en même nombre.*

Dém. — En effet, toutes les solutions singulières sont contenues dans les équations $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$. Mais ces équations restent identiquement les mêmes, lorsque F reste le même. Et comme l'intégrale générale d'une équation différentielle ne change pas, quelle que soit la forme qu'on donne à l'équation différentielle, pourvu que la relation d'y à x, qui la constitue, ne soit pas altérée, il s'ensuit que, quelle que soit la forme d'une équation différentielle, ses solutions singulières restent les mêmes et en même nombre. Par conséquent, puisque toutes ces solutions sont contenues dans les trois équations : $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, il s'ensuit que ces trois équations conduiront toujours aux mêmes solutions singulières et en même nombre, quelle que soit la forme de f, ce qu'il fallait prouver. — Cette forme ne peut donc avoir d'autre influence que de faire passer les solutions singulières de l'une des trois équations dans une autre.

Théorème III. — *On peut toujours mettre une équation différentielle, lorsqu'elle est une fonction algébrique de* x, y, p, *sous une forme telle que ses solutions singulières se déduisent de la transformée uniquement par l'élimination de* p *entre elle et sa dérivée partielle relative à* p, *égalée à zéro.*

Dém. — En effet, il suffit, pour cela, de faire disparaître, par la multiplication et l'élévation aux puissances, les dénominateurs et les radicaux que pourrait contenir l'équation $f=0$, car alors les équations $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ perdront leurs solutions, et, par le théorème précédent, l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$ les acquerra.

Remarques générales. — 1° Lorsque l'équation $f=0$ est une fonction algébrique de x, y et p, non-seulement ses solutions singulières peuvent être les courbes enveloppes de toutes les courbes que représente l'intégrale générale, quand on y fait varier d'une façon continue la constante arbitraire, mais encore *elles représentent les courbes enveloppes de toutes les courbes que représente l'équation* f $= 0$, *lorsqu'on y fait varier d'une façon continue la dérivée* p *considérée comme un paramètre arbitraire.* Quand l'équation $f = 0$ n'est pas algébrique, cette signification peut être en défaut. — Quand la fonction f est algébrique, les équations $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ ont une signification facile à déterminer. La première $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ indique que toute solution singulière implique l'existence de racines égales pour p dans l'équation $f = 0$; et, partant, que la tangente en un point (x, y) de l'enveloppe est commune à toutes les enveloppées qui se coupent en ce point. L'équation $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ détermine la valeur de p qui, pour un même $y = AQ$ (fig. 1), rend x un *maximum* ou un *minimum* dans l'ensemble des courbes *aod, a'o'd', a''o''d'',...* représentées par l'équation $f(x, y, p) = 0$, lorsque p y est considéré comme une arbitraire. De même l'équation $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ détermine la valeur de p qui, pour un même $x = MP$ (fig. 1), rend y un *maximum* ou un *minimum* dans l'ensemble des mêmes courbes *aod, a'o'd', a''o''d''*... — Remarquons, enfin, que si l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ donne le résultat contradictoire $1 = 0$, quand l'équation $f = 0$ est de la forme $p - \varpi(x, y)\ 0 =$, c'est que cette équation (algébrique par hypothèse) équivaut, par suite de radicaux qu'elle renferme, à plusieurs équations distinctes :

$$p = \varpi_1(x, y), \quad p = \varpi_2(x, y) \ldots$$

et que la série de branches de courbes représentées par chacune de ces équations, ne fournit pas de point à l'enveloppe par l'intersection de ces courbes entre elles, autrement dit, que l'enveloppe est le lieu géométrique des points où les courbes d'une série se raccordent avec celles des autres séries.

2° On sait que l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, sauf certains cas où les fonctions y ou ϖ présentent des solutions de continuité, peut servir à calculer, avec autant d'approximation qu'on veut, des valeurs particulières de y. Supposons, en effet, qu'on se donne à volonté la valeur y_0 correspondante à un x arbitraire x_0; et représentons par $y = \varphi(x)$ l'équation d'une courbe passant par le point (x_0, y_0), et satisfaisant à l'équation différentielle donnée, c'est-à-dire telle qu'on ait $\frac{d.\varphi(x)}{dx} = \varpi[x, \varphi(x)]$. Si on donne à x_0 un accroissement très-petit Δx_0, y_0 prendra un accroissement Δy_0 qui sera sensiblement égal à $\varpi(x_0, y_0)\,\Delta x_0$, c'est-à-dire le même que celui qu'on déduirait immédiatement de l'équation différentielle donnée en donnant à x et y les valeurs respectives x_0, y_0. En effet, si, dans l'équation $y_0 = \varphi(x_0)$, nous donnons à x_0 l'accroissement Δx_0, nous aurons :

$$y_0 + \Delta y_0 = \varphi(x_0 + \Delta x_0) = \varphi(x_0) + \frac{d.\varphi(x_0)}{dx_0}.\ \frac{\Delta x_0}{1} + \frac{d^2.\varphi(x_0)}{dx_0^2}.\ \frac{\Delta x_0^2}{1.2} + \ldots$$

ou :

$$\Delta y_0 = \frac{d.\varphi(x_0)}{dx_0}.\ \frac{\Delta x_0}{1} + \frac{d^2.\varphi(x_0)}{dx_0^2}.\ \frac{\Delta x_0^2}{1.2} + \ldots$$

et, partant, en négligeant les quantités du second ordre par rapport à Δx_0 :

$$\Delta y_0 = \frac{d.\varphi(x_0)}{dx_0}.\ \Delta x_0,$$

ou :

$$\Delta y_0 = \varpi(x_0, y_0).\ \Delta x_0;$$

ce qu'il fallait prouver.

Si nous posons $y_0 + \Delta y_0 = y_1$, $x_0 + \Delta x_0 = x_1$, l'accroissement Δy_1, relatif à un accroissement Δx_0 de x_1, aura pour valeur $\Delta y_1 = \varpi(x_1, y_1)\,\Delta x_0$; en négligeant encore les quantités du second ordre par rapport à Δx_0, et l'erreur encore plus petite provenant de ce qu'on a négligé dans y_1 une quantité du second ordre. En continuant ainsi et négligeant toujours les quantités du second ordre, par par rapport à Δx_0, on aura autant de points qu'on voudra de la courbe $y = \varphi(x)$. Quant à l'expression générale de y, elle est :

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ \varpi[x_0, y_0].\ \Delta x_0 + \varpi[x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \varpi\{x_0, y_0\}.\ \Delta x_0].\ \Delta x_0 \\ &+ \varpi[x_0 + 2\Delta x_0, y_0 + \varpi\{x_0, y_0\}.\ \Delta x_0 + \varpi\{x_0 + \Delta x_0, y_0 + \varpi(x_0, y_0).\Delta x_0\}.\ \Delta x_0].\ \Delta x_0 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette manière de déterminer les équations primitives qui satisfont à une équation différentielle donnée $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, s'applique évidemment aussi bien aux solutions singulières qu'aux intégrales particulières, de sorte que la valeur précédente de y représenterait l'une de ces solutions singulières si le point (x_0, y_0) appartenait à la courbe qui représente cette solution. — Examinons spécialement le cas des solutions singulières qui représentent les enveloppes des intégrales particulières. Dans ce cas, l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x,y)$ doit fournir deux valeurs au moins pour $\frac{dy}{dx}$, l'une appartenant à l'enveloppe, les autres aux enveloppées ; et ces valeurs seront égales pour tous les points communs à l'enveloppe et aux enveloppées, tandis que pour tout autre point, ces valeurs seront différentes pour les diverses courbes qui passent par ce point, de sorte que si on prend pour x_0, y_0 des valeurs de x et de y appartenant à l'enveloppe, la construction indiquée tantôt devra fournir non-seulement cette enveloppe, mais aussi toutes les enveloppées passant par le point (x_0, y_0). Il n'y a d'exception à cette règle que lorsque l'enveloppe est une ligne droite. En effet, cette ligne droite devant passer par le point (x_0, y_0) et satisfaire à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ a pour équation : $y - y_0 = (x - x_0) \cdot \varpi(x_0, y_0)$. Maintenant, si nous donnons à x_0 l'accroissement Δx_0 pour passer à un point voisin du point de départ (x_0, y_0), nous aurons : $\Delta y_0 = \varpi(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0$ aux quantités du second ordre près ; mais cette valeur de Δy_0 est rigoureusement celle qu'on tire de l'enveloppe. Ainsi, le point $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ appartient rigoureusement à l'enveloppe. Si on donne un nouvel accroissement Δx_0 à x_0, le nouveau point qu'on obtiendra appartiendra encore rigoureusement à l'enveloppe. La construction par points des lignes qui satisfont à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ donnera donc, dans ce cas, la solution singulière seulement. Et il est clair que c'est le seul cas où cela arrive, car si le second point n'était pas rigoureusement sur l'enveloppe, l'équation ne donnerait pas deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ rigoureusement égales, quand on y substituerait les coordonnées de ce point ; et à la valeur suivante de x, on trouverait deux points au lieu d'un, et l'on obtiendrait non-seulement l'enveloppe, mais encore les enveloppées qui passent par le point (x_0, y_0).

Donnons quelques exemples de la détermination des solutions singulières dans la théorie de Laplace et de Legendre.

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f = \frac{dy^2}{dx^2}(x^2 - r^2) - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$$

Solution. — L'équation $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ est seule applicable. Elle donne :

$$p(x^2 - r^2) - xy = 0,$$

d'où :

$$p = \frac{xy}{x^2 - r^2},$$

valeur qui, substituée dans $f = 0$, donne :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

C'est la solution singulière cherchée, car elle satisfait à la proposée, sans être contenue dans son intégrale générale.

Si l'équation différentielle proposée avait été donnée sous la forme :

$$f = p - \frac{x\left[y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\right]}{x^2 - r^2} = 0,$$

il aurait fallu appliquer les équations $\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ et $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, qui donnent :

$$\frac{x\left[\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \pm y\right]}{(x^2 - r^2)\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = \frac{1}{0},$$

$$\frac{-y(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \mp r^2(x^2 + y^2 - r^2) \mp x^2y^2}{(x^2 - r^2)^2\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = \frac{1}{0}.$$

On satisfait à ces équations en posant, soit $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, soit $x^2 - r^2 = 0$. La première est la solution singulière, la deuxième une intégrale particulière correspondant à une valeur nulle de la constante arbitraire qui entre dans l'intégrale générale $x^2 - r^2 - 2ay - a^2 = 0$ de la proposée.

Enfin, si on avait mis l'équation proposée sous la forme :

$$p\,(x^2 - r^2) = x\,[y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}] = 0$$

il aurait fallu employer les trois équations : $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, $\left(\frac{df}{dx}\right) = \infty$, $\left(\frac{df}{dy}\right) = \infty$. Elles donnent :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = x^2 - r^2 = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = 2px - y \mp \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = \infty$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = - x \mp \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = \infty.$$

Or on satisfait à la première de ces équations par l'intégrale particulière $x^2 - r^2 = 0$, et aux deux autres par la solution singulière :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Ex. II. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dy}{dx} + (y - x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.$$

Sol. — La forme de cette équation nous indique qu'il faut faire usage des équations $\left(\frac{df}{dx}\right) = \infty$ et $\left(\frac{df}{dy}\right) = \infty$. Or on a :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = - \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}} = \infty,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = + \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}} = \infty,$$

équations satisfaites par la solution singulière :

$$y - x = 0.$$

Ex. III. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Sol. — L'équation $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$ pourra seule donner ces solutions. On a :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 2p + x = 0;$$

d'où :

$$p = -\frac{x}{2},$$

valeur qui, substituée dans la proposée, donne la solution singulière :

$$4y + x^2 = 0.$$

Ex. IV. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{2\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y-n}} + 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{y-n}}{x-m}} = 0.$$

Sol. — On a :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{2}{\sqrt{y-n}} = 0$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \mp \frac{2\sqrt{y-n}}{(x-m)\sqrt{x-m}\sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}}} = \infty,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{-p\sqrt{x-m}\sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}} \pm \sqrt{y-n}}{(y-n)\sqrt{(x-m)(y-n)}\sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}}} = \infty.$$

On ne peut satisfaire à la première équation; on satisfait à la deuxième soit en posant $x - m = 0$, soit en posant $x - m + 4\sqrt{y-n} = 0$; et à la troisième, en posant $y - n = 0$, ou $x - m = 0$, ou $x - m + 4\sqrt{y-n} = 0$. L'équation proposée a donc trois solutions singulières, savoir :

$$x - m = 0,\ y - n = 0,\ x - m + 4\sqrt{y-n} = 0.$$

Remarquons ici que la solution singulière $y - n = 0$ rend infinie la dérivée $\left(\frac{df}{dp}\right)$; mais qu'il a été inutile, pour l'obtenir, de poser $\left(\frac{df}{dp}\right) = \infty$, puisqu'elle nous a été fournie par l'équation $\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}$. On vérifierait encore aisément que le rapport $\dfrac{\left(\frac{df}{dp}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$ se réduit à $\dfrac{1}{\left(\frac{dp}{dx}\right)}$ pour $y - n = 0$. Ces remarques sont conformes à la note de la page 1028.

Ex. V. — *Trouver, par les variations, les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$x + y\frac{dy}{dx} - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} = 0.$$

Sol. — Il faut d'abord délivrer cette équation de son radical, ce qui donne :

$$y^2.\frac{dy^2}{dx^2} + 2xy.\frac{dy}{dx} + r^2 - y^2 = 0.$$

Prenons-en la variation en considérant x comme constante; nous aurons :

$$\left(y^2.\frac{dy}{dx} + xy\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(y\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y\right)\delta y = 0.$$

Le coefficient A de la théorie de Legendre (*voir* p. 1030) est ici : $y^2.\frac{dy}{dx} + xy$. En l'égalant à zéro, on satisfera à l'équation résultante en posant : $y = 0$, ou $y\frac{dy}{dx} + x = 0$. Cette dernière équation seule satisfait à la proposée; elle donne : $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, valeur qui, substituée dans :

$$y^2.\frac{dy^2}{dx^2} + 2xy.\frac{dy}{dx} + r^2 - y^2 = 0,$$

fournit la solution singulière :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

II. — Théories de Poisson et de Lagrange.

1. — Théorie de Poisson.

On peut déterminer les solutions singulières en se basant sur le théorème suivant, dû à Poisson :

a. Théorème de Poisson. — *Toute équation différentielle du premier ordre à deux variables peut être transformée en une équation différentielle formée de deux facteurs, dont le premier renferme toutes les solutions singulières de la proposée et dont le second n'est plus satisfait par ces solutions.*

Dém. — Soit

$$y = \varphi(x, z) \tag{α}$$

une fonction quelconque de x et de z, z étant une nouvelle variable que nous substituerons à y dans l'équation différentielle proposée :

$$\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y). \tag{a}$$

De (α) on tire :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{dx}. \tag{β}$$

Mais en substituant (α) dans (a), il vient :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varpi[x, \varphi(x, z)]. \tag{b}$$

Comparant (b) et (β), on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - \varpi[x, \varphi(x, z)] + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Il nous faut maintenant essayer de décomposer cette équation en deux facteurs, dont l'un renferme les solutions singulières de (a), et dont l'autre ne puisse être réduit à zéro par aucune de ces solutions singulières. Le premier facteur sera évidemment sous forme finie, le second sera du premier ordre. Or pour avoir deux facteurs tels, il faut que $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$ soit un diviseur de la différence :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - \varpi[x, \varphi(x, z)].$$

Donc, comme la manière la plus simple de remplir cette condition est de poser :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - \varpi[x, \varphi(x, z)] = 0,$$

on voit qu'en prenant pour $y = \varphi(x, z)$, l'intégrale complète de $\frac{d\varphi}{dx} - \varpi(x, y) = 0$, z étant la constante arbitraire, l'équation en z et x se décompose en deux : $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$, et $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$; et la première peut seule donner les solutions singulières, s'il y en a, car c'est celui des deux facteurs $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ qui se présente sous forme finie; ce qui prouve le théorème énoncé.

Observation. — Le théorème précédent est une généralisation de ce fait remarqué pour la première fois par Legendre (*Mém. de l'Ac. des sc. de Paris*, an. 1790, p. 226), savoir : que l'équation $xdx + ydy = dy\sqrt{x^2+y^2-r^2}$, pouvant être préparée de manière que la solution singulière en devînt un facteur; qu'il suffisait, pour cela, de poser $u=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$; de sorte qu'en supprimant le facteur u dans la transformée $u\,(du-dy)=0$, l'équation $du-dy=0$ n'a plus de solution singulière.

Exemple. — Reprenons l'exemple de Legendre et traitons-le par la méthode de Poisson. A cet effet, l'intégrale générale de la proposée étant $x^2+2ay-a^2-r^2=0$, si nous y changeons a en z, et que nous la résolvions ensuite par rapport à y, nous aurons : $y=\frac{x^2-z^2-r^2}{2z}$. C'est la fonction φ de l'analyse précédente. L'équation cherchée sera donc : $(z+y)\,dz=0$. Le facteur $z+y=0$ donne la solution singulière; et le facteur $dz=0$, n'est pas satisfait par la valeur $z=-y$ tirée de cette solution.

Rem. I. — On voit, par l'analyse qui précède, que le théorème de Poisson exige, pour être appliqué, la connaissance de l'intégrale générale. Nous verrons pourtant, article III, une autre transformation, qui démontre également le théorème de Poisson et qui est indépendante de la connaissance de l'intégrale générale.

Rem. II. — On avait cru d'abord qu'il y a deux espèces de solutions singulières : les unes qui ne sont autre chose que des facteurs de l'équation différentielle proposée dans lesquels $\frac{dy}{dx}$ n'entre point, et qui, égalés à zéro, donnent des relations primitives en x et y qui rendent la proposée identique. L'équation $f(x,y,p)=0$ étant supposée de la forme : $P+Q\frac{dy}{dx}=0$, les diviseurs communs de P et de Q seront de cette espèce. La seconde espèce de solutions singulières comprenait celles qui ne peuvent se détacher comme facteurs, et qui sont intimement liées à l'équation différentielle dont elles dérivent. — Le théorème de Poisson montre que la classification précédente est illusoire, et que toutes les solutions singulières sont de la première espèce.

b. Du théorème de Poisson on déduit les deux règles suivantes pour la recherche des solutions singulières :

Règle I. — *Pour trouver les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, on décompose cette équation en deux facteurs, l'un ne renfermant pas* $\frac{dy}{dx}$, *l'autre renfermant* $\frac{dy}{dx}$ *et auquel ne peut satisfaire le premier facteur. Ce premier facteur, égalé à zéro, renfermera toutes les solutions singulières de la proposée.*

Règle II. — *Pour trouver les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, on résout cette équation par rapport à* $\frac{dy}{dx}$, *et on cherche le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction obtenue pour* $\frac{dy}{dx}$; *ce plus grand commun diviseur, égalé à zéro, renferme les solutions cherchées.*

Dém. — Supposons l'équation $f(x, y, p) = 0$, mise par le théorème de Poisson sous la forme :

$$s \cdot f_1(x, y, p) = 0,$$

s ne renfermant pas p, et l'équation $s = 0$ renfermant toutes les solutions singulières de la proposée. On peut toujours concevoir la fonction f_1 mise sous la forme :

$$\psi(x, y) + \chi(x, y)\frac{dy}{dx},$$

les fonctions ψ et χ ne renfermant plus de facteur commun, de sorte qu'on a :

$$s \cdot \left[\psi(x, y) + \chi(x, y)\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

Or cette dernière équation donne :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s.\,\psi\,(x,y)}{s.\,\chi\,(x,y)} = \frac{P}{Q},$$

valeur qui prend la forme de $\frac{0}{0}$ pour les solutions singulières renfermées dans l'équation $s = 0$; ce qu'il fallait prouver.

Rem. I. — L'équation $s = 0$ doit satisfaire aux équations $f(x, y, p) = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, et ne pas satisfaire à l'équation $\psi\,(x, y) + \chi\,(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0$, pour renfermer réellement les solutions singulières.

Rem. II. — Cette méthode peut ne pas toujours réussir, car il peut se faire évidemment que, dans la série des calculs qui servent à déterminer $\frac{dy}{dx}$, le facteur qui doit faire prendre à $\frac{dy}{dx}$ la forme $\frac{0}{0}$ ait disparu. Elle réussirait toujours s'il était toujours possible de mettre l'équation différentielle proposée $f(x, y, p) = 0$ sous la forme $s.\left[\psi\,(x,y) + \chi\,(x,y)\,\frac{dy}{dx}\right] = 0$, ce qui n'est possible que lorsque l'équation $f(x, y, p) = 0$ est algébrique et qu'on connaît son intégrale générale, sauf la restriction de la remarque I, litt. *a*.

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$x^2 - y + a + r\,\frac{dy}{dx}\sqrt{x^3 - xy + ax} = 0.$$

Sol. — Résolvons l'équation proposée par rapport à $\frac{dy}{dx}$, nous aurons :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y + a}{r\sqrt{x^3 - xy + ax}},$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 - y + a}.\sqrt{x^2 - y + a}}{r\sqrt{x^2 - y + a}\sqrt{x}}.$$

Or cette valeur devient $\frac{0}{0}$ en posant $x^2 - y + a = 0$; et comme cette équation satisfait à la proposée sans satisfaire au facteur $\sqrt{x^2 - y + a} + r\sqrt{x}\cdot\frac{dy}{dx}$ de cette proposée, elle est la solution singulière cherchée.

Ex. II. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$y^3 - axy - xy^2 . \frac{dy}{dx} + ax^2 . \frac{dy}{dx} = 0.$$

Sol. — On en tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - axy}{xy^2 - ax^2},$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(y^2 - ax)}{x\,(y^2 - ax)}.$$

Or cette valeur devient $\frac{0}{0}$ quand on pose $y^2 - ax = 0$, et comme cette dernière équation satisfait à la proposée, sans satisfaire au facteur :

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

de cette proposée, elle est la solution singulière cherchée.

B. — Méthode de Lagrange.

Lagrange a donné une règle différente de toutes les précédentes pour déduire d'une équation différentielle donnée ses solutions singulières. Cette règle est basée sur un théorème qui lui est dû.

a. Théorème de Lagrange. — *Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre à deux variables admet une solution singulière, on peut toujours mettre cette équation sous une forme telle que sa dérivée se décompose en deux facteurs, dont l'un donne la solution singulière par l'élimination de* p *avec la proposée, tandis que l'autre, qui est annulé par la valeur de* y *en* x *tirée de l'intégrale générale, ne l'est plus par la valeur tirée de la solution singulière.*

Dém. — Soit :

$$\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y) \qquad (a)$$

l'équation différentielle proposée, et soit :

$$F\,(x, y, a) = 0, \qquad (\alpha)$$

son intégrale générale. L'équation proposée résultera de l'élimination de a entre (α) et :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (\beta)$$

Appelons :

$$a=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (\gamma)$$

la valeur de a tirée de (β) ; en la substituant dans (α), on aura :

$$F\left[x, y, \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right]=0, \qquad (\delta)$$

équation qui ne différera pas de (a), ou du moins telle qu'on l'obtiendra en multipliant (a) par une fonction convenablement choisie des variables x, y et $\frac{dy}{dx}$. Or, en différentiant (δ), on a :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0.$$

Mais la somme des deux premiers termes est identiquement nulle, puisqu'on a substitué pour a, dans la fonction F, sa valeur tirée de l'équation (β). La dérivée de l'équation (δ) se réduit donc à :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0, \qquad (a')$$

équation qui se décompose en deux, savoir :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0 \qquad (b)$$

et

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0. \qquad (c)$$

L'équation (c), qui est du second ordre, a évidemment pour intégrale du premier ordre l'équation (δ) ; mais elle est également satisfaite par l'équation du premier ordre (γ). Donc, en éliminant p entre (δ) et (γ), on aura l'intégrale deuxième de (c) ou l'intégrale première de (δ). Mais comme p n'est contenu que dans φ, l'élimination de p entre les équations $F(x, y, \varphi) = 0$ et $a = \varphi(x, y, p)$ donnera le même résultat que l'élimination de φ ; ce résultat sera, par conséquent, $F(x, y, a) = 0$, qui est l'intégrale générale de la proposée; ce qui prouve la deuxième partie du théorème.

L'équation (b), qui ne contient que y et p, peut être regardée comme une équation primitive du premier ordre et sans constante arbitraire de l'équation (a'). Ainsi, en éliminant p entre les équations $F(x, y, \varphi) = 0$ et $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$, on aura une nouvelle équation primitive de (a') et, partant, de (a), qui sera différente de $F(x, y, a) = 0$. Or, comme p n'est contenu que dans φ, l'élimination de p donnera le même résultat que l'élimination de φ ; et comme éliminer φ entre $F(x, y, \varphi) = 0$ et $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$ est la même chose qu'éliminer a entre $F(x, y, a) = 0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, il en résulte que l'élimination de p entre les équations $F(x, y, \varphi) = 0$ et $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$ donnera l'équation singulière de a ou du moins l'équation d'une ligne de contact des courbes que représentent les intégrales particulières. On voit aussi que la valeur de y en x tirée de la solution singulière, laquelle donne pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur propre à vérifier la proposée, ne donne pas pour $\frac{d^2y}{d^2x}$ une valeur propre à vérifier l'équation (c), ni par conséquent pour $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots$ des valeurs qui puissent vérifier les dérivées successives de (c). En effet, d'abord l'équation (c) a été délivrée du facteur qui renfermait les solutions singulières ; ensuite, en regardant la solution singulière comme dérivée de l'intégrale complète, en faisant varier dans cette dernière la constante arbitraire, on a bien pour la solution singulière comme pour l'intégrale :

$$\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y);$$

mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de la solution singulière sera :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d\varpi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\varpi + \left(\frac{d\varpi}{da}\right) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx}\right) + \left(\frac{da}{dy}\right)\varpi\right],$$

tandis que, tirée de l'intégrale générale, elle sera :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d\varpi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi}{dy}\right) \varpi;$$

ce qu'il fallait prouver.

Rem. I. — On voit, par l'analyse précédente, qu'à moins qu'on ne connaisse l'intégrale générale, il n'existe pas de moyen direct pour mettre une équation du premier ordre sous une forme telle que sa différentielle se décompose en deux facteurs, dont l'un renferme les solutions singulières et dont l'autre fournit une équation du second ordre débarrassée de ces solutions.

Rem. II. — Si on peut faire en sorte que les solutions singulières d'une équation différentielle donnée ne satisfasse plus aux dérivées successives de cette équation, on peut aussi donner à ces dérivées une forme telle que les solutions singulières y satisfassent encore. Cette propriété, réciproque de celle de Lagrange, paraît avoir été remarquée d'abord par Trembley (*Mém. de l'Ac. des sc. de Turin,* p. 10, 2ᵉ pagination, an. 1790-1791).

Exemple. — Soit l'équation différentielle :

$$f = (x^2 - r^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 2xy.\frac{dy}{dx} - x^2 = 0, \qquad (1)$$

qui a pour intégrale générale :

$$F = x^2 - 2ay - r^2 - a^2 = 0. \qquad (2)$$

Au moyen de cette dernière équation, on peut donner à (1) une forme telle que sa dérivée se décompose en deux facteurs, dont l'un renferme toutes les solutions singulières et dont l'autre soit tel que ces solutions n'y satisfassent plus. En effet, de (2) on tire :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) p = 2x - 2ap = 0,$$

d'où :

$$a = \frac{x}{p},$$

valeur qui, substituée dans (2), donne la forme cherchée pour (1), savoir :

$$x^2 - \frac{2xy}{p} - \frac{x^2}{p^2} - r^2 = 0. \qquad (3)$$

Cette équation se confondrait avec (1) par l'expulsion du dénominateur p^2.

Différentions maintenant l'équation (3) et posons $\dfrac{d^2y}{dx^2} = q$, nous aurons :

$$-\frac{y}{p} + \frac{xyq}{p^2} - \frac{x}{p^2} + \frac{x^2q}{p^3} = 0,$$

ou

$$\left(y + \frac{x}{p}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{xq}{p^2}\right) = 0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes :

$$y + \frac{x}{p} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{xq}{p^2} = 0. \tag{5}$$

En éliminant p entre (4) et (3), on obtient la solution singulière :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

L'équation (5) n'est que la dérivée relative à x de la fonction $\dfrac{x}{p}$. L'intégration de (5) donnera donc $\dfrac{x}{p} = a$, d'où $p = \dfrac{x}{a}$, valeur qui, substituée dans (3), ramène l'intégrale générale (2).

Vérifions maintenant que l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ne satisfait pas à (5). A cet effet, différentions $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, nous aurons :

$$x + yp = 0,$$

d'où :

$$p = -\frac{x}{y},$$

dérivant de nouveau, il vient :

$$1 + p^2 + yq = 0, \text{ ou } 1 + \frac{x^2}{y^2} + yq = 0,$$

et, partant :

$$q = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}.$$

Substituant dans le premier membre de (5) les valeurs de p et de q que nous venons d'obtenir, nous obtenons, après réduction, $\dfrac{x}{y}$ qui n'est pas identiquement nulle.

Mettons maintenant l'équation (1) sous la forme :

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}. \tag{1'}$$

En y faisant :

$$x^2 + y^2 - r^2 = u,$$

d'où :

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy,$$

l'équation (1') devient :

$$du - 2\sqrt{u}.\,dy = 0,$$

équation qui, différentiée, donne :

$$d^2u - 2\sqrt{u}\,d^2y - \frac{dy\,du}{\sqrt{u}} = 0,$$

ou :

$$d^2u.\,\sqrt{u} - 2u.\,d^2y - du.\,dy = 0.$$

Cette dernière équation est encore vérifiée par la solution singulière $u=0$, et sa différentielle $du=0$. Ces transformations peuvent se continuer aussi loin qu'on veut, et la deuxième remarque, dans laquelle nous disons qu'il y a des manières de préparer les différentielles de la proposée pour que les solutions singulières y satisfassent encore, se trouve ainsi justifiée.

Rem. III. — Les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables ne satisfont aux dérivées successives de la proposée, que lorsqu'elles remplissent certaines conditions.

Proposons-nous de déterminer ces conditions (*voir* Lagrange, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1774). A cet effet, soit $F(x, y, a) = 0$ l'intégrale générale de la proposée ; la solution singulière donne :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)},$$

aussi bien que l'intégrale générale, pourvu que :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0.$$

Pour que la solution singulière satisfasse à l'équation $D_x \cdot f(x,y,p)=0$, il faut que cette solution donne, comme l'intégrale générale :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^3},$$

et

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\left(\frac{dF}{dx}\right)^3},$$

ce qui exige que l'on ait encore :

$$\frac{\left(\frac{d^2F}{da\,dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{d^2F}{da\,dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0.$$

On trouve de même que, pour que la solution singulière satisfasse à l'équation $D^2_x \cdot f(x, y, p) = 0$, il faudra qu'on ait une nouvelle condition :

$$\frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{d^3F}{dy^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0.$$

En continuant ainsi, on voit que, pour qu'une solution singulière de $f=0$ satisfasse à la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f=0$, il faut qu'on ait à la fois :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0, \ldots \quad \frac{\left(\frac{d^{n+1}F}{dx^n\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = 0,$$

ou, à la fois :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{d^2F}{dy\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{d^3F}{dy^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0, \ldots \quad \frac{\left(\frac{d^{n+1}F}{dy^n\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = 0,$$

selon que l'on considère y comme fonction de x, ou x comme fonction de y.

Conséquence I. — Si l'on avait à la fois :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,\ \ldots \text{ à l'}\infty,$$

ou

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{d^2F}{dy\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{d^3F}{dy^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,\ \ldots \text{ à l'}\infty,$$

alors la solution singulière satisferait non-seulement à l'équation différentielle du premier ordre, mais aussi à toutes les dérivées de cette équation. Cette solution aurait donc les mêmes propriétés que l'intégrale complète; et nous allons montrer qu'en effet elle cesse alors d'être une solution singulière pour devenir une intégrale particulière. Car toutes les équations de condition sont les dérivées successives de :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,\quad \text{ou de}\quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,$$

partant de :

$$\left(\frac{dy}{da}\right)=0,\quad \text{ou de}\quad \left(\frac{dx}{da}\right)=0;$$

et, puisque toutes ces dérivées sont nulles à l'infini, c'est que y ne renferme pas a, ou que x ne le renferme pas ; les équations :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,\quad \text{ou}\quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}=0,$$

donneront donc une relation entre a et des constantes, et, partant, $a =$ constante; ce qu'il fallait prouver.

Conséquence II. — On peut encore déduire de ce qui précède que lorsque $f=0$ est algébrique, les solutions singulières doivent donner $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$. Puisque $f=0$ ne contient pas a, il en résulte qu'on aura : $\left(\frac{df}{da}\right)=0$, soit qu'on regarde y comme fonction de x et de a, ou x comme fonction de y et de a. Supposons que l'équation $f=0$ ne renferme pas de fonctions transcendantes et soit délivrée de radicaux et de dénominateurs. En regardant y comme fonction de x et de a, et en différentiant $f=0$ par rapport à a, on aura :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{d^2y}{dx\,da}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)=0,$$

ou :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0. \tag{1}$$

Mais, pour les solutions singulières de $f=0$, on a :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0;$$

donc, puisque $\left(\frac{df}{dy}\right)$ ne peut devenir infini, on doit avoir :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0.$$

Donc, si $\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ n'est pas nul, on doit avoir $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$.

Si $\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ était nul, l'équation (1) aurait lieu d'elle-même; mais en différentiant par rapport à x, on aura :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}+\left[\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{d^2f}{dp\,dx}\right)\right]\frac{\left(\frac{d_2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$$

$$+\left[\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)-\left\{\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}\right]\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0,$$

et comme aucun des coefficients ne saurait devenir infini, on doit avoir :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=0,$$

à moins que $\frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ ne soit nul. Si cette dernière quantité était nulle, une nouvelle différentiation, par rapport à x, nous montrerait qu'on doit avoir $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, à moins que $\frac{\left(\frac{d^4F}{dx^3\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$ ne soit nul, et ainsi de suite à l'infini. Mais pour que l'équation $\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0$ puisse donner une solution singulière, il faut que les quantités :

$$\frac{\left(\frac{d^2F}{dx\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},\ \frac{\left(\frac{d^3F}{dx^2\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},\ \frac{\left(\frac{d^4F}{dx^3\,da}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},\ \ldots \text{ à l'}\infty,$$

ne soient pas toutes nulles à la fois ; donc il faudra que quelqu'une de ces quantités ne soit pas nulle. Il faudra, par conséquent, qu'on ait nécessairement :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=0;$$

ce qu'il fallait prouver.

On arriverait au même résultat en considérant x comme fonction de y et de a.

Conséquence III. — On peut montrer qu'*il y a dans le premier ordre des équations qui ont toujours une solution singulière.*

En effet, reprenons la différentielle complète de $f(x, y, p) = 0$, savoir :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) dp + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dx}\right) dx = 0,$$

Si cette équation se réduit d'elle-même à :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) dp = 0,$$

elle aura toujours une solution singulière donnée par le premier facteur $\left(\frac{df}{dx}\right) = 0$; quant au second facteur $dp = 0$, il fournira l'intégrale générale de l'équation différentielle cherchée. En effet, deux intégrations successives donneront :

$$p = a, \quad y = ax + b.$$

Mais comme l'équation différentielle cherchée n'est que du premier ordre, son intégrale ne devra renfermer qu'une constante arbitraire ; b doit donc être une fonction de a; posons, par conséquent, $b = \psi(a)$; l'intégrale deviendra la ligne droite :

$$y = ax + \psi(a),$$

et, en substituant dans cette équation à a sa valeur p, on aura l'équation différentielle cherchée, savoir :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

b. Du théorème de Lagrange, on déduit les deux règles suivantes, pour la détermination des solutions singulières :

RÈGLE I. — *Pour trouver les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, il faut tâcher de décomposer la dérivée de cette équation en deux facteurs, l'un du premier* *ordre, l'autre du second ordre. Les équations qui résulteront de l'élimination de $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ entre le premier facteur égalé à zéro et l'équation proposée, seront des solutions singulières de cette proposée, si elles ne sont pas renfermées comme cas particuliers dans l'intégrale générale.*

RÈGLE II. — *Les hypothèses qui satisfont aux deux équations résultant de l'élimination de $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ ou de $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$ entre l'équation différentielle proposée et chacune des deux équations qui expriment que les deux termes de la valeur de $\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$ ou de $\frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dy^2}}$ deviennent nuls, sont des solutions singulières de la proposée, si elles ne sont pas contenues comme cas particuliers dans l'intégrale générale.*

Dém. — Nous avons vu, dans le théorème de Lagrange, que si $F(x, y, a) = 0$ est l'intégrale générale d'une équation différentielle donnée $f(x, y, p) = 0$, il faut que cette équation différentielle ait la forme : $F(x, y, \varphi) = 0$ (φ étant la valeur de a en x, y et p tirée de la dérivée immédiate de l'intégrale générale), pour que la dérivée de l'équation différentielle donnée puisse se décomposer en deux facteurs, dont l'un renferme la solution singulière. Or si les équations $f(x, y, p) = 0$ et $F(x, y, \varphi) = 0$ ne coïncident pas, il résulte de la théorie de l'élimination qu'elles ne peuvent différer que par un multiplicateur fonction de x, y et p. Soit M ce facteur, en sorte qu'on ait identiquement :

$$f(x, y, p) \equiv M.F(x, y, \varphi);$$

on en tirera :

$$F(x, y, \varphi) \equiv \frac{f(x, y, p)}{M},$$

d'où, en dérivant :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\cdot\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)p + \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)q\right]$$
$$\equiv \frac{1}{M}\left[\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)q\right] - \frac{f(x, y, p)}{M^2}\left[\left(\frac{dM}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dy}\right)p + \left(\frac{dM}{dp}\right)q\right];$$

et si on remarque que :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) p = 0,$$

il viendra :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) p + \left(\frac{df}{dp}\right) q$$

$$= M.\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)p+\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)q\right]+\frac{f(x,y,p)}{M}\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)+\left(\frac{dM}{dy}\right)p+\left(\frac{dM}{dp}\right)q\right],$$

pour la dérivée du premier membre de l'équation proposée $f(x, y, p) = 0$. Or on satisfait à cette dérivée indépendamment de $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, en posant :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, p) = 0;$$

et on sait qu'en éliminant p entre ces dernières, l'équation résultante renfermera les solutions singulières de la proposée. Mais on ne peut satisfaire à l'équation :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) p + \left(\frac{df}{dp}\right) q = 0,$$

indépendamment de q, qu'en posant :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) p = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dp}\right) = 0.$$

L'existence des solutions singulières entraîne donc ces dernières équations et donne à la valeur de q, tirée de la dérivée de la proposée, la forme :

$$q = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) p}{\left(\frac{df}{dp}\right)} = \frac{0}{0}.$$

Ainsi les solutions singulières ont la propriété de rendre indéterminé le coefficient différentiel du second ordre. Cela posé, appelons $\psi(x, y, p)$ le facteur qui rend nul le numérateur de la valeur de q; et $\chi(x, y, p)$, celui qui fait évanouir le dénominateur; en éliminant p entre chacune des équations $\psi=0$, $\chi=0$ et la proposée, on obtiendra deux équations en x et y, et les hypothèses qui satisferont simultanément à ces deux équations seront des solutions singulières, si, du reste, elles ne sont pas renfermées comme cas particuliers dans l'intégrale générale ; ce qui démontre la règle énoncée.

Rem. I. — Puisque nous avions déjà démontré, dans la théorie de Legendre et de Laplace, que les solutions singulières entraînent l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, il eût été excessivement plus simple de constater qu'elles donnent à q la forme $\frac{0}{0}$ en partant de ce fait acquis, car la dérivée de l'équation $f(x, y, p)=0$, savoir : $\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)p+\left(\frac{df}{dp}\right)q=0$ se réduit à : $\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)p=0$, par l'équation $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$; et les équations $\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)p=0$ et $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$ donnent immédiatement la forme $\frac{0}{0}$ à l'expression :

$$q=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)p}{\left(\frac{df}{dp}\right)}.$$

Si nous avons suivi une marche plus longue, c'est que nous avons voulu, à l'exemple de Lagrange, rendre la démonstration indépendante de la théorie de Laplace et Legendre, et la baser uniquement sur le théorème de Lagrange.

Rem. II. — Nous venons de voir que les solutions singulières donnent la forme indéterminée au coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$; il est facile de voir que $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$,... et tous les coefficients différentiels des ordres supérieurs se présenteront aussi sous la forme $\frac{0}{0}$. Cette circonstance provient de ce que chacun des points de l'enveloppe appartient à trois courbes au moins, qui ont entre elles un contact du premier ordre et pour lesquelles le coefficient différentiel du premier ordre a une valeur commune. Mais les valeurs des coefficients différentiels des ordres supérieurs sont généralement différents pour ces diverses courbes ; et comme les équations dont ces coefficients dépendent ne pourraient donner qu'une seule valeur, puisqu'elles sont du premier degré, l'analyse résout cette difficulté en laissant ces valeurs indéterminées. La forme $\frac{0}{0}$ est, selon l'expression de Lagrange, « le moyen que l'analyse emploie pour échapper aux contradictions. » — Nous avons vu que le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ pouvait prendre aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour les solutions singulières ; mais il y a cette différence entre la dérivée $\frac{dy}{dx}$ et celles des ordres supérieurs, que $\frac{dy}{dx}$ a toujours une valeur finie et déterminée, et que la forme $\frac{0}{0}$ qu'il affecte vient seulement de ce qu'il renferme, comme facteur des deux termes de sa valeur, les solutions singulières, tandis que, pour ces solutions, les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ deviennent réellement indéterminées. — Si on avait regardé à son tour x comme fonction de y, on aurait trouvé que les dérivées $\frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^3x}{dy^3}, \ldots$ prennent aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour les solutions singulières.

Observation générale. — La théorie de Poisson et de Lagrange, ainsi qu'il est facile de le reconnaître par l'examen de l'analyse sur laquelle cette théorie repose, n'est généralement applicable qu'aux équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction algébrique de x et de y.

Appliquons maintenant la théorie de Lagrange à quelques exemples.

EXEMPLE I. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right) + x^3 = 0.$$

Solution. — En dérivant l'équation précédente, on a :

$$x\left(2x\frac{dy}{dx} - 3y\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy^2}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0;$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\dfrac{dy^2}{dx^2}-y\dfrac{dy}{dx}-3x^2}{x\left(2x\dfrac{dy}{dx}-3y\right)}.$$

On aura donc, pour déterminer toutes les solutions singulières de la proposée, les trois équations :

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(x\frac{dy}{dx}-2y\right)+x^3=0,$$

$$x\frac{dy^2}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}-3x^2=0,$$

$$x\left(2x\frac{dy}{dx}-3y\right)=0.$$

Or la dernière donne :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{2x},$$

valeur qui, substituée dans les deux autres équations, donne :

$$-\frac{y^2}{4}+x^3=0, \quad \text{et} \quad \frac{3y^2}{4x}-3x^2=0,$$

équations auxquelles on satisfait simultanément en posant :

$$y^2-4x^3=0.$$

C'est la solution singulière cherchée, et qu'on aurait obtenue par la théorie de Laplace et Legendre et par l'application des procédés du § I à l'intégrale générale : $y-ax-\dfrac{x^2}{a}=0$.

Ex. II. — *Trouver une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points donnés sur chaque tangente à cette courbe soit constant.*

Sol. — Il est tout d'abord manifeste que la courbe cherchée sera enveloppe de toutes ses tangentes, et que, par conséquent, son équation sera le résultat de l'élimination de $\dfrac{dy}{dx}$ entre l'équation différentielle du problème et l'équation qui rend nuls les deux termes de la valeur de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Il nous faut donc premièrement chercher l'équation différentielle, traduction analytique de la question proposée. A cet effet, prenons pour axe des x la droite qui passe par les points donnés, et pour origine, le milieu de la distance qui sépare ces points, distance que nous représenterons par $2c$. Appelons b^2 le produit des perpendiculaires : la condition donnée nous fournira l'équation différentielle cherchée, savoir :

$$\frac{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2\frac{dy^2}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \pm b^2, \tag{1}$$

le signe supérieur correspondant au cas où les deux points sont d'un même côté de la tangente, et le signe inférieur au cas où la tangente passe entre les deux points. Différentions (1) et réduisons au même dénominateur, nous aurons :

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} + x^2.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} - c^2.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} = \pm b^2.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Posons : $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$; puis résolvons par rapport à q, il viendra :

$$q = \frac{0}{p\left[x^2 - (c^2 \pm b^2)\right] - xy}.$$

Pour que cette valeur devienne $\frac{0}{0}$, il faut qu'on ait :

$$p = \frac{xy}{x^2 - (c^2 \pm b^2)}. \tag{2}$$

L'élimination de p entre (1) et (2) donnera l'équation de la courbe cherchée; pour effectuer cette élimination, remarquons que l'équation (1), après qu'on a chassé le dénominateur, devient :

$$(y - xp)^2 - c^2 p^2 = \pm b^2 \pm b^2 p^2,$$

ou :

$$p^2 = \frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - (c^2 \pm b^2)} + 2.\frac{xy}{x^2 - (c^2 \pm b^2)}\,p,$$

ou, en vertu de (2) :

$$p^2 = \frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - (c^2 \pm b^2)} + 2p^2,$$

ou, enfin :

$$p^2 = -\frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - (c^2 \pm b^2)} \tag{3}$$

La comparaison facile de (2) et (3) donne :

$$\frac{x^2 y^2}{[x^2 - (c^2 \pm b^2)]^2} + \frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - (c^2 \pm b^2)} = 0;$$

d'où, enfin :

$$y^2 (c^2 \pm b^2) \pm b^2 x^2 = \pm b^2 (c^2 \pm b^2). \tag{4}$$

Si l'on prend les signes supérieurs, cette équation représente une ellipse dont les foyers sont les deux points donnés et dont le petit axe est égal à $2b$. Si l'on prend les signes inférieurs, les deux points étant de côtés différents de la tangente, les perpendiculaires sont respectivement moindres que les segments de la droite égale à $2c$, en sorte que $c < b$; la courbe est donc alors une hyperbole ayant pour foyers les points donnés, et $2b$ pour axe imaginaire.

L'intégrale générale de (1), savoir : $y = ax + \sqrt{(c^2 \pm b^2)\,a^2 \pm b^2}$, représente le système des tangentes de la courbe (4).

Ex. III. — *On donne deux parallèles et sur chacune d'elles un point fixe, et on demande la courbe telle que, pour toute tangente qu'on lui mène, les segments déterminés sur chaque parallèle entre le point fixe et le point de rencontre avec la tangente, aient un produit constant.*

Sol. — Ici encore la courbe cherchée sera évidemment l'enveloppe de toutes les tangentes qui satisfont aux conditions de la question; et l'équation de cette courbe sera celle qui jouit de la propriété de rendre indéterminée la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de l'équation différentielle du problème. Appelons donc b^2 le produit constant, $2c$ la distance des points fixes; prenons l'origine au milieu de cette distance, l'axe des x suivant sa direction, et l'axe des y parallèle aux droites données; l'équation différentielle, traduction analytique de l'énoncé, sera :

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2 \frac{dy^2}{dx^2} = \pm b^2, \tag{1}$$

le signe + ayant lieu dans le cas où les segments sont situés d'un même côté de l'axe des x, et le signe — dans le cas contraire. En différentiant (1), on obtient :

$$-qxy + pqx^2 - c^2pq = 0,$$

d'où :

$$q = \frac{0}{p\,(x^2 - c^2) - xy}.$$

La solution singulière de (1) résultera de l'élimination de p entre (1) et

$$p = \frac{xy}{x^2 - c^2}. \tag{2}$$

Mais (1) donne :

$$p^2 = \frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - c^2} + 2 . \frac{xy}{x^2 - c^2} p,$$

ou, en vertu de (2) :

$$p^2 = \frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - c^2} + 2p^2,$$

ou :

$$p^2 = -\frac{-y^2 \pm b^2}{x^2 - c^2}. \tag{3}$$

Soustrayant (3) de (2) élevée au carré, on a, après la réduction au même dénominateur :

$$c^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2, \tag{4}$$

ellipse ou hyperbole, rapportée à un système de diamètres conjugués, suivant que l'on prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

Le système des tangentes de la courbe (4) est représenté par l'intégrale générale de (1), savoir :

$$y = ax + \sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}.$$

Ex. IV. — *Trouver la courbe dont la longueur de la normale et la distance de son pied à l'origine des coordonnées aient entre elles une relation donnée.*

Sol. — La longueur de la normale est : $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$; la distance de l'origine au point où cette normale rencontre l'axe des abscisses est : $x + y\,\frac{dy}{dx}$. L'équation différentielle du problème est donc :

$$y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \psi\left(x + y\,\frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

En différentiant cette équation, on obtient :

$$p\sqrt{1 + p^2} + \frac{ypq}{\sqrt{1 + p^2}} = (1 + p^2 + qy)\left[\psi'\left(x + y\,\frac{dy}{dx}\right)\right],$$

d'où :

$$q = -\frac{p\sqrt{1 + p^2} - (1 + p^2).\left[\psi'\left(x + y\,\frac{dy}{dx}\right)\right]}{y\left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} - \psi'(x + py)\right]}.$$

Cette valeur devient indéterminée pour :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - \psi'(x+py) = 0. \qquad (2)$$

Quant à l'équation cherchée, elle résultera de l'élimination de p entre les équations (1) et (2), élimination qu'on ne peut effectuer qu'en particularisant la fonction ψ. Si l'on fait, par exemple :

$$\psi(x+py) = k(x+py),$$

k désignant une constante, on aura :

$$y^2 = k\left(x+\frac{k}{4}\right),$$

équation d'une parabole ayant son foyer à l'origine et pour axe l'axe des x.

On satisfait encore à la question par l'intégrale générale de (1), savoir :

$$\sqrt{(x-a)^2 - y^2} = \psi(a),$$

qui est l'équation d'une série de cercles ayant leurs centres sur l'axe des x, et dont les rayons ont avec les distances des centres à l'origine la relation indiquée par la caractéristique ψ.

III. — Théorie de M. Timmermans.

Soit :

$$f(x, y, p) = 0 \qquad (a)$$

une équation différentielle du premier ordre à deux variables, que nous supposerons de forme algébrique et renfermant p à la puissance μ. En représentant par $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ les μ valeurs de p en fonction de x et de y tirées de $f = 0$, celle-ci sera identique avec

$$(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_\mu) = 0. \qquad (a')$$

En appelant p_i et p_k deux quelconques des valeurs de p, le résultat de l'élimination de p entre (a) ou (a') et

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0 \qquad (b)$$

sera :

$$p_i = p_k \qquad (\alpha)$$

(car l'équation (b) exprime que l'équation (a) a au moins deux racines égales), et, par conséquent (*voy.* le théor. III, n° I de ce §), les solutions singulières de (a), s'il y en a, seront renfermées dans (α). Quant à la signification géométrique de cette équation (α), remarquons que chacune des équations : $p=p_1$, $p=p_2$, $p=p_3, \ldots p=p_\mu$ dont l'équation (a') tient la place, représente une série de courbes, de sorte que l'équation (α) exprime qu'au point de rencontre de deux courbes prises dans chacun de ces systèmes, la tangente est commune, c'est-à-dire qu'elles se touchent. L'équation (α) appartiendra donc à tous les points de contact $oo'o''o'''\ldots$ (fig. 10). D'où ce théorème : *L'équation finale, résultant de l'élimination de* p *entre une équation différentielle du premier ordre, fonction algébrique d'un degré quelconque, et sa dérivée relative à* p *égalée à zéro, appartient aux lieux géométriques des points où les courbes représentées par l'une des valeurs de* p *tirées de l'équation différentielle viennent toucher chacune des courbes représentées par les autres valeurs de* p. Si les racines p_1, p_2, $p_3, \ldots p_\mu$ sont rationnelles, les équations $p=p_1$, $p=p_2$, $p=p_3, \ldots$ $p=p_\mu$ seront en général distinctes; et les systèmes de courbes ab, $a_1b_1,\ldots$ pourront être d'une nature différente ; mais si la résolution par rapport à p de l'équation $f(x, y, p)=0$ introduit un radical dans $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$, ces fonctions ne différeront que par le fait de la multiplicité des valeurs de ce radical ; et les équations $p=p_1$, $p=p_2$, $p=p_3, \ldots p=p_\mu$ devront alors être considérées comme des cas particuliers d'une équation plus générale, dans laquelle le radical aurait conservé toute sa généralité. Les courbes ab, $a_1b_1,\ldots$ (fig. 10) ne seront plus que les branches d'une même courbe continue $\alpha o \beta$ (fig. 11), et l'équation $p_i=p_k$ appartiendra encore au lieu géométrique des points qui séparent ces branches, c'est-à-dire des points pour lesquels les racines p_i et p_k sont égales.

Cela posé, l'équation $f(x, y, p)=0$ étant de degré μ les valeurs de p qu'on en tirera pourront contenir plusieurs radicaux ; et l'on aura toutes les racines p_1, p_2, p_3, $\ldots p_\mu$ en combinant de toutes les manières possibles les valeurs de ces radicaux. L'équation $p_i=p_k$, qui exprime l'égalité de deux de ces racines, entraînera donc l'évanouissement de l'un de ces radicaux. Or on peut faire disparaître un radical en égalant à zéro la fonction placée sous lui, de sorte qu'en représentant par φ cette fonction, l'équation $\varphi = 0$ remplacera l'équation $p_i = p_k$ et sera l'équation de la courbe $oo'o''o'''$... (fig. 11); ou bien encore en égalant à zéro un facteur ψ placé en dehors de ce radical, de sorte que l'équation $\psi = 0$ tiendra encore lieu de $p_i = p_k$ et sera encore l'équation de la courbe $oo'o''o'''$... Actuellement, si nous supposons que l'une des équations $\varphi = 0$, ou $\psi = 0$, étant différentiée, satisfasse à l'équation différentielle $p = p_i$, ce qu'on vérifira en examinant si, après avoir fait évanouir φ ou ψ dans p, ce qui reste de la fonction donne pour p la même valeur que $\varphi = 0$, ou $\psi = 0$, savoir :

$$p = -\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)} \quad \text{ou} \quad p = -\frac{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)},$$

la courbe $oo'o''o'''$ sera enveloppe de toutes les courbes aod, $a'o'd'$, $a''o''d''$,... (fig. 1), et l'équation $\varphi = 0$, ou $\psi = 0$, sera une solution singulière, si la courbe $oo'o''o'''$... est distincte de toutes les courbes aod, $a'o'd'$, $a''o''d''$..., c'est-à-dire si elle n'est pas renfermée dans l'intégrale générale comme cas particulier. On a donc le théorème suivant : *Pour obtenir les solutions singulières d'une équation différentielle de forme algébrique, il faut résoudre cette équation par rapport à* p. *Si la valeur de* p *ne renferme pas de radical, il n'y aura pas de solution singulière; dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux, ou, en dehors de ces radicaux, comme facteurs; et si ces équations satisfont à la valeur de* p *sans satisfaire à l'intégrale générale de la proposée, elles seront les solutions singulières cherchées.*

Rem. I. — Lagrange avait déjà observé que les solutions singulières doivent être cherchées dans les radicaux. Mais de cette simple remarque, qui, du reste, n'est entièrement vraie que lorsque f est algébrique, M. Timmermans a tiré, pour ce cas, une théorie neuve, qui montre bien la liaison des solutions singulières avec la composition de l'équation différentielle à laquelle elles satisfont. De plus, il a déduit de cette théorie un moyen simple de distinguer parmi les fonctions qui font évanouir les divers radicaux de la fonction $p = \varpi(x, y)$ et qui satisfont à cette équation, celles qui sont des solutions singulières de celles qui sont des intégrales particulières. C'est ce que nous verrons à l'art. II de ce chapitre.

Exemple. — *Appliquons le procédé de M. Timmermans à l'équation différentielle :*

$$\frac{2\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{y-n}} + 1 + \frac{\sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}}}{\sqrt{x-m}} = 0.$$

Cette équation donne :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y-n}}{2} - \frac{\sqrt{y-n}.\sqrt{x-m+4\sqrt{y-n}}}{\sqrt{x-m}}.$$

Or on fait évanouir successivement les divers radicaux de cette expression, en posant tour à tour :

$$x - m + 4\sqrt{y-n} = 0,$$
$$x - m = 0,$$
$$y - n = 0.$$

Ce sont les solutions singulières que nous avons déjà trouvées de diverses manières.

Rem. II. — Une équation différentielle, algébrique en x, y, p, peut avoir une intégrale générale fonction transcendante de x, y ou a; car certaines fonctions transcendantes (les *logarithmes*, les *fonctions elliptiques sous forme abélienne*, par exemple) ont des différentielles de forme algébrique ; mais la réciproque est fausse, car toute fonction algébrique ayant une différentielle algébrique, lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle est algébrique en x, y, a, cette équation ne peut être transcendante en x, y, p. Il en résulte que la méthode de M. Timmermans, qui suppose que l'équation différentielle à laquelle elle s'applique soit une fonction algébrique, pourra encore s'appliquer à certaines intégrales générales sous forme transcendante, pourvu que l'équation différentielle elle-même soit une fonction algébrique de x, y et p.

EXEMPLE. — *Soit à déterminer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$y^2\left[1+2\frac{dy}{dx}+\frac{dy^2}{dx^2}\right]-x-y=0.$$

Sol. — L'intégrale générale de cette équation est une fonction transcendante de y, savoir :

$$a^2-2a\,ly+(ly)^2=x+y.$$

Nous appliquerons donc la méthode de M. Timmermans à l'équation différentielle elle-même. En la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on a :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\pm\sqrt{x+y}}{y}.$$

L'équation $x+y=0$ fait évanouir le radical de cette expression et y satisfait : c'est la solution singulière cherchée.

§ III. — SOLUTIONS SINGULIÈRES DÉTERMINÉES *A POSTERIORI* PAR LA MÉTHODE DES COEFFICIENTS ET DES EXPOSANTS INDÉTERMINÉS.

Voici cette méthode, due à Jean Trembley et exposée par lui dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Turin* (an. 1790-1791) :

On tâche de reconnaître la forme que doit avoir la solution singulière; on donne ensuite à la fonction qui doit la représenter des coefficients et des exposants indéterminés, et on substitue la valeur qui en résulte dans l'équation différentielle proposée. Cette dernière devant devenir identique par cette substitution, fournira les relations nécessaires pour évaluer les coefficients et les exposants indéterminés.

EXEMPLE. — *Soit proposée l'équation différentielle :*

$$\frac{dy}{dx}(x^2-r^2)\pm(xy-r\sqrt{x^2+y^2-r^2})=0. \tag{1}$$

Sol. — On voit que cette équation est satisfaite en posant :

$$x^2-r^2=0.$$

Nous donnerons donc à la solution singulière la forme :

$$y-A(x^2-r^2)^\alpha=0, \tag{2}$$

A et α étant des constantes à déterminer. A cet effet, substituons (2) dans (1), nous devrons avoir identiquement :

$$2A\alpha\,(x^2 - r^2)^{\alpha} x \pm Ax\,(x^2 - r^2)^{\alpha} \mp r\sqrt{A^2\,(x^2 - r^2)^{2\alpha} + x^2 - r^2} = 0. \quad (3)$$

Or si on prend les signes inférieurs, on satisfera à l'identité (3), indépendamment de $x^2 - r^2$, en posant $2\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$, ce qui change les relations (2) et (3) en :

et :
$$\left.\begin{aligned} y - A\sqrt{x^2 - r^2} &= 0, \\ A^2 + 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

L'élimination de A entre les équations (4) donne :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

qui est la solution singulière déjà trouvée par les procédés des paragraphes précédents.

ARTICLE II. — DISTINCTION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES ET DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES.

Les considérations géométriques sur lesquelles nous nous sommes souvent fondés dans ce qui précède, s'appliquent à toutes les lignes de contact des courbes données par l'intégrale générale, aussi bien à celles qui pourraient exceptionnellement représenter des intégrales particulières, qu'à celles qui représentent des solutions singulières. On est sûr que toutes les solutions singulières sont comprises dans les équations primitives données par les procédés de l'article précédent; mais il reste à distinguer parmi toutes ces équations celles qui ne peuvent rentrer dans l'intégrale générale par une détermination de la constante, de celles qui s'obtiennent en particularisant cette arbitraire. A cet effet, il faut distinguer le cas où on connaît l'intégrale générale de celui où l'équation différentielle seule est donnée.

§ I. — ON CONNAIT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

A. — Méthode de Lagrange.

Pour décider si une équation obtenue par les procédés de l'article précédent est une solution singulière ou une intégrale particulière, il faut éliminer une des variables x *et* y *entre cette équation et l'intégrale générale. Si on peut faire disparaître l'autre variable de l'équation résultante, en donnant à l'arbitraire des valeurs constantes, l'équation essayée est une intégrale particulière, sinon une solution singulière.*

Mais on peut, dans certains cas, reconnaître si une équation donnée est une solution singulière ou une intégrale particulière, sans procéder à l'élimination qu'exige la règle que nous venons d'énoncer. Ainsi :

1° Si l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, tirée de $F(x, y, a) = 0$, donne à a une valeur constante, elle ne conduira qu'à une intégrale particulière.

2° Si a n'est qu'au premier degré dans $F(x, y, a) = 0$, il n'entre point dans $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, qui ne contient alors que les variables x et y; dans ce cas, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ n'est qu'une intégrale particulière. En effet, tout d'abord l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$ satisfait elle-même à l'équation différentielle $f(x, y, p) = 0$, car $F(x, y, a) = 0$ étant de la forme $Q + aP = 0$, Q *et* P désignant des fonctions de x et de y, on a :

$$dQ + adP = 0;$$

d'où :

$$f(x, y, p) \backsimeq PdQ - QdP = 0,$$

équation à laquelle on satisfait en posant $\left(\frac{dF}{da}\right) = P = 0$. De plus, $P = 0$ est la valeur que prend l'intégrale générale quand $a = \infty$, puisque $a = -\frac{Q}{P}$. Elle est donc une intégrale particulière, ainsi que nous l'avons dit.

3° Si a n'entre qu'au premier degré dans l'intégrale générale, et si, en même temps, P est facteur de Q, auquel cas l'intégrale générale $Q + aP = 0$ prend la forme $PR + aP = 0$, on aura : $a = -\frac{PR}{P}$, valeur qui devient $\frac{0}{0}$ pour $P = 0$. Dans ce cas, $P = 0$ n'est ni une intégrale particulière, ni une solution singulière, mais une solution étrangère, car P est un facteur de l'intégrale générale indépendant de a, et, partant, étranger à l'équation différentielle.

B. — Méthode de Poisson.

(*Voy.* le 13° cahier du *Journal de l'École polytechnique*, p. 72.) — *Si* $y = \varphi(x, a)$ *désigne l'intégrale générale de l'équation différentielle* $f(x, y, p) = 0$, *la valeur de* z, *tirée de l'équation* $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$, *et substituée dans l'intégrale générale, conduit à une intégrale particulière ou à une solution singulière, selon que l'équation* $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, *résolue par rapport à* z, *a ou non des racines égales.*

En effet, si z désigne une fonction de x, en éliminant z entre les équations $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$ et $y = \varphi(x, z)$, on aura ou des solutions singulières ou des intégrales particulières. Or, si on considère l'équation $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, il est visible qu'on en tirera d'abord $z = a$, et si on divise son premier membre par $z - a$, on aura une nouvelle équation qui donnera, en général, une valeur de z en x. Lors donc que les deux équations ne pourront être satisfaites par une valeur commune de z, c'est-à-dire quand l'équation $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, résolue par rapport à z, n'aura pas de racines égales, en substituant dans $y = \varphi(x, z)$, la valeur de z tirée de $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$, on aura une solution singulière. Mais si, au contraire, les équations $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$ et $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$ peuvent être satisfaites par une valeur commune de z, ce qui arrivera toutes et quantes fois que l'équation $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, résolue par rapport à z, aura des racines égales, cette valeur commune de z, substituée dans l'équation $y = \varphi(x, a)$, donnera une intégrale particulière; ce qu'il fallait prouver.

C. — Méthode de M. Timmermans.

Nous avons vu (§ I de l'art. I, n° I) que les solutions singulières d'une équation différentielle, dont l'intégrale générale est une fonction algébrique de x, y et a, sont toutes comprises dans les équations :

$$\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Psi = 0,$$

que l'on obtient en faisant évanouir un radical dans l'intégrale générale résolue par rapport à la constante, au moyen d'une fonction placée sous ce radical, ou placée en dehors comme facteur.

1° Considérons d'abord l'équation $\Psi = 0$, et développons a_i suivant les puissances ascendantes de Ψ, on aura, pour $a_i = a$, la série suivante :

$$A_0 + A_1 \Psi + A_2 \Psi^2 + \ldots + A_n \Psi^n + \ldots - a = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dA_0}{dx}\right) + A_1\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) + \Psi\left(\frac{dA_1}{dx}\right) + 2A_2\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\Psi + \Psi^2\left(\frac{dA_2}{dx}\right) + \ldots}{\left(\frac{dA_0}{dy}\right) + A_1\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \Psi\left(\frac{dA_1}{dy}\right) + 2A_2\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)\Psi + \Psi_2\left(\frac{dA_2}{dy}\right) + \ldots};$$

mais l'équation $\Psi = 0$ donne :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)};$$

pour que ces deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ coïncident pour $\Psi = 0$, il faut que l'on ait :

$$\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dA_0}{dx}\right) + A_1\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)}{\left(\frac{dA_0}{dy}\right) + A_1\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)},$$

ou bien, en chassant les dénominateurs et réduisant :

$$\left(\frac{dA_0}{dy}\right)\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)-\left(\frac{dA_0}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)=0,$$

d'où :

$$\frac{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)}=\frac{\left(\frac{dA_0}{dx}\right)}{\left(\frac{dA_0}{dy}\right)}; \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{dA_0}{dx}\right)}{\left(\frac{dA_0}{dy}\right)},$$

et, par conséquent :

$$\left(\frac{dA_0}{dx}\right)+\left(\frac{dA_0}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

ou :

$$A_0 = \textit{constante}.$$

Ainsi, pour que $\Psi=0$ satisfasse à l'équation proposée $f(x, y, p)=0$, c'est-à-dire pour que la courbe $\Psi=0$ touche toutes les courbes représentées par $a_i - a = 0$, il faut et il suffit que A_0 soit constant. Mais alors $\Psi=0$ n'est qu'une intégrale particulière, car pour qu'elle se confonde avec

$$a_i - a = A_0 + A_1\Psi + A_2\Psi^2 + \ldots + A_n\Psi^n + \ldots - a = 0,$$

il suffit de faire $A_0 = -a$. Donc :

Lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables est une fonction algébrique de x, y *et* a, *et qu'elle est résolue par rapport à la constante, tout facteur placé en dehors d'un radical dans l'expression de la constante, et qui, égalé à zéro, fait évanouir ce radical, ne satisfait à la proposée que lorsqu'il réduit l'intégrale à une constante, et lorsqu'il y satisfait, c'est toujours comme intégrale particulière.*

Rem. — Si la fonction Φ placée sous le radical, dont nous représenterons l'indice par μ, formait une puissance exacte Ψ_1^ν, et que ν fût plus grand que μ, on pourrait écrire :

$$\sqrt[\mu]{\Psi_1^{\nu}} = \Psi_1 \sqrt[\mu]{\Psi_1^{\nu-\mu}};$$

et, en posant $\Psi_1 = 0$, le radical devra être considéré comme disparaissant par un facteur placé en dehors, de sorte que $\Psi_1 = 0$ sera une intégrale particulière, si, du reste, elle rend A_0 constant.

2° Examinons maintenant l'équation $\Phi = 0$. En désignant par μ l'indice du radical sous lequel se trouve Φ, la fonction a_i renfermera $\Phi^{\frac{1}{\mu}}$ et pourra être développée suivant les puissances ascendantes de $\Phi^{\frac{1}{\mu}}$, de sorte que l'équation $a_i - a = 0$ sera remplacée par la suivante :

$$B_0 + B_1 . \Phi^{\frac{1}{\mu}} + B_2 . \Phi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + B_n . \Phi^{\frac{n}{\mu}} + \ldots - a = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dB_0}{dx}\right) + \frac{1}{\mu} B_1 \Phi^{\frac{1}{\mu}-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{dB_1}{dx}\right) + \frac{2}{\mu} B_2 \Phi^{\frac{2}{\mu}-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi^{\frac{2}{\mu}} \left(\frac{dB_2}{dx}\right) + \ldots}{\left(\frac{dB_0}{dy}\right) + \frac{1}{\mu} B_1 . \Phi^{\frac{1}{\mu}-1} \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \Phi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{dB_1}{dx}\right) + \frac{2}{\mu} B_2 \Phi^{\frac{2}{\mu}-1} \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \Phi^{\frac{2}{\mu}} \left(\frac{dB_2}{dy}\right) + \ldots}$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dB_0}{dx}\right) . \Phi^{1-\frac{1}{\mu}} + \frac{1}{\mu} B_1 \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi \left(\frac{dB_1}{dx}\right) + \frac{2}{\mu} B_2 \Phi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi^{1+\frac{1}{\mu}} \left(\frac{dB_2}{dx}\right) + \ldots}{\left(\frac{dB_0}{dy}\right) \Phi^{1-\frac{1}{\mu}} + \frac{1}{\mu} B_1 . \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \Phi \left(\frac{dB_1}{dy}\right) + \frac{2}{\mu} . B_2 . \Phi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \Phi^{1+\frac{1}{\mu}} \left(\frac{dB_2}{dy}\right) + \ldots}$$

qui, pour $\Phi = 0$, devient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)},$$

valeur identique à celle qu'on tire de $\Phi = 0$ elle-même. Ainsi, la courbe $oo'o''o'''\ldots$ (fig. 1), représentée par l'équation $\Phi = 0$, touche toutes les courbes représentées par $a_i - a = 0$, c'est-à-dire que l'équation $\Phi = 0$ satisfait à la proposée $f(x, y, p) = 0$, par le seul fait de la présence de Φ sous un radical dans la valeur de la constante a. Ainsi :

Lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables est une fonction algébrique de x, y *et* a, *et qu'elle est résolue par rapport à la constante* a, *toute fonction placée sous un radical dans l'expression de la constante, et qui, égalée à zéro, fait évanouir ce radical, satisfait à l'équation différentielle proposée.*

3° Voyons maintenant quand $\Phi = 0$ sera une intégrale particulière et quand elle sera une solution singulière. Dans l'équation :

$$a_i = B_0 + B_1 . \Phi^{\frac{1}{\mu}} + B_2 . \Phi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + B_n . \Phi^{\frac{n}{\mu}} + \ldots,$$

B_0 représente ce que devient a_i pour $\Phi = 0$, c'est-à-dire quand on y supprime le radical ; or si B_0 est une quantité variable, on ne pourra jamais satisfaire à l'équation :

$$B_0 + B_1 . \Phi^{\frac{1}{\mu}} + B_2 . \Phi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + B_n . \Phi^{\frac{n}{\mu}} + \ldots - a = 0,$$

pour $\Phi = 0$; tandis qu'on pourra y satisfaire si B_0 est une constante, car il suffit alors d'y faire $a = B_0$. Donc :

Si l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables est une fonction algébrique de x, y *et* a, *telle qu'en la résolvant par rapport à la constante, toute fonction placée sous l'un de ces radicaux, et qui, égalée à zéro, le fait évanouir, est une solution singulière ou une intégrale particulière, selon que ce qui reste de la fonction après l'évanouissement de ce radical est une quantité variable ou une quantité constante.*

Corollaire. — On voit que toutes les solutions singulières sont renfermées dans l'équation $\Phi = 0$. Maintenant, si l'on tire de $a = a_i$ les dérivées $\left(\frac{da}{dx}\right)$ et $\left(\frac{da}{dy}\right)$, le radical contenu dans la valeur de a passera au dénominateur de ces dérivées, si ce radical contient x et y; et l'équation $\Phi = 0$, le faisant évanouir, rendra $\left(\frac{da}{dx}\right)$ et $\left(\frac{da}{dy}\right)$ simultanément infinies. Si le radical ne recouvrait qu'une fonction de x ou qu'une fonction de y, l'équation $\Phi = 0$ ne rendrait infinie que la dérivée $\left(\frac{da}{dx}\right)$, ou que la dérivée $\left(\frac{da}{dy}\right)$. — De ce qui précède, résulte encore, que, puisque l'équation $\Phi = 0$ peut être une intégrale particulière, et que, d'ailleurs, d'autres hypothèses pourraient rendre infinies les dérivées $\left(\frac{da}{dx}\right)$ et $\left(\frac{da}{dy}\right)$, toute fonction qui rend infinie l'une de ces dérivées ou toutes les deux n'est pas pour cela une solution singulière. — Nous pouvons encore déduire de la théorie précédente, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$. En effet, l'intégrale générale supposée fonction algébrique de x, y, a, pourra se mettre sous la forme :

$$a = \mathrm{X}\,(x, y) + \Psi\,(x, y).\,[\Phi\,(x, \mu)]^{\frac{\nu}{\mu}},\quad \nu < \mu,$$

ou :

$$F(x, y, a) = [a - \mathrm{X}\,(x, y)]^{\mu} - [\Psi\,(x, y)]^{\mu} \times [\Phi\,(x, y)]^{\nu},$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = \mu\,[a - \mathrm{X}\,(x, y)]^{\mu-1} = \mu\,[\Psi\,(x, y)]^{\mu-1}.\,[\Phi\,(x, y)]^{\frac{\nu(\mu-1)}{\mu}},$$

valeur qui s'annule pour $\Phi = 0$.

Tous ces résultats, qui nous étaient connus, se déduisent, comme on le voit, très-aisément de la théorie de M. Timmermans.

Exemple I. — *On demande si l'équation primitive* $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, *qui satisfait à l'équation différentielle* $y - x\,\frac{dy}{dx} - r\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 0$, *dont l'intégrale complète est* $y - ax - r\sqrt{1 + a^2}$, *est une solution singulière ou une intégrale particulière.*

Sol. — Pour résoudre cette question par la méthode de Lagrange, éliminons l'une des variables, par exemple y entre l'intégrale et l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. On aura :

$$x^2\,(a^2 + 1) + 2ar\,x\,\sqrt{a^2 + 1} + a^2\,r^2 = 0.$$

Or, quelque valeur constante qu'on donne à a, on ne peut faire disparaître x de cette équation ; donc l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est une solution singulière.

On peut aussi employer le procédé de Poisson. A cet effet, résolvons l'intégrale générale par rapport à y, nous aurons :

$$y = ax + r\sqrt{1 + a^2};$$

formons ensuite l'équation $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, il viendra :

$$xz + r\sqrt{z^2 + 1} - ax + r\sqrt{a^2 + 1} = 0,$$

ou :

$$z^2(r^2 - x^2) - 2zx(ax - r\sqrt{a^2 + 1}) + a^2(r^2 + x^2) - 2ar\,x\sqrt{a^2 + 1} = 0,$$

équation qui ne donne évidemment pas de valeurs égales pour z ; donc l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est une solution singulière.

Enfin, on peut encore s'en assurer par le procédé de M. Timmermans. A cet effet, résolvons l'intégrale générale par rapport à la constante, nous aurons successivement :

$$a^2(x^2 - r^2) - 2xy\,a = r^2 - y^2,$$

$$a^2 - 2\frac{xy}{x^2 - r^2}\,a = \frac{r^2 - y^2}{x^2 - r^2},$$

$$a = \frac{xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{x^2 - r^2}.$$

Or l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ n'est autre chose que la fonction placée sous le radical de la valeur de a, fonction qui est égalée à zéro ; et comme après qu'on a supprimé le radical, ce qui reste de la valeur de a, savoir : $a = \frac{xy}{x^2 - r^2} = \frac{x}{y}$, est une quantité variable, il en résulte que l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est une solution singulière.

Ex. II. — *Soit l'équation différentielle* $y - x\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, *dont l'intégrale complète est :* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. En éliminant a entre cette équation primitive et sa dérivée partielle relative à a égalée à zéro, on obtient la solution $x = 0$. Mais $x = 0$ n'est pas une solution singulière, car l'intégrale générale ne renferme a qu'au premier degré ; elle est une intégrale particulière, puisque x n'est pas facteur de $x^2 + y^2$. On s'assure du reste, directement, que $x = 0$ n'est qu'une intégrale particulière correspondante à $a = \infty$, car si on fait $x = 0$, dans la valeur de a, qui est $\frac{x^2 + y^2}{2x}$, on obtient $a = \infty$.

Ex. III. — *Soit l'équation différentielle :*

$$(2x - x^2y - y^3) + 2x(x - y)^2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale complète est :

$$xy^2 + ax^2 - y^3 - axy = 0.$$

Par les procédés de détermination des solutions singulières, on trouve :

$$x - y = 0.$$

Mais cette solution ne peut être singulière, car a n'entre qu'au premier degré dans l'intégrale générale, et comme $x - y$ est un facteur commun de cette intégrale, l'équation $x - y = 0$ est une solution étrangère à l'équation différentielle. Aussi la valeur de a, savoir :

$$a = \frac{y^3 - xy^2}{x^2 - xy}$$

devient-elle $\frac{0}{0}$ pour $x = y$.

§ II. — ON NE CONNAIT PAS L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

Quand on ne connaît que l'équation différentielle, nous avons vu qu'il existe des procédés par lesquels on peut toujours déduire de cette équation elle-même des équations primitives renfermant toutes les solutions singulières de la proposée ; mais, pour distinguer parmi ces équations celles qui sont des solutions singulières de celles qui sont des intégrales particulières, il faut encore un criterium indépendant de la connaissance de l'intégrale générale. Or divers géomètres se sont occupés de la recherche de ce criterium, et il résulterait des travaux d'Euler, de Laplace et de Poisson, que le caractère distinctif des solutions singulières est de rendre infinies les dérivées $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dp}{dy}\right)$. Or s'il est vrai que toute solution singulière rende infinie l'une ou l'autre de ces dérivées ou toutes les deux, la réciproque est fausse, comme nous le prouverons *à priori* et *à posteriori*, c'est-à-dire que le caractère auquel conduisait la théorie d'Euler, qu'en a déduit Laplace, et qu'a démontré de nouveau Poisson, est un caractère nécessaire, mais non suffisant. Cauchy s'est donc livré à la recherche du vrai criterium des solutions singulières et l'a trouvé. Sa théorie est applicable, que l'équation $f(x, y, p) = 0$ soit algébrique ou qu'elle soit transcendante. M. Timmermans a aussi donné un moyen très-simple de distinguer les solutions singulières des intégrales particulières. Mais il n'est praticable que lorsque l'équation $f(x, y, p) = 0$ est une fonction algébrique de x, y, p. Nous exposerons d'abord les travaux d'Euler, de Laplace et de Poisson, pour voir en quoi ils pèchent; puis ceux de MM. Cauchy et Timmermans, que nous regardons comme vrais.

I. — Théories d'Euler, de Laplace et de Poisson.

A. — Théorie d'Euler.

Euler (dans le 1[er] vol. des *Institutiones calculi integralis*, probl. 72) a cherché à établir la proposition suivante :

Pour qu'une valeur de y *satisfaisant à l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ *soit une solution singulière, il faut que le développement de* $\varpi(x, y + z)$, z *étant une nouvelle variable, contienne une puissance de* z *moindre que la première.*

Dém. — Voici, à peu près, comment l'expose Lagrange dans son *Calcul sur les fonctions* :

Soit

$$\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$$

une équation différentielle du premier ordre à deux variables, et supposons que $y = X$ soit une solution singulière de cette équation. En la substituant dans l'équation proposée, on aura :

$$\frac{dX}{dx} = \varpi(x, X).$$

Cela posé, pour que $y = X$ ne puisse se déduire de l'intégrale générale, il faut qu'en posant $y=X+z$, z étant une nouvelle variable, et substituant cette valeur de y dans l'intégrale générale, celle-ci ne puisse jamais donner pour z une valeur nulle. Or pour cette valeur de y, l'équation différentielle devient :

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dz}{dx}=\varpi(x, X+z),$$

ou, en développant $\varpi(x, X+z)$ suivant les puissances de z, d'après le théorème de Taylor :

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dz}{dx}=\varpi(x, X)+\frac{z}{1}\cdot\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}+\frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{d^2.\varpi(x, X)}{dX^2}+\ldots$$

ou :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{1}\cdot\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}+\frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{d^2.\varpi(x, X)}{dX^2}+\ldots,$$

équation qui servira à déterminer z en x. Or si la variable z pouvait devenir nulle, elle pourrait aussi être très-petite. Supposons-la donc d'abord très-petite, et cherchons-en la valeur par approximation. En négligeant d'abord les puissances de z supérieures à la première, on aura pour première approximation :

$$\frac{dz}{dx}=z.\frac{d.\varpi(x, X)}{dX};$$

ou :

$$\frac{dz}{dx}=z.\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}\cdot\frac{dX}{dx},$$

ou :

$$\frac{dz}{z}=\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}dx,$$

et en intégrant :

$$lz=\int\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}dx+C;$$

d'où, en posant $e^C=a$:

$$z=a.e^{\int\frac{d.\varpi(x, X)}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}dx}$$

En substituant cette première valeur approchée de z dans les termes négligés, on pourra obtenir des valeurs successives de plus en plus approchées. De cette manière, la valeur de z contiendra l'arbitraire a et pourra devenir nulle, en posant $a = 0$. D'où l'on peut conclure que $y = X$ ne peut satisfaire à l'équation différentielle proposée qu'autant que le développement de $\varpi\,(x, X + z)$ contienne d'autres puissances de z que les puissances entières et positives. Supposons donc que ce développement donne, en général :

$$\varpi(x, X+z) = \varpi(x, X) + A_1 z^{\alpha_1} + A_2 z^{\alpha_1+\alpha_2} + A_3 z^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \ldots + A_i z^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i} + \ldots,$$

les nombres α_i étant quelconques, et les coefficients A_i étant des fonctions de x; on aura, pour déterminer z, l'équation :

$$\frac{dz}{dx} = A_1 z^{\alpha_1} + A_2 z^{\alpha_1+\alpha_2} + A_3 z^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \ldots + A_i z^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i} + \ldots;$$

on aura aussi, pour la première approximation :

$$\frac{dz}{dx} = A_1 z^{\alpha_1},$$

d'où :

$$\frac{dz}{z^{\alpha_1}} = A_1\, dx,$$

et, en intégrant :

$$\frac{z^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} = \int A_1\, dx + C'.$$

Or, pour que $y = X$ soit une solution singulière, il faut que l'équation précédente ne puisse donner pour z une valeur nulle. Or si $\alpha_1 > 1$, alors $1 - \alpha_1 < 0$, et, par suite, $z^{1-\alpha_1}$ devient ∞ pour $z = 0$, et répond à la supposition de C' infini. Si $\alpha_1 = 1$, on a le cas examiné tantôt où $z = 0$ répond à $C = -\infty$. Mais si $\alpha_1 < 1$, alors $z = 0$ ne pourrait plus répondre qu'à l'équation absurde : $C' = -\int A_1\, dx$. Donc, pour que X puisse être une valeur singulière de y, il faut que $\varpi\,(x, X + z)$ contienne, dans son développement, une puissance z^{α_1}, dans laquelle l'exposant α_1 soit < 1 : c'est là le théorème d'Euler.

B. — Théorie de Laplace.

Il restait à conclure du théorème d'Euler que lorque $y = X$ est une solution singulière, l'une des dérivées $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)$, ou toutes les deux, deviennent infinies. C'est ce que Laplace a fait dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* (1772, 1^re^ partie, p. 343 et 651). Il a énoncé les théorèmes suivants :

a. THÉORÈME I. — *Si l'équation* $s = 0$ *est une solution en* x *et* y *de l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y)$, *elle sera une solution singulière toutes les fois qu'elle rendra infinie la quantité* $\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2s}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{ds}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$; *autrement elle sera une intégrale particulière.*

Dém. — Soit $s = 0$ une fonction de x et de y satisfaisant à l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y)$, dont $F\,(x, y, a) = 0$ est l'intégrale générale. Si on construit, au moyen des équations $s = 0$ et $F = 0$, deux courbes rapportées au même système d'axes rectangulaires, et que l'on détermine la constante arbitraire de l'équation $F = 0$, de manière que la courbe $F = 0$ passe par un point donné $A\,(x, y)$ de la courbe $s = 0$, il est visible que si l'équation $s = 0$ est comprise dans l'équation $F = 0$, les deux courbes doivent coïncider dans tous leurs points ; sinon, la solution $s = 0$ est une solution singulière. Maintenant, si on prend dans les deux courbes $F = 0$ et $s = 0$, deux ordonnées quelconques Y et y répondant à la même abscisse $x + \alpha$, que l'on marque par d' les différentielles dans la courbe $s = 0$, et par d les différentielles dans la courbe $F = 0$, on aura :

$$\text{y} = y + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{d'y}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d'^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cdot\frac{d'^3y}{dx^3} + \cdots$$

$$Y = y + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$$

Or, pour que les deux courbes coïncident dans tous les points, il faut que l'on ait constamment $\mathrm{y} = Y$, quel que soit α, ce qui ne peut être, à moins que l'on ait au point A (x, y) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d'y}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d'^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d'^3y}{dx^3},\ldots,$$

équations que l'on eût également obtenues si, au lieu du point (x, y), on eût pris sur la courbe $s=0$ un autre point quelconque B, parce que la constante arbitraire n'entre point dans $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\ldots$ Donc, pour que $s=0$ soit une intégrale particulière, elle doit satisfaire aux équations :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d'y}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d'^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d'^3y}{dx^3},\ldots;$$

si elle n'y satisfait pas, elle est une solution singulière. Mais l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{d'y}{dx}$ est nécessairement satisfaite, puisque l'équation $s=0$ satisfait à l'équation différentielle proposée. Ce n'est donc que dans les suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d'^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d'^3y}{dx^3},\ldots$$

que l'on peut apercevoir si $s=0$ est une solution singulière ou non.

Actuellement, il nous faut chercher à ramener ces conditions à d'autres plus facilement vérifiables. A cet effet, cherchons à distinguer le cas où $y=0$, satisfaisant par hypothèse à l'équation $\frac{dy}{dx}=\varpi(x, y)$, est une solution singulière de celui où il est une intégrale particulière. Or si $y=0$ était une intégrale particulière, on aurait : $\frac{d'y}{dx}=0, \frac{d'^2y}{dx^2}=0, \frac{d'^3y}{dx^3}=0,\ldots$ et, partant, $y=0$ devrait satisfaire aux équations $\frac{dy}{dx}=0, \frac{d^2y}{dx^2}=0, \frac{d^3y}{dx^3}=0,\ldots$ Mais, pour cela, il faut que la fonction $\frac{dy}{dx}=\varpi(x, y)$ soit d'une certaine nature; supposons qu'on réduise $\frac{dy}{dx}$ en une série ascendante par rapport à y, et qu'on ait :

$$\frac{dy}{dx}=A_1y^{\alpha_1}+A_2y^{\alpha_1+\alpha_2}+A_3y^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\ldots+A_iy^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i}+\ldots,$$

les coefficients A_i étant des fonctions de x et les nombres α_i étant positifs. On pourra mettre $\frac{dy}{dx}$ sous la forme : $\frac{dy}{dx} = y^{\alpha_1} . \varphi$, φ ne devenant ni 0 ni ∞ pour $y = 0$; et la série précédente, dérivée, donnera :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \left\{ \alpha_1 A_1 y^{\alpha_1 - 1} + (\alpha_1 + \alpha_2) A_2 y^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} + \cdots \right\} + y^{\alpha_1} \cdot \frac{dA_1}{dx} + y^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \frac{dA_2}{dx} + \cdots,$$

ou (en substituant à $\frac{dy}{dx}$ sa valeur) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1^2 . \alpha_1 y^{2\alpha_1 - 1} + (2\alpha_1 + \alpha_2) A_1 A_2 y^{2\alpha_1 + \alpha_2 - 1} + \cdots$$

De même :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha_1 (2\alpha_1 - 1) A_1^3 y^{3\alpha_1 - 1} + \cdots,$$

et ainsi de suite. Or il est aisé de voir que toutes ces dérivées ne peuvent s'évanouir pour $y = 0$, et, partant, $y = 0$ être une intégrale particulière, que dans le cas où α_1 est égal à l'unité ou plus grand que l'unité. Donc si α_1 est positif et moindre que 1, l'équation $y = 0$ est une solution singulière ; et elle ne peut l'être que dans ce cas. — Il pourrait arriver, pourtant, que $\frac{dy}{dx}$ au lieu d'être réductible à la forme $y^{\alpha_1} . \varphi$, le fût à celle-ci $\frac{\varphi}{(ly)^r}$, car pour $y = 0$ cette dernière valeur devient nulle. Mais $y = 0$ est alors une solution singulière, parce que $(ly)^r$ est toujours infiniment moindre que $\frac{1}{y^{\alpha_1}}$, quelque grand que soit r et quelque petit que soit α_1. Ce cas rentre donc dans celui où α_1 est < 1. On peut encore concevoir que $\frac{dy}{dx}$ est réductible à la forme $e^{-\frac{1}{y}} . \varphi$, car l'équation $y = 0$ y satisfait ; mais $y = 0$ est, dans ce cas, une intégrale particulière, parce que $e^{+\frac{1}{y}} = \frac{1}{e^{-\frac{1}{y}}}$ est infiniment plus grand que $\frac{1}{y^{\alpha_1}}$ quelque considérable que l'on suppose α_1. Ce cas rentre donc dans celui où α_1 est > 1. On prouvera de même, quelle que soit la forme de $\frac{dy}{dx}$, que l'équation différentielle se rapporte toujours au cas de $\alpha_1 \geqq 1$ ou au cas de $\alpha_1 < 1$. Si $y = 0$ satisfait à l'équation différentielle, elle sera, dans le premier cas, une intégrale particulière, dans le second, une solution singulière.

Cherchons maintenant à ramener à ce cas particulier, le cas général où la solution singulière est une équation quelconque entre x et y. Or en appelant *facteur* d'une quantité, toute fonction qui, égalée à zéro, fait évanouir cette quantité, $s = 0$ sera un facteur de la quantité $\frac{d'y}{dx} - \frac{dy}{dx}$. Concevons donc s sous une forme telle que $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ et $\left(\frac{ds}{dy}\right)$ ne deviennent ni 0 ni ∞ par la supposition de $s = 0$; c'est ce qui aura lieu si les facteurs de s n'y sont pas élevés à d'autres puissances que l'unité ; en effet, soient ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$ ξ_n les n valeurs toutes différentes de y en x que donne l'équation $s = 0$, on aura :

$$s = (y - \xi_1)(y - \xi_2)(y - \xi_3)\ldots(y - \xi_n);$$

d'où :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right) = (y-\xi_1)(y-\xi_2)(y-\xi_3)\ldots(y-\xi_n).\left\{\frac{1}{y-\xi_1} + \frac{1}{y-\xi_2} + \frac{1}{y-\xi_3} + \ldots + \frac{1}{y-\xi_n}\right\},$$

et :

$$-\left(\frac{ds}{dx}\right) = (y-\xi_1)(y-\xi_2)(y-\xi_3)\ldots(y-\xi_n).\left\{\frac{\frac{d\xi_1}{dx}}{y-\xi_1} + \frac{\frac{d\xi_2}{dx}}{y-\xi_2} + \frac{\frac{d\xi_3}{dx}}{y-\xi_3} + \ldots + \frac{\frac{d\xi_n}{dx}}{y-\xi_n}\right\},$$

valeurs qu'aucune des équations $y - \xi_1 = 0$, $y - \xi_2 = 0$, $y - \xi_3 = 0, \ldots$ $y - \xi_n = 0$ ne peut rendre nulles ou infinies. Cela posé, soit β_1 l'exposant de la puissance à laquelle le facteur s est élevé dans $\frac{d'y}{dx} - \frac{dy}{dx}$, en sorte que $\frac{d'y}{dx} - \frac{dy}{ds} = s^{\beta_1}\varphi$, φ ne devenant ni 0 ni ∞ pour $s = 0$, et β_1 étant positif. Puisque $\frac{d'y}{dx}$ est la dérivée de y en x tirée de l'équation $s = 0$, on a :

$$\frac{ds}{dx} + \left(\frac{ds}{dy}\right)\frac{d'y}{dx} = 0,$$

d'où :

$$\frac{d'y}{dx} = -\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)};$$

par suite :

$$-s^{\beta_1}.\varphi\, dx = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)} dx + dy,$$

et, partant :

$$-s^{\beta_1}.\varphi \left(\frac{ds}{dy}\right) dx = \left(\frac{ds}{dx}\right) dx + \left(\frac{ds}{dy}\right) dy.$$

Mais le second membre est la différentielle totale de s ; donc :

$$ds = -s^{\beta_1}.\varphi \left(\frac{ds}{dy}\right) dx,$$

équation qui n'est autre chose que l'équation différentielle proposée mise sous une nouvelle forme. Actuellement, puisque s est une fonction de x et de y, on en peut déduire y en fonction de x et de s ; et, partant, exprimer $-\varphi\left(\frac{ds}{dy}\right)$ en une fonction ψ de x et de s, ψ restant toujours fini pour $s=0$. On aura ainsi :

$$ds = s^{\beta_1}\psi\, dx.$$

Par conséquent, après avoir mis l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ sous la forme précédente, on reconnaîtra le cas où $s=0$ est une solution singulière de cette équation ou une intégrale particulière, en examinant si $\beta_1 < 1$ ou si $\beta_1 \overline{\overline{>}} 1$. Cela posé, réduisons $s^{\beta_1}\psi$ en une série ascendante par rapport à s :

$$s^{\beta_1}.\psi = B_1.s^{\beta_1} + B_2.s^{\beta_1+\beta_2} + B_3.s^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} + \ldots + B_i.s^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_i} + \ldots,$$

les coefficients B_i étant des fonctions de x, et les nombres β_i étant positifs. En dérivant par rapport à x, on a :

$$D_x.(s^{\beta_1}.\psi) = \beta_1 B_1 s^{\beta_1-1}\left(\frac{ds}{dx}\right) + s^{\beta_1}.\frac{dB_1}{dx} + (\beta_1+\beta_2) B_2 s^{\beta_1+\beta_2-1}\left(\frac{ds}{dx}\right) + s^{\beta_1+\beta_2}.\frac{dB_2}{dx} + \ldots,$$

quantité qui devient infinie pour $s=0$, quand $\beta_1 < 1$; mais :

$$s^{\beta_1}\psi = \frac{ds}{dx} = \left(\frac{ds}{dx}\right) + \left(\frac{ds}{dy}\right)\frac{dy}{dx};$$

donc :

$$D_x.\left(s^{\beta_1}.\psi\right) = \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2s}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{ds}{dy}\right).\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Donc, pour que $s=0$ soit une solution singulière de l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y)$, il faut et il suffit que $s=0$ satisfasse en même temps à cette dernière équation et à la suivante :

$$\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2s}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{ds}{dy}\right).\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{0};$$

ce qu'il fallait prouver.

Rem. — Si s était fonction de x seul ou de y seul, il faudrait, pour rentrer dans le théorème précédent, transformer les variables x et y en d'autres x', y', telles que l'on ait, par exemple : $x = x' + y'$, $y = x' - y'$.

b. THÉORÈME II. — Laplace avait donné, sans démonstration, le théorème dont nous avons à nous occuper maintenant, dans le volume VI des *Mém. des savants étrangers*, à la fin de son *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements*. Nous exposerons ce théorème en trois parties.

1° *Solutions singulières en* x *et* y. — *Si* $s=0$ *est une solution singulière en* x *et* y *de l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y)$, s *est un facteur commun aux deux quantités :*

$$\varpi\,(x, y) + \frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)};$$

et réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités, égalé à zéro, est une solution singulière de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y)$.

Dém. — Soit $s=0$ une solution singulière de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}=\varpi(x, y)$. Cette dernière équation est réductible à la forme :

$$ds = s^{\mu}. V\,dx,\ \mu < 1;$$

or :

$$ds = \left(\frac{ds}{dx}\right) dx + \left(\frac{ds}{dy}\right) dy;$$

donc :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = s^{\mu}\,V - \left(\frac{ds}{dx}\right),$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s^{\mu}\,V - \left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)},$$

et, en vertu de l'équation proposée :

$$\varpi(x, y) = \frac{s^{\mu}\,V}{\left(\frac{ds}{dy}\right)} - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)}.$$

Supposons maintenant $s=0$ mis sous la forme $y-X=0$, on aura :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)=1, \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right) = -\frac{dX}{dx};$$

et, partant :

$$\varpi(x, y) = s^{\mu}\,V + \frac{dX}{dx}.$$

Substituons dans V la quantité $X+s$ au lieu de y, et développons-la par rapport aux puissances ascendantes de s, en sorte qu'on ait :

$$V = a_0 + a_1 . s^{\mu_1} + a_2 . s^{\mu_1+\mu_2} + \ldots,$$

a_0, a_1, a_2,... étant fonctions de x seul, on aura :

$$\varpi(x, y) = \frac{dX}{dx} + a_0\, s^{\mu} + a_1\, s^{\mu+\mu_1} + a_2\, s^{\mu+\mu_1+\mu_2} + \ldots;$$

d'où :

$$\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=a_0\mu s^{\mu-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+a_1(\mu+\mu_1)s^{\mu+\mu_1-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+a_2(\mu+\mu_1+\mu_2)s^{\mu+\mu_1+\mu_2-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+\dots,$$

valeur qui devient infinie pour $s=0$; l'équation $s=0$ rend donc nulle la quantité $\dfrac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}$. Ainsi, $s=0$ est facteur de $\dfrac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}$. On prouverait de la même façon qu'il est facteur de $\dfrac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)}$. Pour trouver ce facteur, différention l'équation $\dfrac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}=0$, nous aurons :

$$\frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)^2}=0,$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)}.$$

L'équation $s=0$ satisfait visiblement à cette équation ; mais elle satisfait aussi à la proposée : $\dfrac{dy}{dx}=\varpi(x,y)$. Elle annulera donc la différence :

$$\varpi(x,y)+\frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)};$$

donc s est facteur commun aux deux quantités :

$$\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}\quad\text{et}\quad\varpi(x,y)+\frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)};$$

ce qu'il fallait prouver.

Réciproquement, tout facteur commun à ces quantités est une solution singulière, car si s est facteur, l'équation $s = 0$ fait évanouir les quantités :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)} \quad \text{et} \quad \varpi(x, y) + \frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)},$$

et, par conséquent, leur différence $\frac{dy}{dx} - \varpi(x, y)$, et puisqu'elle satisfait à l'équation $\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)} = 0$, elle est une solution singulière.

Exemple. — *Soit l'équation différentielle :*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = 0.$$

Sol. — On aura :

$$\varpi(x, y) = -\frac{x}{y - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}};$$

par suite :

$$\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\left[y\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\right]}{x};$$

et

$$\varpi(x, y) + \frac{\left(\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\left[y^2 - r^2 - y\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\right]}{x\left[y - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\right]^2}.$$

Or le facteur commun de ces quantités est uniquement $\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$. La solution singulière est donc $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

2° *Solutions singulières en* y *seul.* — *Si* $s = 0$ *est une solution singulière en* y *seul de l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, s *est un facteur commun aux deux quantités* $\varpi(x, y)$ *et* $\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}$; *et réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités qui ne renferme que* y, *égalée à zéro, sera une solution singulière de la proposée.*

Dém. — En effet, s ne renfermant que y, l'équation $s=0$ donnera $\frac{dy}{dx}=0$, partant, $\varpi(x,y)=0$; on aura donc : $\varpi(x,y)=s^{\mu}V$, V étant une fonction de x et de y qui ne devient ni 0 ni ∞ pour $s=0$; mais puisque s est une fonction de y, on peut avoir y en fonction de s, partant V en fonction de s et de x; donc, en développant ϖ suivant les puissances ascendantes de s, on aura :

$$\varpi(x,y)=b_0\, s^{\mu}+b_1.\, s^{\mu+\mu_1}+b_2\, s^{\mu+\mu_1+\mu_2}+\dots,$$

b_0, b_1, b_2,... étant des fonctions de x; donc :

$$\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=b_0\,\mu\, s^{\mu-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+b_1(\mu+\mu_1)s^{\mu+\mu_1-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+b_2(\mu+\mu_1+\mu_2)s^{\mu+\mu_1+\mu_2-1}\left(\frac{ds}{dy}\right)+\dots;$$

mais puisque $\mu<1$, $s=0$ donne $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}=0$. Donc s est facteur commun aux deux quantités :

$$\varpi(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}=0;$$

et réciproquement, si s est facteur commun à ces deux quantités, $s=0$ est une solution singulière ; ce qu'il fallait prouver.

3° En considérant l'équation $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\varpi(x,y)}$, et raisonnant comme précédemment, on reconnaîtra que : *Si* $s=0$ *est une solution singulière en* x *seul de l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx}=\varpi(x,y)$, s *est facteur commun aux deux quantités* $\frac{1}{\varpi(x,y)}$ *et* $\frac{[\varpi(x,y)]^2}{\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)}$; *et réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités qui est fonction de* x *seul, égalé à zéro, est une solution singulière de la proposée.*

C. — Théorie de Poisson.

Poisson a démontré les résultats de Laplace, par une analyse analogue à celle d'Euler (13e cahier du *Journal de l'École polytech-*

nique, p. 64 et *seq.*). Supposons que l'équation différentielle du premier ordre à deux variables :

$$\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y) \qquad (1)$$

soit satisfaite par la valeur $y = X$, X étant une fonction de x sans constante arbitraire, de sorte qu'on ait identiquement :

$$\frac{dX}{dx} = \varpi(x, X). \qquad (2)$$

Pour que l'équation $y = X$ coïncide avec une intégrale particulière, il faut que l'intégrale générale puisse être sous la forme :

$$y = X + \varepsilon\varphi,$$

ε désignant une constante arbitraire, et φ une fonction de x et de ε, qui ne devienne ni 0 ni ∞ pour $\varepsilon = 0$. En effet, si cette intégrale est représentée par $y = F(x, a)$ et que X résulte de $F(x, a)$ en donnant à a une valeur particulière $a = b$, la fonction $F(x, a)$ sera de la forme : $X + (a - b)^k\varphi$, en désignant par k l'exposant de la plus haute puissance de $a - b$ qui puisse diviser $F(x - a) - X$, et par φ une fonction de x et de a, qui ne devient ni 0 ni ∞ quand on fait $a = b$. Donc, en prenant $(a - b)^k$ pour constante arbitraire ε, l'intégrale complète deviendra de la forme :

$$y = X + \varepsilon\varphi,$$

ainsi que nous l'avons dit plus haut. En substituant cette valeur dans (1), on a :

$$\frac{dX}{dx} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dx} = \varpi(x, X + \varepsilon\varphi).$$

Et en appelant k la plus haute puissance de $\varepsilon\varphi$ qui soit facteur de :

$$\varpi(x, X + \varepsilon\varphi) - \varpi(x, X),$$

et ψ une fonction de x et de $\varepsilon\varphi$, qui ne devienne point 0 ou ∞ pour $\varepsilon = 0$, on aura :

$$\varpi(x, X + \varepsilon\varphi) = \varpi(x, X) + (\varepsilon\varphi)^k\psi,$$

et, par suite :

$$\frac{dX}{dx} + \varepsilon \frac{d\varphi}{dx} = \varpi(x, X) + (\varepsilon\varphi)^k \psi,$$

équation qui, en vertu de (2), devient :

$$\varepsilon \frac{d\varphi}{dx} = (\varepsilon\varphi)^k \psi. \tag{3}$$

La question est donc réduite à chercher s'il existe pour φ une valeur en x et en y qui rende cette équation (3) identique, et qui ne devienne ni 0 ni ∞ pour $\varepsilon = 0$. Or il se présente trois cas à examiner : ou $k < 1$, ou $k = 1$, ou $k > 1$.

1° Si k est plus petit que 1 et égal à la fraction $\frac{m}{n}$, $m < n$, la valeur de φ n'existe pas. En effet, divisons les deux membres de (3) par $\varepsilon^{\frac{m}{n}}$, nous aurons :

$$\varepsilon^{1-\frac{m}{n}} \frac{d\varphi}{dx} = \varphi^{\frac{m}{n}} \psi,$$

d'où pour $\varepsilon = 0$:

$$0 = \varphi^{\frac{m}{n}} \cdot \psi,$$

équation impossible, puisque φ et ψ sont des fonctions qui ne deviennent point nulles pour $\varepsilon = 0$.

2° Si $k = 1$, on peut toujours déduire de (3) une valeur de φ en série ordonnée suivant les puissances positives de ε et qui ne s'évanouit pas pour $\varepsilon = 0$. En effet, puisque la fonction $\varpi(x, y)$ est donnée, on connaît le développement de $\varpi(x, X + \varepsilon\varphi)$ suivant les puissances positives et croissantes de $\varepsilon\varphi$, par conséquent le développement de $\psi\varphi$ en vertu de l'équation :

$$\varpi(x, X + \varepsilon\varphi) - \varpi(x, X) = (\varepsilon\varphi)^k \psi,$$

qui, dans le cas actuel, devient :

$$\varpi(x, X + \varepsilon\varphi) - \varpi(x, X) = \varepsilon\varphi\,\psi.$$

On pourra donc poser :

$$(A)\quad\begin{cases}\varphi\psi = \varphi\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_1}\psi',\\ \psi' = \psi_1 + \varepsilon^{\alpha_2}\psi'',\\ \psi'' = \psi_2 + \varepsilon^{\alpha_3}\psi''',\\ \dots\dots\dots\dots\\ \psi^{(i-1)} = \psi_{i-1} + \varepsilon^{\alpha_i}\psi^{i},\\ \dots\dots\dots\dots,\end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$(A')\quad \varphi\psi = \varphi\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_1}\psi_1 + \varepsilon^{\alpha_1+\alpha_2}\psi_2 + \varepsilon^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\psi_3 + \dots + \varepsilon^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_i}\psi_i + \dots$$

Les valeurs α_i et ψ_i étant connues, il s'agit de déterminer β_i et φ_i dans la série :

$$(B)\quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{\beta_1}\varphi_1 + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2}\varphi_2 + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\varphi_3 + \dots + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_i}\varphi_i + \dots,$$

de manière que cette série soit telle que nous l'avons définie plus haut, et qu'elle satisfasse à l'équation (3) indépendamment de ε. A cet effet, il faut employer la méthode des approximations successives. Pour faire l'application de cette méthode à l'équation (3), substituons dans cette équation, après y avoir fait $k = 1$, la valeur de ψ donnée par la première des équations (A) ; on aura, après avoir divisé par ε :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\,\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_1}\psi'. \qquad (\alpha)$$

En désignant par φ_0 ce que devient φ pour $\varepsilon = 0$, et faisant $\varepsilon = 0$ dans (α), on aura, pour déterminer φ_0, l'équation linéaire :

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = \varphi_0\,\psi_0, \qquad (\alpha')$$

qui donne :

$$\varphi_0 = e^{\int\psi_0\,dx}.$$

Posons $\varphi - \varphi_0 = \varepsilon^{\beta_1}\varphi'$ et retranchons (α') de (α), nous aurons :

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi_0}{dx} = (\varphi - \varphi_0)\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_1}\psi',$$

ou :

$$\varepsilon^{\beta_1}\frac{d\varphi'}{dx} = \varepsilon^{\beta_1}\psi_0\varphi' + \varepsilon^{\alpha_1}\psi'.$$

Cette équation renfermant deux inconnues β' et φ', disposons de l'une d'entre elles, et déterminons β_1 par l'équation :

$$\beta_1 = \alpha_1, \tag{a}$$

l'équation précédente deviendra :

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \psi_0\varphi' + \psi'.$$

Substituons-y la deuxième des équations (A), on aura :

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \psi_0\varphi' + \psi_1 + \varepsilon^{\alpha_2}\psi''; \tag{β}$$

d'où, en posant $\varepsilon = 0$ et représentant par φ_1 ce que devient φ' dans cette hypothèse, on obtient, pour déterminer φ_1, l'équation linéaire :

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \psi_0\varphi_1 + \psi_1. \tag{β'}$$

Pour obtenir une deuxième approximation, retranchons (β') de (β) et posons $\varphi' - \varphi = \varepsilon^{\beta_2}\varphi''$, nous aurons :

$$\frac{d\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi_1}{dx} = (\varphi' - \varphi_1)\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_2}\psi'',$$

ou

$$\varepsilon^{\beta_2}.\frac{d\varphi''}{dx} = \varepsilon^{\beta_2}\varphi''\psi_0 + \varepsilon^{\alpha_2}\psi'',$$

équation à deux inconnues β_2 et φ'''; on peut donc poser :

$$\beta_2 = \alpha_2 \tag{b}$$

pour déterminer β_2 ; et alors la pénultième équation devient :

$$\frac{d\varphi''}{dx} = \varphi'' \cdot \psi_0 + \psi'', \tag{γ}$$

d'où, en posant $\varepsilon = 0$, et appelant φ_2 ce que devient φ'' pour cette valeur de ε, on obtient, pour déterminer φ_2, l'équation linéaire :

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = \varphi_2 \psi_0 + \psi_2. \tag{γ'}$$

Pour obtenir une troisième approximation, retranchons (γ') de (γ) et posons $\varphi'' - \varphi_2 = \varepsilon^{\beta_3} \varphi'''$; en tenant compte de la troisième des équations (A), nous aurons :

$$\frac{d\varphi''}{dx} - \frac{d\varphi_2}{dx} = (\varphi'' - \varphi_2)\psi_0 + (\psi'' - \psi_2),$$

ou

$$\varepsilon^{\beta_3} \cdot \frac{d\varphi'''}{dx} = \varepsilon^{\beta_3} \varphi''' \psi_0 + \varepsilon^{\alpha_3} \psi''',$$

équation à deux inconnues β_3 et φ'''; on peut donc poser :

$$\beta_3 = \alpha_3 \tag{c}$$

pour déterminer β_3; alors la pénultième équation devient :

$$\frac{d\varphi'''}{dx} = \varphi''' \psi_0 + \psi''', \tag{δ}$$

d'où, en posant $\varepsilon = 0$, et appelant φ_3 ce que devient φ''' dans cette hypothèse :

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = \varphi_3 \psi_0 + \psi_3, \tag{δ'}$$

équation linéaire qui servira à déterminer φ_3.

En continuant ainsi, on obtiendra pour φ une valeur en série ordonnée suivant les puissances croissantes de ε, car on a :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon^{\beta_1} \varphi', \\ \varphi' &= \varphi_1 + \varepsilon^{\beta_2} \varphi'', \\ \varphi'' &= \varphi_2 + \varepsilon^{\beta_3} \varphi''', \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et, en général :

$$\overset{(i-1)}{\varphi} = \varphi_{i-1} + \varepsilon^{\beta_i} \overset{(i)}{\varphi} ;$$

d'où

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{\beta_1}\varphi_1 + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2}\varphi_2 + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\varphi_3 + \cdots + \varepsilon^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_i}\varphi_i + \cdots,$$

avec les équations

$$\beta_1 = \alpha_1, \; \beta_2 = \alpha_2, \; \beta_3 = \alpha_3, \ldots \beta_i = \alpha_i \ldots,$$

pour déterminer les exposants de ε ; et les équations linéaires :

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = \varphi_0 \psi_0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \varphi_1 \psi_0 + \psi_1,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = \varphi_2 \psi_0 + \psi_2,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = \varphi_3 \psi_0 + \psi_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \varphi_i \psi_0 + \psi_i,$$

$$\cdots\cdots,$$

pour déterminer $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_i ; \ldots$ c'est ce qu'il fallait prouver.

3° Supposons $k > 1$; l'équation (3) devient alors

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varepsilon^{k-1} \varphi^{k} \psi.$$

En y substituant la première des équations (A), on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varepsilon^{k-1} \varphi^{k-1} \varphi \psi_0 + \varepsilon^{k-1} \varepsilon^{\alpha_1} \varphi^{k-1} \psi',$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dx} = (\varepsilon\varphi)^{k-1} \cdot \left\{ \varphi \psi_0 + \varepsilon^{\alpha_1} \psi' \right\},$$

d'où, pour $\varepsilon = 0$, on tire $\frac{d\varphi_0}{dx} = 0$; et, partant, $\varphi_0 =$ constante ;

donc l'équation $\varphi_0 \psi_0 = 0$ donnera $\psi_0 = 0$, et l'on aura, pour déterminer $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_i, \ldots$ les équations :

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \psi_1, \frac{d\varphi_2}{dx} = \psi_2, \frac{d\varphi_3}{dx} = \psi_3, \ldots \frac{d\varphi_i}{dx} = \psi_i, \ldots$$

Dans le cas de $k > 1$, on obtiendra donc encore pour φ une valeur en série ordonnée, suivant les puissances croissantes de ε, qui ne deviendra ni 0 ni ∞ pour $\varepsilon = 0$, et qui satisfera à l'équation (3). Ainsi :

La valeur $y = X$ *est une solution singulière, toutes les fois que dans l'équation* $\frac{d\varphi}{dx} = (\varepsilon\varphi)^k \psi$, *l'exposant* k *est plus petit que l'unité; et une intégrale particulière quand* k *est égal à l'unité ou plus grand que l'unité.*

Tâchons de transformer ce caractère en un autre qu'on puisse immédiatement appliquer à une équation donnée. A cet effet, reprenons l'égalité

$$\varpi(x, y) = \varpi(x, X) + (\varepsilon\varphi)^k \psi;$$

et dérivons-la par rapport à φ, nous aurons :

$$\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) \left(\frac{dy}{d\varphi}\right) = \varepsilon^k \left(\frac{d.(\varphi^k \psi)}{d\varphi}\right).$$

Mais

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d.(X + \varepsilon\varphi)}{d\varphi}\right) = \varepsilon;$$

donc

$$\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \varepsilon^{k-1} \left(\frac{d.(\varphi^k \psi)}{d\varphi}\right).$$

Or en faisant $\varepsilon = 0$, le second membre donne la valeur de $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)$ qui répond à $y = X$; et comme pour $k < 1$, cette valeur est infinie et ne l'est que dans ce seul cas, il en résulte que :

La dérivée partielle relative à y *de l'équation différentielle résolue par rapport à* $\frac{dy}{dx}$ *est infinie pour toute valeur de* y *qui satisfait à cette équation différentielle comme solution singulière; et réciproquement quand la dérivée partielle relative à* y *de* $\frac{dy}{dx}$ *devient infinie pour une* *valeur de* y *qui satisfait à l'équation différentielle proposée, cette valeur de* y *est une solution singulière.*

Cette règle donne le caractère des solutions singulières qui renferment la variable y; mais il pourrait exister de ces solutions qui ne continssent que x; dans ce cas, on remarquera que les raisonnements précédents ne seront absolument pas changés, en permutant entre elles les lettres x et y; donc, il s'appliquent à l'équation différentielle mise sous la forme : $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varpi(x, y)}$. Donc : *La dérivée par rapport à* x *de* $\frac{dx}{dy}$ *devient infinie pour toute valeur de* x *qui satisfait à l'équation différentielle comme solution singulière, et réciproquement toute valeur de* x *qui satisfait à l'équation différentielle et qui rend infinie la dérivée partielle de* $\frac{dx}{dy}$ *relative à* x, *est une solution singulière.*

Corollaire. — Pour appliquer les théorèmes de Poisson, il n'est pas toujours nécessaire de résoudre l'équation différentielle proposée par rapport à p; en effet, soit $f(x, y, p) = 0$; cette équation donne :

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

d'où :

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dp}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dp}\right)}.$$

Mais :

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{0};$$

donc :

$$(R) \left\{ \frac{\left(\frac{df}{dp}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{df}{dp}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)} = 0 \right\},$$

résultats auxquels on satisfait soit en posant $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, soit en posant $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$. Tout cela nous était déjà connu. Il ne faut pas oublier que les rapports (R) doivent toujours être nuls.

II. — Théories de Cauchy et de M. Timmermans.

Les théories d'Euler, de Laplace et de Poisson, que nous venons d'exposer complétement, reposent sur des développements en séries, dont la convergence n'est nullement prouvée, ce qui rend incertains les résultats auxquels elles conduisent. Nous sommes donc en droit de douter que le caractère essentiel et distinctif des solutions singulières soit de rendre infinie l'une ou l'autre des dérivées $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)$ ou toutes les deux. Nous pouvons du reste affirmer, par la théorie du § II, art. 1[er], et nous allons le montrer directement par des exemples, que les équations $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ peuvent donner des intégrales particulières.

Exemple I. — Prenons une équation algébrique en x, y, p, la suivante, par exemple :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left[y\pm\sqrt{x^2+y^2-r^2}\right]}{x^2-r^2}.$$

Nous avons déjà vu que l'emploi des équations $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ donne les équations :

$$x^2+y^2-r^2=0,\quad \text{et}\quad x^2-r^2=0.$$

La première est une solution singulière, la seconde une intégrale particulière. Les équations $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$ et $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ peuvent donc fournir des intégrales particulières.

Ex. II. — Prenons maintenant l'équation transcendante :

$$\frac{dy}{dx}=y\,ly,$$

l étant la caractéristique des logarithmes hyperboliques, il faudra employer l'équation $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$. Or, cette équation donne :

$$1+ly=\frac{1}{0},$$

d'où :

$$y=0\,;$$

mais $y=0$ est une intégrale particulière de la proposée, correspondante à une valeur infinie de la constante arbitraire de l'intégrale générale; car celle-ci est :

$$lly-x+a=0,$$

d'où :

$$a=x-lly,$$

valeur qui est satisfaite par $y=0$, quand $a=\frac{1}{0}$.

Il est donc bien prouvé que les équations $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ constituent un caractère nécessaire des solutions singulières, mais non un caractère suffisant. Il nous faut donc chercher une propriété appartenant à toutes les solutions singulières et n'appartenant qu'à elles. C'est ce que nous allons faire pour les équations différentielles qui sont des fonctions algébriques de x, y et p, d'après M. Timmermans; et pour les équations différentielles quelconques, d'après Cauchy.

1. — Criterium de M. Timmermans.

Nous avons vu que les solutions singulières d'une équation différentielle, fonction algébrique de x, y, p, sont comprises dans les équations $\varphi=0$, $\psi=0$, que l'on obtient en faisant évanouir un radical dans la valeur de p tirée de la proposée, au moyen d'une fonction placée sous ce radical, ou placée en dehors comme facteur.

Considérons d'abord l'équation $\psi=0$. En supposant qu'elle satisfasse à l'équation proposée, la courbe $oo'o''o'''\ldots$ (fig. 1), représentée par l'équation $\psi=0$, sera tangente aux courbes $p=\varpi(x,y)$.

En développant ϖ suivant les puissances ascendantes de ψ, ce qui est toujours possible, il viendra :

$$p = A_0 + A_1 \psi + A_2 \psi^2 + \dots;$$

et comme $\psi = 0$ doit satisfaire à cette équation, on devra avoir :

$$A_0 = -\frac{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)},$$

partant :

$$p\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\frac{d\psi}{dy}\right)[A_1 \psi + A_2 \psi^2 + \dots];$$

mais :

$$d\psi = \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) p\right] dx;$$

donc :

$$d\psi = \psi \left(\frac{d\psi}{dy}\right)[A_1 + A_2 \psi + A_3 \psi^2 + \dots] dx,$$

ou :

$$d\psi = \psi M dx,$$

en représentant par M la quantité, entre crochets, multipliée par $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)$. Or si l'on différentie la valeur de p, en y laissant A_0 pour abréger, et qu'à chaque différentiation on remplace $d\psi$ par sa valeur, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 \psi + A_2 \psi^2 + \dots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dA_0}{dx} + A_1 M \psi + \frac{dA_1}{dx}\psi + 2A_2 \psi^2 M + \frac{dA_2}{dx}\psi^2 + \dots,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2A_2}{dx^2} + A_1 M^2 \psi + \dots,$$

. . . .

$$\frac{d^iy}{dx^i} = \frac{d^{i-1}A_1}{dx^{i-1}} + A_1 M^{i-1} \psi + \dots,$$

. . . . ,

équations auxquelles il est visible que $\psi = 0$ satisfait, puisque les seconds membres se trouvent réduits à leur premier terme. Donc, la courbe $\psi = 0$ se confondra avec l'une des deux courbes représentées par l'équation $p = \varpi(x, y)$; et, par conséquent : *L'équation $\psi = 0$ sera une intégrale particulière toutes les fois qu'elle satisfera à l'équation différentielle proposée.*

Examinons maintenant l'équation $\varphi = 0$; appelons μ l'indice du radical sous lequel se trouve la fonction φ; on pourra toujours développer p suivant les puissances ascendantes de $\varphi^{\frac{1}{\mu}}$; on peut donc écrire :

$$p = A'_0 + A'_1 \varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_2 \varphi^{\frac{1}{\mu}} + \dots$$

Mais comme $\varphi = 0$ doit satisfaire à cette équation, on devra avoir :

$$A'_0 = -\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)},$$

par suite :

$$p\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \varphi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) [A'_1 + A'_2 \varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_3 \varphi^{\frac{2}{\mu}} + \dots] ;$$

mais :

$$d\varphi = \left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) p + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right] dx;$$

donc :

$$d\varphi = \varphi^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) [A'_1 + A'_2 \varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_3 \varphi^{\frac{2}{\mu}} + \dots] dx,$$

valeur de la forme :

$$d\varphi = \varphi^{\frac{1}{\mu}} M' dx.$$

Maintenant, si on différentie p et qu'à chaque différentiation on remplace $d\varphi$ par sa valeur, on trouve :

$$\frac{dy}{dx}=A'_0+A'_1\,\varphi^{\frac{1}{\mu}}+A'_2\,\varphi^{\frac{2}{\mu}}+\ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dA'_0}{dx}+\frac{dA'_1}{dx}\varphi^{\frac{1}{\mu}}+\frac{1}{\mu}\cdot\frac{A'_1\,M'}{\varphi^{1-\frac{2}{\mu}}}+\frac{dA'_2}{dx}\varphi^{\frac{2}{\mu}}+\frac{2}{\mu}\cdot\frac{A'_2\,M'}{\varphi^{1-\frac{3}{\mu}}}+\ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2A'_0}{dx^2}-\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\cdot\frac{A'_1\,M'^2}{\varphi^{2-\frac{3}{\mu}}}+\ldots$$

. . . .

$$\frac{d^iy}{dx^i}=\frac{d^{i-1}A'_0}{dx^{i-1}}+(-1)^i\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\left(1-\frac{3}{\mu}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{\mu}\right)\cdot\frac{A'_1\,M'^{i-1}}{\varphi^{i-1-\frac{i}{\mu}}}+\ldots$$

. . . . ,

équations auxquelles $\varphi=0$ ne satisfera jamais, car elles ne se réduiront jamais à leur premier terme, puisque, pourvu que μ soit plus grand que 1, φ aura toujours un exposant positif au dénominateur de plusieurs termes ; et que ces termes ne s'évanouiront pas pour $\varphi=0$. Donc, la courbe $\varphi=0$ sera toujours distincte des courbes $p-\varpi(x,y)=0$; et, partant, $\varphi=0$ sera une solution singulière. Donc : *Une fonction qui, égalée à zéro, satisfait à une équation différentielle algébrique en* x, y, p, *et fait évanouir un radical dans la valeur de* p *tirée de cette équation, est une solution singulière ou une intégrale particulière, selon qu'elle est placée sous le radical ou en dehors.*

Remarque I. — Si la fonction φ placée sous le radical, ou un facteur de cette fonction, forme une puissance exacte ψ_1^{ν}, l'équation $\psi_1=0$ sera une solution singulière ou une intégrale particulière, selon qu'on aura : $\mu>\nu$ ou $\mu\overline{\overline{<}}\nu$, car, dans le second cas, le radical pourra être considéré comme s'évanouissant par un facteur placé en dehors. Du reste, pour démontrer que $\varphi=0$ est une solution singulière, il a fallu supposer $\mu>1$, c'est-à-dire dans $\psi_1^{\frac{\nu}{\mu}}$, $\mu>\nu$.

Rem. II. — La courbe enveloppe $\psi_1 = 0$ pouvant être considérée comme osculatrice des courbes enveloppées, et le degré d'osculation de deux courbes étant exprimé par le nombre de coefficients différentiels égaux, si on représente par i le degré d'osculation, on doit avoir, en vertu de ce que devient la valeur de $\frac{d^iy}{dx^i}$ écrite plus haut, lorsqu'on y substitue $\frac{\nu}{\mu}$ à $\frac{1}{\mu}$:

$$i-1<\frac{i\nu}{\mu} \quad \text{et} \quad i>\frac{(i+1)\nu}{\mu},$$

d'où :

$$i<\frac{\mu}{\mu-\nu} \quad \text{et} \quad i>\frac{\nu}{\mu-\nu};$$

μ et ν sont des nombres entiers, et l'on a : $\mu>\nu$ et $\mu>1$. Donc : *Le degré d'osculation d'une enveloppe et d'une enveloppée est représenté par le nombre entier placé entre les nombres fractionnaires* $\frac{\mu}{\mu-\nu}$ et $\frac{\nu}{\mu-\nu}$. Ce nombre est évidemment unique, puisque la différence des fractions $\frac{\mu}{\mu-\nu}$ et $\frac{\nu}{\mu-\nu}$ est juste l'unité. Ce nombre sera l'unité si $\nu=1$, c'est-à-dire si la fonction placée sous le radical est une puissance exacte d'un certain degré. Nous supposons toujours $\mu>\nu$ et $\mu>1$.

Par suite d'un théorème connu sur les osculatrices, on obtient cette deuxième propriété de l'enveloppe : *L'enveloppe coupera toutes les enveloppées ou ne fera que les toucher, selon que le nombre entier qui suit immédiatement la fraction* $\frac{\nu}{\mu-\nu}$ *sera un nombre impair ou un nombre pair.*

Le premier cas se présentera toujours lorsque ν sera égal à 1, c'est-à-dire lorsque la fonction placée sous le radical ne sera pas une puissance exacte d'un polynome, puisque le nombre entier consécutif à $\frac{1}{\mu-1}$ est l'unité.

Si $\mu=1$, ce qui suppose $\nu=1$, auquel cas la fonction φ devient la fonction ψ placée en dehors du radical, les deux limites $\frac{\mu}{\mu-\nu}$ et $\frac{\nu}{\mu-\nu}$

deviennent infinies ; l'enveloppe sera donc une osculatrice d'un ordre infini, c'est-à-dire qu'elle se confondra avec l'une des enveloppées.

Lorsque l'équation dérivée est satisfaite par un facteur ψ du radical, si ce facteur ψ est rationnel, la courbe $\psi=0$ ne rencontrera pas les diverses courbes $p-\varpi(x, y)=0$, car pour qu'il y eût un point commun, il faudrait que quelques-uns des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ prissent plusieurs valeurs en ce point, pour lequel on a : $\psi=0$, ce qui ne peut avoir lieu puisque ces valeurs se réduisent à : $\frac{dy}{dx}=A_0, \frac{d^2y}{d^2x}=\frac{dA_1}{dx}, \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2A_2}{dx^2}, \ldots$ dans lesquelles A_0 est rationnel, puisqu'on a :

$$A_0=-\frac{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)},$$

et que ψ est lui-même rationnel. Si l'équation $\psi=0$ était compliquée de radicaux, le théorème précédent ne serait plus vrai.

Supposons enfin $\mu=\nu>1$, alors l'équation $\psi_1=0$ se confondra avec $\psi=0$, et le radical contenu dans la valeur de p disparaîtra; alors non-seulement, comme tantôt, A_0 sera rationnel, mais encore $A_1, A_2, A_3, \ldots$ et, par conséquent, aussi $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ Donc, pour un même point dont les coordonnées satisferont à l'équation $\psi=0$, ces coefficients différentiels n'auront qu'une valeur; donc la courbe $\psi=0$ sera non-seulement isolée, comme dans le cas de $\mu=\nu=1$, mais encore les courbes successives représentées par $p=p_i$ seront toutes isolées et ne se rencontreront pas.

Rem. III. — Lorsqu'une équation différentielle $f(x, y, p)=0$ est algébrique en $x, y, p,$ elle peut, en général, se mettre sous la forme :

$$p=\chi(x, y)+\{\psi(x, y)\}[\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}};$$

et ses solutions singulières seront toutes comprises dans $\varphi=0$, ni-plus ni moins. Dérivons l'équation précédente successivement par rapport à x et par rapport à y, nous aurons :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{d\chi}{dx}\right)+[\varphi(x,y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{\psi(x,y)}{[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{d\chi}{dy}\right)+[\varphi(x,y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)+\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{\psi(x,y)}{[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

ou :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{\mu\,[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}\left(\frac{d\chi}{dx}\right)+\mu\,[\varphi(x,y)]\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+\nu\,[\psi(x,y)]\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\mu\,[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}$$

et :

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{\mu\,[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}\left(\frac{d\chi}{dy}\right)+\mu\,[\varphi(x,y)]\left(\frac{d\psi}{dy}\right)+\nu\,[\psi(x,y)]\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\mu\,[\varphi(x,y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}},$$

valeurs qui deviennent simultanément infinies pour $\varphi=0$; si la fonction φ ne renfermait que x, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ serait nul ; et la dérivée $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ deviendrait seule infinie pour $\varphi=0$; si, au contraire, la fonction φ ne renfermait que y, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ serait nul, et la dérivée $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ deviendrait seule infinie pour $\varphi=0$; maintenant ces dérivées pouvant devenir infinies par d'autres hypothèses que $\varphi=0$, on ne peut pas dire que toute fonction qui rendra infinie l'une ou l'autre des dérivées $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)$, ou toutes les deux, soit nécessairement une solution singulière.

Mettons actuellement l'équation qui donne la valeur de p sous la forme :

$$f=[p-\chi(x,y)]^{\mu}-[\psi(x,y)]^{\mu}\cdot[\varphi(x,y)]^{\nu}=0.$$

Prenons la dérivée de cette équation par rapport à p, nous aurons :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = \mu\,[p - \chi(x, y)]^{\mu-1}.$$

Mais l'équation $\varphi = 0$ donne $p = \chi(x, y)$; elle annulle donc la dérivée $\left(\frac{df}{dp}\right)$. On voit comment ces résultats, qui nous étaient connus, se déduisent de la théorie de M. Timmermans.

Nous allons faire voir aussi par cette théorie que la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $\varphi = 0$. En effet, dérivons complétement la valeur de p, nous aurons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dy}\,p + [\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) p\right\}$$
$$+ \frac{\nu\,[\psi(x, y)]}{\mu\,[\varphi(x, y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}} \cdot \left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) p\right\},$$

ou, en substituant à p sa valeur, et réduisant au même dénominateur :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \mu\left\{\left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left(\frac{d\chi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\chi}{dy}\right) \cdot \psi(x, y) \cdot [\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\} \cdot [\varphi(x, y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}} \\ + \mu\left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) \cdot \psi(x, y) \cdot [\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\} \cdot [\varphi(x, y)] \\ + \nu\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) \cdot \psi(x, y) \cdot [\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\} \cdot [\psi(x, y)] \end{array}\right\}}{\mu\,[\varphi(x, y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}.$$

Mais, lorsque l'équation $f(x, y, p) = 0$ est algébrique en x, y, p, toutes les solutions singulières et rien que les solutions singulières sont comprises dans l'équation $\varphi = 0$; d'où $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$ et $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0$. Or ces valeurs donnent à l'expression précédente la forme $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$, ce qui est le théorème de Lagrange.

Exemple. — Appliquons le criterium de M. Timmermans à l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\,[y\pm\sqrt{x^2+y^2-r^2}]}{x^2-r^2}.$$

Nous savons qu'elle est satisfaite par les équations $x^2+y^2-r^2=0$, et $x^2-r^2=0$. Or la première est une solution singulière, puisqu'elle est placée sous le radical qu'elle fait évanouir, tandis que la seconde ne se trouvant sous aucun radical, ne peut être qu'une intégrale particulière.

B. — Criterium de Cauchy.

Ce qui distingue les recherches de Cauchy, c'est qu'elles rattachent les solutions singulières des équations différentielles aux intégrales définies singulières, pour l'évaluation desquelles il a, le premier, donné des règles.

THÉORÈME I. — *Pour décider si une équation donnée* $y=\psi(x)$ *est une intégrale particulière ou une solution singulière de l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx}=\varpi(x, y)$, *il suffit d'examiner si* $z=0$ *est une intégrale particulière ou une solution singulière de l'équation :*

$$\frac{dz}{dx}=\varpi\,[x, \psi(x)+z]-\varpi\,[x, \psi(x)].$$

Dém. — En effet, $y=\psi(x)$ devant, par hypothèse, vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx}=\varpi\,(x, y), \tag{a}$$

on aura :

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=\varpi\,[x, \psi(x)]. \tag{1}$$

Soit d'ailleurs :

$$a=\Pi\,(x, y), \tag{α}$$

l'intégrale générale de la proposée ; en posant, dans l'équation (a), $y=\psi(x)+z$, et en ayant égard à l'équation (1), on aura :

$$\frac{dz}{dx}=\varpi[x, \psi(x)+z]-\varpi[x, \psi[x, \psi(x)], \tag{b}$$

dont l'intégrale générale sera :

$$a=\Pi[x, \psi(x)+z]. \tag{β}$$

Or, on satisfait évidemment à (b) en posant $z=0$; et comme $z=0$ satisfera à l'équation (β) quand $y=\psi(x)$ vérifiera l'équation (α) et seulement dans ce cas, il en résulte que l'équation $y=\psi(x)$ sera une intégrale particulière de l'équation (b), et seulement dans ce cas. Donc, etc.... Ainsi nous avons ramené la question au cas où l'équation dont il s'agit de déterminer la nature est $y=0$; maintenant, il reste à déterminer la nature de l'équation $y=0$, ce qu'on pourra faire immédiatement à l'aide du théorème suivant.

THÉORÈME II. — *Soient α et β deux quantités infiniment petites, dont la seconde est tellement choisie que la fonction $\varpi(x, y)$ conserve constamment le même signe entre les limites $y=\alpha$, $y=\beta$. Pour décider si la valeur $y=0$ satisfait à l'équation $\frac{dy}{dx}=\varpi(x, y)$ comme solution singulière ou comme intégrale particulière, il suffit d'examiner si l'intégrale définie $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ a ou n'a pas une valeur infiniment petite.*

Dém. — 1° Prouvons d'abord que, si $y=0$ satisfait à l'équation $\frac{dy}{dx}-\varpi(x, y)=0$ comme solution singulière, l'intégrale définie $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ a une valeur infiniment petite. A cet effet, soit toujours :

$$a-\Pi(x, y)=0, \tag{α}$$

l'intégrale générale de l'équation :

$$\frac{dy}{dx}-\varpi(x, y)=0. \tag{a}$$

On sait que la condition d'intégrabilité immédiate d'une fonction $du = Mdx + Ndy = 0$ est :

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{M} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{N}.$$

En appliquant cette condition à l'équation (a) et observant que $u = \Pi(x, y)$, d'où $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right)$, $M = -\varpi(x, y)$, $N = 1$, on aura identiquement :

$$\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)}{\varpi(x, y)}.$$

Intégrant les deux membres de cette équation par rapport à y entre les limites α et β, on aura :

$$\Pi(x, \beta) - \Pi(x, \alpha) = -\int_\alpha^\beta \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{\varpi(x, y)}.$$

Et si nous faisons $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \varphi_1(x, y)$ et que nous représentions par θ une fraction comprise entre 0 et 1, nous aurons :

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) \frac{dy}{\varpi(x, y)} = \int_\alpha^\beta \varphi_1(x, y) \frac{dy}{\varpi(x, y)} = \varphi_1[x, \alpha + \theta(\beta - \alpha)] \int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)},$$

et, par suite :

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)} = \frac{\Pi(x, \alpha) - \Pi(x, \beta)}{\varphi_1[x, \alpha + \theta(\beta - \alpha)]}.$$

Mais $y = 0$ étant, par hypothèse, une solution singulière de l'équation proposée, ne peut vérifier l'équation $a = \Pi(x, y)$, c'est-à-dire que la fonction $\Pi(x, 0)$ ne peut avoir une valeur constante et finie ou une valeur constamment infinie. La fonction $\Pi(x, 0)$ doit donc être une fonction finie de la variable x, et sa dérivée $\varphi_1(x, 0) = \frac{d.\,\Pi(x, 0)}{dx}$ se réduira elle-même à une fonction finie de x, ou tout au plus, si la fonction Π est linéaire, à une constante finie différente de zéro. Par conséquent, le rapport :

$$\frac{\Pi(x, \alpha) - \Pi(x, \beta)}{\varphi_1[x, \alpha + \theta(\beta - \alpha)]}$$

s'évanouira pour $\beta = \alpha = 0$; d'où l'on conclut, en admettant la continuité des fonctions $\Pi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ dans le voisinage de $y = 0$, que le rapport dont il s'agit et l'intégrale équivalente à ce rapport, obtiendront, en même temps que les quantités α et β, des valeurs infiniment petites ; ce qu'il fallait prouver.

2° Nous disons, en outre, que si l'intégrale définie $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ obtient une valeur infiniment petite, et si $y = 0$ vérifie l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, $y = 0$ sera une solution singulière de la proposée.

En effet, si l'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ a une valeur infiniment petite, l'intégrale $\int_\alpha^y \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ ne pourra être qu'une fonction finie et déterminée des variables x et y, et il en sera de même de l'intégrale $\int_0^y \frac{dy}{\varpi(x, y)}$, que l'on obtient en substituant, dans la précédente, 0 à la quantité infiniment petite α. Cela posé, soit :

$$\int_0^y \frac{dy}{\varpi(x, y)} = \varpi_1(x, y).$$

Appelons $y = \Pi_1(x, a)$ l'intégrale générale de la proposée $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, et ξ une valeur particulière de x, on aura, d'une part :

$$\frac{d.\Pi_1(x, a)}{dx} = \varpi[x, \Pi_1(x, a)];$$

et, d'autre part :

$$\int_0^y \frac{dy}{\varpi(\xi, y)} = \varpi_1(\xi, y), \quad d_x.\, \varpi_1(\xi, y) = \frac{dy}{\varpi(\xi, y)},$$

$$d_x.\, \varpi_1[\xi, \Pi_1(x, a)] = \frac{d_x.\, \Pi_1(x, a)}{\varpi[\xi, \Pi_1(x, a)]}.$$

Par conséquent :

$$d_x.\, \varpi_1[\xi, \Pi_1(x, a)] = \frac{\varpi[x, \Pi_1(x, a)]}{\varpi[\xi, \Pi_1(x, a)]}\, dx.$$

Appelons maintenant h un accroissement arbitraire de x et désignons par θ un nombre compris entre 0 et 1, on tirera de la dernière égalité :

$$\varpi_1[\xi, \Pi_1(x+h, a)] - \varpi_1[\xi, \Pi_1(x, a)] = h.\, \frac{\varpi[x+\theta h, \Pi_1(x+\theta h, a)]}{\varpi[\xi, \Pi_1(x+\theta h, a)]};$$

puis, en posant $\xi = x + \theta h$, on trouvera, quelles que soient les quantités x, h et a :

$$\varpi_1[x+\theta h, \Pi_1(x+h, a)] - \varpi_1[x+\theta h, \Pi_1(x, a)] = h.$$

Ceci posé, nous disons que $y=0$ est une solution singulière, car si on pouvait la déduire de l'intégrale $y = \Pi_1(x, a)$, en attribuant à la constante a une valeur particulière c, il suffirait de faire $a = c$ pour réduire l'équation précédente à la suivante :

$$h = \varpi_1[x+\theta h, 0] - \varpi_1[x+\theta h, 0] = 0,$$

équation qui ne pourrait subsister, la valeur de h devant rester arbitraire, qu'autant que son second membre, au lieu de se réduire à 0, comme il arrive toujours quand $\varpi_1(x, y)$ désigne une fonction finie, se réduise à $\frac{0}{0}$, ce qui arriverait nécessairement si la fonction $\varpi_1(x, y) = \int_0^y \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ devenait indéterminée ou infinie, ce qui est contre l'hypothèse.

A la vérité, $y=0$ ne vérifie l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ que dans le cas où la fonction $\varpi(x, 0)$ obtient une valeur nulle ou indéterminée ; et comme alors le second membre de l'équation :

$$\varpi_1[\xi, \Pi_1(x+h, a)] - \varpi_1[\xi, \Pi_1(x, a)] = h\frac{\varpi[x+\theta h, \Pi_1(x+\theta h, a)]}{\varpi[\xi, \Pi_1(x+\theta h, a)]}$$

se réduit à $\frac{0}{0}$, il semble qu'on ne devrait pas étendre l'équation :

$$\varpi_1[x+\theta h, \Pi_1(x+h, a)] - \varpi_1[x+\theta h, \Pi_1(x, a)] = h,$$

à une intégrale particulière de la forme $y - \Pi_1(x, c) = 0$; mais pour s'assurer que cette extension est légitime, il suffit d'observer que cette équation subsistant pour toutes les valeurs de a différentes de c ne cessera pas d'être vraie, tandis que, a convergeant vers la limite c, la différence $a - c$ deviendra infiniment petite, d'où il est permis de conclure que cette équation subsistera encore, quand la différence $a - c$ deviendra rigoureusement nulle.

Théorème III. — *Pour décider si l'équation* $y = \psi(x)$ *vérifie, comme solution singulière ou comme intégrale particulière, l'équation* $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, *il suffit d'examiner si la valeur de l'intégrale définie :*

$$\int_\alpha^\beta \frac{dz}{\varpi[x, \psi(x)+z] - \varpi[x, \psi(x)]},$$

ou de l'intégrale équivalente :

$$\int_{\psi(x)+\alpha}^{\psi(x)+\beta} \frac{dy}{\varpi[x, y] - \varpi[x, \psi(x)]}$$

est ou n'est pas infiniment petite, x *étant considéré comme constante, et* α *et* β *désignant deux valeurs infiniment petites de* y *entre lesquelles la fonction* $\varpi(x, y)$ *ne change pas de signe.*

Dém. — Ce théorème n'est que la combinaison des théorèmes I et II ; il est donc vrai au même titre qu'eux.

Corollaire. — Puisque :

$$\frac{1}{\varpi[x, \psi(x) + z] - \varpi[x, \psi(x)]} = \frac{z}{\varpi[x, \psi(x) + z] - \varpi[x, \psi(x)]} \cdot \frac{1}{z},$$

et que l'intégrale singulière $\int_\alpha^\beta \frac{dz}{z}$ a pour valeur $l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, l'intégrale du théorème III peut être remplacée par l'expression :

$$\frac{\zeta}{\varpi[x, \psi(x) + \zeta] - \varpi[x, \psi(x)]}\, l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

ζ désignant une valeur infiniment petite de z comprise entre les limites α et β. Or la quantité $l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ étant indéterminée pour des valeurs infiniment petites de α et de β, cette expression ne pourra devenir infiniment petite qu'autant que le rapport :

$$\frac{\zeta}{\varpi[x, \psi(x) + \zeta] - \varpi[x, \psi(x)]}$$

deviendra lui-même nul ou infiniment petit pour $\zeta = 0$; mais comme ses deux termes deviennent nuls pour $\zeta = 0$, en prenant leurs dérivées par rapport à ζ, la véritable valeur du rapport précédent pour $\zeta = 0$ sera :

$$\frac{1}{\left(\frac{d.\,\varpi(x, y)}{dy}\right)},$$

car dériver par rapport à ζ la fonction $\varpi[x, \psi(x) + \zeta]$, puis faire $\zeta = 0$, c'est la même chose que dériver par rapport à y la fonction $\varpi(x, y)$, puisque d'ailleurs $y = \psi(x)$. Donc, pour que $y = \psi(x)$ puisse vérifier l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ comme solution singulière, il faut que l'expression $\frac{1}{\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)}$ soit nulle ou infiniment petite; ce que nous savons déjà.

Exemple I. — *Décider si* $y = 0$, *qui satisfait à l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = y\, ly$, *en est une solution singulière ou une intégrale particulière.*

Sol. — L'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ se réduit à l'expression indéterminée $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{y\, ly} = l\frac{l\beta}{l\alpha}$. Donc $y = 0$ est une intégrale particulière; ce que nous savions déjà par l'inspection de l'intégrale générale.

Ex. II. — *Décider si* $y = 0$, *qui satisfait à l'équation* $\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx}$, *en est une solution singulière ou une intégrale particulière.*

Sol. — L'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\varpi(x, y)}$ se réduit à l'expression infiniment petite :

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy = 2x^{\frac{1}{2}}\left(\beta^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}}\right);$$

donc $y = 0$ est une solution singulière; c'est ce qui résulte aussi du critérium de M. Timmermans, puisque $y = 0$ est placé sous le radical dans la valeur $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$, et que l'équation $y = 0$, qui fait évanouir le radical, satisfait à cette valeur; l'inspection de l'intégrale générale $y^2 - (a - x)^2 = 0$, conduit à la même conclusion.

Ex. III. — *Soit l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = (y + \sin y)(x + ly)$, *dont l'intégrale générale ne peut être obtenue sous forme finie; il s'agit de décider si l'équation* $y = 0$, *qui satisfait à cette équation différentielle, en est une solution singulière ou une intégrale particulière.*

Sol. — Pour que la fonction comprise sous le signe $\int$ ne change pas de signe entre les limites $y = \alpha$, et $y = \beta$ supposées infiniment petites, il est nécessaire et il suffit que ces deux limites soient de même signe. Supposons cette condition admise, on aura :

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{ly}\right)\left(1 + \frac{\sin y}{y}\right)} \cdot \frac{dy}{y\, ly} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{l\eta}\right)\left(1 + \frac{\sin \eta}{\eta}\right)} \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y\, ly} = \frac{l\left(\frac{l\beta}{l\alpha}\right)}{\left(1 + \frac{x}{l\eta}\right)\left(1 + \frac{\sin \eta}{\eta}\right)},$$

η désignant une valeur de y comprise entre les limites α et β, et, par conséquent, très-voisine de zéro. Or on a sensiblement :

$$1+\frac{x}{l\eta}=1+\frac{x}{l0}=1-\frac{x}{\infty}=1,\quad 1+\frac{\sin\eta}{\eta}=1+\frac{\sin 0}{0}=1+1=2.$$

L'intégrale définie précédente a donc pour valeur approchée l'expression :

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{l\beta}{l\alpha},$$

qui est indéterminée pour des valeurs infiniment petites de α et β. Donc $y=0$ est une intégrale particulière de la proposée.

ARTICLE III. — ÉTANT DONNÉ UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES, Y INTRODUIRE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES OU EN SUPPRIMER.

§ I. — INTRODUCTION DE SOLUTIONS SINGULIÈRES.

« Si les équations primitives singulières ont moins d'étendue que les équations primitives proprement dites, parce qu'elles ne renferment aucune constante arbitraire, on peut les regarder sous un autre point de vue comme plus générales que celles-ci, parce qu'une même équation primitive singulière peut répondre à une infinité d'équations dérivées ; et c'est un problème indéterminé de trouver une équation différentielle qui ait une équation primitive singulière donnée. » Ainsi s'exprime Lagrange, en commençant sa dix-septième des *Leçons sur le calcul des fonctions*. C'est ce problème qui va nous occuper. Nous distinguerons deux cas : celui où l'on donne l'équation différentielle, et celui où l'on donne seulement son intégrale complète.

I. — Premier cas. — *On ne donne pas l'équation différentielle.* — Nous exposerons la solution de Lagrange. Représentons par $F(x, y, a, b)=0$, une équation primitive entre x et y et deux constantes a et b qui dépendent l'une de l'autre par l'équation :

$$\Phi(a, b)=0.$$

L'équation différentielle dont $F(x, y, a, b) = 0$ sera l'intégrale complète, s'obtiendra en éliminant a et b entre les trois équations :

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Or on peut faire cette élimination de la manière suivante : on tire des deux premières équations les valeurs de a et de b en fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$; soient $a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ et $b = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ ces valeurs ; puis on les substitue dans $\Phi(a, b) = 0$. L'équation dérivée sera donc :

$$\Phi\left[\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0.$$

Donc, réciproquement, toute équation dérivée de cette forme aura pour équation primitive $F(x, y, a, b) = 0$, a et b étant des constantes liées par l'équation $\Phi(a, b) = 0$; par conséquent, toute valeur de y en x, qui, satisfaisant à l'équation $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, ne rendra pas les fonctions φ et ψ constantes, ne pourra rentrer dans l'intégrale générale, et sera, par conséquent, une solution singulière. Cela posé, soit $y = X$ une fonction quelconque de x qu'on se propose d'introduire en qualité de solution singulière dans une équation différentielle dont on ne donne que l'équation primitive avec deux constantes arbitraires, de la relation desquelles on peut disposer. En substituant X et $\frac{dX}{dx}$ à y et $\frac{dy}{dx}$ dans les fonctions φ et ψ, elles deviendront de simples fonctions de x, savoir : $a = \varphi_1(x)$ et $b = \psi_1(x)$. En éliminant x entre elles, on aura une relation entre a et b qui sera notre équation $\Phi(a, b) = 0$ de tantôt ; en y substituant pour a et b les fonctions φ et ψ, on aura l'équation dérivée :

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0.$$

Cette équation est évidemment satisfaite pour $y = X$; et comme cette dernière ne rend pas les fonctions φ et ψ constantes, il en résulte qu'elle est une solution singulière de l'équation $\Phi(\varphi, \psi) = 0$. De là la règle :

Pour obtenir l'équation différentielle dont l'équation donnée $y = X$ *est une solution singulière, et dont l'équation* $F(x, y, a, b) = 0$, *également donnée, soit l'intégrale complète,* b *étant une fonction de* a, *il faut : 1° tirer de l'équation* $F = 0$ *et de sa dérivée totale les valeurs de* a *et de* b *en fonction de* x, y, $\frac{dy}{dx}$; *2° substituer dans ces valeurs* X *et* $\frac{dX}{dy}$ *à* y *et* $\frac{dy}{dx}$; *3° éliminer* x *entre les équations obtenues ; 4° puis, dans la relation* $\Phi(a, b) = 0$, *à laquelle on sera ainsi conduit, substituer à* a *et* b *leurs valeurs en* x, y, $\frac{dy}{dx}$; *on aura l'équation différentielle cherchée. Quant à l'intégrale générale de cette équation, on l'obtiendra en éliminant l'une des constantes* a *et* b *entre les deux équations* $F(x, y, a, b) = 0$ *et* $\Phi(a, b) = 0$.

Exemple I. — *Trouver l'équation différentielle dont* $y = Ax + B$ (1) *soit la solution singulière et* $y^2 - ax^2 - b = 0$ *l'intégrale générale,* b *étant une fonction de* a *à déterminer.*

Sol. — En résolvant par rapport à a et b les équations :

$$y^2 - ax^2 - b = 0 \quad \text{et} \quad y\frac{dy}{dx} - ax = 0,$$

on obtient :

$$a = \frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}, \quad b = y^2 - xy\frac{dy}{dx}.$$

Mais l'équation $y - Ax - B = 0$ donne :

$$y = Ax + B,$$

$$y^2 = A^2x^2 + 2AB\,x + B^2,$$

et :

$$y\frac{dy}{dx} = A^2x + AB;$$

d'où :

$$a = A^2 + \frac{AB}{x}, \quad b = AB\,x + B^2;$$

d'où, en éliminant x :

$$(a - A^2)(b - B^2) - A^2 B^2 = 0,$$

ou :

$$ab - B^2 a - A^2 b = 0.$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$\frac{y}{x}\left[y^2 - xy\frac{dy}{dx}\right] - B^2 . \frac{y}{x} . \frac{dy}{dx} - A^2\left[y^2 - xy\frac{dy}{dx}\right] = 0. \tag{2}$$

Quant à son intégrale générale, elle résultera de l'élimination de b entre les équations :

$$y^2 - ax^2 - b = 0 \quad \text{et} \quad ab - aB^2 - bA^2 = 0,$$

élimination qui donne :

$$y^2 - ax^2 - \frac{aB^2}{a - A^2} = 0. \tag{3}$$

Il est aisé de vérifier, de diverses façons, que l'équation (1) est bien réellement une solution singulière de l'équation (2).

Ex. II. — *Trouver l'équation différentielle dont* $y = lx$ (1) *soit une solution singulière, et qui ait pour intégrale générale* $l\left(\frac{2}{x}\right) + ay^2 - b = 0$, b *étant une fonction de* a *qui reste à déterminer.*

Sol. — En tirant les valeurs de a et de b des équations :

$$l\left(\frac{2}{x}\right) + ay^2 - b = 0, \quad \text{et} \quad 2ay\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} = 0,$$

on obtient :

$$a = \frac{1}{2xy\frac{dy}{dx}} \quad \text{et} \quad b = l\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{y}{2x\frac{dy}{dx}}.$$

Mais l'équation $y = lx$ donne : $y = lx$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; donc :

$$a = \frac{1}{2\,lx}, \quad b = l\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{lx}{2} = l\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right),$$

d'où, en éliminant x :

$$4a\left\{ l(2) - b \right\} = 1.$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$x^2\, y \frac{dy^2}{dx^2}\, 2x.\, lx \frac{dy}{dx} + y = 0. \qquad (2)$$

Quant à son intégrale générale, elle proviendra de l'élimination de b entre les équations :

$$l\left(\frac{2}{x}\right) + ay^2 - b = 0, \quad 4a\,[\,l\,(2) - b\,] = 1.$$

Elle est donc :

$$4a\,[\,l\left(\frac{2}{x}\right) + ay^2 - l\,(2)\,] + 1 = 0,$$

ou :

$$4a\,[\,ay^2 - l\,(x)\,] + 1 = 0. \qquad (3)$$

Ex. III. — *Trouver l'équation différentielle qui a pour solution singulière l'équation* y — *sin* x = 0 (1), *et pour intégrale générale cos*² x — ay² + b *sin* x = 0, b *étant une fonction de* x *à déterminer.*

Sol. — En tirant a et b des équations :

$$\cos^2 x - ay^2 + b \sin x = 0,$$

$$-2 \cos x . \sin x - 2\, ay \frac{dy}{dx} + b \cos x = 0,$$

on obtient :

$$a = \frac{\cos x}{y} \cdot \frac{1 + \sin^2 x}{y \cos x - 2 \frac{dy}{dx} \sin x}, \quad b = \frac{2 \cos x . \left[\,y \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x\,\right]}{y \cos x - 2 \frac{dy}{dx} \sin x}.$$

Mais l'équation (1) donne :

$$y = \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x;$$

donc :

$$a = -\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}, \quad b = -\frac{2}{\sin x};$$

d'où, en éliminant x :

$$4\,(a + 1) + b^2 = 0.$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$y \frac{dy^2}{dx^2}\,(1 + \sin^2 x) - (y^2 + 1) \cos x . \left[\,2 \frac{dy}{dx} \sin x - \cos x\,\right] = 0; \qquad (2)$$

quant à son intégrale générale, elle résultera de l'élimination de b entre les équations :

$$\cos^2 x - ay^2 + b \sin x = 0, \quad 4(a+1) + b^2 = 0,$$

ce qui conduit à :

$$(1 + \sin^2 x)^2 + 2a(2 \sin^2 x - y^2 \cos^2 x) + a^2 y^4 = 0. \tag{3}$$

Remarque I. — On peut obtenir d'une manière plus expéditive la relation des constantes a et b. En effet, si dans l'équation $F(x, y, a, b) = 0$ on élimine d'abord y au moyen de la solution singulière ; puisqu'au moyen de la dérivée par rapport à x de celle-ci, on élimine x de l'équation résultante, on aura une équation $\Phi(a, b) = 0$. Quand on a ainsi la relation de a à b, on en tire $b = \chi(a)$, ce qui change l'équation $F(x, y, a, b) = 0$ en $F(x, y, a, \chi) = 0$; enfin, en éliminant a entre cette dernière équation et sa dérivée complète, on obtient l'équation différentielle cherchée.

Reprenons l'exemple III. — En éliminant d'abord y entre les équations :

$$\cos^2 x - ay^2 + b \sin x = 0, \quad \text{et} \quad y = \sin x,$$

on a :

$$\cos^2 x - a \sin^2 x + b \sin x = 0 ;$$

d'où :

$$\cos x \,[b - 2(a+1) \sin x] = 0 ;$$

éliminant x entre ces deux dernières équations, il vient :

$$\sin x = \frac{b}{2(a+1)},$$

et, par suite :

$$4(a+1) + b^2 = 0.$$

De cette dernière équation, on tire $b = 2\sqrt{a+1}\sqrt{-1}$, valeur qui, substituée dans :

$$\cos^2 x - ay^2 + b \sin x = 0,$$

donne, après qu'on a élevé au carré pour faire disparaître les imaginaires :

$$4 \sin x \cos x \,[1 + \sin^2 x + 2a + ay^2] + ay\,[3ay^2 - 4\cos^2 x] \frac{dy}{dx} = 0.$$

On aura ainsi :

$$y\,\frac{dy^2}{dx^2}\,(1+\sin^2 x)-(y^2+1)\cos x\,[2\,\frac{dy}{dx}\sin x-\cos x]=0. \qquad (2)$$

Rem. II. — Il résulte de l'analyse que nous avons exposée d'après Lagrange, que l'on doit choisir la relation en x, y, a, b de telle manière que les valeurs de a et b qu'on tire de cette équation et de sa dérivée complète, ne deviennent ni l'une ni l'autre constantes, lorsqu'on y introduit les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ tirées de la primitive singulière donnée.

Rem. III. — La même analyse nous montre qu'on peut trouver autant d'équations différentielles qu'on veut, ayant toutes pour solution singulière une même équation primitive donnée. Il suffit, pour cela, de prendre différentes équations primitives en x, y, a, b.

Ainsi, si l'on demandait deux équations différentielles ayant la même solution singulière, $y-\sin x=0$, on prendrait arbitrairement deux équations en x, y, a et b, telles que les suivantes :

$$\cos^2 x-ay^2+b\sin x=0 \quad \text{et} \quad y+a\cos x-b=0;$$

et, en opérant sur ces équations, comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera pour première équation différentielle :

$$y\,\frac{dy^2}{dx^2}(1+\sin^2 x)-(y^2+1)\cos x.\,[2\,\frac{dy}{dx}\sin x-\cos x]=0,$$

ayant pour intégrale générale :

$$(1+\sin^2 x)^2+2a\,(2\sin^2 x-y^2\cos^2 x)+a^2y^4=0,$$

et pour seconde équation différentielle :

$$\left[\frac{dy^2}{dx^2}-y^2+1\right]\tan g\,x-2y\,\frac{dy}{dx}=0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$y+a\cos x-\sqrt{a^2+1}=0.$$

Rem. IV. — Une même équation primitive en x, y, a et b, pourra donner telle équation primitive singulière qu'on voudra, suivant la relation qu'on établira entre les constantes a et b. Seulement, pour que l'on obtienne une solution singulière, il faut que la relation établie arbitrairement entre a et b soit telle, qu'en substituant la valeur qu'on en tire pour b en fonction de a, dans l'équation en x, y, a et b, donnée sous forme rationnelle et entière, l'équation résultante, rendue aussi rationnelle et entière, renferme a avec un exposant différent de l'unité.

Exemple. — Prenons l'équation $a \sin x - b \cos x - y = 0$, et établissons premièrement entre a et b la relation $a^2 + b^2 = 1$. De l'équation :

$$a \sin x - b \cos x - y = 0;$$

et de

$$a \cos x + b \sin x - \frac{dy}{dx} = 0,$$

qui est la dérivée complète de la précédente, on tire :

$$a = y \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x,$$

$$b = \frac{dy}{dx} \sin x - y \cos x.$$

Ces valeurs de a et de b, substituées dans la relation $a^2 + b^2 = 1$, fournissent l'équation différentielle :

$$y^2 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1,$$

dont l'intégrale générale est :

$$a \sin x - (1 - a^2)^{\frac{1}{2}} \cos x - y = 0,$$

et dont la solution singulière est :

$$y^2 - 1 = 0.$$

Deuxièmement, établissons entre a et b la relation $ab = 1$; en y substituant les valeurs de a et de b trouvées plus haut, on obtiendra l'équation différentielle :

$$\left[\frac{dy^2}{dx^2} - y^2\right] \sin x . \cos x + y \frac{dy}{dx} [\sin^2 x - \cos^2 x] = 0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$a^2 \sin x - \cos x - ay = 0,$$

et la solution singulière :

$$y^2 + 4 \sin x \cos x = 0.$$

Ainsi, la même équation $a \sin x - b \cos x - y = 0$ nous a fourni les deux solutions singulières $y^2 - 1 = 0$ et $y^2 + 4 \sin x \cos x = 0$, selon qu'on a lié a et b par la relation $a^2 + b^2 = 1$, ou par la relation $ab = 1$. Si, entre a et b, on avait établi la relation $a + b = 1$, l'équation différentielle résultante :

$$\frac{dy}{dx}(\sin x + \cos x) + y(\sin x - \cos x) - 1 = 0,$$

n'aurait pas eu de solution singulière; car, en substituant la valeur $b = 1 - a$ dans l'équation $a \sin x - b \cos x - y = 0$, l'équation résultante $a(\sin x + \cos x) - y - \cos x = 0$, qui est l'intégrale générale de l'équation différentielle que nous venons d'obtenir, renferme a au premier degré seulement.

Rem. V. — Les éliminations que nécessite la solution du problème qui nous occupe actuellement, peuvent ne pouvoir s'effectuer ; et cela arrivera, en général, si les équations entre lesquelles elles doivent se faire sont des équations algébriques de degré supérieur ou des équations transcendantes.

Rem. VI. — Nous avons toujours supposé, dans ce paragraphe, que les solutions singulières renfermaient à la fois les variables x et y. Or il pourrait se faire qu'elles ne renfermassent que l'une de ces variables. Si elles ne contenaient que y, le procédé général ne souffrirait aucune modification. Si elles ne renfermaient que x, il faudrait, dans l'équation en x, y, a et b, regarder x comme fonction de y, et procéder comme dans le cas général.

EXEMPLE I. — *Trouver l'équation différentielle dont* $a\,l\left(\frac{y}{x}\right) - bx = 1$ *soit l'intégrale générale,* b *étant une fonction de* a *à déterminer ; et dont* $y - 1 = 0$ *soit la solution singulière.*

Sol. — De l'équation :

$$a\, l\left(\frac{y}{x}\right) - bx = 1,$$

et de sa dérivée complète :

$$a\,\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{xy} - b = 0,$$

on tire :

$$a = \frac{1}{l\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} + 1}, \quad b = \frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{xy\left[l\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1\right] - x^2\dfrac{dy}{dx}}.$$

Mais de $y - 1 = 0$, on tire : $y = 1$, $ly = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$; donc :

$$a = \frac{1}{1 - lx}, \quad b = -\frac{1}{x(1 - lx)};$$

d'où, en éliminant a et b, on tire :

$$be^{\frac{a-1}{a}} + a = 0.$$

L'équation différentielle cherchée est donc d'un degré infini, savoir :

$$\left[x\frac{dy}{dx} - y\right] e^{l\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}} + xy = 0,$$

ou :

$$\left[x\frac{dy}{dx} - y\right] e^{\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}} + y^2 = 0,$$

ou :

$$\left[x\frac{dy}{dx} - y\right]\left[1 + \frac{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{1} + \frac{\dfrac{x^2}{y^2}\cdot\dfrac{dy^2}{dx^2}}{1.2} + \frac{\dfrac{x^3}{y^3}\cdot\dfrac{dy^3}{dx^3}}{1.2.3} + \ldots\right] + y^2 = 0. \qquad (a)$$

Son intégrale générale est :

$$a\, l\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{ax}{e^{\frac{a-1}{a}}} = 1,$$

ou :

$$e^{\frac{a-1}{a}}\left[a\, l\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right] + ax = 0. \qquad (b)$$

On peut vérifier que l'équation (a) a pour solution singulière $y - 1 = 0$. En effet, prenons la dérivée partielle de (b) par rapport à a, nous aurons, en multipliant tout par a^2 :

$$e^{\frac{a-1}{a}}\left[a\,l\left(\frac{y}{x}\right)-1\right]+a^2\,e^{\frac{a-1}{a}}\,l\left(\frac{y}{x}\right)+a^2\,x=0,$$

ou, en ajoutant et retranchant $ae^{\frac{a-1}{a}}$ du premier membre :

$$e^{\frac{a-1}{a}}\left[a\,l\left(\frac{y}{x}\right)-1\right]+ae^{\frac{a-1}{a}}\left[a\,l\left(\frac{y}{x}\right)-1\right]+a^2\,x+ae^{\frac{a-1}{a}}=0,$$

ou :

$$(a+1)\,e^{\frac{a-1}{a}}\left[a\,l\left(\frac{y}{x}\right)-1\right]+a^2\,x+ae^{\frac{a-1}{a}}=0.$$

Maintenant, si nous retranchons de cette équation l'intégrale générale (b) multipliée au préalable par $a+1$, nous aurons :

$$e^{\frac{a-1}{a}}=x, \qquad (\alpha)$$

d'où, en prenant les logarithmes hyperboliques de chaque membre :

$$a=\frac{1}{1-lx}. \qquad (\beta)$$

En substituant les valeurs (α) et (β) dans (b), et réduisant, on obtient :

$$l\,(y)=0\,;$$

d'où :

$$y-1=0,$$

qui est la solution singulière donnée. On voit que, dans l'exemple actuel, la recherche de la solution singulière était assez difficile, parce que l'élimination de a, qui devait y conduire, avait lieu entre deux équations transcendantes. Cet exemple est encore remarquable à d'autres égards, entre autres parce qu'on y trouve, sous forme finie, l'intégrale générale d'une équation différentielle de degré infini.

Ex. II. — *Trouver l'équation différentielle dont la solution singulière est* $2\cos x - 1 = 0$, *et dont l'intégrale générale est* $\cos x + y\,(ay - b) = 0$, b *étant une fonction de* a *qui reste à déterminer.*

Sol. — En résolvant par rapport à a et à b l'équation :

$$\cos x + y\,(ay + b) = 0,$$

et sa dérivée complète (x est regardé comme fonction de y) :

$$-\sin x\,\frac{dx}{dy} + 2ay - b = 0,$$

on trouve :

$$a = \frac{\cos x}{y^2} - \frac{\sin x}{y}\cdot\frac{dx}{dy}, \quad b = \frac{2\cos x}{y} - \sin x.\,\frac{dx}{dy};$$

mais l'équation $2\cos x - 1 = 0$ donne : $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\frac{dy}{dx} = 0$; donc :

$$a = \frac{1}{2y^2}, \quad b = \frac{1}{y};$$

la relation cherchée de a à b est donc $2a = b^2$, par conséquent, l'équation différentielle cherchée est :

$$2\cos x\,[2 - \cos x]\,\frac{dy^2}{dx^2} + 2y\sin x\,(1 - 2\cos x)\,\frac{dy}{dx} + y^2\sin^2 x = 0,$$

et son intégrale générale est :

$$\cos x + ay^2 - y\sqrt{2a} = 0.$$

II. — Deuxième cas. — *On donne l'équation différentielle.* — Poisson a donné la méthode suivante (page 79 de son Mémoire), pour résoudre le problème qui fait l'objet de ce paragraphe.

Soit une équation différentielle du premier ordre à deux variables :

$$\frac{dy}{dx} = \varpi\,(x, y); \tag{1}$$

et soit $u = 0$ la fonction de u et de y, ou de l'une de ces variables seulement, qu'on veut introduire dans l'équation différentielle, de façon à ce qu'elle y satisfasse comme solution singulière. En multipliant l'équation proposée par u, on aura :

$$udy - u.\,\varpi\,(x, y)\,dx = 0. \tag{2}$$

Appelons maintenant z une fonction de x et de y, telle que sa dérivée partielle, par rapport à y, soit u, on aura :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) dy = udy,$$

d'où :

$$z = \int udy + X,$$

X étant une fonction arbitraire de x. En dérivant cette dernière équation partiellement, par rapport à x, on aura :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}.$$

La différentielle totale de z est donc :

$$dz = udy + \left[\int \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx,$$

d'où l'on tire :

$$udy = dz - \left[\int \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx,$$

valeur qui, substituée dans (2), donne :

$$dz - \left[u.\varpi(x, y) + \int \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx = 0. \qquad (3)$$

Maintenant, si on intègre la différentielle totale de z et qu'on en tire ensuite la valeur de y en x, pour la substituer dans (3), on aura une équation à deux variables x et z, qui sera satisfaite par toutes les équations primitives qui satisfaisaient à la proposée, et, en outre, par la solution singulière $u = 0$. En effet, soit $y = \varphi(x, a)$ l'intégrale générale de l'équation $dy - \varpi(x, y)\, dx = 0$; et appelons $z = \psi(x, y)$ la valeur de z en x et y déduite par l'intégration de :

$$dz = udy + \left[\int \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx.$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle en z et x s'obtiendra en substituant dans $z = \psi(x, y)$ la valeur $y = \varphi(x, a)$; elle sera donc :

$$z = \psi [x, \varphi(x, a)].$$

Mais pour avoir la solution singulière de l'équation différentielle transformée, il faut prendre la dérivée partielle de ψ par rapport à a, et l'égaler à zéro ; on aura donc :

$$\left(\frac{d\psi}{da}\right) = \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0;$$

mais $\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = u$; donc $\left(\frac{d\psi}{da}\right) = u\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$. Cette équation se partage en deux autres : $u = 0$ et $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$. La première donne la solution singulière $u = 0$ qu'on a choisie arbitrairement; et si on élimine a entre la seconde et $y = \varphi(x, a)$, on aura de même les solutions singulières de la proposée, si elle en avait : c'est ce qu'il s'agissait de démontrer. En résumé donc :

Pour introduire dans une équation différentielle donnée, une solution singulière u $= 0$, *choisie arbitrairement, il faut résoudre l'équation différentielle par rapport à* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, *intégrer la différentielle totale :*

$$dz = udy + \left[\int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx,$$

en tirer la valeur de y *en* x *et* z, *et substituer cette valeur dans l'équation :*

$$dz - \left[u.\varpi(x, y) + \int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx = 0,$$

qui deviendra l'équation cherchée.

Rem. I. — La différentielle totale :

$$dz = udy + \left[\int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx$$

satisfait à la condition d'intégrabilité des fonctions explicites de deux variables indépendantes, car on a :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d\left[\int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right]}{dy}\right),$$

attendu que $\frac{dX}{dx}$ ne contient pas y. Cela posé, on obtiendra l'intégrale de dz par la formule :

$$z = \int\left[\int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right] dx + \int\left[u - \frac{d_y \int\left\{\int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \frac{dX}{dx}\right\} dx}{dy}\right] dy,$$

qui se réduit à :

$$z = \int dx \int\left(\frac{du}{dx}\right) dy + \int\left[u - \int\left(\frac{du}{dx}\right) dx\right] dy + X,$$

ou :

$$z = X + \int u dy + \int dx \int\left(\frac{du}{dx}\right) dy - \int dy \int\left(\frac{du}{dx}\right) dx.$$

Exemple I. — *Introduire dans l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = 1$, *la solution singulière* $x - 1 = 0 = u$.

Sol. — On a :

$$z = \int dx \int dy + \int [x - 1 - \int dx] dy + X,$$

ou :

$$z = (x - 1) y + X,$$

d'où :

$$y = \frac{z - X}{x - 1}.$$

L'équation différentielle est donc :

$$\frac{dz}{dx} = x - 1 + \frac{z - X}{x - 1} + \frac{dX}{dx}.$$

On vérifie aisément qu'elle a pour solution singulière $x - 1 = 0$.

Rem. II. — Lorsque la solution singulière qu'on veut introduire ne contient que y, alors la valeur de z se réduit à :

$$z = X + \int u dy.$$

Ex. II. — *Introduire dans l'équation différentielle :*

$$x^2 y \frac{dy^2}{dx^2} - 2x\, lx \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

la solution singulière u $=$ y $-$ 1 $=$ 0.

Sol. — On a :

$$z - X = \frac{y^2 - 2y}{2},$$

d'où :

$$y = 1 + \sqrt{1 + 2(z - X)}.$$

On a encore :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}\left[lx \pm \sqrt{(lx)^2 - y^2}\right].$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dX}{dx} = \frac{\sqrt{1 + 2(z - X)}}{x + \sqrt{1 + 2(z - X)}}\left[lx + \sqrt{(lx)^2 - 2\left\{z - X + 1 + \sqrt{1 + 2(z - X)}\right\}}\right],$$

qui a pour intégrale générale :

$$4a\left[2a\left\{z - X + 1 + 2a\sqrt{1 - 2(z - X)}\right\} - lx\right] + 1 = 0.$$

Ses solutions singulières sont manifestement $1 + 2(z - X) = 0$, qui n'est autre chose que la solution $y - 1 = 0$ qu'il s'agissait d'introduire; et $(lx)^2 - 2\left[z - X + 1 + \sqrt{1 + 2(z - X)}\right] = 0$, qui n'est autre que la solution singulière $y = lx$ qu'avait l'équation différentielle proposée.

Rem. III. — Si la solution singulière à introduire était donnée en x et z, le procédé indiqué ne serait plus applicable, attendu qu'on ne connaît pas *à priori* la composition de z en x et y, et que cette connaissance serait nécessaire pour effectuer les intégrations qui conduisent à la valeur de z. Dans ce cas, on opérera comme suit : *On multipliera l'équation différentielle proposée par* u^k, k *étant* < 1, *et* u = 0 *étant la solution singulière à introduire, on posera ensuite* $\left(\frac{dz}{dy}\right) = u^k$, *équation qu'on intégrera en regardant* z *comme constant, ce qui donnera :*

$$\int \frac{dz}{u^k} = y + X,$$

d'où :

$$y = \int \frac{dz}{u^k} - X,$$

et :

$$dy = d_z \int \frac{dz}{u^k} + d_x \int \frac{dz}{u^k} - \frac{dX}{dx}\, dx,$$

ou :

$$dy = \frac{dz}{u^k} + d_x \int \frac{dz}{u^k} - \frac{dX}{dx}\, dx;$$

ces valeurs substituées dans l'équation différentielle proposée, multipliée au préalable par u^k, *fourniront l'équation différentielle cherchée.*

Ex. III. — *Introduire dans l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = 1$, *la solution singulière* $z - mx = 0$.

Sol. — En multipliant l'équation proposée par $(z - mx)^k$, $k < 1$, on a d'abord :

$$(z - mx)^k\, dy = (z - mx)^k\, dx.$$

Ensuite, en intégrant relativement à y et z seuls, l'équation :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = (z - mx)^k,$$

on a :

$$\frac{(z - mx)^{1-k}}{1 - k} = y + X,$$

d'où :

$$dy = \frac{dz - mdx}{(z - mx)^k} - dX.$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$\frac{dz}{dx} - m - (z - mx)^k \left[\frac{dX}{dx} - 1\right] = 0,$$

et son intégrale générale :

$$\frac{(z - mx)^{1-k}}{1 - k} - X - x = a.$$

Rem. IV. — Il est une classe d'équations différentielles du premier ordre à deux variables qui ont toujours une solution singulière : ce sont, comme nous le savons déjà, les équations de la forme :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{a}$$

ψ désignant une fonction quelconque de $\frac{dy}{dx}$ seul. En effet, en dérivant l'équation (a), nous obtenons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \psi'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

ou :

$$\left[\psi'\left(\frac{dy}{dx}\right) + x\right]\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{b}$$

équation à laquelle on satisfait en posant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = a. \tag{α}$$

Si on élimine $\frac{dy}{dx}$ entre (a) et (α), on obtient l'intégrale générale :

$$y = ax + \psi(a);$$

équation d'une ligne droite qui se déplace sur le plan xy quand on fait varier la constante arbitraire a. On satisfait encore à l'équation (b) en posant :

$$\psi'(p) + x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p. \tag{β}$$

Or si on élimine p entre (a) et (β), on aura une relation entre x et y qui satisfera à l'équation (a), mais qui n'en sera pas l'intégrale générale, puisqu'elle ne contiendra pas de constante arbitraire, et qui n'en sera pas non plus une intégrale particulière, puisqu'on tire de (β) une valeur $p = \chi\,(x)$, incompatible avec la valeur $p = a$ tirée de l'intégrale générale. Cette équation résultante en x et y, savoir : $\psi'\,[\chi\,(x)] + x = 0$, est donc une solution singulière de l'équation différentielle proposée. D'ailleurs, l'élimination de p entre les équations :

$$\psi'\,(p) + x = 0 \quad \text{et} \quad y - px - \psi\,(p) = 0,$$

donnera le même résultat que l'élimination de a entre l'intégrale générale :

$$y = ax + \psi\,(a),$$

et sa dérivée partielle relative à a, savoir :

$$\psi'\,(a) + x = 0.$$

Or cette dernière élimination donne toujours des solutions singulières, quand elle conduit à une valeur variable de a, ce qui a toujours lieu ici. On voit donc que *les équations :*

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ont toujours une solution singulière :

$$\psi'\,[\chi\,(x)] + x = 0;$$

ce qu'il fallait prouver.

Ex. IV. — Soit l'équation :

$$y = x\frac{dy}{dx} + n\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou :

$$y = px + n\sqrt{1 + p^2}.$$

Cette équation est de la forme : $y = px + \psi\,(p)$; elle a donc nécessairement une solution singulière. En effet, en la différentiant, on trouve, réduction faite :

$$\left(x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}}\right) dp = 0,$$

équation qui se décompose en deux facteurs :

$$x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \quad \text{et} \quad dp = 0.$$

L'équation $dp = 0$ donne $p = a$; l'intégrale générale de la proposée est donc :

$$y = ax + n\sqrt{1+a^2}.$$

L'équation :

$$x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

donne :

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1+p^2} = -\frac{np}{x} = \mp \frac{n}{\sqrt{n^2 - x^2}},$$

valeurs qui, substituées dans l'équation proposée, donnent la solution singulière $y^2 + x^2 - n^2 = 0$.

§ II. — SUPPRESSION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre à deux variables comporte une solution singulière, il y a deux moyens de la transformer en une autre qui ne renferme plus cette solution. Ces deux moyens sont la transformation des variables et la différentiation. Le premier est dû à Poisson ; le second, à Lagrange.

I. — Théorème de Poisson.

On peut supprimer les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, en opérant dans cette équation un changement convenable de variables.

Il peut se présenter deux cas : ou on ne connaît pas l'intégrale générale, ou bien on la connaît.

A. Premier cas. — *On ne connaît pas l'intégrale générale.* — Soit $y = X$ la solution singulière qu'il s'agit de supprimer dans l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \varpi(x,y)$; puisque celle-ci est satisfaite par $y = X$, nous aurons :

$$\frac{dX}{dx} = \varpi(x, X),$$

et, partant :

$$\frac{d(y - X)}{dx} = \varpi(x, y) - \varpi(x, X).$$

Posons $y - X = z$, d'où $y = X + z$, l'équation précédente deviendra :

$$\frac{dz}{dx} = \varpi(x, X + z) - \varpi(x, X);$$

et, en développant :

$$\frac{dz}{dx} = A_1 z^{\alpha_1} + A_2 z^{\alpha_1 + \alpha_2} + A_3 z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \ldots + A_i z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_i} + \ldots,$$

les exposants α_i étant positifs, et les coefficients A_i étant des fonctions de x. Faisons :

$$\varphi = A_1 + A_2 z^{\alpha_2} + A_3 z^{\alpha_2 + \alpha_3} + \ldots + A_i z^{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_i} + \ldots,$$

φ désignant une fonction des variables x et z, qui n'acquiert ni une valeur nulle, ni une valeur infinie pour $z = 0$. Il viendra : $\frac{dz}{dx} = z^{\alpha_1} \varphi$,

α_1 étant < 1, puisque $y = X$ est, par hypothèse, une solution singulière de l'équation différentielle proposée. La dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{dz}{dx} - z^{\alpha_1} \varphi = 0,$$

ou :

$$z^{\alpha_1}\left[z^{-\alpha_1}\frac{dz}{dx}-\varphi\right]=0.$$

Or si l'on fait :

$$z^{-\alpha_1}\frac{dz}{dx}=\frac{du}{dx},$$

d'où, en intégrant :

$$\frac{z^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1}=u \quad \text{et} \quad z=(1-\alpha_1)\,u^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$

il viendra :

$$\varphi=A_1+A_2(1-\alpha_1)^{\alpha_2}u^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}+\ldots+A_i(1-\alpha_1)^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i}.u^{\frac{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i}{1-\alpha_i}}+\ldots;$$

et si l'on représente cette dernière expression de φ par Φ, on aura définitivement :

$$(1-\alpha_1)^{\alpha_1}.\,u^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\left[\frac{du}{dx}-\Phi\right]=0.$$

C'est l'équation différentielle donnée mise sous une autre forme. Comme $\alpha_1 < 1$, elle se décompose d'elle-même en deux autres :

$$u=0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx}-\Phi=0.$$

La première renferme la solution singulière, car $u=0$ emporte $z=0$, et, par suite, $y-X=0$. La seconde, au contraire, ne peut être satisfaite par cette solution singulière, puisque φ et partant Φ ne s'évanouit pas pour $u=0$. L'équation $\frac{du}{dx}-\Phi=0$ est donc la transformée cherchée.

B. Deuxième cas. — *On connaît l'intégrale générale*. — On pourra alors employer la transformation de la page 1045.

Exemple I. — *Supprimer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Solution. — 1° Supposons, d'abord, qu'on ne connaisse pas l'intégrale générale. En déterminant la solution singulière de la proposée, on trouve $x^2 - y = 0$. On fera donc : $x^2 - y = z$, d'où $\frac{dz}{dx} = 2x - \frac{dy}{dx}$; mais l'équation différentielle proposée donne :

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \sqrt{4x^2 - 4y} = 2x \pm 2\sqrt{z}.$$

Donc :

$$\frac{dz}{dx} = \pm 2z^{\frac{1}{2}}.$$

Posons :

$$u = 2z^{\frac{1}{2}},$$

d'où :

$$z = \frac{u^2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{u}{2} \cdot \frac{du}{dx},$$

on aura :

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{du}{dx} \pm u = 0,$$

et, en supprimant le facteur u :

$$\frac{du}{dx} \pm 2 = 0,$$

équation qui ne renferme plus de solution singulière.

2° Supposons qu'on donne l'intégrale générale $y - 2ax + a^2 = 0$; en y changeant a en z, on aura : $y - 2xz + z^2 = 0$, d'où $\frac{dy}{dz}\,dz = 2(x - z)\,dz$. La proposée devient donc $2(x - z)\frac{dz}{dx}\,dx = 0$, et en supprimant le facteur $2(x - z)$, l'équation résultante $dz = 0$, ne renferme plus de solution singulière.

Ex. II. — *Supprimer les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$xdx + ydy - dy\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} = 0.$$

Sol. — La solution singulière de cette équation est : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Or, en posant :

$$x^2 + y^2 - r^2 = z^2,$$

on en tire :

$$z \frac{dz}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}.$$

Et, puisque la proposée peut se mettre sous la forme :

$$x + y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \sqrt{x^2 + y^2 - r^2},$$

en y substituant les valeurs précédentes, elle devient :

$$z \frac{dz}{dx} = z \quad \text{ou} \quad z\,(dz - dx) = 0.$$

Elle se décompose donc alors en deux : $z = 0$, qui n'est autre chose que la solution singulière $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; et $dz - dx = 0$, équation différentielle à laquelle la solution singulière ne satisfait plus.

II. — Théorème de Lagrange.

On peut supprimer les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, en différentiant cette équation mise au préalable sous une forme convenable.

Il suffit, pour cela, $F(x, y, a) = 0$ étant l'intégrale générale de la proposée, et $a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ étant la valeur de a tirée de la dérivée complète et immédiate de $F = 0$, il suffit, disons-nous, de mettre la proposée sous la forme :

$$F\left[x, y, \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0.$$

(*Voir* pag. 1049 et seq.)

Rem. — Laplace a remarqué (*Mém. de l'Acad. des sc. de Paris*, année 1772, 1^{re} partie, p. 351), qu'il est une classe d'équations qui, par suite de leur forme, sont entièrement dépourvues de solution singulière. Ce sont les équations qui, mises sous la forme $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$, sont rationnelles par rapport à x et à y. C'est ce qui résulte immédiatement du théorème de M. Timmermans (*voir* pag. 1068 et seq.). Pour déduire cette conséquence de sa théorie, Laplace remarque que toutes les solutions singulières qui renferment y sont réductibles à la forme $y - X = 0$, X désignant une fonction de x et de constantes, ou une fonction de constantes seulement, de sorte que si l'on fait $y - X = s$, l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ se transformera dans la suivante : $\frac{ds}{dx} = s^{\mu} \cdot \varphi$, μ étant > 0. Or, pour que $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ puisse avoir une solution singulière, il faut que μ soit plus petit que 1 ; mais comme ϖ est, par hypothèse, rationnelle, μ sera nécessairement un nombre entier égal à 1 ou > 1 ; ainsi l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ n'aura pas de solution singulière renfermant y; on prouverait de même, en regardant x comme fonction de y, que l'équation $\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$ ne peut avoir de solution singulière renfermant x. Ainsi : *Lorsque* ϖ (x, y) *est une fonction rationnelle de* x *et de* y, *l'équation* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \varpi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *ne peut avoir de solution singulière.*

Il résulte de là que les équations de la forme :

$$\frac{dy^n}{dx^n} + A_1 \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 \cdot \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n = 0,$$

$A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ désignant des constantes, n'ont pas de solution singulière, puisque, ne renfermant ni x ni y, la valeur qu'on en tirerait pour $\frac{dy}{dx}$ ne pourrait non plus renfermer ni x, ni y.

Remarque générale sur cet article. — Nous savons que lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle est une fonction algébrique, toute solution singulière représente une ligne de contact des courbes contenues dans l'intégrale générale. Ces dernières sont entièrement déterminées de forme et de position, puisque leur équation commune renferme un paramètre constant dans une même courbe et qui ne varie qu'en passant d'une courbe à l'autre. La ligne de contact est donc aussi entièrement déterminée. C'est pourquoi, au premier abord, il paraît difficile de comprendre comment il se fait qu'on puisse supprimer ou introduire, à volonté, une solution singulière dans une équation différentielle donnée. C'est ce fait que nous allons tâcher d'expliquer : mais, pour cela, il est nécessaire de nous rappeler qu'on introduit et qu'on supprime des solutions singulières par la *transformation des variables;* et qu'on en supprime aussi par la *différentiation.*

Examinons d'abord l'effet du changement de variables. Lorsque dans l'intégrale générale d'une équation différentielle donnée, on substitue à la place de l'une des variables y une fonction non linéaire de l'autre variable x et d'une nouvelle variable z, et que l'on construit cette intégrale transformée, on a une suite de courbes différentes de celles qui correspondent à l'intégrale en x et y. Or les courbes correspondantes à l'intégrale en x et y pourraient avoir une ligne de contact, et les courbes correspondantes à l'intégrale en x et z ne pas en avoir ; alors la solution singulière correspondante à la ligne de contact aura disparu. Réciproquement, il se sera introduit une solution singulière, lorsque les courbes qui correspondaient à l'intégrale en x et y n'avaient pas de ligne de contact, et que les nouvelles courbes obtenues par la substitution de la variable z à la variable y en ont une.

Examinons maintenant l'effet de la différentiation. Une équation différentielle à deux variables a d'autant plus de généralité que son ordre est plus élevé, puisque l'intégrale complète renferme un nombre de constantes arbitraires marqué par l'ordre de l'équation différentielle à laquelle elle satisfait. Or la différentiation effectuée sur une équation différentielle du premier ordre, dans le but d'en faire disparaître les solutions singulières, conduit à une équation différentielle du second ordre, dont l'intégrale complète renferme, par conséquent, deux constantes arbitraires. Les courbes représentées par cette intégrale complète ne sont déterminées de forme et de position que lorsqu'on a assigné à l'un des paramètres une valeur déterminée. On voit donc qu'on peut disposer de ce paramètre, pour donner aux courbes représentées par l'intégrale complète des positions telles qu'elles cessent d'avoir une ligne de contact ou enveloppe, si elles en avaient d'abord une.

Appuyons de deux exemples, empruntés à Poisson, les considérations précédentes sur le changement de variables.

Exemple I. — *Construire l'équation* $y - 2ax + a^2 = 0$, *par des courbes dont la ligne de contact soit une droite de direction donnée et passant par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire ayant pour équation* $y - mx = 0$.

Solution. — La variable x doit être prise comme abscisse, a comme paramètre variable; c'est la fonction de x et de y qui doit servir d'ordonnée qui est ici à trouver. Si l'on prenait y pour ordonnée, l'équation $y - 2ax + a^2 = 0$ représenterait un système de lignes droites, ayant pour ligne de contact la parabole $y = x^2$. Pour résoudre le problème, il faudra donc effectuer un premier changement de variables, pour délivrer l'équation différentielle, dont $y^2 - 2ax + x^2 = 0$ est l'intégrale générale, de sa solution singulière $y = x^2$, puis un second changement de variables, pour introduire dans la transformée la solution singulière $u - mx = 0$.

L'équation différentielle commune à toutes les droites du système $y - 2ax + a^2 = 0$, est $y - x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{dy^2}{dx^2} = 0$; en posant $x^2 - y = z^2$, elle devient $z\,(dz \pm dx) = 0$. L'équation $(dz \pm dx) = 0$ n'a plus de solution singulière, et son intégrale $z = \pm\,(x - a)$, lorsqu'on prend z pour ordonnée, représente deux suites de droites parallèles, faisant avec l'axe des x un angle de 45°, c'est-à-dire des lignes sans enveloppe.

Multiplions l'équation $dz \pm dx = 0$, par $(u - mx)^n$, n étant > 0 et < 1, puis posons $\left(\dfrac{du}{dz}\right) = (u - mx)^n$, d'où l'on tire, en intégrant :

$$(u - mx)^{1-n} = (1 - n)\,z + X(1 - n),$$

X étant une fonction arbitraire de x; on aura, en différentiant complétement cette dernière équation :

$$du - mdx = (u - mx)^n\,dz + (u - mx)^n\,dX;$$

ce qui réduit l'équation différentielle :

$$(u - mx)^n\,dz \pm (u - mx)^n\,dx = 0,$$

à la suivante :

$$du - mdx - (u - mx)^n\,(dX \pm dx) = 0,$$

dont la solution singulière est évidemment $u - mx = 0$, et dont l'intégrale générale :

$$u - mx = [\pm (1 - n)(x - a) + \chi (1 - n)]^{\frac{1-n}{1}}$$

sera construite par une série de courbes ayant pour ligne de contact la droite $u = mx$. Mais, à cause des arbitraires X et n, ces courbes ne sont pas entièrement définies de forme et de position. Le problème proposé peut donc être résolu d'une infinité de manières. Choisissons, entre toutes, celle qui correspond à $X = 0$, et à $n = \frac{1}{2}$. L'intégrale en u et en x devient :

$$u - mx = \frac{(x - a)^2}{4},$$

et représente alors un système de paraboles. Il nous faut maintenant avoir la valeur de u en y et x qui a opéré cette transformation. Or la valeur de z en u et x est d'abord $z = 2\sqrt{u - mx}$; et, par suite, la valeur de y, qui est $y = x^2 - z^2$, devient $y = x^2 - 4(u - mx)$, d'où l'on tire : $u = \frac{x^2 - y + 4mx}{4}$. Ainsi, en prenant x pour abscisse, la fonction $u = \frac{x^2 - y + 4mx}{4}$ pour ordonnée, et a pour paramètre variable, l'équation donnée $y - 2ax + a^2 = 0$, se trouve construite par un système de paraboles ayant pour enveloppe la droite $u = mx$.

Ex. II. — *Construire l'équation* $y = ax + \sqrt{1 + a^2}$ *au moyen d'un système de courbes qui n'aient aucune ligne de contact.*

Sol. — Lorsqu'on prend y pour ordonnée, l'équation $y = ax + \sqrt{1 + a^2}$ représente un système de droites toutes situées à la même distance de l'origine des coordonnées, et dont la ligne de contact est le cercle $x^2 + y^2 = 1$. La question proposée revient donc à délivrer l'équation différentielle commune à ce cercle et à ces droites, savoir :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

de sa solution singulière $x^2 + y^2 = 1$. Pour cela, résolvons l'équation différentielle précédente par rapport à $\frac{dy}{dx}$, puis divisons les deux membres par $(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}}$, nous aurons :

$$\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=\frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{-xy\pm\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right].$$

Prenons une fonction de x et de y, telle que :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)dy=\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

La fonction :

$$z=l\,[y+\sqrt{x^2+y^2-1}]$$

satisfait à cette condition ; on en tire :

$$dz=\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2-1}\,[y+\sqrt{x^2+y^2-1}]},$$

$$y=\frac{e^z+(1-x^2)\,e^{-z}}{2},\quad \sqrt{x^2+y^2-1}=\frac{e^z+(x^2-1)\,e^{-z}}{2};$$

et l'équation différentielle précédente se change en la suivante :

$$dz=\frac{\pm\,dx}{1\pm x},$$

dont l'intégrale générale est :

$$z=l\,(1\pm x)+l\,(a+\sqrt{1+a^2}),$$

se construit par deux suites de logarithmiques qui n'ont pas d'enveloppe.
La fonction :

$$z=l\,[y+\sqrt{x^2+y^2-1}]$$

est celle qui résout le problème. On aurait pu en trouver d'autres.

CHAPITRE II.

Des solutions singulières des équations différentielles à deux variables des ordres supérieurs.

Nous avons vu, dans l'introduction de la section première, qu'aucune solution singulière d'une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables ne peut avoir plus de $n - 1$ constantes arbitraires; que, par conséquent, l'équation différentielle dont cette solution singulière est l'intégrale générale, sans différence, est tout au plus de l'ordre $n - 1$; mais une solution singulière peut renfermer moins de n constantes arbitraires, et, partant, être l'intégrale générale sans différence d'une équation différentielle d'ordre inférieur à $n - 1$; et, de plus, il peut arriver que cette solution singulière qui renferme $n - 1$ arbitraires, et que, partant, l'équation différentielle correspondante à la première ne soit pas contenue dans l'équation différentielle correspondante à la deuxième, quoique l'une et l'autre équation différentielle satisfassent à la proposée. Nous devons donc distinguer parmi les équations différentielles sans constante arbitraire qui satisfont, comme solutions singulières, à la proposée, et qui ne satisfont pas les unes aux autres, celles qui sont de l'ordre $n - 1$, de celles qui sont de l'ordre $n - 2$, de l'ordre $n - 3$, etc. Maintenant, une solution singulière peut avoir à son tour une solution singulière : cette dernière s'appelle *solution singulière double* de la proposée. La solution singulière d'une solution singulière double est dite *solution singulière triple*; et, en général, la solution singulière d'une solution singulière dont le degré de multiplicité est exprimé par $\mu - 1$ est dite *solution singulière* $\mu^{ème}$.

Notation. — Toute équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables sera représentée par :

$$f = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

ou :

$$f = f\,(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0,$$

en faisant :

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = y_2,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = y_3, \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = y_n.$$

Les équations qui satisfont à $f = 0$ comme intégrales générales, seront toujours désignées par la caractéristique F, qui portera, en guise de numéro, un chiffre indiquant le rang de l'intégrale considérée parmi toutes celles du même ordre ; et en guise d'exposant, un chiffre indiquant si l'intégrale est première, deuxième, . . . $n^{ème}$. Ainsi, l'expression :

$$F_i^{(\mu)}\,(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-\mu}, c_1, c_2, c_3, \ldots c_\mu) = 0,$$

désignera la $i^{ème}$ des $\frac{n^{\mu/-1}}{\mu!}$ intégrales générales $\mu^{èmes}$ de la proposée $f = 0$, $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\mu$ désignant les μ constantes arbitraires de cette intégrale. Nous représenterons les solutions singulières de $f = 0$ par la lettre s, à laquelle nous donnerons comme indice le nombre indiquant le degré de multiplicité de la solution considérée. Ainsi, $s_1 = 0$ représentera une quelconque des solutions singulières simples de $f = 0$, et s_ν une quelconque de ses solutions singulières $\nu^{èmes}$.

Cela posé, nous partagerons ce chapitre II en deux sous-chapitres, le premier consacré aux solutions singulières simples, le deuxième aux solutions singulières multiples.

SOUS-CHAPITRE I.

SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU $n^{ème}$ ORDRE A DEUX VARIABLES.

Nous avons, comme dans le chapitre I, trois problèmes à résoudre :

1° Déterminer des équations (aux différentielles ou en termes finis) parmi lesquelles soient comprises toutes les solutions singulières simples de la proposée ;

2° Distinguer les solutions singulières simples des intégrales particulières ;

3° Transformer une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables en une autre qui ait de moins ou de plus que la première des solutions singulières simples données.

ARTICLE I. — DÉTERMINATION D'ÉQUATIONS COMPRENANT TOUTES LES SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES.

Cette détermination peut se faire, *à priori*, soit par les intégrales complètes, soit par l'équation différentielle elle-même ; ou, *à posteriori*, par la méthode des coefficients et des exposants à déterminer.

§ I. — SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES DÉDUITES DES INTÉGRALES COMPLÈTES.

Nous avons à exposer la théorie de Lagrange, applicable, sauf quelques modifications, aux intégrales, sous quelque forme qu'elles se présentent ; puis à étendre aux équations différentielles du $n^{ème}$ ordre à deux variables, la théorie donnée par M. Timmermans pour le premier ordre, et, en général, applicable seulement aux intégrales qui sont algébriques à la fois par rapport à x et à y, aux dérivées successives d'y en x qu'elles contiennent, et aux constantes qu'elles renferment.

I. — Théorie de Lagrange.

A.

Théorème I. — *Toutes les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* n$^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables sont comprises parmi les équations qui résultent de l'élimination de la constante entre une intégrale première de la proposée et la dérivée partielle de cette intégrale relative à la constante et égalée à zéro; ou relative à* x, *ou à* y, *ou à* $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$, *et égalée à l'infini.*

Dém. — Soit, d'après la notation fixée plus haut :

$$F_i^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, c_i) = 0 \qquad (a)$$

la $i^{\text{ème}}$ des intégrales premières de l'équation différentielle :

$$f(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

c_i étant la constante arbitraire qui, éliminée entre l'équation (a) et sa différentielle complète immédiate :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right) dy_1 + \cdots + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) dy_{n-1} = 0, \qquad (b)$$

conduit à l'équation différentielle $f = 0$. Si, au lieu de supposer c_i constante, on la considère comme fonction de $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$, le résultat de l'élimination précédente ne sera pas changé, pourvu que l'équation (b) ne soit pas changée. Or, si on différentie (a) complétement en y faisant varier c_i, on aura :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right) dy_1 + \cdots + \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) dy_{n-1}$$

$$+ \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left[\left(\frac{dc_i}{dx}\right) dx + \left(\frac{dc_i}{dy}\right) dy + \left(\frac{dc_i}{dy_1}\right) dy_1 + \cdots + \left(\frac{dc_i}{dy_{n-1}}\right) dy_{n-1}\right] = 0,$$

ou :

$$\left[1+\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)dx+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)dy$$

$$+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy_1}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right)}\right]\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right)dy_1+\ldots+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy_{n-1}}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right)}\right]\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right)dy_{n-1}=0,$$

équation qu'on identifie avec (b), en posant simultanément :

$$\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy_1}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right)}=0,\ldots\frac{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)\left(\frac{dc_i}{dy_{n-1}}\right)}{\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right)}=0, \qquad (c)$$

Mais on satisfait à ces équations :

1° Soit en posant :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)=0; \qquad (\alpha)$$

2° Soit en posant simultanément les $n+1$ équations :

$$\left(\frac{dc_i}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{dc_i}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dc_i}{dy_1}\right)=0,\ \ldots \left(\frac{dc_i}{dy_{n-1}}\right)=0; \qquad (\beta)$$

3° Soit en posant simultanément les $n+1$ équations :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)=\frac{1}{0},\ldots \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}; \qquad (\gamma)$$

4° Ou, enfin, en posant simultanément k des équations du groupe (β)

avec les $n - k + 1$ équations non correspondantes du groupe (γ). Et comme les équations (β) donnent $c_i =$ *constante*, et, partant, conduisent à une intégrale particulière, il s'ensuit que les équations résultant de l'élimination de c_i entre les deux équations de chacun des $n + 2$ systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ système}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 0, \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right) = 0\,; \end{cases} \quad 2^{\text{e}}\text{ système}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 0, \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad 3^{\text{e}}\text{ système}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 1\,; \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

$$4^{\text{e}}\text{syst.}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 0, \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right) = \dfrac{1}{0}; \end{cases} \ldots (n+1)^{\text{ème}}\text{syst.}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 0, \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-2}}\right) = \dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad (n+2)^{\text{ème}}\text{syst.}: \begin{cases} F_i^{(1)} = 0, \\ \left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

comprendront des solutions singulières simples de la proposée ; il resterait à prouver qu'elles y seront toutes : c'est ce qui résultera de l'ensemble des théorèmes IV, V, VI.

Remarque I. — On sera sûr que les équations déduites des $n + 2$ systèmes précédents satisferont à l'équation $f = 0$, lorsqu'elles donneront une valeur réellement nulle aux premiers membres des relations (c) ; nous verrons à l'article II de ce sous-chapitre, comment on s'assure qu'elles ne sont pas comprises parmi les intégrales de $f = 0$.

Rem. II. — Lorsque l'équation $F_i^{(1)} = 0$ sera algébrique, rationnelle et entière par rapport à une ou à plusieurs des variables qu'elle renferme, les systèmes dont la deuxième équation est la dérivée relative à l'une de ces variables et égalée à l'infini, ne pourront rien donner. — Si l'équation $F_i^{(1)} = 0$ est algébrique, rationnelle et entière à la fois, par rapport à toutes les variables qui y entrent, toutes les solutions singulières qu'on pourra tirer de $F_i^{(1)} = 0$, résulteront uniquement de l'élimination de c_i entre les équations $F_i^{(1)} = 0$ et $\left(\dfrac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right) = 0$. — Si l'équation $F_i^{(1)} = 0$ est résolue par rapport à c_i, alors les solutions singulières simples de $f = 0$, qu'on pourra tirer de $F_i^{(1)} = 0$, résulteront seulement des $n + 1$ derniers systèmes.

Rem. III. — Si la fonction qui, égalée à zéro, satisfait à l'une des $n + 2$ équations :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right) = 0,\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right) = \infty,\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right) = \infty,\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right) = \infty, \ldots \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) = \infty,$$

ne renferme pas c_i, elle sera elle-même une solution singulière simple de $f = 0$, si toutefois elle satisfait à cette dernière équation sans être comprise parmi les intégrales.

THÉORÈME II. — *Quelle que soit celle des intégrales générales premières de l'équation* f $= 0$ *à laquelle on applique le théorème I, on retombera toujours sur les mêmes solutions singulières simples.*

Dém. — Considérons la $k^{ème}$ des $\frac{n^{2/-1}}{2!}$ intégrales générales deuxièmes de l'équation $f = 0$, savoir :

$$F_k^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_k, c_i) = 0,$$

Nous supposons que cette intégrale deuxième soit une des n intégrales deuxièmes qui renferment la constante c_i. On sait qu'on aura deux intégrales premières en éliminant, tour à tour, c_i et c_k entre l'équation $F_k^{(2)} = 0$, et sa dérivée complète immédiate :

$$\left(\frac{dF_k^{(2)}}{dx}\right) + \left(\frac{dF_k^{(2)}}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF_k^{(2)}}{dy_1}\right) y_2 + \ldots + \left(\frac{dF_k^{(2)}}{dy_{n-3}}\right) + \left(\frac{dF_k^{(2)}}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1} = 0,$$

que, pour plus de commodité, nous représenterons par :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, c_i, c_k) = 0.$$

Cette élimination donnera :

$$F_i^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, c_i) = 0,$$

et

$$F_k^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, c_k) = 0.$$

Puis, on aura des solutions singulières simples de l'équation $f = 0$, en éliminant c_i de $F_i^{(1)} = 0$, au moyen des équations :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right) = \infty, \dots \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) = \infty;$$

et c_k de $F_k^{(1)} = 0$, au moyen des équations :

$$\left(\frac{dF_k^{(1)}}{dc_k}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_k^{(1)}}{dx}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_k^{(1)}}{dy}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_k^{(1)}}{dy_1}\right) = \infty, \dots \left(\frac{dF_k^{(1)}}{dy_{n-1}}\right) = \infty.$$

L'équation $\psi = 0$ peut être regardée comme l'équivalente de $F_i^{(1)} = 0$, pourvu qu'on y considère c_k comme une fonction de c_i, déterminée par l'équation $F_k^{(2)} = 0$, qui donnera ainsi :

$$\frac{dc_k}{dc_i} = -\frac{\left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_i}\right)}{\left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_k}\right)}.$$

Le premier calcul reviendra donc à l'élimination de c_i et c_k entre les équations :

$$F_k^{(2)} = 0, \quad \text{et} \quad \psi = 0, \qquad (\alpha)$$

d'une part, et, d'autre part, chacune des équations :

$$(\beta)\begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}, \left(\dfrac{d\psi}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}, \left(\dfrac{d\psi}{dy_1}\right) = \dfrac{1}{0}, \dots \left(\dfrac{d\psi}{dy_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{0}, \\ \text{et} \quad \left(\dfrac{d\psi}{dc_i}\right) + \left(\dfrac{d\psi}{dc_k}\right)\left(\dfrac{dc_k}{dc_i}\right) = 0, \quad \text{qui revient à} \quad \left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_k}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dc_i}\right) - \left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_i}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dc_k}\right) = 0. \end{cases}$$

De même, l'équation $\psi = 0$ peut être considérée comme l'équivalente de $F_k^{(1)} = 0$, pourvu qu'on y regarde c_i comme fonction de c_k déterminée par l'équation $F_k^{(2)} = 0$, qui donnera ainsi :

$$\frac{dc_i}{dc_k} = -\frac{\left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_k}\right)}{\left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_i}\right)}.$$

Le second calcul, qui sert à trouver les solutions singulières simples qu'on peut tirer de $F_k^{(1)} = 0$, revient donc à l'élimination de c_i et c_k entre les équations :

$$F_k^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0 \qquad (a)$$

d'une part, et, d'autre part, chacune des équations :

$$(b)\begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}, \left(\dfrac{d\psi}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}, \left(\dfrac{d\psi}{dy_1}\right) = \dfrac{1}{0}, \ldots \left(\dfrac{d\psi}{dy_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{0}, \\ \text{et} \quad \left(\dfrac{d\psi}{dc_k}\right) + \left(\dfrac{d\psi}{dc_i}\right)\left(\dfrac{dc_i}{dc_k}\right) = 0, \text{ qui revient à } \left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_i}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dc_k}\right) - \left(\dfrac{dF_k^{(2)}}{dc_k}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dc_i}\right) = 0. \end{cases}$$

Mais les équations (a) et (b) sont absolument les mêmes que les équations (α) et (β) ; donc le résultat de l'élimination de c_i et c_k entre les équations (a), d'une part, et, d'autre part, chacune des équations (b), sera identique au résultat de l'élimination de c_i et c_k entre les équations (α), d'une part, et chacune des équations (β), d'autre part. Donc toutes les intégrales premières de l'équation $f = 0$ conduiront aux mêmes solutions singulières simples; ce qu'il fallait prouver.

Théorème III. — *Si l'on représente par :*

$$(1)\begin{cases} F_r^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-m}, c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots c_{r+m-1}) = 0, \\ dF_r^{(m)} = 0, \quad d^2F_r^{(m)} = 0, \quad d^3F_r^{(m)} = 0, \ldots d^m F_r^{(m)} = 0, \end{cases}$$

la r$^{\text{ème}}$ *des intégrales générales* m$^{\text{èmes}}$ *d'une équation différentielle du*

$n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, et les différentielles successives complètes et immédiates de cette intégrale; si, en outre, on désigne par* $d'F_r^{(m)}$ *la différentielle de* $F_r^{(m)}$ *obtenue en y faisant varier toutes les constantes (au nombre de* m) *qu'elle contient, et rien que ces constantes, on obtiendra toutes les solutions singulières simples de* $f=0$:

1° *Si, après avoir éliminé les* $m-1$ *rapports :*

$$\frac{dc_{r+m-1}}{dc_r},\quad \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+1}},\quad \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+2}},\ldots \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+m-2}},$$

entre les m *équations :*

$$d'F_r^{(m)}=0,\quad dd'F_r^{(m)}=0,\quad d^2d'F_r^{(m)}=0,\ldots d^{m-1}d'F_r^{(m)}=0,$$

on élimine de l'équation différentielle résultante les m *constantes :*

$$c_r,\quad c_{r+1},\quad c_{r+2},\ldots c_{r+m-1},$$

au moyen des m *équations :*

$$F_r^{(m)}=0,\quad dF_r^{(m)}=0,\quad d^2F_r^{(m)}=0,\ldots d^{m-1}F_r^{(m)}=0;$$

2° *En éliminant les* m *constantes entre l'équation* $F_r^{(m)}=0$, *et le système de* m *équations formé en prenant une équation dans chacun des groupes d'équations obtenus en égalant à l'infini les* $n-m+2$, *coefficients différentiels partiels du premier ordre, ses* $\frac{(n-m+2)^{2/1}}{2!}$ *coefficients différentiels du deuxième ordre, etc., enfin ses* $\frac{(n-m+2)^{m/1}}{m!}$ *coefficients différentiels partiels du* $m^{\text{ème}}$ *ordre.*

Dém — On sait que l'équation $f=0$ doit nécessairement résulter de l'élimination des m constantes $c_r,\ c_{r+1},\ c_{r+2},\ldots c_{r+m-1}$ entre les $m+1$ équations :

$$F_r^{(m)}=0,\quad dF_r^{(m)}=0,\quad d^2F_r^{(m)}=0,\ldots d^{m-1}F_r^{(m)}=0.$$

Si, maintenant, nous regardons les constantes comme variables, l'équation $dF_r^{(m)} = 0$ prendra la forme :

$$dF_r^{(m)} + \left(\frac{dF_r^{(m)}}{dc_r}\right) dc_r + \left(\frac{dF_r^{(m)}}{dc_{r+1}}\right) dc_{r+1} + \left(\frac{dF_r^{(m)}}{dc_{r+2}}\right) dc_{r+2} + \cdots + \left(\frac{dF_r^{(m)}}{dc_{r+m-1}}\right) dc_{r+m-1} = 0,$$

ou :

$$dF_r^{(m)} + d'F_r^{(m)} = 0,$$

ou encore :

$$\left\{1 + \frac{d'F_r^{(m)}}{dF_r^{(m)}}\right\} dF_r^{(m)} = 0,$$

équation qui se réduira à :

$$dF_r^{(m)} = 0,$$

si l'on pose :

$$\frac{d'F_r^{(m)}}{dF_r^{(m)}} = 0.$$

Différentions de nouveau pour obtenir $d^2F_r^{(m)} = 0$, mais en regardant les m constantes comme variables, on aura :

$$d^2F_r^{(m)} + d'.dF_r^{(m)} = 0,$$

ou, par la transposition des deux signes d et d' de différentiation :

$$d^2F_r^{(m)} + d.d'F_r^{(m)} = 0,$$

ou :

$$1 + \left[\frac{d.d'F_r^{(m)}}{d^2F_r^{(m)}}\right] d^2F_r^{(m)} = 0,$$

équation qui se réduit à :

$$d^2F_r^{(m)} = 0,$$

lorsqu'on pose :

$$\frac{d.d'F_r^{(m)}}{d^2F_r^{(m)}} = 0.$$

En continuant ainsi, on verra que si $f=0$ est l'équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables qui résulte de l'élimination des constantes c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, ... c_{r+m-1}, entre les équations $F_r^{(m)}=0$, $dF_r^{(m)}=0$, $d^2F_r^{(m)}=0$,... $d^{m-1}F_r^{(m)}=0$, $d^mF_r^{(m)}=0$, elle sera encore satisfaite par les mêmes équations, en supposant variables les quantités c_r, c_{r+1}, c_{r+2},... c_{r+m-1}, pourvu qu'on ait simultanément les équations :

$$\frac{d'F_r^{(m)}}{dF_r^{(m)}} = 0, \quad \frac{d'dF_r^{(m)}}{d^2F_r^{(m)}} = 0, \quad \frac{d^2d'F_r^{(m)}}{d^3F_r^{(m)}} = 0, \ldots \frac{d^{m-1}d'F_r^{(m)}}{d^mF_r^{(m)}} = 0, \qquad (A)$$

auxquelles on satisfait, soit en posant simultanément :

$$d'F_r^{(m)} = 0, \quad dd'F_r^{(m)} = 0, \quad d^2d'F_r^{(m)} = 0, \ldots d^{m-1}d'F_r^{(m)} = 0, \qquad (a)$$

soit en posant simultanément :

$$dF_r^{(m)} = \infty, \quad d^2F_r^{(m)} = \infty, \quad d^3F_r^{(m)} = \infty, \ldots d^mF_r^{(m)} = \infty.$$

On ne peut pas poser égaux à zéro les numérateurs de $m-p$ des rapports (A), en même temps qu'égaux à l'infini, les dénominateurs des p autres rapports, parce que, d'une part, chaque numérateur renfermant en général les m différentielles dc_r, dc_{r+1}, dc_{r+2},... dc_{r+m-1}, il faut m équations entre ces m différentielles, pour pouvoir éliminer leurs $m-1$ rapports ; et que, d'autre part, les équations (b) ne renferment pas les différentielles en question.

Maintenant, on satisfait évidemment à la première des équations (b) en posant un ou plusieurs des coefficients différentiels partiels du premier ordre de $F_r^{(m)}$ égaux à l'infini ; ces coefficients sont évidemment au nombre de $n - m + 2$. On satisfait à la deuxième des équations (b) en posant un ou plusieurs des coefficients différentiels partiels du deuxième ordre de $F_r^{(m)}$ égaux à l'infini : ces coefficients différentiels sont au nombre de $\frac{(n-m+2)^{2/1}}{2!}$; et ainsi de suite ; en général, on satisfait à la $\mu^{\text{ème}}$ des équations (b) en égalant à l'infini un ou plusieurs des $\frac{(n-m+2)^{\mu/1}}{\mu\,!}$ coefficients différentiels partiels du $\mu^{\text{ème}}$ ordre de $F_r^{(m)}$.

Ainsi, on aura des solutions singulières simples de $f = 0$:

1° En éliminant les $m - 1$ rapports différentiels :

$$\frac{dc_{r+m-1}}{dc_r}, \quad \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+1}}, \quad \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+2}}, \dots \frac{dc_{r+m-1}}{dc_{r+m-2}},$$

entre les équations (a), de manière à obtenir une équation différentielle qui sera, en général, de l'ordre $m - 1$, et qui renfermera, en général, m constantes ; soit :

$$\chi\left(dF_r^{(m)},\ d^2F_r^{(m)},\ d^3F_r^{(m)}, \dots d^{m-1}F_r^{(m)},\ c_r, c_{r+1}, \dots c_{r+2}, c_{r+m-1}\right) = 0$$

cette équation ; il faudra ensuite en éliminer les m constantes au moyen des m équations :

$$F_r^{(m)} = 0, \quad dF_r^{(m)} = 0, \quad d^2F_r^{(m)} = 0, \dots d^{m-1}F_r^{(m)} = 0.$$

2° En éliminant les m constantes $c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \dots c_{r+m-1}$ de l'équation $F_r^{(m)} = 0$, au moyen des m équations dont le système est formé en prenant une équation dans chacun des groupes d'équations obtenus en égalant à l'infini : 1$^{\text{èrement}}$ les $n - m + 2$ coefficients différentiels partiels du 1$^{\text{er}}$ ordre de $F_r^{(m)} = 0$, 2$^{\text{èmement}}$ les $\frac{(n-m+2)^{2/1}}{2!}$ coefficients différentiels partiels du 2$^{\text{e}}$ ordre de $F_r^{(m)} = 0$, 3$^{\text{èmement}}$ ceux du 3$^{\text{e}}$ ordre, au nombre de $\frac{(n-m+2)^{3/1}}{3!}$, ... $m^{\text{èmement}}$ ceux du $m^{\text{ème}}$ ordre, au nombre de $\frac{(n-m+2)^{m/1}}{m!}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Observation. — Les auteurs ne tiennent pas compte de ces m groupes d'équations, parce qu'ils supposent toujours implicitement que l'équation $F_r^{(m)}=0$ est algébrique, rationnelle et entière par rapport à $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-m}, c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots c_{r+m-1}$. Mais ce n'est là qu'un cas particulier, et notre théorème est vrai, que l'équation $F_r^{(m)}=0$ soit transcendante ou algébrique, rationnelle ou irrationnelle, entière ou fractionnaire.

Rem. I. — On sera sûr que les solutions $s=0$, obtenues par le théorème III, satisfont à l'équation $f=0$, lorsque les m équations (A) seront satisfaites.

Rem. II. — Il peut arriver que l'équation $\chi=0$ ne renferme aucune des constantes ; alors les équations $s=0$ se confondent avec les équations $\chi=0$; et si les équations $\chi=0$ ne renfermaient que $m-p$ des constantes $c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots c_{r+m-1}$, alors, pour arriver aux équations $s=0$, il suffirait d'éliminer de $\chi=0$ les $m-p$ constantes au moyen des $m-p$ équations :

$$F_r^{(m)}=0,\quad dF_r^{(m)}=0,\quad d^2F_r^{(m)}=0,\ \ldots\ d^{m-p-1}F_r^{(m)}=0.$$

Rem. III. — Toutes les intégrales des équations $s=0$ seront encore des solutions singulières simples de l'équation $f=0$, si toutefois les équations $s=0$ sont elles-mêmes des solutions singulières simples de $f=0$.

Rem. IV. — Si, dans le théorème III, on supposait $m=n$, il donnerait les solutions singulières simples de $f=0$, au moyen de l'intégrale générale $n^{\text{ème}}$ ou sans différences de cette équation. Si on pose $m=1$, on retombe sur le théorème I, qui n'est ainsi qu'un cas particulier du théorème actuel.

THÉORÈME IV. — *Quelle que soit celle des intégrales générales* m$^{\text{èmes}}$ *de l'équation* f $= 0$ *à laquelle on applique le théorème III, on retombera toujours sur les mêmes solutions singulières simples.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème II.

THÉORÈME V. — *Quelle que soit celle de toutes les intégrales générales des divers ordres de* f $= 0$ *à laquelle on applique le théorème III, on sera toujours conduit aux mêmes solutions singulières simples.*

Dém. — L'analyse, qui sert à établir le théorème II, nous montre que les solutions singulières simples qu'on déduit des intégrales premières, pourraient se déduire de l'intégrale deuxième $F_k^{(2)} = 0$, par l'élimination de c_i et c_k entre cette équation, sa dérivée complète immédiate $\chi = 0$, et l'une des équations :

$$\left(\frac{d\psi}{dc_i}\right)\left(\frac{dF_k^{(2)}}{dc_k}\right) - \left(\frac{dF_k^{(2)}}{dc_i}\right)\left(\frac{d\psi}{dc_k}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \infty, \quad \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = \infty, \quad \left(\frac{d\psi}{dy_1}\right) = \infty, \ldots \left(\frac{d\psi}{dy_{n-1}}\right) = \infty.$$

Or, l'application du théorème III à l'intégrale $F_k^{(2)} = 0$, pour en déduire toutes les solutions singulières simples de $f = 0$ qu'on peut en déduire, conduirait exactement aux équations que nous venons de décrire, et comme, d'un autre côté, par le théorème IV, toutes les intégrales deuxièmes donnent les mêmes solutions singulières simples et en même nombre, nous en conclurons que les solutions singulières simples, qu'on peut déduire des intégrales deuxièmes, sont en même nombre et les mêmes que celles que l'on peut déduire des intégrales premières. — On prouverait, de même, que les solutions singulières simples qu'on déduirait des intégrales troisièmes, sont les mêmes et en même nombre que celles qu'on déduirait des intégrales deuxièmes ; et ainsi de suite. Donc, etc.

Maintenant, comme il sera prouvé dans le sous-chapitre II, où nous traiterons des solutions singulières multiples, qu'il ne peut exister d'équations qui satisfassent à $f=0$ sans satisfaire aux primitives complètes du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre, ou aux solutions singulières qu'on en déduit, nous pouvons énoncer ce théorème :

Théorème VI. — *L'application du théorème III à l'une des intégrales complètes de* $\mathrm{f}=0$, *quels que soient l'ordre et le rang de cette intégrale, donnera toutes les solutions singulières simples de* $\mathrm{f}=0$.

Remarque. — Le théorème II, qui n'est qu'un cas particulier du théorème III, correspondant à $m=1$, donnera donc aussi toutes les solutions singulières simples de $f=0$, au moyen des intégrales premières.

B.

Théorème VII. — *Le nombre et la nature des solutions singulières simples d'une équation différentielle* $\mathrm{f}=0$ *du* $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, sont indépendants de la forme donnée aux intégrales générales dont on les déduit.*

Dém. — Nous verrons, au § II de cet article, qu'on peut déduire de l'équation différentielle $f=0$ elle-même, toutes ses solutions singulières simples, indépendamment de la connaissance de toute intégrale. La forme donnée aux intégrales est donc sans influence sur ce procédé de détermination des solutions singulières simples. Donc, elle est sans influence sur le nombre et la nature de ces solutions.

Théorème VIII. — *Lorsque l'intégrale complète du* $(\mathrm{n}-1)^{\text{ème}}$ *ordre d'une équation différentielle du* $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables est une fonction algébrique de* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y}_{\mathrm{n}-1}$, *et de la constante arbitraire, on peut toujours mettre cette intégrale sous une forme telle que les solutions singulières simples de l'équation différentielle proposée se déduisent de l'intégrale transformée uniquement par l'élimination de la constante arbitraire entre cette intégrale et sa dérivée partielle relative à la constante et égalée à zéro.*

Dém. — En effet, puisque l'intégrale générale première :

$$F_i^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, c_i)=0$$

de $f=0$ est supposée une fonction algébrique de $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, c_i$; en la multipliant par une fonction convenable de ces quantités, puis l'élevant à des puissances convenables et d'une manière convenable, on la délivrera de radicaux et de dénominateurs, et les équations :

$$\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\ldots \left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}$$

déduites de la transformée, ne pouvant plus être satisfaites par des fonctions finies, l'équation $\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)=0$ pourra seule subsister encore.

Remarques générales. — 1° Il est facile de voir que : *Les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, dont une des intégrales complètes est une fonction algébrique, représentent des osculatrices à la série de courbes que représentent les cas particuliers de cette intégrale.*

2° L'équation $\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dc_i}\right)=0$ indique que l'équation $F_i^{(1)}=0$, supposée algébrique, doit donner à c_i des valeurs égales pour les solutions singulières de l'équation différentielle $f=0$, dont $F_i^{(1)}=0$ est la $i^{\text{ème}}$ des intégrales premières. L'équation $\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, détermine la valeur de c_i qui, pour des valeurs données de $y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, rend x *maximum* ou *minimum*; de même, l'équation $\left(\frac{dF_i^{(1)}}{dy}\right)=\frac{1}{0}$ détermine la valeur de c_i qui, pour des valeurs données de $x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, rend y *maximum* ou *minimum*, et ainsi de suite.

EXEMPLE I. — *Chercher les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f=\frac{d^2y^2}{dx^4}-\frac{2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{x}+1=0,$$

dont les intégrales premières sont :

$$F_1^{(1)} = x^2 - 2c_1 \frac{dy}{dx} + c_1^2 = 0,$$

$$F_2^{(1)} = 4x^2 \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\left(c_2 - \frac{2x^3}{3}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + \left(c_2 - \frac{2x^3}{3}\right)^2 = 0;$$

et dont l'intégrale deuxième est :

$$F^{(2)} = x^2 + 3c_1^2 + \frac{3c_2 - 6c_1 y}{x} = 0.$$

Solution. — Appliquons le théorème I à $F_1^{(1)} = 0$; cette équation étant algébrique, rationnelle et entière en x, y, $\frac{dy}{dx}$, c_1, on ne doit faire usage que de l'équation $\left(\frac{dF_1^{(1)}}{dc_1}\right) = 0$; on obtient ainsi :

$$-\frac{dy}{dx} + c_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad c_1 = \frac{dy}{dx},$$

valeur qui, substituée dans $F_1^{(1)} = 0$, donne la solution singulière simple :

$$x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0. \qquad (1)$$

Appliquons le même théorème I à $F_2^{(1)} = 0$; cette équation étant encore algébrique, rationnelle et entière par rapport à x, $\frac{dy}{dx}$ et c_2, l'équation $\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dc_2}\right) = 0$, peut seule nous fournir des solutions singulières. On en tire :

$$\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dc_2}\right) = -4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(c_2 - \frac{2x^3}{3}\right) = 0;$$

d'où :

$$c_2 = \frac{2x^3}{3} + 2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx},$$

valeur qui, substituée dans $F_2^{(1)} = 0$, donne :

$$4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2\left(x^2 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$y - x\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

La première ne satisfait pas à l'équation $f = 0$, car elle donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

et, par suite :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0.$$

La seconde est la solution singulière déjà trouvée.

Appliquons maintenant le théorème III à l'équation $F^{(2)} = 0$. On aura :

$$D_x F^{(2)} = 2x - \frac{6c_1\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{3c_2 - 6c_1 y}{x^2},$$

$$D_x^2 F^{(2)} = 2 - \frac{6c_1\frac{d^2y}{dx^2}}{x} + \frac{6c_1\frac{dy}{dx}}{x^2} + \frac{3c_2 - 6c_1 y}{x^2}.$$

Ces deux valeurs deviennent infinies pour $x = 0$; mais $x = 0$ n'est qu'une intégrale particulière correspondante à $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$. Il nous faudra donc employer la première partie du théorème III, et éliminer, par conséquent, les inconnues $\frac{dc_2}{dc_1}$, c_1, c_2 entre les équations :

$$F^{(2)} = 0, \quad D_x F^{(2)} = 0, \quad d'F^{(2)} = 0, \quad dd'F^{(2)} = 0.$$

Or on a ici :

$$F^{(2)} = x^2 + 3c_1{}^2 + \frac{3c_2 - 6c_1 y}{x} = 0,$$

$$D_x F^{(2)} = 2x - \frac{6c_1\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{3c_2 - 6c_1 y}{x^2} = 0,$$

$$d'F^{(2)} = 6c_1\,dc_1 + \frac{3dc_2}{x} - \frac{6y\,dc_1}{x} = 0,$$

$$dd'F^{(2)} = -\frac{3\,dc_2}{x^2} + \frac{6y\,dc_1}{x^2} - \frac{6\frac{dy}{dx}dc_1}{x} = 0.$$

En éliminant $\frac{dc_2}{dc_1}$ entre les deux dernières, on a :

$$\frac{6\left(c_1 - \frac{dy}{dx}\right)}{x} = 0,$$

d'où :

$$c_1 = \frac{dy}{dx};$$

en éliminant c_2 entre les deux premières, on a :

$$3x + \frac{3c_1^2 - 6c_1 \frac{dy}{dx}}{x} = 0;$$

et en substituant dans cette dernière équation la valeur de c_1 que nous venons d'obtenir, il vient :

$$x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

comme plus haut.

L'intégrale complète de cette solution singulière, savoir :

$$y = \pm \frac{x^2}{2} + C,$$

satisfait aussi à la proposée comme solution singulière.

Ex. II. — *Chercher les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^2y^2}{dx^4} = 0,$$

dont les intégrales premières sont :

$$F_1^{(1)} = y + \left(\frac{c_1}{2} - c_1^2\right)x^2 - (1 - 2c_1)\,x\frac{dy}{dx} - c_1^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

$$F_1^{(2)} = y - \frac{\left(c_2 + \frac{dy}{dx}\right)x}{2} - \frac{\left(c_2 - \frac{dy}{dx}\right)^2}{x^2} - c_1^2 = 0,$$

et dont l'intégrale deuxième est :

$$F^{(2)} = y - \frac{c_1}{2}x^2 - c_2 x - c_1{}^2 - c_2{}^2 = 0.$$

Solution. — Appliquons le théorème I à l'équation $F_1^{(1)} = 0$; on n'aura à faire usage que de l'équation $\left(\frac{dF_1^{(1)}}{dc_1}\right) = 0$, laquelle donne :

$$\left(\frac{1}{2} - 2c_1\right) x^2 + 2x \frac{dy}{dx} - 2c = 0,$$

d'où résulte :

$$c_1 = \frac{x^2 + 4x \frac{dy}{dx}}{4(1+x^2)},$$

valeur qui, substituée dans $F_1^{(1)} = 0$, donne :

$$y - x\frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right)^2}{16(1+x^2)} = 0,$$

ou :

$$(1+x^2)\,y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{x^4}{16} = 0 :$$

c'est la primitive singulière de la proposée.

Appliquons le théorème I à l'équation $F_2^{(1)} = 0$; il faudra faire usage des relations $\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dc_2}\right) = 0$ et $\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dx}\right) = \infty$. On aura d'abord :

$$\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dc_2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{2\left(c_2 - \frac{dy}{dx}\right)}{x^2} + 2c_2 = 0,$$

d'où :

$$c_2 = \frac{4\frac{dy}{dx} - x^3}{4(1+x^2)},$$

valeur qui, substituée dans $F_2^{(1)} = 0$, donne :

$$y - \frac{x\frac{dy}{dx}}{2} - \frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{x^2} + \frac{\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right)^2}{16x^2(1+x^2)} = 0,$$

ou :

$$(1+x^2)\,y-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{x^4}{16}=0,$$

solution singulière trouvée plus haut. Quant à l'équation $\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, elle donne :

$$-\frac{c_2+\frac{dy}{dx}}{2}+\frac{2\left(c_2-\frac{dy}{dx}\right)^2}{x^3}=\frac{1}{0},$$

équation à laquelle on satisfait en posant $x=0$, mais cette valeur $x=0$ ne satisfait pas à la proposée, car elle n'annule pas le rapport $\frac{\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dc_2}\right)}{\left(\frac{dF_2^{(1)}}{dx}\right)}$, mais lui donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$; et, en cherchant sa vraie valeur, on trouve $-\frac{8c_2}{c_1+\frac{dy}{dx}}$, expression qui ne devient pas nulle pour $x=0$.

Enfin, appliquons le théorème III à l'équation $F^{(2)}=0$, il vient :

$$F^{(2)}=y-\frac{1}{2}c_1x^2-c_2x-c_1^2-c_2^2=0,$$

$$D_xF^{(2)}=\frac{dy}{dx}-c_1x-c_2=0,$$

$$d'F^{(2)}=-\left(\frac{1}{2}x^2+2c_1\right)dc_1-(x+2c_2)\,dc_2=0,$$

$$D_xd'F^{(2)}=-xdc_1-dc_2.$$

La dernière donne $\frac{dc_2}{dc_1}=-x$, valeur qui, substituée dans la troisième, donne :

$$\frac{x^2}{2}+2\,(c_2x-c_1)=0,$$

équation qui, combinée avec la deuxième, donne les valeurs de c_1 et c_2; et ces valeurs, substituées dans l'équation $F^{(2)}=0$, conduisent à :

$$y\,(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y^2}{dx^4}=0,$$

comme ci-dessus.

L'intégrale complète de cette solution singulière, savoir :

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - l\,(x + \sqrt{1 + x^2}) + c = 0,$$

est aussi une solution singulière simple de la proposée.

Ex. III. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f = yx^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x^3 \frac{dy^2}{dx^2} + 6xy \frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale deuxième :

$$F^{(2)} = xy + c_1 x^3 + c_2 y = 0.$$

Solution. — On en tire :

$$d'F^{(2)} = x^3\,dc_1 + y\,dc_2 = 0,$$

$$D_x F^{(2)} = 3x^2\,dc_1 + \frac{dy}{dx}\,dc_2 = 0.$$

Cette dernière équation donne :

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{3x^2}{\frac{dy}{dx}},$$

valeur qui, substituée dans la première, donne :

$$x^3 - \frac{3x^2y}{\frac{dy}{dx}} = 0, \quad \text{ou} \quad x^3\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) = 0$$

Cette équation se décompose en deux : la première, $x = 0$, est une intégrale particulière correspondante à $c_2 = 0$; la deuxième, $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = 0$, est une solution singulière simple. Son intégrale générale $y = Cx^3$ est aussi une solution singulière simple de la proposée.

Ex. IV. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f = (xy - 1)\left(2xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} + x\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 - xy\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

au moyen de son intégrale première :

$$F_1^{(1)} = y \frac{dy^2}{dx^2} - 2c_1 xy \frac{dy}{dx} + c_1^2 x = 0.$$

Solution. — On a :

$$\left(\frac{dF_1^{(1)}}{dc_1}\right) = -2xy \frac{dy}{dx} + 2c_1 x = 0,$$

d'où $x = 0$, solution étrangère; et $c_1 = y \frac{dy}{dx}$, valeur qui, substituée dans $F_1^{(1)} = 0$, donne :

$$xy - 1 = 0,$$

solution singulière sans différence. L'équation proposée n'a donc pas de solution singulière du premier ordre.

II. — Théorie de M. Timmermans.

Soit $F_i^{(1)} (x, y, y_1, y_2, y_3, \cdots y_{n-1}, c_i) = 0$, la $i^{ème}$ des intégrales premières complètes de l'équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables $f = 0$; si on suppose que la fonction $F_i^{(1)} = 0$ est algébrique en $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, c_i$, en raisonnant comme à la page 1021, on arrivera au théorème suivant : *Pour obtenir les solutions singulières d'une équation différentielle du* n^{ème} *ordre à deux variables, dont une des intégrales complètes du* (n — 1)^{ème} *ordre est une fonction algébrique, il faut résoudre cette intégrale par rapport à la constante arbitraire. Si la valeur de cette constante ne renferme pas de radical, il n'y aura pas de solution singulière; dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux ou les fonctions qui les multiplient, et si les équations ainsi obtenues satisfont à la proposée sans satisfaire aux intégrales de cette proposée, elles en seront les solutions singulières simples.*

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f = y - x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^2y^2}{dx^4} = 0,$$

au moyen de son intégrale première :

$$F_1^{(1)} = y + \left(\frac{c_1}{2} - c_1^2\right) x^2 - (1 - 2c_1)\, x \frac{dy}{dx} - c_1^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Solution. — Cette dernière équation donne :

$$c_1^2 (1 + x^2) - c_1 \left(\frac{4x}{2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right) = y - \frac{dy^2}{dx^2} - x \frac{dy}{dx},$$

ou :

$$c_1^2 - c_1 \cdot \frac{4x \dfrac{dy}{dx} + x^2}{2(1 + x^2)} = \frac{y - \dfrac{dy^2}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx}}{1 + x^2},$$

d'où :

$$c_1 = \frac{4x \dfrac{dy}{dx} + x^2 \pm \sqrt{\left(4x \dfrac{dy}{dx} + x^2\right)^2 + 16(1 + x^2)\left(y - \dfrac{dy^2}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx}\right)}}{4(1 + x^2)},$$

ou :

$$c_1 = \frac{4x \dfrac{dy}{dx} + x^2 \pm 4 \sqrt{(1 + x^2) y - \left(x + \dfrac{x^3}{2}\right) \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy^2}{dx^2} + \dfrac{x^4}{16}}}{4(1 + x^2)},$$

valeur dont le radical disparaît, si l'on pose :

$$y(1 + x^2) - \left(x + \frac{x^3}{2}\right) \frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{x^4}{16} = 0,$$

solution singulière déjà trouvée par la méthode de Lagrange.

Ex. II. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle du deuxième ordre :*

$$f = (xy - 1)\left(2xy \frac{d^2y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} + x \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 + xy \left(y + x \frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

au moyen de son intégrale première :

$$F_1^{(1)} = y \frac{dy^2}{dx^2} - 2c_1\, xy \frac{dy}{dx} + c_1^2 x = 0.$$

Solution. — On a :

$$c_1^2 - 2c_1\, y \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{dy^2}{dx^2},$$

d'où :

$$c_1 = \frac{dy}{dx}\left[y \pm \sqrt{\frac{y\,(xy-1)}{x}}\right].$$

Or, on fait évanouir le radical de cette expression en posant, soit $xy-1=0$, qui est la solution singulière déjà trouvée précédemment; soit $y=0$, qui est une intégrale particulière correspondante à $c_1=0$.

§ II. — SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES DÉDUITES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ELLES-MÊMES.

Ici, comme au § II de l'article I du chapitre I, nous aurons à exposer trois théories. La première, que nous appellerons théorie de Laplace et de Legendre, se base sur la considération des fonctions que les solutions singulières simples rendent nulles ou infinies. La deuxième, à laquelle nous attacherons les noms de Lagrange et de Poisson, est fondée sur la considération des fonctions que les solutions singulières simples rendent indéterminées. Ces deux théories donnent seulement les caractères analytiques par lesquels on déduit ces solutions de l'équation différentielle elle-même : la première est applicable à toute forme d'équation différentielle ; la seconde ne l'est généralement qu'aux équations différentielles de forme algébrique. La troisième théorie, celle de M. Timmermans, montre la liaison des solutions singulières simples avec la composition même de l'équation, lorsque celle-ci est algébrique en $x, y, y_1, y_2, \ldots y_n$.

I. — Théorie de Laplace et de Legendre.

Elle peut se renfermer en trois théorèmes :

Théorème I. — *Toutes les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* n$^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables sont comprises parmi les équations qui résultent de l'élimination de* y_n *entre la proposée et sa dérivée partielle prise par rapport à* x, *ou à* y, *ou à* $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *ou* y_{n-1}, *et égalée à l'infini.*

A. — PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Soit :

$$f(x, y, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

l'équation différentielle proposée, et :

$$F(x, y, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}, a) = 0, \qquad (\alpha)$$

l'une de ses intégrales premières complètes, a étant la constante arbitraire. Nous pourrons évidemment considérer l'équation $F = 0$ comme résultant de l'élimination de y_n entre sa dérivée immédiate :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right) y_2 + \left(\frac{dF}{dy_2}\right) y_3 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1} + \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) y_n = 0 \qquad (a)$$

et l'équation proposée :

$$f(x, y, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}, y_n) = 0. \qquad (b)$$

Donc, si nous représentons par :

$$y_n = \psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a) = 0,$$

la valeur de y_n tirée de (a), et que nous la substituions dans (b), l'équation résultante :

$$f[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a)] = 0, \qquad (\beta)$$

tiendra lieu de l'équation (α). Mais les solutions singulières simples résultent de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des $n + 2$ systèmes :

1^er^ système : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{da}\right) = 0; \end{cases}$ 2^e^ système : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{dx}\right) = \infty; \end{cases}$ 3^e^ système : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{dy}\right) = \infty; \end{cases}$

4^e^ syst. : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{dy_1}\right) = \infty; \end{cases}$ … $(n+1)^{\text{ème}}$ syst. : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{dy_{n-2}}\right) = \infty; \end{cases}$ $(n+2)^{\text{ème}}$ syst. : $\begin{cases} F = 0, \\ \left(\dfrac{dF}{dy_{n-1}}\right) = \infty. \end{cases}$

Donc, puisque l'équation (β) tient lieu de (α), les mêmes solutions singulières simples résulteront de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des $n+2$ systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{da}\right)=0; \end{cases} \qquad 2^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{dx}\right)+\left(\dfrac{df}{d\psi}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

$$3^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy}\right)+\left(\dfrac{df}{d\psi}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \qquad 4^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_1}\right)+\left(\dfrac{df}{d\psi}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dy_1}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

. . . .

$$(n+1)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-2}}\right)+\left(\dfrac{df}{d\psi}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dy_{n-2}}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \qquad (n+2)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases} f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \psi)=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-1}}\right)+\left(\dfrac{df}{d\psi}\right)\left(\dfrac{d\psi}{dy_{n-1}}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

Mais, pour tous ces systèmes, l'élimination de a revient à celle de ψ, attendu que a est contenu dans ψ seul ; et éliminer ψ, c'est évidemment éliminer y_n. Donc, toutes les solutions singulières de $f=0$ résulteront de l'élimination de y_n entre les deux équations de chacun des $n+2$ systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_n}\right)=0, \end{cases} \quad 2^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dx}\right)+\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)\left(\dfrac{dy_n}{dx}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad 3^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy}\right)+\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)\left(\dfrac{dy_n}{dy}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

$$4^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_1}\right)+\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)\left(\dfrac{dy_n}{dy_1}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad \dots (n+1)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-2}}\right)+\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)\left(\dfrac{dy_n}{dy_{n-2}}\right)+\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

$$(n+2)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-1}}\right)+\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)\left(\dfrac{dy_n}{dy_{n-1}}\right)=\dfrac{1}{0}. \end{cases}$$

Or on satisfait à la deuxième équation du deuxième système, en posant :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy_n}{dx}\right)=\infty;$$

à la deuxième équation du troisième système, en posant :

$$\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy_n}{dy}\right)=\infty;$$

à la deuxième équation du quatrième système, en posant :

$$\left(\frac{df}{dy_1}\right)=0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy_n}{dy_1}\right)=\infty;$$

. . . .

enfin, on satisfait à la deuxième équation du $(n+2)^{ème}$ système, en posant :

$$\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy_n}{dy_{n-1}}\right)=\infty \text{ (*)}$$

Mais :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\infty, \quad \text{entraîne} \quad \left(\frac{dy_n}{dx}\right)=\infty,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)=\infty, \quad \text{»} \quad \left(\frac{dy_n}{dy}\right)=\infty,$$

$$\left(\frac{df}{dy_1}\right)=\infty, \quad \text{»} \quad \left(\frac{dy_n}{dy_1}\right)=\infty,$$

. . . .

enfin :

$$\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)=\infty, \quad \text{entraîne} \quad \left(\frac{dy_n}{dy_{n-1}}\right)=\infty,$$

puisque :

$$\left(\frac{dy_n}{dx}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy_n}\right)}, \quad \left(\frac{dy_n}{dy}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dy_n}\right)}, \quad \left(\frac{dy_n}{dy_1}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dy_1}\right)}{\left(\frac{df}{dy_n}\right)},\ldots$$

$$\left(\frac{dy^n}{dy_{n-1}}\right)=-\frac{\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)}{\left(\frac{df}{dy_n}\right)}.$$

(*) On peut encore satisfaire à la deuxième équation de chacun des $n+1$ derniers systèmes, en posant $\left(\frac{df}{dy_n}\right)=\frac{1}{0}$; mais cette équation doit être rejetée. (*Voir*, à cet effet, la note de la page 1028.)

Donc, enfin, toutes les solutions singulières simples de l'équation différentielle $f = 0$ du $n^{\text{ème}}$ ordre à deux variables seront comprises parmi les équations résultant de l'élimination de y_n entre les deux équations de chacun des $n+2$ systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_n}\right)=0; \end{cases} \quad 2^{\text{e}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dx}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad 3^{\text{e}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad 4^{\text{e}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_1}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

$$\ldots (n+1)^{\text{ème}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-2}}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases} \quad (n+2)^{\text{ème}}\text{ syst.}: \begin{cases} f=0, \\ \left(\dfrac{df}{dy_{n-1}}\right)=\dfrac{1}{0}; \end{cases}$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque I. — Lorsque l'équation $f=0$ est algébrique, rationnelle et entière, par rapport à une ou plusieurs des variables qu'elle renferme, les systèmes dont la deuxième équation a pour premier membre la dérivée prise par rapport à l'une des variables dont f est une fonction algébrique, rationnelle et entière, ne peuvent plus rien donner. — Si l'équation $f=0$ était algébrique, rationnelle et entière à la fois, par rapport à $x, y, y_1, y_2, \ldots y_n$, ses solutions singulières ne pourraient plus résulter que de l'élimination de y_n entre les équations $f=0$ et $\left(\dfrac{df}{dy_n}\right)=0$. — Si l'équation $f=0$ est résolue par rapport à y_n, alors les solutions singulières simples ne peuvent plus résulter que des $n+1$ derniers systèmes écrits plus haut.

Rem. II. — Si la fonction qui, égalée à zéro, satisfait à l'une des $n+2$ équations :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0, \quad \left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0}, \quad \left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0}, \quad \left(\frac{df}{dy_1}\right)=\frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0},$$

ne renferme pas y_n, elle sera elle-même une solution singulière simple de $f=0$, si toutefois elle satisfait à $f=0$ sans être comprise parmi les intégrales.

B. — SECONDE DÉMONSTRATION.

Nous supposerons que l'équation $f = 0$ est une fonction algébrique de $x, y, y_1, y_2, \ldots y_n$, et qu'on l'a délivrée de radicaux et de dénominateurs. Puis nous distinguerons deux cas :

a. PREMIER CAS. — *L'équation* f $= 0$ *n'est pas résolue par rapport à* y_n — Nous disons que, dans ce cas, toutes les solutions singulières simples de la proposée sont comprises parmi les équations résultant de l'élimination de y_n entre les équations $f = 0$ et $\left(\frac{df}{dy_n}\right) = 0$. En effet :

1° Imaginons, avec Legendre, qu'on connaisse une fonction de y en x qui satisfasse à la proposée ; et supposons qu'on cherche une fonction de x contiguë à la précédente. Il ne s'agira, pour obtenir cette seconde fonction, que de faire varier y, $y_1 = \frac{dy}{dx}$, $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots y_n = \frac{d^ny}{dx^n}$, dans la proposée $f = 0$, et comme on a :

$$\delta \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta y}{dx^n},$$

le résultat de cette variation pourra toujours être mis sous la forme :

$$A^n . \frac{d^n \delta y}{dx^n} + A_{n-1} . \frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}} + A_{n-2} . \frac{d^{n-2} \delta y}{dx^{n-2}} + \ldots + A_2 . \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + A_1 . \frac{d \delta y}{dx} + A_0 \delta y = 0. \quad (a)$$

Et comme les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ peuvent être regardés comme des fonctions de x seul, puisque y est donné en x, l'équation (a) sera linéaire du $n^{ème}$ ordre et donnera δy. Maintenant, si la valeur connue de y est renfermée dans l'intégrale complète sans différences de $f = 0$, savoir, dans :

$$y = \varphi\,(x, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n) = 0,$$

la valeur $y + \delta y$ s'obtiendra en faisant varier les constantes c_1, c_2,

$c_3, \ldots c_n$, et, partant, l'intégrale complète et sans différences de (a) sera :

$$\delta y = \left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right)\delta c_1 + \left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right)\delta c_2 + \left(\frac{d\varphi}{dc_3}\right)\delta c_3 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dc_n}\right)\delta c_n,$$

δc_1, δc_2, $\delta_3, \ldots \delta c_n$ étant les n constantes arbitraires ; et comme ces constantes ne peuvent se réduire à un moindre nombre, l'ordre de l'équation (a) ne peut être abaissé, et, partant, le coefficient A_n ne peut être nul. Si, au contraire, la valeur donnée de y est contenue dans une solution singulière simple sans différence :

$$y = \psi(x, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n) = 0,$$

le nombre des constantes de cette solution étant tout au plus $n - 1$, la valeur de δy ne renfermera au plus que les $n - 1$ arbitraires δc_1, δc_2, $\delta c_3, \ldots \delta c_{n-1}$, et, par conséquent, l'équation (a), qui détermine δy, ne peut plus être au plus que du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre ; donc A_n devra être nul. Donc, si l'équation $A_n = 0$ s'accorde avec la proposée $f = 0$, ce qu'on vérifiera en les combinant l'une avec l'autre, le résultat de l'élimination de y_n entre ces équations, renfermera toutes les solutions singulières simples de la proposée (*).

Rem. I. — Les raisonnements précédents supposent que l'hypo-

(*) Dans le Mémoire d'après lequel ce 1° a été rédigé, Legendre cherche à démontrer que la solution singulière simple la plus générale d'une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables, renferme au plus $n - 1$ constantes arbitraires, mais sa démonstration repose sur un cercle vicieux. En effet, supposer, comme il le fait, que les solutions singulières simples peuvent se déduire de l'intégrale générale sans différences par la variation des constantes arbitraires, c'est déjà admettre que les solutions singulières simples renferment moins de constantes arbitraires que l'intégrale générale, partant, qu'elles en renferment au plus $n - 1$; c'est donc admettre ce qu'il s'agit de prouver. Le théorème que Legendre a cherché à établir doit donc être démontré d'une manière indépendante, comme nous l'avons fait, d'après Duhamel, dans l'introduction à la présente section ; puisque la théorie de Lagrange ne nous semble, en dernière analyse, légitimement établie, qu'en prenant le théorème en question pour point de départ. En effet, de quel droit pourrait-on chercher à déduire les solutions singulières de l'intégrale générale par la variation des constantes arbitraires, si l'on n'a démontré d'abord que toute solution d'une équation différentielle donnée, qui ne rentre pas dans l'intégrale générale de cette équation (et c'est là la seule définition admissible des solutions singulières, parce qu'elle ne préjuge rien sur leur nature), renferme moins d'arbitraires que cette intégrale ?

thèse qui annulle A_n, ne rende infini aucun des coefficients A_{n-1}, $A_{n-2}, \dots A_1, A_0$, ce qu'on ne peut assurer avoir lieu généralement que quand l'équation $f = 0$ ne renferme pas de fonctions transcendantes des variables x, y, y_1, y_2, y_n, et qu'elle est délivrée de tout radical ou de tout dénominateur renfermant une ou plusieurs de ces variables.

Rem. II. — Il peut se faire que l'hypothèse qui donne $A_n = 0$ entraîne aussi les équations $A_{n-1} = 0$, $A_{n-2} = 0, \dots A_{n-p} = 0$. C'est lorsque la solution singulière simple la plus générale ne renferme que $n - p - 1$ constantes arbitraires.

2° Après avoir constaté que les solutions singulières simples de $f = 0$ entraînent toutes l'équation $A_n = 0$, Legendre ne s'est pas arrêté à former la fonction A_n. Or, en variant l'équation :

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

dans l'hypothèse de δx nul, on a :

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{df}{dy_1}\right)\delta\frac{dy}{dx} + \left(\frac{df}{dy_2}\right)\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)\delta\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big) + \left(\frac{df}{dy_n}\right)\delta\frac{d^ny}{dx^n} = 0,$$

ou, en écrivant les termes en sens inverse et transposant les caractéristiques d et δ :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)\frac{d^n\delta y}{dx^n} + \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} + \dots + \left(\frac{df}{dy_2}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \left(\frac{df}{dy_1}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{df}{dy}\right)\delta x = 0. \quad (b)$$

En comparant cette équation (b) terme à terme avec l'équation (a), on a :

$$A_n = \left(\frac{df}{dy_n}\right).$$

Donc, toutes les solutions singulières simples de $f = 0$ entraînent $\left(\frac{df}{dy_n}\right) = 0$; ce qu'il fallait prouver.

Rem. — Il résulte de ce qui précède que les solutions singulières simples qui sont données par des équations différentielles d'ordre $n-p$, sans constantes arbitraires, satisferont à la fois aux équations :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dy_{n-2}}\right)=0,\ \ldots\ \left(\frac{df}{dy_{n-p-1}}\right)=0.$$

b. Deuxième cas. — *L'équation* $f=0$ *est résolue par rapport à* y_n, *c'est-à-dire est de la forme* $y_n=\varpi\,(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\cdots y_{n-1})$. — Elle renfermera généralement alors des radicaux et des dénominateurs. Dans ce cas, nous disons que toutes les solutions singulières simples de la proposée sont comprises dans les équations :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\ \ldots\ \left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}.$$

Pour le prouver, nous employerons une analyse analogue à celle du R. P. Caraffa (*voir* page 1032). Soit :

$$F\,(x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1},a)=0,$$

l'une des intégrales premières complètes de la proposée. Si nous appelons :

$$a=\varphi\ (x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},y_n)$$

la valeur de a tirée de sa dérivée complète immédiate :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)y_1+\left(\frac{dF}{dy_1}\right)y_2+\ldots+\left(\frac{dF}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}+\left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right)y_n=0,$$

en substituant φ à a dans $F=0$, nous aurons :

$$F\,[x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1},\varphi\,(x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},y_n)]=0,$$

et si l'on substitue, dans cette dernière, à y_n sa valeur ϖ, on tombera nécessairement sur une identité :

$$F\,[x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},\varphi\,\{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},\varpi\,(x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1})\}]\backsim 0.$$

Or, en dérivant cette identité partiellement par rapport à x, à y, à y_1,... enfin à y_{n-1}, on a :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy_1}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right)\right] = 0,$$

. . . .

$$\left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) + \left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right)\right] = 0,$$

d'où :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)}, \quad \left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)},$$

$$\left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy_1}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)}, \ldots \left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right)}{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\varpi}\right)}.$$

Mais les solutions singulières simples répondent aux équations :

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy_1}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) = \frac{1}{0}.$$

Or, l'équation $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, donne à la fois :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right) = \frac{1}{0};$$

et les équations :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy_1}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) = \frac{1}{0},$$

entraînent respectivement les suivantes :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\dots \left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}.$$

Donc, quand l'équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables a la forme :

$$y_n - \varpi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) = 0$$

toutes ses solutions singulières simples satisfont aux équations :

$$\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{d\varpi}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\dots \left(\frac{d\varpi}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0},$$

prises isolément ou simultanément.

Rem. — Cette deuxième partie de la deuxième démonstration ne suppose pas, comme la première partie de cette même démonstration, que ϖ soit une fonction algébrique de $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$.

Théorème II. — *Quelle que soit la forme de l'équation différentielle donnée, l'application du théorème I conduira toujours aux mêmes solutions singulières simples et en même nombre.*

Dém. — En effet, si $F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a) = 0$ est une des intégrales premières complètes de l'équation différentielle $f=0$, on sait que toutes les solutions singulières simples de $f=0$ répondent aux équations :

$$\left(\frac{dF}{da}\right)=0,\quad \left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\dots \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}. \quad (1)$$

Mais ces équations restent identiquement les mêmes, lorsque F reste la même. Et comme l'intégrale d'une équation différentielle reste la même, quelle que soit la forme qu'on donne à l'équation différentielle, pourvu que la relation de y à x, qui constitue cette équation, ne soit pas altérée, il s'ensuit que, quelle que soit la forme d'une équation différentielle, ses solutions singulières sont les mêmes et en même nombre. Par conséquent, puisque toutes ses solutions singulières sont renfermées dans les équations :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dy_1}\right)=\frac{1}{0},\dots \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)=\frac{1}{0}, \qquad (2)$$

ces équations conduiront toujours aux mêmes solutions singulières simples et en même nombre, quelle que soit la forme de f; ce qu'il fallait prouver.

Rem. — La seule influence de cette forme est de faire rentrer dans une des équations (2) des solutions singulières simples que donnait primitivement une autre de ces équations (2), et réciproquement.

Théorème III. — *On peut toujours mettre une équation différentielle du* $n^{ème}$ *ordre à deux variables, lorsqu'elle est fonction algébrique de* x, y, y_1, y_2,... y_n, *sous une forme telle, que toutes ses solutions singulières simples se déduisent de la transformée uniquement par l'élimination de* y_n *entre cette transformée et sa dérivée partielle relative à* y_n, *égalée à zéro.*

Dém. — En effet, il suffit de faire disparaître de la proposée les dénominateurs et les radicaux qu'elle renferme, transformation toujours possible.

Remarque générale. — On pourrait construire les équations différentielles du $n^{ème}$ ordre à deux variables par un procédé analogue à celui que nous avons indiqué (page 1038) pour le premier ordre ; et cette construction donnerait à la fois les courbes qui répondent aux intégrales particulières, et celles qui répondent aux solutions singulières.

Exemples servant d'application à la théorie de Laplace et de Legendre :

Exemple I. — *Déterminer les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f=y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y^2}{dx^4}-\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$$

Solution. — On ne peut appliquer à cette équation que la condition $\left(\frac{df}{dy_2}\right) = 0$. Cette condition donne :

$$\frac{x^2}{2} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x = 0,$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 + 4x\frac{dy}{dx}}{4(1+x^2)},$$

valeur qui, substituée dans la proposée, donne la solution singulière :

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{x^3}{2} + x\right)\frac{dy}{dx} - \frac{x^4}{16} - y(1+x^2) = 0.$$

Ex. II. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle :*

$$x\frac{d^2y^2}{dx^4} - 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + x = 0,$$

au moyen des variations.

Solution. — On a :

$$2\left(x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} - 2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, on a :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx},$$

valeur qui, substituée dans l'équation proposée, donne :

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{dy^2}{dx^2} + x = 0,$$

ou :

$$\frac{dy^2}{dx^2} - x^2 = 0.$$

C'est la solution singulière cherchée.

II. — Théorie de Poisson et de Lagrange.

A. — Méthode de Poisson.

Elle se base sur un théorème dû à ce géomètre.

a. Théorème de Poisson. — *Toute équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables peut être transformée en une autre équivalente, formée de deux facteurs, dont le premier renferme toutes les solutions singulières simples de la proposée, et dont le second n'est plus satisfait par ces solutions.*

Dém. — Soit :

$$y_{n-1} = \varphi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, z) \qquad (\alpha)$$

une fonction de $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$, et z, z étant une nouvelle variable que nous substituerons à y dans la proposée :

$$y_n = \varpi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}). \qquad (a)$$

De (α) on tire :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) \frac{dz}{dx}. \qquad (\beta)$$

Mais, en substituant (α) dans (a), il vient :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varpi\,[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, \varphi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, z)]. \qquad (b)$$

Comparant (b) et (β), on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1}$$
$$- \varpi\,[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, \varphi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, z)]$$
$$+ \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) \frac{dz}{dx} = 0.$$

Il faut donc maintenant décomposer cette équation en deux facteurs, dont l'un renferme les solutions singulières simples de (a), et dont l'autre ne puisse être réduit à zéro par aucune de ces solutions. Le premier facteur devra être de l'ordre $n-1$, et le second, du $n^{ème}$ ordre. Or, le moyen le plus simple d'opérer une décomposition semblable, est de poser :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)y_1+\left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{d\varphi}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}$$
$$=\varpi\left[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, \varphi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, z)\right],$$

équation qui réduit la précédente à :

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=0, \qquad (A)$$

et qui aura toujours lieu, si $y_{n-1}=\varphi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, z)$ est une intégrale première complète de la proposée, z étant une constante arbitraire.

L'équation (A) a la forme voulue par le théorème, car en remplaçant z par a dans $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$, l'on voit que ce facteur sera de l'ordre $n-1$; de plus, si, dans le facteur $\frac{dz}{dx}$, on remplace z par sa valeur tirée de l'équation (α), ce facteur sera de l'ordre n en y. Le premier facteur, égalé à zéro, donnera évidemment les solutions singulières simples de la proposée, s'il y en a. L'équation (A) démontre donc le théorème de Poisson.

Rem. — On voit que si toutes les solutions singulières simples d'une équation différentielle donnée, $f=0$, pouvaient se déduire de l'élimination de a entre les équations $F=0$ et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $F=0$ étant une des intégrales premières complètes de $f=0$, et a une constante arbitraire, le théorème de Poisson serait absolument vrai. Mais, comme toutes les solutions singulières simples de $f=0$ ne résultent pas toujours du seul système $\left[F=0, \left(\frac{dF}{da}\right)=0\right]$, le théorème en question n'est entièrement vrai, ou du moins entièrement démontré que pour les équations différentielles dont l'intégrale $F=0$ est une fonction algébrique, délivrée de radicaux et de dénominateurs variables. On voit, de plus, que la transformation nécessaire pour mettre une équation $f = 0$ sous la forme (A), exige la connaissance d'une intégrale première complète de cette équation.

b. Du théorème de Poisson, on déduit les deux règles suivantes pour la recherche des solutions singulières simples :

Règle I. — *Pour trouver les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, on décompose cette équation en deux facteurs : l'un, renfermant* $\frac{d^n y}{dx^n}$, *l'autre, ne renfermant pas cette dérivée; si le deuxième facteur, égalé à zéro, ne satisfait pas au premier, aussi égalé à zéro, il renfermera les solutions singulières simples de la proposée.*

Règle II. — *Pour trouver les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, on résout cette équation par rapport à* $\frac{d^n y}{dx^n}$, *et on cherche le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction obtenue pour* $\frac{d^n y}{dx^n}$; *ce plus grand commun diviseur, égalé à zéro, renferme les solutions singulières cherchées.*

Dém. — Supposons que l'équation $f(x, y, y_1, y_2, \dots y_n) = 0$ soit d'elle-même ou ait été mise sous la forme :

$$s.\ f_1(x, y, y_1, y_2, \dots y_n) = 0,$$

s ne renfermant pas y_n et l'équation $s = 0$ renfermant toutes les solutions singulières simples de la proposée. On peut toujours concevoir la fonction f_1 mise sous la forme :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) + \chi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) \frac{d^n y}{dx^n},$$

les fonctions ψ et χ n'ayant plus de facteur commun, de sorte qu'on a :

$$s\left[\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) + \chi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) \cdot \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0. \qquad (B)$$

Or cette équation donne :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{s.\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1})}{s.\chi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1})} = \frac{P}{Q},$$

valeur qui prend la forme $\frac{0}{0}$ pour les solutions singulières simples renfermées dans $s = 0$.

Rem. I. — L'équation $s = 0$ doit satisfaire aux équations $f = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, et ne pas satisfaire à l'équation :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) + y_n \chi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) = 0,$$

pour renfermer réellement les solutions singulières de $f = 0$.

Rem. II. — La méthode de Poisson ne peut pas toujours nous conduire aux solutions singulières simples, puisqu'elle suppose que l'équation $f = 0$ ait la forme (B), et que, dans les calculs qui servent à déterminer $\frac{d^n y}{dx^n}$, on ait soin de ne pas laisser échapper le facteur qui doit donner à y_n la forme $\frac{0}{0}$.

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - (y - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Solution. — On en tire :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx}}{y - x^2}.$$

Pour que cette expression devienne $\frac{0}{0}$, il faut qu'on ait à la fois :

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad y - x^2 = 0.$$

La valeur $y - x^2 = 0$ satisfait à :

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0,$$

ainsi qu'à la proposée; mais elle satisfait aussi à l'intégrale deuxième de cette proposée, savoir : $2a^2 + 2ax + x^2 - \frac{b}{a} e^{\frac{x}{a}} - y = 0$, lorsqu'on fait, dans cette intégrale, $a = 0$ et $b = 0$. L'équation $y - x^2 = 0$ n'est donc qu'une intégrale particulière. La méthode ne nous dit pas si l'équation proposée a ou non des solutions singulières : on vérifierait du reste, par les autres procédés, qu'il n'existe pas de solutions singulières dans cet exemple.

Ex. II. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Sol. — On a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx} - 2x}.$$

Cette expression devient $\frac{0}{0}$ quand on pose $\frac{dy}{dx} - 2x = 0$. Cette équation satisfaisant à la proposée, sans satisfaire à l'autre facteur $\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ de cette proposée, est une solution singulière.

B. — Méthode de Lagrange.

Elle repose sur un théorème dû à ce savant :

a. Théorème de Lagrange. — *Lorsqu'une équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables admet une solution singulière, on peut toujours la mettre sous une forme telle, que sa dérivée immédiate se décompose en deux facteurs, dont l'un donne les solutions singulières par l'élimination de* $\frac{d^ny}{dx^n}$ *avec la proposée, tandis que l'autre n'est plus satisfaite par la solution singulière.*

Dém. — Soit :

$$f(x, y, y_1, y_2, \dots y_n) = 0, \qquad (a)$$

l'équation différentielle proposée, et soit :

$$F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a) = 0,$$

l'une de ses intégrales premières complètes. L'équation proposée résultera de l'élimination de a entre les équations :

$$F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a) = 0, \tag{α}$$

et :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) y_n = 0. \tag{β}$$

Appelons :

$$a = \varphi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n) \tag{γ}$$

la valeur de a tirée de (β) ; en la substituant dans (α), on aura la proposée, savoir :

$$F\,[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \varphi\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n)] = 0, \tag{δ}$$

en ce sens que, si les équations (a) et (δ) ne se confondent pas, on passera de (a) à (δ) en multipliant (a) par une fonction convenablement choisie de $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n$. Or, en différentiant (δ), on trouve :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) y_n$$
$$+ \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] = 0.$$

Mais la somme des $n + 1$, premiers termes de cette expression, est identiquement nulle, puisqu'on a substitué pour a dans F sa valeur tirée de l'équation (β). La dérivée de l'équation (δ) se réduit donc à :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] = 0, \tag{a'}$$

équation qui se décompose en deux :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0, \tag{b}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right) y_{n+1} = 0. \tag{c}$$

L'équation (c), qui est du $(n+1)^{\text{ème}}$ ordre, a évidemment pour intégrale du $n^{\text{ème}}$ ordre, l'équation (δ) ; mais elle est également satisfaite par l'équation du $n^{\text{ème}}$ ordre (γ). Donc, en éliminant y_n entre (γ) et (δ), on aura l'intégrale deuxième de (c) ou l'intégrale première de (δ). Mais, comme y_n n'est contenu que dans φ, l'élimination de y_n entre les équations (γ) et (δ), donnera le même résultat que l'élimination de φ ; ce résultat sera, par conséquent, l'équation (α). Ainsi, le deuxième facteur de (a'), c'est-à-dire la dérivée de (a), est satisfaite par l'intégrale première de (a). — Examinons maintenant l'équation (b), qui peut être considérée comme une équation primitive du $n^{\text{ème}}$ ordre, et sans constante arbitraire de l'équation (a'). En éliminant y_n entre (δ) et (b), on aura une nouvelle équation primitive de (a'), et, partant, de (a), qui sera différente de (α). Or, comme y_n n'est contenu que dans φ, l'élimination de φ donnera le même résultat que l'élimination de y_n, et comme éliminer φ entre (δ) et (b) est la même chose qu'éliminer a entre (α) et $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, il en résulte que l'élimination de y_n entre $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$ et (δ) donnera la solution singulière de (a), s'il y en a. Ainsi, l'équation (a') satisfait aux conditions du théorème de Lagrange. Ce théorème est donc démontré.

Rem. I. — On voit, par l'analyse précédente, qu'à moins qu'on ne connaisse l'une des intégrales générales premières d'une équation différentielle du $n^{\text{ème}}$ ordre à deux variables, il n'existe pas de moyen direct de mettre cette équation sous une forme telle que sa différentielle se décompose en deux facteurs, dont l'un renferme les solutions singulières simples, et dont l'autre fournit une équation du $(n+1)^{\text{ème}}$ ordre débarrassée de ces solutions. On voit aussi que le théorème de Lagrange suppose que l'équation proposée a l'une de ses intégrales premières, fonction algébrique de $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, a$, puisqu'il suppose que toute solution singulière simple de cette proposée est renfermée dans le résultat de l'élimination de a entre l'intégrale première considérée, et sa dérivée partielle relative à a, égalée à zéro ; ce qui n'a pas lieu en général.

Rem. II. — Si on peut faire en sorte que les solutions singulières simples d'une équation différentielle donnée ne satisfassent plus aux dérivées successives de cette équation, on peut aussi, par des transformations convenables, donner à ces dérivées une forme telle que les solutions singulières simples y satisfassent encore. C'est ce dont on pourrait s'assurer sur des exemples.

Rem. III. — Les solutions singulières simples d'une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables, dont $F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, a) - y_{n-1} = 0$ désigne une des intégrales premières complètes, ne satisfont aux m premières dérivées successives de la proposée, que lorsqu'on a à la fois :

$$\left(\frac{d^n y}{dx^{n-1}da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+1} y}{dx^n da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+2} y}{dx^{n+1}da}\right) = 0, \dots \left(\frac{d^{n+m} y}{dx^{n+m-1}da}\right) = 0,$$

ou :

$$\left(\frac{d^n x}{dy^{n-1}da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+1} x}{dy^n da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+2} x}{dy^{n+1}da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+m} x}{dy^{n+m-1}da}\right) = 0,$$

selon qu'on considère y comme fonction de x et de a, ou x comme fonction de y et de a. C'est ce qu'on démontrerait comme au chapitre I.

Conséquence I. — Si on avait à la fois :

$$\left(\frac{d^n y}{dx^{n-1}da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+1} y}{dx^n da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+2} y}{dx^{n+1}da}\right) = 0, \dots \text{ à l'}\infty,$$

ou :

$$\left(\frac{d^n x}{dy^{n-1}da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+1} x}{dy^n da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^{n+2} x}{dy^{n+1}da}\right) = 0, \dots \text{ à l'}\infty,$$

la solution singulière simple deviendrait une intégrale particulière.

Conséquence II. — On peut encore déduire de ce qui précède que si l'équation $f = 0$ est algébrique en $x, y, y_1, y_2, \dots y_n$, toutes ses solutions singulières simples résulteront de l'élimination de y_n entre les équations $f=0$ et $\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0$. En effet, différentions complétement l'équation $f=0$, en regardant y et ses dérivées comme fonctions de a, nous aurons :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^n da}\right)+\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)\left(\frac{d^n y}{dx^{n-1}da}\right)+\dots+\left(\frac{df}{dy_1}\right)\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)=0. \quad (1)$$

Mais pour les solutions singulières de $f=0$, on a :

$$\left(\frac{dy}{da}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2y}{dx\,da}\right)=0,\quad \left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)=0,\dots \left(\frac{d^n y}{dx^{n-1}da}\right)=0,$$

et comme :

$$\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right),\quad \left(\frac{df}{dy_{n-2}}\right),\dots \left(\frac{df}{dy_1}\right),\quad \left(\frac{df}{dy}\right),$$

ne peuvent devenir infinis, si on a eu soin de délivrer l'équation $f=0$ de radicaux et de dénominateurs, on devra avoir $\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0$, à moins que $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^n\,da}\right)$ ne soit nul. Mais alors, si $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^n\,da}\right)=0$, une différentiation par rapport à x de l'équation (1) donnera nécessairement $\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0$, à moins que $\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+1}\,da}\right)$ ne soit nul; et ainsi de suite; or, pour qu'il y ait une solution singulière simple, on devra tomber sur une quantité $\left(\frac{d^{n+i}y}{dx^{n+i-1}\,da}\right)$ qui ne soit pas nulle (*voyez* conséquence I), et on aura, par conséquent, $\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0$. Donc si, dans cette dernière équation, on substitue à y_n sa valeur tirée de $f=0$, on aura toutes les solutions singulières simples de l'équation proposée ; ce qu'il fallait prouver.

Conséquence III. — Il est dans le $n^{ème}$ ordre une classe d'équations différentielles qui ont toujours une solution singulière simple. En effet, prenons la différentielle complète de $f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$, on aura :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right) dy_n + \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right) dy_{n-1} + \ldots + \left(\frac{df}{dy_1}\right) dy_1 + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dx}\right) dx = 0.$$

Or, si cette équation se réduit d'elle-même à :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right) dy_n = 0,$$

elle aura toujours une solution singulière simple ; et le facteur $dy_n = 0$ conduira à son intégrale générale, car $dy_n = 0$ donne, par $n + 1$ intégrations successives :

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
y_n = c_1, \\
y_{n-1} = c_1 x + c_2, \\
y_{n-2} = \dfrac{c_1 x^2}{2!} + \dfrac{c_2 x}{1} + c_3, \\
y_{n-3} = \dfrac{c_1 x^3}{3!} + \dfrac{c_2 x^2}{2!} + \dfrac{c_3 x}{1} + c_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_2 = \dfrac{c_1 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dfrac{c_2 x^{n-3}}{(n-3)!} + \dfrac{c_3 x^{n-4}}{(n-4)!} + \ldots + \dfrac{c_{n-2} x}{1} + c_{n-1}, \\
y_1 = \dfrac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{c_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dfrac{c_3 x^{n-3}}{(n-3)!} + \ldots + \dfrac{c_{n-2} x^2}{2!} + \dfrac{c_{n-1} x}{1} + c_n,
\end{array}\right.$$

$$(3)\quad y = \frac{c_1 x^n}{n!} + \frac{c_2 x^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{c_3 x^{n-3}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{c_{n-2} x^3}{3!} + \frac{c_{n-1} x^2}{2!} + \frac{c_n x}{1} + c_{n+1}.$$

Mais comme l'équation cherchée n'est que du $n^{\text{ème}}$ ordre, son intégrale ne devra renfermer que n constantes. Donc, si dans $f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$, on substitue à $y, y_1, y_2, \ldots y_n$ leurs valeurs précédentes, on devra nécessairement tomber sur une équation entre les $n + 1$ constantes, par laquelle il faudra déterminer l'une d'elles en fonction des n autres qui resteront arbitraires. Posons donc :

$$c_{n+1} = \psi\,(c_1, c_2, c_3, \ldots c_n). \tag{4}$$

Les équations (2) et (4) donnent :

$$c_1 = \frac{d^n y}{dx^n},$$

$$c_2 = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x}{1},$$

$$c_3 = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x}{1} + \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^2}{2!},$$

$$c_4 = \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} - \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.\frac{x}{1} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x^2}{2!} - \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^3}{3!},$$

. . . .

$$c^n = \left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{x}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{x^2}{2!} - \frac{d^4y}{dx^4}.\frac{a^3}{3!} + \cdots \\ + (-1)^n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (-1)^{n+1}.\frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{array}\right],$$

$$c_{n+1} = \psi\,(c_1, c_2, c_3, \ldots c_n).$$

Si on multiplie ces équations respectivement par $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$, $\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}$, ... $\frac{x}{1}$, 1, qu'ensuite on les ajoute, qu'on réduise le second membre de la résultante, et qu'on substitue au premier sa valeur donnée par l'équation (3), l'équation différentielle cherchée sera :

$$y = \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^n}{n!} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}.\frac{d^3y}{dx^3}.\frac{x^3}{3!} + (-1)^n.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{x^2}{2!} + (-1)^{n+1}\frac{dy}{dx}.\frac{x}{1}$$

$$+ \psi\left[\begin{array}{l} \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x}{1}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x^1}{1} + \frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^2}{2!}, \ldots, \\ \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{x}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ + (-1)^{n+1}.\frac{d^n y}{dx^n}.\frac{x^n}{n!} \end{array}\right],$$

dont l'intégrale générale est l'équation des courbes paraboliques :

$$y = \frac{c_1 x^n}{n!} + \frac{c_2 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_3 x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$

$$+ \frac{c_{n-1} x^2}{2!} + \frac{c_n x}{1} + \psi(c_1, c_2, c_3, \ldots c_n).$$

b. Du théorème de Lagrange, on déduit les deux règles suivantes pour la détermination des solutions singulières simples :

Règle I. — *Pour trouver les solutions singulières simples d'une équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, il faut tâcher de décomposer la dérivée de cette équation en deux facteurs, dont l'un du* $n^{\text{ème}}$ *ordre, et l'autre du* $(n+1)^{\text{ème}}$ *ordre. Les équations qui résulteront de l'élimination de* y_n *entre le premier facteur, égalé à zéro, et l'équation proposée, seront les solutions singulières cherchées, si elles ne sont pas renfermées comme cas particuliers dans les intégrales complètes.*

Règle II. — *Les hypothèses qui satisfont aux deux équations résultant de l'élimination de* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *ou de* $\frac{d^n x}{dy^n}$ *entre l'équation différentielle proposée et chacune des deux équations qui expriment que le numérateur et le dénominateur de la valeur de* $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$ *ou de* $\frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}$ *deviennent nuls, sont des solutions singulières simples de la proposée, si elles ne sont pas comprises comme cas particuliers dans les intégrales complètes.*

Dém. — Nous avons vu, dans le théorème de Lagrange, que si :

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, a) = 0,$$

est une des intégrales premières complètes d'une équation différentielle donnée :

$$f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

il faut que cette équation différentielle donnée ait la forme :

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, \varphi) = 0,$$

(φ étant la valeur de a en $x, y, y_1, y_2, \dots y_n$, tirée de la dérivée immédiate de l'intégrale complète), pour que sa dérivée puisse se décomposer en deux facteurs, dont l'un, du $n^{ème}$ ordre, conduise aux solutions singulières simples. Or il pourra arriver que les équations $f = 0$ et $F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \varphi) = 0$ ne coïncident pas. Mais alors elles ne pourront différer que par un multiplicateur, fonction de $x, y, y_1, y_2, \dots y_n$. Soit M ce facteur, en sorte qu'on ait identiquement :

$$f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n) \equiv M . F[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \varphi].$$

On en tirera :

$$F[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \varphi] \equiv \frac{f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n)}{M},$$

d'où, en dérivant :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right) y_2 + \left(\frac{dF}{dy_2}\right) y_3 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) y_n \\
&+ \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] \\
&\equiv \frac{1}{M}\left[\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{df}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{df}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] \\
&- \frac{f}{M^2}\left[\left(\frac{dM}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dM}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{dM}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{dM}{dy_n}\right) y_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Or si on remarque que :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right) y_2 + \left(\frac{dF}{dy_2}\right) y_3 + \dots + \left(\frac{dF}{dy_{n-1}}\right) y_n = 0,$$

on aura :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{df}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{df}{dy_n}\right) y_{n+1} \\
&\equiv M\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] \\
&+ \frac{f}{M}\left[\left(\frac{dM}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dM}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{dM}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{dM}{dy_n}\right) y_{n+1}\right] = 0
\end{aligned}$$

pour la dérivée du premier membre de $f=0$. Or on satisfait à cette dérivée, indépendamment de y_{n+1}, en posant :

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0 \quad \text{et} \quad f \backsim M.\,F(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \varphi)=0,$$

et on sait qu'en éliminant y_n entre ces dernières, l'équation résultante donne les solutions singulières de la proposée. Mais on ne peut satisfaire à l'équation :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)y_1+\left(\frac{df}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)y_n+\left(\frac{df}{dy_n}\right)y_{n+1}=0,$$

indépendamment de y_{n+1}, qu'en posant :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)y_1+\left(\frac{df}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)y_n=0,$$

et :

$$\left(\frac{df}{dy_n}\right)=0.$$

L'existence de ces solutions singulières entraîne donc ces dernières équations, et donne à la valeur de y_{n+1}, tirée de la dérivée de la proposée, la forme :

$$y_{n+1}=-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)y_1+\left(\frac{df}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{df}{dy_{n-1}}\right)y_n}{\left(\frac{df}{dy_n}\right)}=\frac{0}{0}.$$

Donc, si nous appelons :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n)=0,$$

et :

$$\chi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n)=0,$$

les facteurs qui rendent respectivement nuls le numérateur et le dénominateur de la valeur de y_{n+1}. En éliminant y_n entre chacune des équations $\psi=0$, $\chi=0$ et la proposée $f=0$, on obtiendra deux équations en x, y, y_1, $y_2, \ldots y_{n-1}$; et les hypothèses qui satisferont simultanément à ces équations seront des solutions singulières simples de $f = 0$, si toutefois elles ne sont pas renfermées comme cas particuliers dans les intégrales complètes. — En considérant à son tour x comme fonction de y, on verrait que les solutions singulières simples donnent aussi la forme $\frac{0}{0}$ à la dérivée $\frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}$; ce qui démontre la règle II.

Rem. I. — Il est facile de voir que les coefficients différentiels :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}, \quad \frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}, \ldots \quad \text{et} \quad \frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+2}x}{dy^{n+2}}, \quad \frac{d^{n+3}x}{dy^{n+3}}, \ldots$$

prendront tous la forme $\frac{0}{0}$.

Rem. II. — La théorie de Lagrange ne s'applique généralement qu'aux équations différentielles qui ont une intégrale première fonction algébrique de x, y, y_1, $y_2, \ldots y_{n-1}$ et de la constante.

Exemple. — Soit l'équation différentielle :

$$x \frac{d^2y^2}{dx^4} - 2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x = 0.$$

On en tire :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d^2y^2}{dx^4} - 1}{2\left(x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)}.$$

Pour exprimer que cette dérivée prend la forme $\frac{0}{0}$, on pose :

$$\frac{d^2y^2}{dx^4} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{dy^2}{dx^2} - x^2 = 0,$$

qui est une solution singulière simple de la proposée. L'intégrale générale de cette équation, savoir : $y = \pm \frac{x^2}{2} + C$, sera aussi une solution singulière simple de l'équation différentielle donnée.

III. — Théorie de M. Timmermans.

Si l'on suppose que l'équation différentielle donnée :

$$f(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n) = 0$$

est une fonction algébrique de x, y, y_1, $y_2, \cdots y_n$, et qu'on raisonne d'une manière analogue à celle que nous avons employée au n° III, § II, art. I du chapitre précédent, nous aurons le théorème : *Pour obtenir les solutions singulières simples d'une équation différentielle de forme algébrique, il faut résoudre cette équation par rapport à* y_n. *Si la valeur obtenue ne renferme pas de radical, il n'y a pas de solution singulière; dans le cas contraire, on égale à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux, ou en dehors de ces radicaux comme facteurs; et si les équations ainsi obtenues satisfont à la proposée, sans satisfaire aux intégrales de cette proposée, elles seront les solutions singulières cherchées.*

Exemple. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y^2}{dx^4} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Solution. — En résolvant cette équation par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{4} \pm \sqrt{y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2}}}{1 + x^2}.$$

Or on fait évanouir le radical de cette expression, en posant :

$$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

C'est la solution singulière cherchée.

§ III. — DÉTERMINATION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES PAR LA MÉTHODE DES COEFFICIENTS ET DES EXPOSANTS A DÉTERMINER.

La méthode de Trembley, exposée au § III de l'article I du chapitre précédent, peut s'étendre aux équations différentielles des ordres supérieurs. En effet : *On tâche de reconnaître la forme des solutions singulières simples; on donne à la fonction qui doit les représenter des coefficients et des exposants indéterminés, et on substitue la valeur qui en résulte dans l'équation différentielle proposée. Cette dernière, devant devenir identique par cette substitution, fournira les relations nécessaires pour évaluer les coefficients et les exposants inconnus.*

Exemple. — *Trouver les solutions singulières simples de l'équation différentielle du second ordre :*

$$x \frac{d^2y^2}{dx^4} - 2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x = 0.$$

Solution. — A l'inspection attentive de l'équation, on voit que la valeur de y doit être une fonction quelconque d'une puissance de x. On posera donc :

$$y = \alpha x^\beta + C,$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\beta x^{\beta - 1},$$

et :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha\beta (\beta - 1) x^{\beta - 2},$$

valeurs qui, substituées dans la proposée, donnent :

$$\alpha^2\beta^2 (\beta - 1) (\beta - 3) x^{2\beta - 3} = - x.$$

Or, pour que cette équation devienne identique, il faut que les coefficients et les exposants de x soient respectivement égaux. Il faut donc que l'on ait :

$$2\beta - 3 = 1,$$

et :

$$\alpha^2\beta^2(\beta-1)(\beta-3)=-1.$$

La première équation donne $\beta=2$, valeur qui, substituée dans la seconde, conduit à :

$$-4\alpha^2=-1;\quad \text{d'où}\quad \alpha=\pm\frac{1}{2}.$$

La solution singulière simple cherchée est donc :

$$y=\pm\frac{x^2}{2}+C.$$

ARTICLE II. — DISTINCTION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES SIMPLES ET DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES.

§ I. — ON CONNAIT DES INTÉGRALES.

MÉTHODE PREMIÈRE.

A.

THÉORÈME I. — L'équation dont il s'agit de déterminer la nature est déduite d'une intégrale première et elle est d'ordre $n-1$; dans ce cas, on distinguera si elle est une solution singulière ou une intégrale particulière de la manière suivante : *Une équation* $s=0$ *en* x, y, y_1, y_2, $\cdots$ y_{n-1}, *déduite de l'une des intégrales premières* $F_i^{(1)}=0$ *de l'équation différentielle donnée* $f(x, y, y_1, y_2, \cdots y_n)=0$, *sera une intégrale particulière, si l'élimination de* y_{n-1} *entre* $s=0$ *et* $F_i^{(1)}=0$ *donne à la constante arbitraire une valeur constante déterminée, ou une valeur en* x, y, y_1, y_2, $\cdots$ y_{n-2} *satisfaisant à l'intégrale première donnée de* $f=0$; *dans tout autre cas, l'équation* $s=0$ *sera une solution singulière.*

Dém. — Appelons :

$$F_i^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, c_i)=0,$$

et :

$$F_k^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, c_k)=0,$$

deux des n intégrales premières complètes de :

$$f(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

$F_i^{(1)} = 0$ étant celle dont on a déduit l'équation $s = 0$. Si $s = 0$ est une intégrale particulière, alors, ou $s = 0$ se déduira de $F_i^{(1)} = 0$ pour $c_i = \gamma_i$, en sorte que :

$$s = F_i^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \gamma_i) = 0;$$

ou bien $s = 0$ se déduira d'une autre quelconque des intégrales premières, de $F_k^{(1)} = 0$, par exemple, pour $c_k = \gamma_k$. Examinons ces deux cas :

Premier cas. — On reconnaîtra que le premier cas aura lieu si, en éliminant y_{n+1} entre $s = 0$ et $F_i^{(1)} = 0$, on trouve pour c_i une valeur constante de γ_i ; alors $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}$ s'en iront d'eux-mêmes.

Deuxième cas. — Éliminons y_{n-1} entre $s = 0$ et $F_i^{(1)} = 0$, on aura un résultat de la forme :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, c_i) = 0. \qquad (\alpha)$$

Mais, en éliminant la $(n-1)^{ème}$ dérivée y_{n-1} entre les deux équations :

$$F_i^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad F_k^{(1)} = 0,$$

on obtient une intégrale deuxième de $f = 0$, savoir :

$$F_{i,k}^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, c_i, c_k) = 0. \qquad (\beta)$$

Or pour $c_k = \gamma_k$, on a :

$$s = F_k^{(1)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, y_{n-1}, \gamma_k) = 0.$$

Donc l'élimination de y_{n-1} entre $s = 0$ et $F_i^{(1)} = 0$ donnera le même résultat que l'élimination de y_{n-1} entre $F_k^{(1)} = 0$ et $F_i^{(1)} = 0$, pourvu que, dans le résultat de cette deuxième élimination, on change c_k en γ_k. On aura donc :

$$F_{i,k}^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, c_i, \gamma_k) = 0, \qquad (\gamma)$$

pour le résultat de l'élimination de y_{n-1} entre $s=0$ et $F_i^{(1)}=0$. On a donc :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_i) \backsim F_{i,k}^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_i, \gamma_k) = 0.$$

Or (γ) est une valeur particulière de (β) ; donc :

$$\psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_i) = 0$$

est une intégrale particulière ; et comme elle satisfait comme telle à $f=0$, elle satisfera également à $F_i^{(1)}=0$, qui est une intégrale première complète $f=0$.

Théorème II. — Nous supposerons encore, comme dans le théorème I, que l'équation $s=0$ est déduite d'une des intégrales premières de $f=0$, mais nous supposerons, de plus, que l'équation $s=0$ est d'ordre $n-p$. Dans ce cas, nous aurons ce théorème : *Pour décider si une équation* $s=0$ *d'ordre* $n-p$ *et déduite d'une intégrale première* $F_i^{(1)}=0$, *est une solution singulière ou une intégrale particulière, il faut déduire de* $s=0$ *les dérivées complètes* $\frac{ds}{dx}=0$, $\frac{d^2s}{dx^2}=0, \ldots \frac{d^{p-1}s}{dx^{p-1}}$; *puis, tirer de ces équations* $y_{n-p}, y_{n-p+1}, \cdots y_{n-1}$; *si ces valeurs, substituées dans* $F_i^{(1)}=0$, *donnent à* c_i *une valeur constante, ou conduisent à une relation entre* $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-p+1}, c_i$, *satisfaisant à* $F_i^{(1)}=0$, *l'équation* $s=0$ *sera une intégrale particulière; dans tout autre cas,* $s=0$ *sera une solution singulière.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème I.

B.

L'équation $s=0$, dont il s'agit de déterminer la nature, est déduite d'une intégrale d'ordre $n-m$.

a. En outre, $s=0$ est d'ordre $n-m$. On a alors le théorème suivant :

Téorème III. — *Pour décider si une équation* $s=0$, *d'ordre* $n-m$, *déduite d'une intégrale complète de même ordre, est une solution singulière ou une intégrale particulière, il faut éliminer* y_{n-m} *entre* $s=0$ *et* $F_i^{(m)}=0$. *Si l'on obtient pour résultat une relation entre les con-*

stantes de $F_i^{(m)} = 0$ *seules, ou une équation de l'ordre* $n - m - 1$, *satisfaisant à* $F_i^{(m)} = 0$, *alors* $s = 0$ *sera une intégrale particulière; dans le cas contraire, ce sera une solution singulière.*

Dém. — Analogue à celle du théorème I.

b. L'équation $s = 0$ est d'ordre $n - m - q$. On a alors le théorème ci-après :

THÉORÈME IV. — *Pour décider si une équation* $s = 0$, *d'ordre* $n - m - q$, *et déduite d'une intégrale complète* $F_i^{(m)} = 0$ *d'ordre* $n - m$ *de* $f = 0$, *est une solution singulière ou une intégrale particulière de* $f = 0$, *il faut déduire de* $s = 0$ *les dérivées complètes* $\frac{ds}{dx} = 0$, $\frac{d^2s}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3s}{dx^3} = 0, \ldots \frac{d^qs}{dx^q} = 0$, *puis, tirer de ces équations* y_{n-m-q}, $y_{n-m-q+1}$, $y_{n-m-q+2}, \ldots y_{n-m}$; *si ces valeurs, substituées dans* $F_i^{(m)} = 0$, *donnent une relation entre les constantes seulement, ou une relation d'ordre* $n - m - q - 1$, *satisfaisant à l'équation* $F_i^{(m)} = 0$, *alors* $s = 0$ *sera une intégrale particulière, sinon une solution singulière.*

(*Voir*, pour la démonstration, le théorème I.)

Remarque. — Nous avons toujours supposé que l'équation dont il s'agit de déterminer la nature était d'un ordre égal ou inférieur à l'ordre de l'intégrale complète dont on l'avait déduite. Mais lorsque cette intégrale est d'ordre $n - m$, il peut arriver que l'équation $s = 0$ soit d'un ordre supérieur à $n - m$. Dans ce cas, avant d'appliquer les théorèmes précédents, il faudrait, par des différentiations successives, élever l'ordre de l'intégrale donnée, jusqu'à ce qu'il devienne au moins égal à celui de $s = 0$, ou, par des intégrations successives, abaisser l'ordre de l'équation $s = 0$, jusqu'à ce qu'il devienne au plus égal à celui de l'intégrale donnée.

MÉTHODE DEUXIÈME.

Par des calculs analogues à ceux que nous avons exposés au § I[er] de l'article I du chapitre I, on arriverait aux théorèmes suivants, qui ne sont qu'une généralisation de ceux de M. Timmermans.

THÉORÈME I. — *Si on résout, par rapport à la constante arbitraire qu'elle contient, l'une des intégrales premières complètes d'une équation différentielle donnée du* n^ème^ *ordre à deux variables, tout facteur placé en dehors d'un radical et qui, égalé à zéro, fait évanouir ce radical, ne satisfait à la proposée que lorsqu'il réduit l'intégrale à une constante; et quand il y satisfait, c'est toujours comme intégrale particulière.*

THÉORÈME II. — *Si on résout, par rapport à la constante arbitraire qu'elle contient, l'une des intégrales premières complètes d'une équation différentielle donnée du* n^ème^ *ordre à deux variables, toute fonction placée sous un radical, et qui, égalée à zéro, fait évanouir ce radical, satisfait à la proposée. Elle y satisfait comme intégrale particulière, si elle réduit à une constante ce qui reste de l'intégrale complète après l'évanouissement du radical, ou si, en éliminant* $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *entre elle et la valeur restante de la constante, l'équation résultante satisfait à l'intégrale complète; dans tout autre cas, elle est une solution singulière.*

Remarque. — De la théorie de M. Timmermans, on pourrait déduire les procédés donnés dans ce chapitre, à l'article I, § I, n° I.

EXEMPLE. — *Décider si l'équation* $y + x\frac{dy}{dx} = 0$, *qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre :*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1}$$

dont l'une des intégrales premières est :

$$x^4\frac{dy^2}{dx^2} - 2ax^2\frac{dy}{dx} + a^2 - y - x\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1'}$$

est une solution singulière ou une intégrale particulière.

Solution. — En résolvant (1′) par rapport à a, on a :

$$a = x^2\frac{dy}{dx} \pm \sqrt{y + x\frac{dy}{dx}}.$$

Le radical s'évanouit lorsqu'on pose :

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Cette dernière équation satisfait donc à (1) et réduit la valeur de a à :

$$a - x^2\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre (2) et (3), on trouve $a + xy = 0$, valeur qui satisfait à (1'). L'équation (2) est donc une intégrale particulière.

§ II. — ON NE CONNAIT PAS D'INTÉGRALE.

Dans ce cas, on distinguera les solutions singulières des intégrales particulières par le théorème suivant :

Toute fonction qui, égalée à zéro, satisfait à une équation différentielle algébrique en $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n$, *et fait évanouir un radical dans la valeur de* y_n *tirée de cette équation, est une solution singulière ou une intégrale particulière, selon qu'elle est placée sous le radical ou en dehors.*

Remarque. — On pourrait déduire de là les procédés que nous avons exposés au nos I et II du § II de l'article II du présent chapitre. Il serait possible aussi d'étendre aux équations d'ordre supérieur la théorie de Cauchy, que nous avons exposée pour le premier ordre page 1113. Mais le temps, qui nous presse, ne nous permet pas d'essayer cette extension d'ailleurs fort utile.

ARTICLE III. — ÉTANT DONNÉ UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU $n^{ème}$ ORDRE A DEUX VARIABLES, Y INTRODUIRE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES OU EN SUPPRIMER.

§ I. — SUPPRESSION DE SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Lorsqu'une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à deux variables comporte une solution singulière, il y a deux moyens de la transformer en une autre qui n'ait plus de solution singulière. Ces deux moyens sont le *changement de variable* et la *différentiation*. Le premier est dû à Poisson : il se fonde sur le théorème de ce géomètre exposé à la page 1188. Le deuxième, dû à Lagrange, repose sur le théorème que nous avons donné à la page 1192. Le premier moyen a un avantage sur le second : c'est de simplifier l'équation différentielle donnée, sans en élever l'ordre. Mais l'un et l'autre ont le désavantage d'exiger, pour être pratiqués, la connaissance de l'une des intégrales premières complètes.

§ II. — INTRODUCTION DE SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Voici la généralisation du procédé que Lagrange a donné pour la solution de ce problème.

Pour obtenir l'équation différentielle du $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, dont l'équation* $\mathrm{s} = 0$ *du* $(\mathrm{n} - \mathrm{p})^{\text{ème}}$ *ordre et sans constante arbitraire, soit une solution singulière, et dont l'équation du* $(\mathrm{n} - \mathrm{m})^{\text{ème}}$ *ordre :*

$$F^{(m)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-m}, c_1, c_2, c_3, \ldots c_m, c_{m+1}) = 0$$

soit une intégrale complète $\mathrm{m}^{\text{ème}}$, $\mathrm{c}_{\mathrm{m}+1}$ *étant fonction des autres constantes; il faudra :*

1° *Tirer des* $\mathrm{m} + 1$ *équations :*

$$F^{(m)} = 0,\ D_x F^{(m)} = 0,\ D_x^2 F^{(m)} = 0, \ldots\ D_x^{m-1} F^{(m)} = 0,\ D_x^m F^{(m)} x = 0,$$

les valeurs de $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3, \ldots \mathrm{c}_\mathrm{m}, \mathrm{c}_{\mathrm{m}+1}$ *en fonction de* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y}_\mathrm{n}$. *Soient :*

$$(\alpha)\begin{cases} c_1 = \varphi_1(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \\ c_2 = \varphi_2(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_m = \varphi_m(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \\ c_{m+1} = \varphi_{m+1}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \end{cases}$$

les valeurs obtenues.

2° *De* $D_x^p s = 0$, $D_x^{p-1} s = 0$, $D_x^{p-2} s = 0, \dots$ $D_x^{p-n+m-1} s = 0$, *tirer les valeurs de* $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots y_m, y_{m-1}$, *et substituer ces valeurs dans* (α), *alors on aura :*

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l} c_1 = \chi_1 (x, y, y_1, y_2, \dots y_{m-2}), \\ c_2 = \chi_2 (x, y, y_1, y_2, \dots y_{m-2}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_m = \chi_m (x, y, y_1, y_2, \dots y_{m-2}), \\ c_{m+1} = \chi_{m+1} (x, y, y_1, y_2, \dots y_{m-2}). \end{array}\right.$$

3° *Éliminer entre ces* m + 1 *équations, les* m *inconnues :*

$$x, y, y_1, y_2, \dots y_{m-2},$$

on aura une relation :

$$\Phi (c_1, c_2, c_3, \dots c_m, c_{m+1}) = 0 \qquad (\gamma)$$

entre les m + 1 *constantes de l'équation* $F^{(m)} = 0$.

4° *Substituer dans la relation* (γ) *aux* m + 1 *constantes leurs valeurs* (α); *l'équation résultante :*

$$\Phi (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_m, \varphi_{m+1}) = 0,$$

sera l'équation différentielle cherchée. — Quant à l'intégrale $n^{\text{ème}}$ *de cette équation, on l'obtiendra en tirant de* (γ) *la valeur de* c_{m+1}, *savoir :*

$$c_{m+1} = \psi (c_1, c_2, c_3, \dots c_m),$$

et en la substituant dans $F^{(m)} = 0$. *Cette intégrale* $m^{\text{ème}}$ *sera donc :*

$$F^{(m)} [x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-m}, c_1, c_2, c_3, \dots c_m, \psi (c_1, c_2, c_3, \dots c_m)] = 0.$$

Remarque. — Dans le théorème précédent, on a toujours $p < n$ et $m < n$. Les cas les plus remarquables de ce théorème sont ceux où $p = n - 1$, $p = 1$, $m = n - 1$, $m = 1$.

Exemple. — ***Trouver une équation différentielle du deuxième ordre, qui ait pour solution singulière l'équation*** $\frac{dy}{dx} - Ay = 0$, ***et pour intégrale géné-***

rale deuxième, l'équation $F^{(2)} = y - \frac{c_1 x^2}{2} - c_2 x - c_3 = 0$, c_3 *étant une fonction de* c_1 *et* c_2 *qui reste à déterminer.*

Solution. — On a :

$$D_x F^{(2)} = \frac{dy}{dx} - c_1 x - c_2 = 0,$$

$$D_x^{\,2} F^{(2)} = \frac{d^2y}{dx^2} - c_1 = 0,$$

Ces équations, jointes à $F^{(2)} = 0$, donnent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{d^2y}{dx^2}, \\ c_2 &= \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}, \\ c_3 &= y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}. \end{aligned} \right.$$

De

$$\frac{dy}{dx} - Ay = 0,$$

on tire :

$$\left. \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - Ay = 0, \\ &\frac{d^2y}{dx^2} - A\frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Éliminant x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, entre les équations (1) et (2), on obtient :

$$c_1^{\,2} + A^2(c_2^{\,2} - 2c_1 c_3) = 0, \tag{3}$$

et en remplaçant c_1, c_2, c_3, par leurs valeurs (1), on trouve l'équation différentielle cherchée, savoir :

$$\frac{d^2y^2}{dx^4} - 2A^2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy^2}{dx^2} = 0. \tag{4}$$

Tirant de (3) la valeur de c_3 et la substituant dans $F^{(2)} = 0$, on obtient l'équation :

$$y - \frac{c_1 x^2}{2} - c_2 x - \frac{c_1^{\,2} + A^2 c_2^{\,2}}{2A^2 c_1} \tag{5}$$

pour l'intégrale complète et sans différences de l'équation (4).

SOUS-CHAPITRE II.

SOLUTIONS SINGULIÈRES MULTIPLES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU $n^{ème}$ ORDRE A DEUX VARIABLES.

Pour obtenir les solutions singulières $m^{èmes}$ d'une équation différentielle $f=0$ du $n^{ème}$ ordre à deux variables, sans passer par les solutions singulières premières, deuxièmes,... $(m-1)^{èmes}$, il n'y a pas d'autre moyen que de se baser sur la connaissance d'intégrales complètes de $f=0$.

A.

1° Nous savons qu'on déduit des solutions singulières simples $s_1=0$ de $f=0$, au moyen de son intégrale deuxième :

$$F^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_1, c_2)=0,$$

en éliminant les inconnues :

$$\frac{dc_2}{dc_1}, \; c_1, \; c_2,$$

entre les quatre équations :

$$F^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_1, c_2)=0, \tag{1}$$

$$dF^2=\varphi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, c_1, c_2)=0, \tag{2}$$

$$d'F^{(2)}=\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right)dc_1+\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right)dc_2=0,$$

$$dd'F^{(2)}=d'dF^{(2)}=\left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right)dc_1+\left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right)dc_2=0.$$

Or l'élimination de $\frac{dc_2}{dc_1}$ entre ces deux dernières équations, donne :

$$\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right)-\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right)=0. \tag{3}$$

Donc, si on élimine c_1 et c_2 au moyen des équations (1) et (2), on aura les solutions singulières simples $s_1=0$. Appelons :

$$c_1=\varpi_1(x, y, y_1, \dots y_{n-1}),$$
$$c_2=\varpi_2(x, y, y_1, \dots y_{n-1}),$$

les valeurs de c_1 et de c_2 tirées des équations (2) et (3), nous aurons :

$$s_1=F^{(2)}[x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varpi_1, \varpi_2]=0. \tag{4}$$

Maintenant, pour avoir des solutions singulières doubles $s_2=0$ de $f=0$, c'est-à-dire des solutions simples de $s_1=0$, il faut déduire de $\frac{ds_1}{dx}=0$, la valeur de y_n et exprimer que cette valeur devient $\frac{0}{0}$. Or :

$$\frac{ds_1}{dx}=\left(\frac{dF^{(2)}}{dx}\right)+\left(\frac{dF^{(2)}}{dy}\right)y_1+\left(\frac{dF^{(2)}}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{dF^{(2)}}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}$$
$$+\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_1}\right)\frac{d\varpi_1}{dx}+\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_2}\right)\frac{d\varpi_2}{dx}=0,$$

équation qui, à cause de (2), se réduit à :

$$\frac{ds_1}{dx}=\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_1}\right)\frac{d\varpi_1}{dx}+\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_2}\right)\frac{d\varpi_2}{dx}. \tag{5}$$

Mais :

$$\frac{d\varpi_1}{dx}=\left(\frac{d\varpi_1}{dx}\right)+\left(\frac{d\varpi_1}{dy}\right)y_1+\left(\frac{d\varpi_1}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{d\varpi_1}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}+\left(\frac{d\varpi_1}{dy_{n-1}}\right)y_n,$$

$$\frac{d\varpi_2}{dx}=\left(\frac{d\varpi_2}{dx}\right)+\left(\frac{d\varpi_2}{dy}\right)y_1+\left(\frac{d\varpi_2}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{d\varpi_2}{dy_{n-2}}\right)y_{n-2}+\left(\frac{d\varpi_2}{dy_{n-1}}\right)y_n.$$

Substituons ces valeurs dans (5), et résolvons l'équation résultante par rapport à y_n, nous aurons :

$$y_n = -\frac{\left[\begin{array}{l}\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varpi_1}{dx}\right)+\left(\frac{d\varpi_1}{dy}\right)y_1+\left(\frac{d\varpi_1}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{d\varpi_1}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}\right]\\ +\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varpi_2}{dx}\right)+\left(\frac{d\varpi_2}{dy}\right)y_1+\left(\frac{d\varpi_2}{dy_1}\right)y_2+\dots+\left(\frac{d\varpi_2}{dy_{n-2}}\right)y_{n-1}\right]\end{array}\right]}{\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_1}\right)\left(\frac{d\varpi_1}{dy_{n-1}}\right)+\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_2}\right)\left(\frac{d\varpi_2}{dy_{n-1}}\right)}.$$

Or pour que cette expression devienne $\frac{0}{0}$, il faut poser :

$$\left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_1}\right)=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF^{(2)}}{d\varpi_2}\right)=0,$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right)=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right)=0.$$

Ainsi, on aura des solutions singulières doubles $s_2=0$ de $f=0$, au moyen de l'intégrale deuxième $F^{(2)}=0$, en éliminant les constantes de cette intégrale au moyen des équations :

$$\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right)=0, \quad \left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right)=0.$$

2° Voyons maintenant comment on déduirait ces mêmes solutions singulières doubles $s_2=0$ d'une intégrale troisième de $f=0$, savoir :

$$F^{(3)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-3}, c_1, c_2, c_3)=0.$$

On sait que l'on aura l'intégrale :

$$F^{(2)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}, c_1, c_2)=0,$$

en éliminant la constante c_3 entre les équations $F^{(3)}=0$ et $dF^{(3)}=\varphi'=0$.

L'équation $\varphi'=0$ pourra donc tenir lieu de $F^{(2)}=0$, pourvu que dans $\varphi' = 0$ on considère c_3 comme une fonction de c_1, c_2, $x, y, y_1, \dots y_{n-3}$ donnée par $F^{(3)} = 0$; par conséquent, les équations $\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right) = 0$ et $\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right) = 0$, pourront être remplacées par les suivantes :

$$\left(\frac{d\varphi'}{dc_1}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dc_3}\right)\left(\frac{dc_3}{dc_1}\right) = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\varphi'}{dc_2}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dc_3}\right)\left(\frac{dc_3}{dc_2}\right) = 0,$$

$\left(\frac{dc_3}{dc_1}\right)$ et $\left(\frac{dc_3}{dc_2}\right)$ étant donnés par les équations :

$$\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_1}\right) + \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right)\left(\frac{dc_3}{dc_1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right) + \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right)\left(\frac{dc_3}{dc_2}\right) = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{dc_3}{dc_1}\right) = -\frac{\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_1}\right)}{\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right)}, \quad \left(\frac{dc_3}{dc_2}\right) = -\frac{\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right)}{\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right)}.$$

Ainsi les solutions singulières doubles résulteront de l'élimination de c_1, c_2, c_3, entre les équations :

$$F^{(3)} = 0,$$

$$dF^{(3)} = \varphi' = 0, \tag{α}$$

$$\left(\frac{d\varphi'}{dc_1}\right)\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right) - \left(\frac{d\varphi'}{dc_3}\right)\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_1}\right) = 0, \tag{β}$$

$$\left(\frac{d\varphi'}{dc_2}\right)\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right) - \left(\frac{d\varphi'}{dc_3}\right)\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right) = 0. \tag{γ}$$

3° Examinons, enfin, comment de $F^{(3)} = 0$, on pourrait déduire des solutions singulières simples de $s_2 = 0$, c'est-à-dire des solutions singulières triples de $f = 0$. A cet effet, soient :

$$c_1 = \varpi'_1\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}),$$

$$c_2 = \varpi'_2\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}),$$

$$c_3 = \varpi'_3\,(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-2}).$$

les valeurs de c_1, c_2, c_3, tirées des équations (α), (β), (γ), nous aurons :

$$s_2 = F^{(3)}[x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-3}, \varpi'_1, \varpi'_2, \varpi'_3] = 0.$$

Maintenant, pour avoir des solutions singulières triples $s_3 = 0$ de $f = 0$, il faut déduire de $\frac{ds_2}{dx}$ la valeur de y_{n-1} et exprimer que cette valeur devient $\frac{0}{0}$. Or :

$$\frac{ds_2}{dx} = \left(\frac{dF^{(3)}}{dx}\right) + \left(\frac{dF^{(3)}}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dF^{(3)}}{dy_1}\right) y_2 + \dots + \left(\frac{dF^{(3)}}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2}$$
$$+ \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_1}\right) \frac{d\varpi'_1}{dx} + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_2}\right) \frac{d\varpi'_2}{dx} + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_3}\right) \frac{d\varpi'_3}{dx} = 0;$$

équation qui, à cause de (α), devient :

$$\frac{ds_2}{dx} = \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_1}\right) \frac{d\varpi'_1}{dx} + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_2}\right) \frac{d\varpi'_2}{dx} + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_3}\right) \frac{d\varpi'_3}{dx} = 0.$$

Mais :

$$\frac{d\varpi'_1}{dx} = \left(\frac{d\varpi'_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_1}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_1}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2} + \left(\frac{d\varpi'_1}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1},$$
$$\frac{d\varpi'_2}{dx} = \left(\frac{d\varpi'_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_2}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_2}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2} + \left(\frac{d\varpi'_2}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1},$$
$$\frac{d\varpi'_3}{dx} = \left(\frac{d\varpi'_3}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_3}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_3}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2} + \left(\frac{d\varpi'_3}{dy_{n-2}}\right) y_{n-1}.$$

Substituant ces valeurs dans (δ), et résolvant par rapport à y_{n-1}, nous obtenons :

$$y_{n-1} = - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_1}\right)\left[\left(\frac{d\varpi'_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_1}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_1}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2}\right] \\ + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_2}\right)\left[\left(\frac{d\varpi'_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_2}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_2}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2}\right] \\ + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_3}\right)\left[\left(\frac{d\varpi'_3}{dx}\right) + \left(\frac{d\varpi'_3}{dy}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{d\varpi'_3}{dy_{n-3}}\right) y_{n-2}\right] \end{array} \right\}}{\left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_1}\right)\left(\frac{d\varpi'_1}{dy_{n-2}}\right) + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_2}\right)\left(\frac{d\varpi'_2}{dy_{n-2}}\right) + \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_3}\right)\left(\frac{d\varpi'_3}{dy_{n-2}}\right)}.$$

Or cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$, quand on pose :

$$\left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_2}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{d\varpi'_3}\right)=0,$$

ou :

$$\left(\frac{dF^{(3)}}{dc_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right)=0.$$

Ainsi des solutions singulières triples résulteront de l'élimination de c_1, c_2, c_3 entre les quatre équations :

$$F^{(3)}=0,\ \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_2}\right)=0,\quad \left(\frac{dF^{(3)}}{dc_3}\right)=0.$$

En continuant ainsi, on arrive aux deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *On obtiendra des solutions singulières* m^{èmes} *d'une équation différentielle du* n^{ème} *ordre à deux variables* $f=0$, *en éliminant d'une intégrale* m^{ème} *de cette équation les* m *constantes qu'elle renferme, au moyen des* m *équations obtenues en égalant à zéro les* m *dérivées partielles de cette intégrale, prises successivement par rapport à chacune des constantes.*

Théorème II. — *On obtiendra des solutions singulières* m^{èmes} *d'une équation différentielle du* m^{ème} *ordre à deux variables* $f=0$, *en éliminant les* $mp+m+p$ *inconnues :*

$$\left(\frac{dc_{m+1}}{dc_1}\right),\quad \left(\frac{dc_{m+2}}{dc_1}\right),\ \ldots\ \left(\frac{dc_{m+p}}{dc_1}\right),$$

$$\left(\frac{dc_{m+1}}{dc_2}\right),\quad \left(\frac{dc_{m+2}}{dc_2}\right),\ \ldots\ \left(\frac{dc_{m+p}}{dc_2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dc_{m+1}}{dc_m}\right),\quad \left(\frac{dc_{m+2}}{dc_m}\right),\ \ldots\ \left(\frac{dc_{m+p}}{dc_m}\right),$$

$$c_1,\quad c_2,\quad c_3,\ \ldots\ c_m,$$

$$c_{m+1},\quad c_{m+2},\quad c_{m+3},\ \ldots\ c_{m+p},$$

entre les équations :

$$F^{(m+p)}(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-m-p}, c_1, c_2, \dots c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, c_{m+p}) = 0$$

$$D_x F^{(m+p)} = \varphi_1 = 0, D_x^2 F^{(m+p)} = \varphi_2 = 0, \dots D_x^{p-1} F^{(m+p)} = \varphi_{p-1} = 0, D_x^p F^{(m+p)} = \varphi_p = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dc_1} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dc_2} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dc_3} = 0, \dots \frac{d\varphi_1}{dc_m} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dc_1} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dc_2} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dc_3} = 0, \dots \frac{d\varphi_2}{dc_m} = 0,$$

. . . .

$$\frac{d\varphi_p}{dc_1} = 0, \quad \frac{d\varphi_p}{dc_2} = 0, \quad \frac{d\varphi_p}{dc_3} = 0, \dots \frac{d\varphi_p}{dc_m} = 0,$$

$$\frac{dF^{(m+p)}}{dc_1} = 0, \quad \frac{dF^{(m+p)}}{dc_2} = 0, \quad \frac{dF^{(m+p)}}{dc_3} = 0, \dots \frac{dF^{(m+p)}}{dc_m} = 0,$$

chacune des constantes $c_1, c_2, c_3, \dots c_m$ *étant considérée comme fonction des* p *autres constantes* $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots c_{m+p}$.

Remarque. — Il résulte évidemment de l'analyse sur laquelle est basée la démonstration des deux théorèmes précédents, que ces théorèmes ne donneront, en général, toutes les solutions singulières $m^{\text{èmes}}$ de $f = 0$, qu'autant que les intégrales complètes des divers ordres de $f = 0$ seront des fonctions algébriques, rationnelles et entières.

Exemple. — *Trouver les solutions singulières doubles de l'équation différentielle du second ordre :*

$$f = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2} - \left[\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 - \frac{d^2y^2}{dx^4} = 0,$$

dont l'intégrale générale deuxième est :

$$F^{(2)} = y - \frac{c_1 x^2}{2} - c_2 x - c_1^2 - c_2^2 = 0.$$

Solution. — On a :

$$\left(\frac{dF^{(2)}}{dc_1}\right) = -\frac{x^2}{2} - 2c_1 = 0, \quad \left(\frac{dF^{(2)}}{dc_2}\right) = -x - 2c_2 = 0,$$

d'où :

$$c_1 = -\frac{x^4}{4}, \quad \text{et} \quad c_2 = -\frac{x}{2},$$

valeurs qui, substituées dans $F^{(2)} = 0$, donnent :

$$s_2 = 16y + 4x^2 + x^4 = 0.$$

C'est la solution singulière double cherchée.

On l'aurait encore trouvée en appliquant à la solution singulière première qui est, comme nous le savons :

$$s_1 = y\,(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)\frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

les méthodes exposées dans le sous-chapitre précédent. En effet, en résolvant l'équation $s_1 = 0$, par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + 2x}{4} \pm \sqrt{x^6 + 4x^2 + 4x^4 + x^4 + 16y + 16x^2y}.$$

On fait évanouir le radical, en posant :

$$x^6 + x^4 + 4x^4 + 4x^2 + 16x^2y + 16y = 0,$$

ou :

$$(1 + x^2)(16y + 4x^2 + x^4) = 0.$$

Le premier facteur $1 + x^2 = 0$, ne satisfait pas à l'équation $s_1 = 0$. Le second :

$$10y + 4x^2 + x^4 = 0,$$

y satisfait; et comme il est placé au-dessous du radical, il est une solution singulière simple de $s_1 = 0$; c'est, par conséquent, la solution singulière double de $f = 0$, déjà trouvée directement.

B.

Théorème III. — *Les solutions singulières multiples d'une équation différentielle du* n$^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, ne peuvent satisfaire à cette équation, quel que soit leur degré de multiplicité.*

Dém. — En effet, si l'équation $s_1 = 0$ de l'ordre $n - 1$ admet une solution singulière s_2 de l'ordre $n - 2$, d'après le théorème de Lagrange (*voir* page 1153 et suiv.), on tirera de $f=0$ une valeur de y_n qui ne coïncidera pas avec celle que fournit la dérivée de $s_1=0$; donc, l'équation $s_2=0$, qui satisfait comme solution singulière à l'équation $s_1=0$, ne satisfait pas à la proposée dont s_1 est déjà une solution singulière. Puisque $s_2=0$ ne satisfait pas à $f=0$, $s_3=0$, qui satisfait à $s_2=0$, ne saurait non plus satisfaire à $f=0$, et ainsi de suite. Donc, etc.

C.

THÉORÈME IV. — *Il ne peut exister d'équations primitives, d'ordre inférieur à* n — 1, *qui satisfassent à l'équation* f = 0 *du* n$^{\text{ème}}$ *ordre à deux variables, sans satisfaire aux équations primitives complètes ou singulières du* (n — 1)$^{\text{ème}}$ *ordre de* f = 0.

Dém. — Voici, à peu près, comment Poisson démontre ce théorème (page 239 du XII^{e} cahier du *Journal de l'École polytechnique*) :

1° Il n'y a pas d'équation d'ordre $n-2$ qui satisfasse à $\mathrm{f}=0$, sans satisfaire aux équations primitives complètes ou singulières du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre de $\mathrm{f}=0$. Soient :

$$y_n = \mathrm{f}\,(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}), \tag{1}$$

l'équation donnée du $n^{\grave{e}me}$ ordre, et :

$$y_{n-2} = \mathrm{F}\,(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-3}, c_1, c_2), \tag{2}$$

une de ses primitives complètes du $(n-2)^{\text{ème}}$ ordre. Si l'on considère c_1 et c_2 comme des fonctions convenables de $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-3}$, la fonction F pourra représenter toutes les valeurs de y_{n-2} qui peuvent satisfaire à l'équation (1); et même, comme il suffit pour cela d'une seule de ces deux arbitraires, on pourra établir une relation quelconque entre c_1 et c_2. Or dans l'hypothèse de c_1 et c_2 variables, on a :

$$y_{n-1} = \left[1 + \frac{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_1}\right) D_x\, c_1}{D_x \mathrm{F}} + \frac{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_2}\right) D_x\, c_2}{D_x \mathrm{F}}\right] D_x \mathrm{F},$$

qui se réduit à :

$$y_{n-1} = D_x\mathrm{F},$$

comme dans le cas de c_1 et c_2 constants, lorsqu'on pose :

$$\frac{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_1}\right) D_x c_1 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_2}\right) D_x c_2}{D_x\mathrm{F}} = 0. \qquad (\alpha)$$

Donc, en représentant par $\varphi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_1, c_2)$ la fonction $D_x\mathrm{F}$ qui renferme encore c_1 et c_2, on aura :

$$y_n = \left[1 + \frac{\left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right) D_x c_1 + \left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right) D_x c_2}{D_x\varphi}\right] D_x\varphi.$$

Ces valeurs de y_{n-2}, y_{n-1}, y_n étant substituées dans (1), il vient une équation qui se réduit à :

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right) D_x c_1 + \left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right) D_x c_2}{D_x\varphi} = 0, \qquad (\beta)$$

à cause que (2) doit satisfaire à (1), dans l'hypothèse de c_1 et c_2 constants. Ainsi c_1 et c_2 devront être déterminés au moyen des équations (α) et (β), pour que l'équation (2) satisfasse de la manière la plus générale à l'équation (1) ; et réciproquement, si on substitue dans (2) des valeurs de c_1 et c_2 qui satisfassent d'une manière quelconque aux équations (α) et (β), l'équation (2), ainsi transformée, satisfera à l'équation (1).

Or on satisfera d'abord aux équations (α) et (β) en posant $D_x c_1 = 0$ et $D_x c_2 = 0$, d'où l'on tire c_1 et c_2 constants, ce qui ramène à la primitive (2), dont on est parti. Si on élimine $\frac{D_x c_2}{D_x c_1}$ entre les équations (α) et (β), on obtient :

$$\frac{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right)\left(\frac{d\mathrm{F}}{dc_2}\right)}{D_x\mathrm{F}} = 0, \qquad (\gamma)$$

d'où l'on pourra tirer une valeur de c_2 en fonction de c_1, x, y, y_1,... y_{n-2}, que nous représenterons par $c_2 = \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_1)$. Cette valeur, substituée dans l'une ou l'autre des équations (α) et (β), on aura une équation en x, y, y_1, y_2,... y_{n-2}, $D_x c_1$, dont la primitive complète donnera c_1 en fonction de x, y, y_1, y_2,... y_{n-2}, et d'une constante arbitraire, et dont la primitive singulière donnera c_1 en fonction de x, y, y_1, y_2,... y_{n-2} seulement; et si l'on représente par $c_1 = \varpi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c_3)$ la valeur de c_1 donnée par l'équation primitive complète, c_3 étant la constante arbitraire, on aura la valeur de c_1 qu'on tirerait de la primitive singulière, en considérant c_3 comme une variable donnée par l'équation :

$$\frac{\left(\frac{d\varpi}{dc_3}\right)}{D_x \varpi} = 0. \qquad (\delta)$$

Donc, en substituant ϖ à la place de c_1 dans ψ, et en mettant ensuite les valeurs de c_1 et c_2 dans (2), on aura une valeur de y_{n-2}, savoir :

$$y_{n-2} = \mathrm{F}[x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-3}, \varpi, \psi], \qquad (\varepsilon)$$

qui satisfera à l'équation (1), soit qu'on considère c_3 comme une constante arbitraire, ou bien comme une fonction variable donnée par l'équation (δ). Cette équation (1) du $n^{ème}$ ordre aura donc, en général, deux primitives singulières de l'ordre $n-2$; l'une, renfermant une constante arbitraire c_3, l'autre, n'en renfermant point. Examinons maintenant quel rapport peut exister entre ces deux primitives singulières de l'ordre $n-2$ et la primitive singulière de l'ordre $n-1$ de la même équation (1). Il est évident, quant à l'équation (ε), que lorsqu'on y regarde c_3 comme une constante arbitraire, qu'elle ne peut être que la primitive complète de l'ordre $n-2$ de la primitive singulière de l'ordre $n-1$ de l'équation (1), car, en éliminant c_3 entre l'équation (ε) et sa dérivée complète, on formera une équation de l'ordre $n-1$ sans constante arbitraire, qui devra satisfaire à l'équation (1) et qui sera, par conséquent, sa primitive singulière de l'ordre $n-1$. Si l'équation (ε) est la primitive complète de la primitive singulière d'ordre $n-1$ de l'équation (1), on aura une primitive singulière double et d'ordre $n-2$, en considérant, dans (ε), c_3 comme une variable déterminée au moyen de l'équation :

$$\frac{\left[\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\varpi}\right)\right]\left(\frac{d\varpi}{dc_3}\right)}{D_x F+\left[\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\varpi}\right)\right]D_x\varpi+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)D_x\psi}=0,$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$\frac{\left(\frac{d\varpi}{dc_3}\right)}{D_x F+\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\varpi}\right)\Big]D_x\varpi+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)D_x\psi}=0, \qquad (a)$$

et :

$$\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dF}{d\psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\varpi}\right)=0\,; \qquad (b)$$

d'où il suit qu'il existe, en général, deux primitives singulières doubles, l'une, résultant de l'élimination de c_3 entre les équations (a) et (ε), l'autre, résultant de l'élimination de c_3 entre (b) et (ε). La première satisfait à l'équation (1), dont elle est une primitive singulière d'ordre $n-2$, sans constante arbitraire, car l'équation (a) ne diffère pas de l'équation (δ); la seconde ne satisfait point à l'équation (1), à moins que, dans des cas particuliers, elle ne rentre dans la première. Donc, une équation du $n^{ème}$ ordre, ne peut avoir de primitives de l'ordre $n-2$, qui ne satisfassent en même temps comme primitives complètes ou singulières à ses équations primitives de l'ordre $n-1$.

2° On prouverait de même qu'une équation du $n^{ème}$ ordre ne peut avoir d'équations primitives de l'ordre $n-3$ qui ne satisfassent en même temps comme primitives complètes ou singulières à ses équations primitives de l'ordre $n-2$, et, partant, à ses primitives de l'ordre $n-1$; et ainsi de suite. Le théorème IV est donc prouvé.

Remarque I. — L'inverse du théorème IV n'est pas vrai, car les primitives d'un ordre donné peuvent admettre des primitives singulières d'ordre inférieur, qui ne satisfont pas à l'équation différentielle proposée.

Rem. II. — Du théorème IV, il résulte qu'il y a des solutions singulières multiples qui satisfont à l'équation différentielle proposée, ce qui semble contraire au théorème III; mais, on doit observer que le théorème III ne s'applique qu'aux solutions singulières multiples déduites des théorèmes I et II, lesquelles ne peuvent jamais satisfaire à l'équation différentielle donnée. En effet, les solutions singulières doubles de l'ordre $n-2$ qui ne satisfont pas à l'équation (1), résulteront de l'équation (ε) dans laquelle on aura mis pour c_1 et c_2 leurs valeurs prises dans les équations (γ) et (b), c'est-à-dire dans les équations :

$$\frac{\left(\frac{dF}{dc_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{dc_2}\right)-\left(\frac{d\varphi}{dc_1}\right)\left(\frac{dF}{dc_2}\right)}{D_x F}=0,$$

et :

$$\left(\frac{dF}{dc_1}\right)+\left(\frac{dF}{dc_2}\right)\left(\frac{dc_2}{dc_1}\right)=0.$$

Or on satisfait à ces équations, en posant :

$$\left(\frac{dF}{dc_1}\right)=0, \quad \left(\frac{dF}{dc_2}\right)=0;$$

donc, si on élimine c_1 et c_2 entre les trois équations $F=0$, $\left(\frac{dF}{dc_1}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dc_2}\right)=0$, on aura des solutions singulières doubles de l'équation (1) de l'espèce de celles qui ne satisfont pas à (1) ; ce sont justement celles que donnent les théorèmes I et II. On peut étendre ce raisonnement aux solutions singulières d'un degré de multiplicité plus élevé.

SECTION DEUXIÈME.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A PLUS DE DEUX VARIABLES.

CHAPITRE I.

Des équations différentielles totales.

ARTICLE I. — ÉQUATIONS SATISFAISANT AUX CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ.

§ I. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

L'*intégrale générale* est une relation en termes finis entre la variable dépendante, les variables indépendantes, et une constante arbitraire, relation qui, substituée dans l'équation différentielle, la rend identique. Les cas particuliers, en nombre infini, de l'intégrale générale, sont les *intégrales particulières*. Enfin, les *solutions singulières* sont des équations en termes finis, qui satisfont à l'équation différentielle sans satisfaire aux intégrales. Appelons y la variable dépendante; x_1, x_2, x_3,... x_n, n variables indépendantes; une équation différentielle totale du premier ordre entre ces $n+1$ variables pourra toujours être représentée par :

$$dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3 + \dots + p_n\, dx_n,$$

en faisant :

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = p_1, \quad \left(\frac{dy}{dx_2}\right) = p_2, \quad \left(\frac{dy}{dx_3}\right) = p_3, \dots \left(\frac{dy}{dx_n}\right) = p_n.$$

L'intégrale générale de cette équation $f = 0$, qui est censée satisfaire aux conditions d'intégrabilité, sera représentée par :

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, y, a) = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

I. — Solutions singulières déduites de l'intégrale générale.

Elles s'obtiennent par le théorème suivant :

Théorème. — *Toutes les solutions singulières d'une équation différentielle totale du premier ordre entre* n + 1 *variables, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, sont comprises parmi les équations résultant de l'élimination de la constante de l'intégrale générale, entre cette intégrale, d'une part, et, d'autre part, sa dérivée partielle relative à la constante, égalée à zéro; ou sa dérivée partielle relative à l'une quelconque des variables, égalée à l'infini.*

Dém. — L'équation $f = 0$, résulte de l'élimination de a entre:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, a) = 0 \tag{1}$$

et :

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_2 + \left(\frac{dF}{dx_3}\right) dx_3 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right) dx_n + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = 0. \tag{2}$$

Mais si on regarde a comme une fonction de $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, y$, on aura :

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_1}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_1 + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_2}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_2}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots$$

$$+ \left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_n}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dx_n}\right) dx_n + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF}{dy}\right) dy = 0,$$

équation qui se réduit encore à l'équation (2), en posant simultanément :

$$\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_1}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_2}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_2}\right)}=0,\ldots\frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dx_n}\right)}{\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}=0,\quad \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}=0. \qquad (A)$$

Mais on satisfait à ces équations (A),

1° Soit en posant :

$$\left(\frac{dF}{da}\right)=0; \qquad (\alpha)$$

2° Soit en posant simultanément les $n+1$ équations :

$$\left(\frac{da}{dx_1}\right)=0,\quad \left(\frac{da}{dx_2}\right)=0,\quad \left(\frac{da}{dx_3}\right)=0,\ldots\left(\frac{da}{dx_n}\right)=0,\quad \left(\frac{da}{dy}\right)=0; \qquad (\beta)$$

3° Ou en posant simultanément les $n+1$ équations :

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dx_2}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dx_3}\right)=\frac{1}{0},\ldots\left(\frac{dF}{dx_n}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}; \qquad (\gamma)$$

4° Ou, enfin, en posant simultanément k des équations (β) avec les $n-k+1$ équations non correspondantes du groupe (γ). Et comme les équations (β) donnent $a=$ *constante*, et, partant, conduisent à une intégrale particulière, il en résulte que les solutions singulières de l'équation $f=0$ seront comprises parmi les équations résultant de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des $n+2$ systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.}:\begin{cases}F=0,\\ \left(\frac{dF}{da}\right)=0;\end{cases}\quad 2^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases}F=0,\\ \left(\frac{dF}{dx_1}\right)=\infty;\end{cases}\quad 3^{\text{e}}\text{ syst.}:\begin{cases}F=0,\\ \left(\frac{dF}{dx_2}\right)=\infty;\end{cases}\ldots(n+1)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases}F=0,\\ \left(\frac{dF}{dx_n}\right)=\infty;\end{cases}$$

$$(n+2)^{\text{ème}}\text{ syst.}:\begin{cases}F=0,\\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=\infty;\end{cases}$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque I. — Pour être sûr que les équations déduites des systèmes précédents satisfont réellement à l'équation $f = 0$, il faut s'assurer que les conditions (A) sont satisfaites.

Rem. II. — Lorsque l'équation $F = 0$, sera algébrique, rationnelle et entière en x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$ et y, alors les solutions singulières de $f = 0$, résulteront uniquement de l'élimination de a entre les deux équations :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF}{da}\right) = 0.$$

II. — Solutions singulières déduites de l'équation différentielle elle-même.

Théorème. — *On obtient toutes les solutions singulières d'une équation aux différentielles totales du premier ordre :*

$$dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3 + \ldots + p_n\, dx_n,$$

en prenant parmi toutes les solutions en termes finis qui satisfont aux équations :

$$\left(\frac{dp_1}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_2}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_3}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dp_n}{dy}\right) = \frac{1}{0};$$

$$\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_3}{dx_1}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dp_n}{dx_1}\right) = \frac{1}{0};$$

$$\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_2}{dx_2}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_3}{dx_2}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dp_n}{dx_2}\right) = \frac{1}{0};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dp_n}{dx_n}\right) = \frac{1}{0};$$

celles qui ne satisfont pas à l'intégrale générale.

Dém. — Nous exposerons ici la démonstration de Laplace, en l'étendant à un nombre quelconque de variables, parce qu'elle nous servira, dans l'article suivant, pour la recherche des solutions singulières des équations aux différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité.

Soit donc :

$$dy = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3 + \dots + p_n\,dx_n, \qquad (1)$$

l'équation différentielle donnée, $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ étant des fonctions de $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, y$; et soit, en outre, $s = 0$ une équation satisfaisant à (1) et dont il s'agit de déterminer la nature. Si l'on a :

$$y = \varphi\,(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, a),$$

pour intégrale générale de (1) et qu'on appelle Y la valeur de y correspondante à $x_1 + \alpha_1$, $x_2 + \alpha_2$, $x_3 + \alpha_3, \dots x_n + \alpha_n$, on aura :

$$\begin{aligned} Y = \varphi\,[x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3, \dots x_n + \alpha_n, a] \\ = y + \alpha_1 \left(\frac{dy}{dx_1}\right) + \frac{\alpha_1^2}{1.2} \left(\frac{d^2x}{dx_1^2}\right) + \dots \\ + \alpha_2 \left(\frac{dy}{dx_2}\right) + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{d^2y}{dx_1\,dx_2}\right) + \dots \\ + \alpha_3 \left(\frac{dy}{dx_3}\right) + \frac{\alpha_2^2}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx_2^2}\right) + \dots \\ + \dots\dots + \alpha_1 \alpha_3 \left(\frac{d^2y}{dx_1\,dx_3}\right) + \dots \\ + \alpha_n \left(\frac{dy}{dx_n}\right) + \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{d^2y}{dx_2\,dx_3}\right) + \dots \\ + \frac{\alpha_3^2}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx_3^2}\right) + \dots \\ + \dots\dots\dots + \dots \\ + \frac{\alpha_n^2}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx_n^2}\right) + \dots \\ + \dots \end{aligned}$$

Mais l'équation (1) donne :

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = p_1, \quad \left(\frac{dy}{dx_2}\right) = p_2, \quad \left(\frac{dy}{dx_3}\right) = p_3, \dots \left(\frac{dy}{dx_n}\right) = p_n,$$

d'où l'on tire facilement les valeurs des coefficients différentiels partiels des divers ordres de y. Si de $s = 0$ on tire aussi les valeurs des coefficients différentiels des divers ordres de y, et qu'en particulier on représente ceux du premier ordre par $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$, pour que $s=0$ puisse être une intégrale particulière, il faudra évidemment (*voir* page 1087) qu'on ait à la fois :

$$p_1-q_1=0,\quad p_2-q_2=0,\quad p_3-q_3=0, \ldots p_n-q_n=0,$$

. . . .

Mais puisque $s=0$ fait disparaître les différences $p_1-q_1, p_2-q_2, p_3-q_3, \ldots p_n-q_n, \ldots$ on doit avoir :

$$p_1-q_1=s^{\mu_1}P_1,\quad p_2-q_2=s^{\mu_2}P_2,\quad p_3-q_3=s^{\mu_3}P_3, \ldots p_n-q_n=s^{\mu_n}P_n.$$

Multipliant respectivement ces équations par $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots dx_n$, et ajoutant, on aura :

$$p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3+\ldots+p_n\,dx_n-q_1\,dx_1-q_2\,dx_2-q_3\,dx_3-\ldots-q_n\,dx_n$$
$$=s^{\mu_1}P_1\,dx_1+s^{\mu_2}P_2\,dx_2+s^{\mu_3}P_3\,dx_3+\ldots+s^{\mu_n}P_n\,dx_n,$$

ou, en vertu de (1) :

$$dy-q_1\,dx_1-q_2dx_2-q_3dx_3-\ldots-q_ndx_n=s^{\mu_1}P_1\,dx_1+s^{\mu_2}P_2dx_2+s^{\mu_3}P_3dx_3+\ldots+s^{\mu_n}P_ndx_n.$$

Mais :

$$q_1=-\frac{\left(\frac{ds}{dx_1}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)},\quad q_2=-\frac{\left(\frac{ds}{dx_2}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)},\quad q_3=-\frac{\left(\frac{ds}{dx_3}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)}, \ldots q_n=-\frac{\left(\frac{ds}{dx_n}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)},$$

d'où :

$$-\left(\frac{ds}{dy}\right)[q_1\,dx_1+q_2\,dx_2+q_3\,dx_3+\ldots+q_n\,dx_n]+\left(\frac{ds}{dy}\right)dy$$
$$=\left(\frac{ds}{dx_1}\right)dx_1+\left(\frac{ds}{dx_2}\right)dx_2+\left(\frac{ds}{dx_3}\right)dx_3+\ldots+\left(\frac{ds}{dx_n}\right)dx_n+\left(\frac{ds}{dy}\right)dy=ds;$$

donc :

$$ds=s^{\mu_1}P_1\left(\frac{ds}{dy}\right)dx_1+s^{\mu_2}P_2\left(\frac{ds}{dy}\right)dx_2+s^{\mu_3}P_3\left(\frac{ds}{dy}\right)dx_3+\ldots+s^{\mu_n}P_n\left(\frac{ds}{dy}\right)dx_n.$$

Or, en raisonnant comme à la page 1088, on verrait que, pour que $s=0$ puisse être une intégrale particulière, il faut que le moindre des exposants $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ soit plus grand que 1 ou tout au plus égal à 1.

Cela posé, puisque :

$$p_i = s^{\mu_i} P_i - \frac{\left(\frac{ds}{dx_i}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)},$$

on aura :

$$\left(\frac{dp_i}{dy}\right) = \mu_i s^{\mu_i - 1} P_i \left(\frac{ds}{dy}\right) - \ldots,$$

et, comme pour les solutions singulières $\mu_i < 1$, on voit que, dans ce cas :

$$\left(\frac{dp_i}{dy}\right) = \frac{1}{0},$$

pour $s=0$. Si un autre exposant μ_k était < 1, on aurait :

$$\left(\frac{dp_k}{dy}\right) = \frac{1}{0}.$$

pour $s=0$. Donc, on aura toutes les équations, renfermant y, qui satisfont comme solutions singulières à l'équation (1), en prenant parmi toutes les équations qui satisfont isolément ou simultanément aux suivantes :

$$\left(\frac{dp_1}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_2}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dp_3}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \ldots \left(\frac{dp_n}{dy}\right) = \frac{1}{0},$$

celles qui ne sont pas comprises dans l'intégrale générale.

Mais comme il peut exister des solutions singulières qui ne renferment pas y, il faudra considérer, tour à tour, chacune des variables $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, y$, comme la variable dépendante ; on obtiendra ainsi toutes les autres équations du théorème.

§ II. — ÉQUATIONS DES ORDRES SUPÉRIEURS.

L'absence complète de tout ouvrage sur cette matière, au moins à notre connaissance, et le peu de temps qui nous reste pour achever notre travail, ne permettent pas que nous nous occupions de ce sujet. Nous avons, du reste, pour nous justifier, cette réflexion de Poisson, à propos des solutions singulières des équations différentielles ordinaires à plus de deux variables : « ... Cette recherche, à cause des difficultés qu'elle présente, et qui tiennent aux conditions d'intégrabilité, mérite d'être l'objet spécial d'un autre mémoire (*Journal de l'École polytechnique*, XIII^e cahier, page 64). » Nous dirons cependant que : *en supposant que l'équation différentielle donnée satisfasse aux conditions d'intégrabilité, et que cette équation, d'ordre* m, *soit résolue par rapport à* $d^m y$, *les divers coefficients de cette équation seront les coefficients différentiels partiels des divers ordres de* y; *et qu'on obtiendra les solutions singulières de la proposée, en prenant, parmi les relations qui satisfont aux équations auxquelles on arrive en égalant à l'infini les coefficients différentiels du premier ordre des coefficients de la proposée, pris par rapport aux diverses variables de cette proposée, et aux coefficients différentiels partiels de ces variables, depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre* $m-1$, *celles qui ne sont pas renfermées comme cas particuliers dans les intégrales complètes.*

On aurait pu obtenir les mêmes solutions singulières simples, au moyen d'une intégrale première complète résolue par rapport à $d^{m-1}y$, *en éliminant la constante* a *entre cette intégrale, et sa dérivée partielle relative à* a *et égalée à zéro; ou entre cette intégrale et les équations obtenues en égalant à l'infini les diverses dérivées partielles des coefficients de l'intégrale générale. Bien entendu, que parmi les solutions ainsi obtenues, il ne faut prendre que celles qui ne satisfont pas aux intégrales de la proposée.*

Quant aux solutions singulières multiples, on les obtiendra en appliquant successivement les théorèmes précédents aux solutions singulières simples, pour en déduire les solutions singulières doubles; à celles-ci, pour en déduire les solutions singulières triples, etc.

ARTICLE II. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES NE SATISFAISANT PAS AUX CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ.

I

Monge, dans un travail inséré à la page 502 des *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris,* pour 1784, a montré que « l'objet « des équations connues sous le nom de *conditions d'intégrabilité,* « n'est pas,... d'indiquer celles de ces équations différentielles « (totales) dont les intégrales sont possibles, mais de faire connaître « le nombre des équations finies simultanées dont doivent être compo- « sées les intégrales qui sont toujours possibles. » La recherche des solutions singulières des équations aux différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, au moyen des intégrales, se ramène donc à la recherche des solutions singulières dans un système d'équations simultanées. Mais nous devons observer que, lorsqu'il est impossible de satisfaire à une équation différentielle par une seule relation intégrale entre toutes les variables et des constantes, il peut exister une solution singulière excessivement remarquable, en ce qu'elle consiste en une relation unique entre toutes les variables. Supposons qu'on ait les deux équations :

$$F_1(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0, \tag{1}$$

et :

$$F_2(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0; \tag{2}$$

il résultera de ce système que deux quelconques des variables, y et z, par exemple, sont des fonctions de la troisième ; or en posant : $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = q$, et en différentiant les proposées, ce qui donne :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dy}\right) p + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \left(\frac{dF_2}{dy}\right) p + \left(\frac{dF_2}{dz}\right) q = 0, \tag{4}$$

on pourra éliminer les constantes c_1, c_2, c_3, entre les équations (1), (2), (3) et (4), ce qui conduira à une équation aux différentielles totales ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité. Les équations (1) et (2), qui renferment autant de constantes arbitraires qu'il est possible d'en éliminer par la différentiation poussée jusqu'au premier ordre seulement, doivent être regardées comme représentant conjointement l'intégrale complète de $f = 0$. Mais on peut encore satisfaire à l'équation $f = 0$ en d'autres manières. En effet, les équations (3) et (4) auront encore lieu, quand on regardera c_1, c_2, c_3, comme variables, pourvu qu'on ait simultanément :

$$(A)\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{dF_1}{dc_1}\right) dc_1 + \left(\dfrac{dF_1}{dc_2}\right) dc_2 + \left(\dfrac{dF_1}{dc_3}\right) dc_3 = 0,\\[2ex] \left(\dfrac{dF_2}{dc_1}\right) dc_1 + \left(\dfrac{dF_2}{dc_2}\right) dc_2 + \left(\dfrac{dF_2}{dc_3}\right) dc_3 = 0.\end{array}\right.$$

On peut satisfaire à ces équations de vingt-cinq manières différentes, en regardant c_1, c_2, c_3, comme variables. (*Voir* Lacroix, *Traité des calculs différentiel et intégral*, in-4°, vol. II, page 702.) La plus générale est donnée par le système (A) lui-même. Tous les systèmes obtenus de ces vingt-cinq manières seront des solutions singulières de $f = 0$, si, renfermant moins de trois constantes, il ne sont pas contenus dans le système {(1) et (2)}. Parmi tous ces systèmes, s'il en est un dont les équations soient compatibles, et dont la coexistence réduise les équations (1) et (2) à une seule, ce système conduira à une solution singulière très-remarquable, parce qu'elle consistera en une seule équation à trois variables, représentant, par conséquent, une surface courbe.

Exemple. — Soit l'équation aux différentielles totales :

$$(ydx - xdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (ydz - zdy)^2 = m^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

On s'assurerait aisément qu'elle ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, et qu'elle a pour intégrale complète le système des deux équations :

$$(a)\left\{\begin{array}{l} c_1x + c_2y + z\sqrt{m^2 - c_1{}^2 - c_2{}^2} = m^2,\\ x - c_1 = c_3(y - c_2).\end{array}\right.$$

Or, si on regarde c_1, c_2, c_3 comme variables, les dérivées complètes de (a), prises dans cette hypothèse, seront les mêmes que prises dans l'hypothèse de c_1, c_2, c_3 constantes, pourvu qu'on ait les relations :

$$x dc_1 + y dc_2 - \frac{z(c_1 dc_1 + c_2 dc_2)}{\sqrt{m^2 - c_1^2 - c_2^2}} = 0, \qquad (b)$$

$$-dc_1 = (y - c_2)\, dc_3 - c_3\, dc_2. \qquad (c)$$

Si on égale séparément à zéro les coefficients de dc_1 et dc_2 dans l'équation (b), on aura :

$$x = \frac{c_1 z}{\sqrt{m^2 - c_1^2 - c_2^2}}, \quad y = \frac{c_2 z}{\sqrt{m^2 - c_1^2 - c_2^2}};$$

en substituant ces valeurs dans la première des équations (a), on aura :

$$z = \sqrt{m^2 - c_1^2 - c_2^2},$$

et, par suite :

$$x = c_1, \quad y = c_2,$$

valeurs qui rendent la seconde équation (a) identique et qui satisfont à (c), puisque cette équation (c) se réduit à :

$$dc_1 = c_3\, dc_2 \quad \text{ou} \quad dx = c_3\, dy,$$

qui rentre dans la deuxième des équations (a). Ainsi, quand on prend $c_1 = x$, $c_2 = y$, les deux équations (a) et les équations (b) et (c) se réduisent toutes quatre à la seule équation :

$$x^2 + y^2 + z\sqrt{m^2 - x^2 - y^2} = m^2,$$

ou :

$$z = \sqrt{m^2 - x^2 - y^2},$$

qui est une solution singulière de la proposée, exprimée par une seule équation entre les trois variables. Elle représente une sphère de rayon m.

II

Il n'existe pas, que nous sachions, de procédé général pour obtenir les solutions singulières des équations aux différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, au moyen de ces équations différentielles elles-mêmes, quand ces équations renferment un nombre quelconque de variables et sont d'ordre supérieur.

Voici le procédé que Laplace a donné pour les équations différentielles totales du premier ordre à trois variables, quand ces équations ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité. $s = 0$ étant une solution singulière de l'équation :

$$dz = pdx + qdy,$$

cette équation peut se transformer en la suivante (*voir* page 1090) :

$$ds = s^{\mu_1} Q_1\, dx + s^{\mu_2} Q_2\, dy,$$

Q_1 et Q_2 étant des fonctions de x, y et s. Or il peut arriver deux cas :

1° Ou l'un des exposants μ_1 et μ_2 est < 1. Dans ce cas, *on obtient des solutions singulières de l'équation* $dz = pdx + qdy$, *en prenant les équations qui satisfont aux suivantes :*

$$(\alpha)\begin{cases} \left(\dfrac{dp}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}, & \left(\dfrac{dp}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}, & \left(\dfrac{dp}{dz}\right) = \dfrac{1}{0}, \\ \left(\dfrac{dq}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}, & \left(\dfrac{dq}{dy}\right) = \dfrac{1}{0}, & \left(\dfrac{dq}{dz}\right) = \dfrac{1}{0}. \end{cases}$$

Exemple. — Soit l'équation :

$$dz = [1 + \sqrt[3]{z-y-x}\,\{y + a\sqrt[4]{z-y-x} - b\sqrt[3]{z-y-x}\}]\,dx$$
$$+ [1 + x\sqrt[3]{z-y-x}]\,dy.$$

Ici :

$$p = (z-y-x)^{\frac{1}{3}}[y + a(z-y-x)^{\frac{1}{4}} - b(z-y-x)^{\frac{1}{3}}] + 1,$$
$$q = x(z-y-x)^{\frac{1}{3}} + 1.$$

Or, si on forme les équations (α), on trouvera qu'elles sont toutes satisfaites en posant $z - y - x = 0$. C'est une solution singulière de la proposée, exprimée par une équation unique entre les trois variables.

2° Si le moindre des exposants μ_1 et μ_2 est $\overline{\overline{>}}\, 1$, on déterminera les solutions singulières de l'équation différentielle $dz = pdx + qdy$

par la règle suivante, due à Euler (*Institutiones calculi differentialis*, page 275) :

Formez la condition d'intégrabilité de l'équation dz = pdx + qdy ; *l'équation obtenue ne sera pas identiquement nulle, puisque, par hypothèse, la proposée n'est pas intégrable; si cette équation satisfait à* dz = pdx + qdy, *elle en sera une solution singulière.*

Dém. (de Laplace). — En effet, pour que l'équation :

$$ds = s^{\mu_1} Q_1 \, dx + s^{\mu_2} Q_2 \, dy,$$

soit intégrable, il faut que l'on ait :

$$(\beta) \quad (\mu_2 - \mu_1) Q_1 Q_2 s^{\mu_1 + \mu_2 - 1} + s^{\mu_1 + \mu_2} \left[Q_1 \left(\frac{dQ_2}{ds}\right) - Q_2 \left(\frac{dQ_1}{ds}\right) \right]$$
$$- s^{\mu_1} \left(\frac{dQ_1}{dy}\right) + s^{\mu_2} \left(\frac{dQ_2}{dx}\right) = 0.$$

Il est clair que si μ_1 et μ_2 sont égaux à 1 ou plus grands que 1, cette quantité devient nulle par la supposition de $s = 0$, car les quantités $\left(\frac{dQ_1}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dQ_2}{dy}\right)$ ne peuvent devenir infinies en vertu de cette supposition, comme on peut s'en convaincre en réduisant Q_1 et Q_2 en séries ascendantes par rapport à s; les quantités $\left(\frac{dQ_1}{ds}\right)$ et $\left(\frac{dQ_2}{ds}\right)$ peuvent devenir infinies : cela arriverait, par exemple, si Q_1 et Q_2 renfermaient des termes tels que $s^i.\psi(x, y)$, i étant > 0 et < 1. Mais la dérivée de ces termes, prise par rapport à s et multipliée par $s^{\mu_1 + \mu_2}$, sera toujours nulle en y faisant $s = 0$, puisque μ_1 et μ_2 sont supposés n'être pas plus petits que 1. L'équation de condition (β) est donc satisfaite par $s = 0$; donc, si cette équation de condition (β) satisfait à l'équation différentielle $dz = pdx + qdy$, $s = 0$ satisfera aussi à cette équation différentielle.

Bien que $s = 0$ satisfasse à l'équation (β), on pourrait craindre qu'elle ne satisfît pas à celle-ci :

$$p \left(\frac{dq}{dz}\right) - q \left(\frac{dp}{dz}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) = 0, \qquad (\gamma)$$

parce qu'il pourrait arriver que l'équation (γ) ne fût pas identique à l'équation (β), mais fût cette équation (β) divisée par un facteur. Or si ce facteur était une puissance positive de s, alors l'équation $s=0$, qui satisfait à (β), pourrait ne pas satisfaire à (γ). Il est donc nécessaire de montrer que ces deux équations ont le même facteur s. A cet effet, représentons les équations (β) et (γ) respectivement par $R=0$ et $S=0$. Comme on a :

$$p = \frac{s^{\mu_1} Q_1 - \left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)}, \quad q = \frac{s^{\mu_2} Q_2 - \left(\frac{ds}{dy}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)},$$

si on substitue ces valeurs dans (γ) et qu'on compare le résultat à (β), on trouvera :

$$S = \left(\frac{ds}{dz}\right) R.$$

Ainsi s étant facteur de R, sera nécessairement facteur de S.

Rem. — Euler avait donné sa règle comme générale : Laplace a montré qu'elle ne l'était pas.

En effet, si on l'applique à l'exemple traité plus haut, savoir :

$$dz = [1 + (z-y-x)^{\frac{1}{3}} \{ y + a\,(z-y-x)^{\frac{1}{4}} - b\,(z-y-x)^{\frac{1}{3}} \}]\,dx$$
$$+ [1 + x\,(z-y-x)^{\frac{1}{3}}]\,dy,$$

on obtiendra l'équation :

$$z = x + y + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12},$$

qui ne satisfait pas à la proposée; et pourtant cette proposée a pour solution singulière l'équation :

$$z = x + y,$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut.

CHAPITRE II.

—

Équations différentielles partielles.

—

Introduction.

Nous prouverons tout d'abord que : *La solution singulière la plus générale d'une équation aux différentielles partielles d'ordre* m *entre un nombre quelconque de variables, renferme tout au plus* m — 1 *fonctions arbitraires.*

Dém. — Considérons une équation renfermant les n variables indépendantes x_1, x_2, x_3,... x_n ; la variable dépendante z et toutes ses dérivées partielles qui ne dépassent pas l'ordre m. Cette équation déterminera $\left(\frac{d^m z}{dx_1^m}\right)$ en fonction de x_1, x_2, x_3,... x_n, z et des autres dérivées dans lesquelles il y aura tout au plus $m - 1$ différentiations par rapport à x_1. En différentiant la valeur de $\left(\frac{d^m z}{dx_1^m}\right)$ par rapport à x_1, on aura $\left(\frac{d^{m+1} z}{dx_1^{m+1}}\right)$, et son expression renfermera $\left(\frac{d^m z}{dx_1^m}\right)$, ainsi que ses dérivées par rapport à x_2, x_3,... x_n ; mais si on remet, au lieu de $\left(\frac{d^m z}{dx_1^m}\right)$, sa valeur tirée de la proposée, on n'aura plus de dérivées qui dépassent l'ordre $m - 1$ par rapport à x_1. En continuant ainsi, on aura toutes les dérivées partielles de z par rapport à x_1, depuis la $m^{ème}$ jusqu'à l'infini, exprimées au moyen de x_1, x_2, x_3,... x_n, z, $\left(\frac{dz}{dx_1}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{dx_1^2}\right)$, $\left(\frac{d^3 z}{dx_1^3}\right)$,... $\left(\frac{d^{m-1} z}{dx_1^{m-1}}\right)$ et de leurs dérivées partielles relatives à x_2, $x_3, \ldots x_n$ seulement. Il s'agit d'obtenir les valeurs de $\left(\frac{d^m z}{dx_1^m}\right)$, $\left(\frac{d^{m+1}z}{dx_1^{m+1}}\right), \ldots$ correspondantes à un certain $x_1 = x_0$. A cet effet, remarquons que :

$$\left(\frac{d^{p+q}z}{dx_1^p\, dx_i^q}\right)_0 = \left(\frac{d^q\left(\frac{d^p z}{dx_1^p}\right)_0}{dx_i^q}\right),$$

de sorte que toutes les dérivées de z, dans lesquelles on fait $x_1 = x_0$, se déduisent de z et des $m-1$ premières dérivées de z par rapport à x_1 dans lesquelles on fera $x_1 = x_0$ et des dérivées que donnent ces m fonctions de x_2, $x_3, \ldots x_n$, quand on y fait varier partiellement x_2, $x_3, \ldots x_n$. L'équation proposée laisse d'ailleurs arbitraires ces m fonctions. On aura donc :

$$z = X + X_1 . \frac{x_1 - x_0}{1} + X_2 . \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots + X_{m-1} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots,$$

$X, X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$ étant m fonctions entièrement arbitraires de x_2, $x_3, \ldots x_n$. Ce développement de z est *l'intégrale générale* de l'équation proposée ; et il est toujours possible, attendu qu'on peut toujours choisir x_0 de façon à ce qu'aucun des coefficients ne devienne infini ou indéterminé pour $x_1 = x_0$; et, au moins entre certaines limites de x_1, il sera convergent. Ainsi la valeur la plus générale de z renferme au plus m fonctions arbitraires. Le développement précédent contient toutes les valeurs de z qui satisfont à l'équation différentielle donnée, à l'exception de celles pour lesquelles certains coefficients différentiels de z en x_1 cesseraient d'être finis ou déterminés pour la valeur $x_1 = x_0$. Mais, comme tous les coefficients du développement de z ne renferment que des dérivées de z en x_1 d'ordre inférieur à m, il en résulte que la valeur qui constitue une solution singulière proposée, doit satisfaire à cette proposée, en même temps qu'à une autre équation différentielle d'ordre au plus égal à m, et dans laquelle il n'entre aucune fonction arbitraire. La solution singulière devra donc satisfaire à deux équations qui renferment chacune tout au plus m fonctions arbitraires, par conséquent, elle devra satisfaire au résultat de l'élimination de l'une des fonctions arbitraires entre ces équations. Elle renfermera donc tout au plus $m - 1$ fonctions arbitraires.

Les raisonnements précédents supposent qu'en résolvant l'équation proposée par rapport au coefficient différentiel partiel d'ordre le plus élevé de la variable dépendante, pris par rapport à une variable indépendante seulement, il n'entre dans l'expression de ce coefficient différentiel, aucune quantité où il se trouve un nombre aussi grand de différentiations par rapport à la même variable. Si cette circonstance ne se présentait relativement à aucune des variables, le développement ne pourrait plus se faire, comme plus haut. Dans ce cas, on suppose l'équation proposée résolue par rapport au coefficient différentiel d'ordre le plus élevé ; et le développement, effectué d'après le théorème de Taylor, donne un nombre de fonctions arbitraires inférieur à m, et un nombre infini de constantes arbitraires ; mais ces constantes arbitraires équivalent toujours à un nombre de fonctions arbitraires, tel que le nombre total des fonctions arbitraires qui entrent dans la valeur de z soit au plus égal à m.

Ainsi l'intégrale générale d'une équation aux différentielles partielles ne peut avoir plus de m fonctions arbitraires. C'est ce qui résulterait aussi de la construction arithmétique de ces équations. Mais si elle ne peut renfermer plus de m fonctions arbitraires, elle peut en contenir moins. De là résulte une conséquence excessivement remarquable : c'est que les équations aux différentielles partielles peuvent avoir des solutions singulières qui paraissent aussi étendues que leurs intégrales générales. C'est ce que nous montrerons en son lieu.

ARTICLE I. — ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A TROIS VARIABLES.

Nous représenterons une telle équation par :

$$f = f(x, y, z, p, q) = 0,$$

p et q désignant respectivement les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Cette équation a trois sortes d'intégrales :

1° Une *intégrale générale,* c'est-à-dire une relation entre x, y, z et une fonction arbitraire d'une fonction déterminée de x, y, z. Nous la désignerons par :

$$F = F[x, y, z, \chi(\varphi)],$$

χ désignant une fonction arbitraire, et φ une fonction déterminée.

2° Des *intégrales complètes*, c'est-à-dire des relations entre x, y, z et deux constantes arbitraires a et b; elles peuvent se déduire de l'intégrale générale par des déterminations convenables de la fonction χ. Nous les représenterons par :

$$F_1 = F_1[x, y, z, a, b] = 0.$$

3° Des *intégrales particulières*, qui sont les cas particuliers des intégrales complètes. Nous distinguerons, parmi ces intégrales particulières, les *intégrales incomplètes*, c'est-à-dire des relations entre x, y, z et une constante arbitraire a; et nous les désignerons par :

$$F_2 = F_2[x, y, z, a] = 0.$$

Toute équation $s = 0$, qui satisfait à l'équation $f = 0$ sans satisfaire à $F = 0$, est une *solution singulière* de $f = 0$. Les solutions singulières de $f = 0$ ne peuvent renfermer de fonction arbitraire. Nous verrons qu'elles ne peuvent non plus renfermer de constante.

§ I. — DÉTERMINATION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES PAR LES INTÉGRALES.

I. — PAR LA VARIATION DES CONSTANTES ET DES FONCTIONS ARBITRAIRES.

THÉORÈME I. — *On obtiendra des solutions singulières d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, en prenant, parmi les équations qui résultent de l'élimination de la constante entre une intégrale incomplète de la proposée et sa dérivée partielle relative à la constante et égalée à zéro; ou ses dérivées partielles relatives à* x, *ou à* y, *ou à* z, *et égalées à l'infini, celles qui ne sont pas comprises dans l'intégrale générale.*

Dém. — Soit :

$$F_2(x, y, z, a) = 0,$$

une intégrale incomplète de l'équation différentielle :

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

En éliminant la constante a entre deux des trois équations :

$$(a)\begin{cases} F_2(x, y, z, a) = 0, \\ \left(\dfrac{dF_2}{dx}\right) + \left(\dfrac{dF_2}{dz}\right) p = 0, \\ \left(\dfrac{dF_2}{dy}\right) + \left(\dfrac{dF_2}{dz}\right) q = 0, \end{cases}$$

pourvu que l'équation résultante satisfasse aussi à celle des équations (a) qui n'a pas été employée à l'élimination, cette équation résultante sera renfermée dans $f = 0$. Or l'équation, ainsi obtenue, restera la même, pourvu que les équations (a) restent les mêmes. Mais si on regarde a comme variable, les deux dernières équations (a) seront remplacées par les suivantes :

$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \left(\frac{dF_2}{dz}\right) p + \left(\frac{dF_2}{da}\right)\left[\left(\frac{da}{dx}\right) + \left(\frac{da}{dz}\right) p\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF_2}{dy}\right) + \left(\frac{dF_2}{dz}\right) q + \left(\frac{dF_2}{da}\right)\left[\left(\frac{da}{dy}\right) + \left(\frac{da}{dz}\right) q\right] = 0,$$

ou :

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dz}\right) p = 0,$$

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dy}\right) + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dz}\right) q = 0,$$

équations qui se réduiront encore aux deux dernières équations (a), si l'on pose simultanément :

$$\frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dx}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dy}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dz}\right)} = 0. \qquad (A)$$

Mais on satisfait à ces trois équations (A) :

1° Soit en posant :

$$\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0; \tag{α}$$

2° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_2}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_2}{dz}\right) = \frac{1}{0}; \tag{β}$$

3° Soit en posant conjointement :

$$\left(\frac{da}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{da}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{da}{dz}\right) = 0, \tag{γ}$$

qui donnent $a =$ *constante* et font retomber sur l'intégrale incomplète ;

4° Soit en posant simultanément 1 des équations (β) avec les deux non-correspondantes du groupe (γ), ou 2 des équations (β) avec l'équation non-correspondante du groupe (γ).

Ainsi, les solutions singulières de l'équation différentielle $f=0$, seront comprises parmi les équations résultant de l'élimination de a entre les deux équations de chacun des quatre systèmes :

$$1^{\text{er}}\text{syst.}:\begin{cases}F_2 = 0,\\ \left(\frac{dF_2}{da}\right)=0,\end{cases} \quad 2^{\text{e}}\text{syst.}:\begin{cases}F_2 = 0,\\ \left(\frac{dF_2}{dx}\right)=\frac{1}{0};\end{cases} \quad 3^{\text{e}}\text{syst.}:\begin{cases}F_2 = 0,\\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right)=\frac{1}{0};\end{cases} \quad 4^{\text{e}}\text{syst.}:\begin{cases}F_2 = 0,\\ \left(\frac{dF_2}{dz}\right)=\frac{1}{0}.\end{cases}$$

Rem. I. — On est sûr que les équations obtenues par l'application du théorème I, satisfont à l'équation $f=0$, quand elles satisfont aux relations (A).

Rem. II. — Si l'équation $F_2=0$ est une fonction algébrique, rationnelle et entière de x, y, z et a, l'équation $\left(\frac{dF_2}{da}\right)=0$, sera seule applicable. — Au contraire, si l'équation $F_2=0$ était résolue par rapport à a et mise sous la forme $a = \Pi(x, y, z)$, il faudrait employer les trois équations :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = \frac{1}{0}.$$

Exemple. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale incomplète :

$$F_2 = z - ax^2 - a^2y^2 = 0.$$

Solution. — Il faudra employer la seule équation $\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0$, qui donne :

$$x^2 + 2ay^2 = 0,$$

d'où :

$$a = -\frac{x^2}{2y^2},$$

valeur qui, substituée dans $F_2 = 0$, donne la solution singulière :

$$s = z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Si l'équation $F_2 = 0$ avait été mise sous la forme :

$$a = -\frac{x^2}{2y^2} \pm \sqrt{\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2}} = \Pi,$$

on en aurait tiré :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = -\frac{x}{y^2} \pm \frac{2x^2}{\sqrt{\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2}}},$$

$$\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = -\frac{x^2}{y^3} \mp \frac{\frac{x^4}{y^5} + \frac{2z}{y^3}}{\sqrt{\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2}}},$$

$$\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = \pm \frac{\frac{1}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2}}},$$

valeurs qu'on rend simultanément infinies, en posant :

$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2} = 0,$$

ou :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0,$$

comme plus haut.

Rem. III. — Si la fonction qui, égalée à zéro, satisfait à l'une des quatre équations :

$$\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_2}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_2}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_2}{dz}\right) = \frac{1}{0},$$

ne renferme pas la constante a, elle sera une solution singulière, si toutefois elle satisfait à l'équation différentielle proposée, sans satisfaire à son intégrale générale.

Théorème II. — *On obtiendra les solutions singulières d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, en éliminant les constantes arbitraires* a *et* b *de l'intégrale complète* F_1 (x, y, z, a, b) = 0, *au moyen de deux équations prises parmi les suivantes :*

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{db}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right) = \frac{1}{0};$$

et vérifiant que les équations obtenues ne sont pas comprises dans l'intégrale générale.

Dém. — Soit :

$$F_1(x, y, z, a, b) = 0,$$

l'intégrale complète de l'équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables :

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Cette équation $f = 0$ résultera de l'élimination des constantes a et b entre les trois équations :

$$F_1(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0. \tag{5}$$

Or, pourvu que ces équations ne changent pas, le résultat de l'élimination restera le même, que l'on considère a et b comme constantes ou comme variables. Mais, en regardant a et b comme des fonctions de x, y et z, les équations (2) et (3) deviennent :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)p+\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left[\left(\frac{da}{dx}\right)+\left(\frac{da}{dz}\right)p\right]+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)+\left(\frac{db}{dz}\right)p\right]=0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q+\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left[\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{da}{dz}\right)q\right]+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left[\left(\frac{db}{dy}\right)+\left(\frac{db}{dz}\right)q\right]=0,$$

ou :

$$\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dz}\right)p=0,$$

$$\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dy}\right)+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q=0.$$

Ces nouvelles équations se réduisent respectivement aux équations (2) et (3), pourvu que l'on ait simultanément :

$$(A)\left\{\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)}=0,\\&\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)}=0,\\&\frac{\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)+\left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}=0,\end{aligned}\right.$$

Or, si on ne veut pas établir de relation entre a et b, il faut substituer aux trois équations (A) les six suivantes :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{da}\right)\left(\dfrac{da}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dx}\right)}=0, & \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{da}\right)\left(\dfrac{da}{dy}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dy}\right)}=0, & \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{da}\right)\left(\dfrac{da}{dz}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dz}\right)}=0, \\ \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{db}\right)\left(\dfrac{db}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dx}\right)}=0, & \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{db}\right)\left(\dfrac{db}{dy}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dy}\right)}=0, & \dfrac{\left(\dfrac{dF_1}{db}\right)\left(\dfrac{db}{dz}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dz}\right)}=0. \end{array}\right\} (B)$$

Maintenant, on satisfait simultanément aux relations (B) :

1° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)=0, \quad \left(\frac{dF_1}{db}\right)=0; \qquad (\alpha)$$

2° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{da}{dx}\right)=0, \quad \left(\frac{da}{dy}\right)=0, \quad \left(\frac{da}{dz}\right)=0, \quad \left(\frac{db}{dx}\right)=0, \quad \left(\frac{db}{dy}\right)=0, \quad \left(\frac{db}{dz}\right)=0, \qquad (\beta)$$

qui donnent $a = constante$, $b = constante$, ce qui nous fait retomber sur l'intégrale complète;

3° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0}; \qquad (\gamma)$$

4° Soit par une combinaison convenable d'équations prises, partie dans le groupe (α), partie dans le groupe (β), partie dans le groupe (γ).

On conclut aisément de là que les solutions singulières de l'équation $f = 0$ sont comprises parmi les équations résultant de l'élimination des constantes a et b entre l'équation $F_1 = 0$, d'une part, et, d'autre part, deux équations compatibles, prises parmi les suivantes :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)=0, \quad \left(\frac{dF_1}{db}\right)=0, \quad \left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\infty;$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque. — On peut faire, sur le théorème II, des remarques analogues à celles que nous avons faites sur le théorème I.

Exemple. — *Trouver les solutions singulières de l'équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale complète :

$$F_1 = z - ax^2 - bx^3y - a^2y^2 - 2abxy^3 - b^2x^2y^4 = 0.$$

Solution. — Il faudra ici éliminer a et b entre les trois équations :

$$F_1 = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{db}\right) = 0.$$

Or :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) = -x^2 - 2ay^2 - 2bxy^3 = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{db}\right) = -x^3y - 2ax\,y^3 - 2bx^2y^4 = 0.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule; car la seconde n'est que la première multipliée par xy. De cette première, on tire :

$$b = -\frac{x^2 + 2ay^2}{2xy^3}.$$

En substituant cette valeur dans $F_1 = 0$, a s'en va de lui-même, et on trouve :

$$s = z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Si l'équation $F_1 = 0$ avait été donnée sous la forme :

$$F'_1 = b - \frac{-2ay^2 - x^2 \pm \sqrt{x^4 + 4y^2z}}{2xy^3} = 0,$$

on n'aurait pu rien tirer des équations $\left(\frac{dF'_1}{db}\right) = 0$ et $\left(\frac{dF'_1}{da}\right) = 0$, parce que $F_1' = 0$ est résolue par rapport à b, et qu'elle ne renferme a qu'au premier degré. Il aurait donc fallu faire usage des équations :

$$\left(\frac{dF'_1}{dx}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF'_1}{dy}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF'_1}{dz}\right) = \infty,$$

qui, toutes, auraient donné :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Théorème III. — *On obtiendra les solutions singulières d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, en éliminant la fonction arbitraire* $\chi\,(\varphi)$ *de l'intégrale générale* $F\,[x,\ y,\ z,\ \chi\{\varphi\,(x,\ y,\ z)\}] = 0$, *au moyen de l'une des équations :*

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dz}\right) = \frac{1}{0},$$

A. — Première démonstration.

a. Voyons, d'abord, comment l'intégrale générale peut se déduire de l'intégrale complète. On sait que le résultat de l'élimination de a et b entre l'équation :

$$F_1\,(x, y, z, a, b) = 0, \tag{α}$$

et ses dérivées partielles relatives à x et à y, z étant fonction de x et de y, sera encore l'équation $f\,(x, y, z, p, q) = 0$, si on suppose que a et b varient, pourvu que les trois conditions (A) du théorème précédent aient lieu à la fois. Nous avons partagé, dans ce théorème, chacune des conditions (A) en deux. Mais on peut satisfaire aux équations (A) d'une manière plus générale, en posant à la fois :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right) + \left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{db}{dz}\right) = 0,$$

ce qui revient à poser uniquement :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) da + \left(\frac{dF_1}{db}\right) db = 0. \qquad (\beta)$$

Mais, comme nous n'avons qu'une seule équation entre les deux arbitraires a et b, il faut regarder l'une d'elles, comme une fonction de l'autre. Soit donc, $b = \chi_1(a)$, la caractéristique χ_1 désignant une fonction arbitraire, l'équation (β) deviendra :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0, \qquad (b)$$

au moyen de laquelle on pourra éliminer a de l'équation :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0. \qquad (a)$$

Le résultat de cette élimination est ce que Lagrange a nommé l'*intégrale générale*.

EXEMPLE. — Soit l'équation :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = m\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

dont l'intégrale complète est :

$$z = a + b(x + my).$$

En posant $a = \chi_1(b)$, on a :

$$z = \chi_1(b) + b(x + my),$$

d'où :

$$\left(\frac{d\chi_1(b)}{db}\right) + x + my = 0.$$

Cette dernière équation donnera pour b une fonction de $x + my$, en sorte que $\chi_1(b) + b(x + my)$ sera aussi une fonction de $(x + my)$; et cette fonction sera arbitraire, puisque $\chi_1(b)$ est elle-même une fonction arbitraire. L'intégrale générale cherchée est donc :

$$z = \Phi(x + my),$$

la caractéristique Φ désignant une fonction arbitraire.

Rem. I. — L'élimination de a ne peut pas toujours s'effectuer; alors on regarde le système des équations (a) et (b) comme équivalent à l'intégrale générale.

Rem. II. — Quand on connaît l'intégrale générale d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, on peut en déduire autant d'intégrales complètes qu'on veut. Il suffit, en effet, pour cela, de donner à la fonction arbitraire de l'intégrale générale, une forme particulière dans laquelle il y ait des coefficients arbitraires, en sorte qu'il se trouve deux de ces coefficients dans l'intégrale.

On voit aussi que du moment qu'on connaît une intégrale complète, on peut en déduire toutes les autres, en cherchant d'abord l'intégrale générale.

Rem. III. — Lagrange (XII[e] cahier du *Journal de l'École polytechnique*, page 298, et *Leçons sur le calcul des fonctions*, 2[e] édit., pages 372 et 374), dit : « Il est remarquable que la première équation primitive complète, d'où l'équation primitive générale a été déduite, n'y est jamais comprise. » Il résulterait de là que l'intégrale générale n'a pas toute la généralité possible, puisqu'elle ne renferme pas toutes les autres intégrales. Mais cela tient à la manière d'écrire la liaison de b et de a. En effet, comme le dit Cournot (*Théorie des fonctions*, vol. I[er], page 449 et seq.) : « pour exprimer que nous établissions une liaison entre les paramètres a et b, nous avons écrit $b = \chi_1(a)$; mais il aurait été plus général d'exprimer cette liaison par l'équation $\varpi(a, b) = 0$, et alors le système des équations (a) et (b) se serait trouvé remplacé par le système des quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x, y, z, a, b) = 0, & \left(\dfrac{dF_1}{da}\right) da + \left(\dfrac{dF_1}{db}\right) db = 0, \\ \varpi(a, b) = 0 & \left(\dfrac{d\varpi}{da}\right) da + \left(\dfrac{d\varpi}{db}\right) db = 0. \end{array}\right\} (\varpi)$$

Cette notation, plus compliquée, est même la seule qui soit aussi complète que la généralité de l'analyse le requiert. Rien n'empêche, par exemple, de supposer que l'équation $\varpi(a, b) = 0$ ne prenne accidentellement la forme :

$$(a - h)^2 + (b - k)^2 = 0, \tag{ϖ_1}$$

h et k désignant des constantes ; auquel cas, on en déduit $a = h$, $b = k$, sans qu'il soit possible de tirer de l'équation (ϖ_1) une relation de la forme $b = \chi_1(a)$, à moins d'employer des symboles imaginaires. » On pourrait donc croire qu'il est nécessaire de joindre aux équations (a) et (b) l'intégrale complète dont on les a déduites ; mais cela est inutile du moment qu'on donne aux notations toute la généralité qu'elles comportent, et qu'on prend le système des quatre équations (ϖ), pour représenter l'intégrale générale.

b. Passons maintenant à la démonstration du théorème III, et reprenons, à cet effet, les équations (a) et (b) :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0,$$
$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0;$$

et désignons par $a = \chi_2(\varphi)$ la valeur de a tirée de la dernière, φ représentant une fonction déterminée de x, y et z. En substituant cette valeur de a dans la première équation, on aura l'intégrale générale, et, partant, l'identité :

$$F_1[x, y, z, \chi_2(\varphi), \chi_1\{\chi_2(\varphi)\}] \backsim F[x, y, z, \chi(\varphi)] = 0,$$

ou :

$$F_1[x, y, z, \chi_2(\varphi), \chi_3(\varphi)] \backsim F[x, y, z, \chi(\varphi)] = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) \backsim \left(\frac{dF}{dx}\right), \quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right) \backsim \left(\frac{dF}{dy}\right), \quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right) \backsim \left(\frac{dF}{dz}\right),$$
$$\left(\frac{dF_1}{d\chi_2}\right)\left(\frac{d\chi_2}{d\varphi}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_3}\right)\left(\frac{d\chi_3}{d\varphi}\right) \backsim \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right),$$

Mais les solutions singulières donnent :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\infty,\quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\infty,\quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\infty,\quad \left(\frac{dF_1}{da}\right)=\left(\frac{dF_1}{d\chi_2}\right)=0,\quad \left(\frac{dF_1}{db}\right)\left(\frac{dF_1}{d\chi_3}\right)=0,$$

donc, les mêmes solutions singulières résulteront de l'élimination de χ entre l'équation $F=0$, d'une part, et, d'autre part, chacune des équations :

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right)=0,\quad \left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dz}\right)=\frac{1}{0};$$

ce qu'il fallait prouver.

Exemple. — *Trouver les solutions singulières de l'équation :*

$$f=-4x^4\left[2z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]+y^2\left[2z+x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2=0,$$

au moyen de son intégrale générale :

$$F=z-x^2\,\chi\,(xy)-y^2\,[\chi\,(xy)]^2=0.$$

Solution. — On en tire :

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right)=-x^2-2y^2\,\chi=0,$$

d'où :

$$\chi=-\frac{x^2}{2y^2},$$

valeur qui, substituée dans $F=0$, donne la solution singulière :

$$x+\frac{x^4}{4y^2}=0.$$

Si l'équation $F=0$ avait été mise sous la forme :

$$\chi=-\frac{x^2}{2y^2}\pm\sqrt{\frac{x^4}{4y^4}+\frac{z}{y^2}}=\Pi,$$

il aurait fallu employer les équations $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\infty$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dz}\right)=\frac{1}{0}$, auxquelles on aurait satisfait simultanément en posant :

$$\frac{x^4}{4y^4}+\frac{z}{y^2}=0, \quad \text{ou} \quad z+\frac{x^4}{4y^2}=0.$$

B. — Deuxième démonstration.

Nous appelons l'attention des lecteurs sur cette deuxième démonstration : elle est plus directe et plus naturelle que toute autre ; et il est étonnant que Lagrange, qui a appliqué avec tant de succès la méthode des variations des constantes arbitraires à la théorie des solutions singulières, n'ait pas songé à déduire les solutions singulières des équations aux différentielles partielles, des intégrales générales de ces équations, par la variation des fonctions arbitraires : c'est ce procédé, légitimé par le théorème que nous avons démontré en commençant ce chapitre, dont nous allons faire usage.

L'équation $f(x, y, z, p, q)=0$, résulte de l'élimination de $\chi(\varphi)$ et de $\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)$ entre les trois équations :

$$F[x, y, z, \chi(\varphi)]=0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)p+\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\chi}{dx}\right)+\left(\frac{d\chi}{dz}\right)p\right]=0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)q+\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\chi}{dx}\right)+\left(\frac{d\chi}{dz}\right)q\right]=0. \tag{3}$$

Or le résultat de cette élimination restera le même, pourvu que les équations (1), (2) et (3) restent les mêmes, que l'on considère la composition de χ en φ comme constante ou comme variable. Mais, en supposant cette composition variable, les équations (2) et (3) changent. Pour voir ce qu'elles deviennent, rappelons-nous cette formule du calcul des variations :

$$\delta\frac{du}{dx}=\frac{d\omega}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\delta x;$$

elle nous montre que, lorsque la composition de χ en φ, partant, en x, y, z, varie, il faut substituer à $\left(\frac{d\chi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\chi}{dy}\right)$, $\left(\frac{d\chi}{dz}\right)$ respectivement les expressions :

$$\left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)\delta x,$$

$$\left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dy^2}\right)\delta y,$$

$$\left(\frac{d\chi}{dz}\right) + \left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z.$$

Les équations (2) et (3) deviennent donc respectivement, dans l'hypothèse de χ variable, de forme en φ :

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)\delta x\right]\right\}\\ &+\left\{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]\right\} p = 0, \qquad (2')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]\right\}\\ &+\left\{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]\right\} q = 0, \qquad (3')\end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}&\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)\delta x\right]}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dx}\right)}\right]\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dx}\right)\right\}\\ &+\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]}{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right)}\right]\left\{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right)\right\} p = 0, \qquad (2'')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dy^2}\right)\delta y\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dy}\right)}\right]\left\{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dy}\right)\right\}\\ &+\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dz}\right) + \left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]}{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right)}\right]\left\{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right)\right\} q = 0, \qquad (3'')\end{aligned}$$

Ces équations (2″) et (3″) se réduiront respectivement aux équations (2) et (3), si l'on a simultanément :

$$(A)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)\delta x\right]}{\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dx}\right)}=0,\\
&\frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dy^2}\right)\delta y\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dy}\right)}=0,\\
&\frac{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\omega}{dz}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z\right]}{\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left(\frac{d\chi}{dz}\right)}=0.
\end{aligned}\right.$$

Or on satisfait à ces relations :

1° Soit en posant :

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right)=0; \tag{α}$$

2° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)\delta x=0,\quad \left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dy^2}\right)\delta y=0,\quad \left(\frac{d\omega}{dz}\right)+\left(\frac{d^2\chi}{dz^2}\right)\delta z=0, \tag{β}$$

ce qui donne à χ une forme constante, et nous ramène à l'intégrale générale ;

3° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dz}\right)=\frac{1}{0}; \tag{γ}$$

4° Soit en posant simultanément l'une des équations du groupe (β) avec les deux équations non correspondantes du groupe (γ); ou deux équations du groupe (β) avec l'équation non correspondante du groupe (γ). — Ce sont là les seules manières de satisfaire aux relations (A); car, d'une part, il est inutile de poser conjointement : $\left(\frac{d\chi}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\chi}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\chi}{dz}\right)=\frac{1}{0}$, attendu que ces équations ne sont qu'une conséquence de (γ), comme on le voit en dérivant l'intégrale générale partiellement par rapport à x, à y et à z, ce qui donne :

$$\left(\frac{d\chi}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)}, \quad \left(\frac{d\chi}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)}, \quad \left(\frac{d\chi}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{d\chi}\right)};$$

et, d'autre part, l'équation $\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = \frac{1}{0}$ doit être rejetée, par une raison parfaitement analogue à celle qu'on trouve en note à la page 1028.

Ainsi, toutes les solutions singulières de l'équation $f(x,y,z,p,q)=0$, résulteront de son intégrale générale par l'élimination de la fonction arbitraire entre cette intégrale et chacune des équations :

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dz}\right) = \frac{1}{0}.$$

C. — Troisième démonstration.

Le théorème III peut encore se démontrer de la manière suivante :

Il arrive, le plus souvent, que l'élimination de a entre les équations :

$$(I) \begin{cases} F_1\left[x, y, z, a, \chi_1(a)\right] = 0, \\ \left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0, \end{cases}$$

est impossible, en laissant à la fonction χ_1 son indétermination. Alors, comme nous l'avons dit précédemment, on regarde le système des deux équations (I) comme équivalent à l'intégrale générale. D'où il suit que l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$ résultera de l'élimination de a, $\chi_1(a)$, et $\left(\frac{d\chi_1}{da}\right)$ entre les équations (I) et les deux suivantes :

$$(II) \begin{cases} \left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0, \\ \left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0, \end{cases}$$

Or, si au lieu de regarder χ_1 comme fonction seulement de a, on la suppose encore fonction de x, y, z, le résultat de l'élimination précédente restera le même, pourvu que les équations (II) restent les mêmes. Mais, en faisant varier χ_1 avec x, y, z, on a :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left[\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\chi_1}{dz}\right) p\right] = 0,$$

et :

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left[\left(\frac{d\chi_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\chi_1}{dz}\right) q\right] = 0,$$

ou :

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0,$$

et :

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left[1 + \frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0,$$

équations qui se réduiront à (II), si on a simultanément :

$$\frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)} = 0, \quad \frac{\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)} = 0. \qquad (B)$$

Or, on satisfait aux relations (B) :

1° Soit en posant :

$$\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right) = 0; \qquad (a_1)$$

2° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\chi_1}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\chi_1}{dz}\right) = 0, \qquad (b_1)$$

ce qui donne χ_1 indépendant de x, y et z, et ramène à l'intégrale générale ;

3° Soit en posant simultanément :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0}; \qquad (c_1)$$

4° Soit en posant simultanément une des équations du groupe (b_1) avec les deux équations non correspondantes du groupe (c_1), ou deux équations du groupe (b_1) avec l'équation non correspondante du groupe (c_1).

Donc, les solutions singulières de $f=0$ résulteront de l'élimination de a, $\chi_1(a)$ et $\left(\frac{d\chi_1}{da}\right)$ entre les équations (I) et les suivantes : $\left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)=0$, $\left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0}$, prises deux à deux. C'est le théorème III appliqué aux équations (I).

Rem. I. — On voit facilement que l'application du théorème III donnera toutes les solutions singulières, et que, quelle que soit la forme qu'on donne à l'intégrale générale (bien entendu, en y laissant arbitraire la fonction χ), le théorème en question conduira toujours aux mêmes solutions singulières. On voit encore que, si l'intégrale générale est une fonction algébrique de x, y, z ou χ, et qu'on la délivre des radicaux et des dénominateurs qui pourraient renfermer x, y, z ou χ, toutes les solutions singulières de $f=0$ se déduiront de la transformée uniquement par l'élimination de χ entre cette transformée et sa dérivée partielle relative à χ et égalée à zéro.

Rem. II. — On peut encore faire, sur le théorème III, des remarques analogues à celles que nous avons faites sur le théorème I.

Rem. III. — Nous devons encore remarquer que l'application du théorème III, étant indépendante de toute intégration, ne peut introduire de constante arbitraire dans les solutions singulières; et comme d'ailleurs elle les donne toutes, on est sûr que les solutions singulières des équations aux différentielles partielles du premier ordre, ne peuvent renfermer ni constante arbitraire, ni fonction arbitraire. Maintenant comme, dans le théorème II, l'intégrale complète, lorsqu'on y considère a et b comme des fonctions de x, y, et z, peut représenter toutes les fonctions possibles de x, y, z, sans constante ni fonction arbitraire, il en résulte que ce théorème II donne aussi toutes les solutions singulières de $f=0$, au moyen de l'intégrale complète. — Un raisonnement analogue montrerait que le théorème I donne encore toutes les solutions singulières de $f=0$, au moyen de l'intégrale incomplète. Donc, toutes les intégrales (complètes, incomplètes, générale) d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, donneront les mêmes solutions singulières et les donneront toutes.

Remarques générales sur les trois théorèmes précédents (*). — 1° L'intégrale incomplète $F_2(x, y, z, a)=0$, d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables $f(x, y, z, p, q)=0$, peut être regardée comme l'équation d'une surface dans laquelle entre un paramètre arbitraire. Si on donne à ce paramètre une suite de valeurs contiguës, on obtiendra une série de surfaces consécutives de même espèce qui, en général, se pénétreront suivant certaines lignes. L'intersection de deux surfaces contiguës, prises dans cette série, sera représentée par le système suivant :

$$F_2(x, y, z, a)=0, \quad F_2(x, y, z, a+da)=0,$$

ou :

$$F_2(x, y, z, a)=0, \tag{α}$$

et :

$$\left(\frac{dF_2}{da}\right)=0. \tag{β}$$

Cette intersection a été nommée, par Monge, *caractéristique*. On obtiendra autant de caractéristiques qu'on voudra, en donnant à a autant de valeurs déterminées. Mais si on élimine a entre les équations (α) et (β), l'équation résultante $\varphi(x, y, z)=0$ sera l'équation

(*) Les principaux ouvrages que nous avons consultés ici sont : Littrow, *Analytische Geometrie*, Vienne, 1823, cap. VI et VII ; — Brandes, *Höhern Geometrie*, Leipzig, 1824, t. II, §§ 184-218, 487-501, 544-554 ; — Monge ; — deux notes de Hachette, dans le XII[e] cahier du *Journal de l'École polytechnique* ; — Moigno, vol. I[er] ; — Navier, vol. II ; — Cournot, *Théorie des fonctions*, vol. I[er] ; — enfin, Lagrange (ses *Mémoires* et ses deux *Traités d'analyse*).

du lieu géométrique de toutes les caractéristiques. Ce lieu est une surface qui a reçu le nom d'*enveloppe*, par opposition aux surfaces représentées par l'équation $F_2(x, y, z, a) = 0$, lesquelles se nomment *enveloppées*. — *La surface enveloppe jouit de la propriété de toucher toutes les surfaces enveloppées, dont la série est donnée par la variation continue du paramètre* a *dans* $\mathrm{F_2}$ (x, y, z, a) = 0; *et la ligne de contact de l'enveloppe avec une enveloppée est la caractéristique correspondante à cette enveloppée, c'est-à-dire la courbe d'intersection de cette enveloppée avec l'enveloppée consécutive.* En effet, l'équation du plan touchant au point (x, y, z) de la surface $F_2(x, y, z, a) = 0$, est :

$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{dF_2}{dy}\right)(\upsilon - y) + \left(\frac{dF_2}{dz}\right)(\zeta - z) = 0; \qquad (a)$$

et l'équation du plan touchant au même point (x, y, z) de la surface $\varphi = 0$, est :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)(\upsilon - y) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)(\zeta - z) = 0. \qquad (b)$$

Mais l'équation $\varphi = 0$ n'étant autre chose que l'équation $F_2 = 0$, où l'on a mis pour a sa valeur en x, y, z tirée de (β), on a :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{dF_2}{dy}\right) + \left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(\frac{dF_2}{dz}\right) + \left(\frac{dF_2}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right),$$

équations qui, en vertu de (β), se réduisent à :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{dF_2}{dx}\right), \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{dF_2}{dy}\right), \quad \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(\frac{dF_2}{dz}\right).$$

Les équations (a) et (b) coïncident donc toutes les fois que (x, y, z) représentent les coordonnées d'un point commun aux surfaces $F_2 = 0$ et $\varphi = 0$. Donc, les surfaces $F_2 = 0$ et $\varphi = 0$ se touchent tout le long de la caractéristique qui leur est commune; ce qu'il fallait prouver. — On voit, par conséquent, que : *Toutes les solutions singulières d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, toutes les fois qu'elles peuvent se déduire d'une intégrale incomplète, par l'élimination de la constante entre cette intégrale et sa dérivée partielle relative à la constante, égalée à zéro (que cette déduction puisse se faire de cette manière, soit immédiatement ou seulement après avoir mis l'intégrale incomplète sous une forme convenable), représentent des surfaces enveloppes de toutes les surfaces qu'on peut déduire de l'intégrale incomplète par la variation continue de son paramètre arbitraire.* — Nous devons observer que les caractéristiques peuvent devenir imaginaires, lorsque le paramètre a a dépassé certaines limites, quoique, pour les mêmes valeurs de a, l'intégrale incomplète continue à représenter des surfaces réelles. Ces surfaces ne sont plus alors touchées par l'enveloppe, et ne conservent leur dénomination d'*enveloppées* que par extension. Ainsi, comme pour les courbes, *il peut y avoir certaines régions dans lesquelles la surface enveloppe ne touche pas les surfaces enveloppées.* — Considérons, maintenant, les deux caractéristiques consécutives qui résultent des deux intersections consécutives des trois enveloppées contiguës, dont les équations sont :

$$F_2(x, y, z, a) = 0, \quad F_2 + \left(\frac{dF_2}{da}\right) da = 0, \quad F_2 + 2\left(\frac{dF_2}{da}\right) da + \left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) da^2 = 0;$$

la première caractéristique sera donnée par les équations $F_2 = 0$, $\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0$; la seconde, par les équations $\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) = 0$. Ces deux courbes se couperont et en même temps se toucheront en un point déterminé par les valeurs de x, y, z, qui satisfont simultanément aux trois équations :

$$F_2 = 0, \quad \left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) = 0. \tag{γ}$$

Par conséquent, l'élimination de a entre les équations (γ) donnera deux équations appartenant au lieu géométrique de tous les points dans lesquels chaque caractéristique est coupée et touchée par la caractéristique contiguë. C'est ce qu'on nomme l'*arête de rebroussement*. Les arètes de rebroussement partagent, en général, les surfaces en nappes distinctes : elles sont touchées par toutes les caractéristiques, et sont, à leur égard, de véritables enveloppes. — Il peut arriver que les équations (γ) ne soient pas compatibles. Alors les caractéristiques consécutives d'une enveloppe ne se coupent pas, et, par conséquent, cette enveloppe ne présente pas d'arète de rebroussement; mais, dans ce cas, il existe en général, sur chaque caractéristique, un point où elle se trouve plus rapprochée de la caractéristique contiguë que dans tout autre lieu. Le lieu géométrique de ces points, ou la limite du polygone dont les côtés sont les distances *minima* des caractéristiques consécutives, est nommée *ligne de striction*. — Considérons encore les trois caractéristiques consécutives, résultant des intersections successives des quatre enveloppées contiguës, dont les équations sont :

$$F_2 = 0, \quad F_2 + \left(\frac{dF_2}{da}\right) da = 0, \quad F_2 + 2\left(\frac{dF_2}{da}\right) da + \left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) da^2 = 0,$$

$$F_2 + 3\left(\frac{dF_2}{da}\right) da + 3\left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) da^2 + \left(\frac{d^3F_2}{da^3}\right) da^3 = 0.$$

Si ces trois caractéristiques se coupent en un seul point, ce qui n'arrivera que dans des cas très-particuliers, l'élimination de a entre les quatre équations :

$$F_2 = 0, \quad \left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2F_2}{da^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^3F_2}{da^3}\right) = 0, \tag{δ}$$

donnera les coordonnées x, y, z de ce point de l'arète de rebroussement, tandis que l'élimination de x, y, z entre ces mêmes équations donnera la valeur de a correspondante à la caractéristique sur laquelle le point en question doit se trouver. Ce point sera le point de contact de cette caractéristique et de l'arète de rebroussement : c'est, en général, un point d'inflexion ou de rebroussement de l'arète de rebroussement. Telle est l'interprétation géométrique complète des solutions singulières de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, déduites de l'intégrale incomplète $F_2(x, y, z, a) = 0$, au moyen de l'équation $\left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0$. Il nous reste à voir la signification de cette dernière équation. Or, elle exprime évidemment que le long d'une caractéristique, les surfaces $F_2 = 0$ et $\varphi = 0$ se touchent ou ont un même plan tangent. Quand l'équation $F_2(x, y, z, a) = 0$ a la forme $a = \Pi(x, y, z)$, les solutions singulières de $f = 0$ s'en déduisent par les équations $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = \frac{1}{0}$. Or, ces équations donnent : la première, la valeur de a qui rend x *maximum* ou *minimum*, pour des valeurs données de y et z; la deuxième, la valeur de a, qui rend y *maximum* ou *minimum* pour des valeurs données de x et de z; enfin, la troisième donne la valeur de a qui rend z *maximum* ou *minimum* pour des valeurs données de x et de y. Ce sont évidemment là des caractères qui doivent appartenir à la surface enveloppe.

2° Considérons maintenant l'intégrale complète : $F_1(x, y, z, a, b) = 0$, de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$. Cette équation $F_1 = 0$ peut être regardée comme l'équation d'une surface renfermant deux paramètres arbitraires a et b. Mais, comme la supposition de a et de b variant à la fois et indépendamment l'un de l'autre, ne conduirait à aucune conséquence géométrique, on peut supposer que b est lié à a par l'équation $b = \chi_1(a)$, en sorte que l'intégrale complète devient :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0.$$

Actuellement, si on fait varier le paramètre a, l'équation précédente représentera, pour chaque forme de la fonction χ_1, un système d'enveloppées, dont la surface enveloppe sera donnée par l'élimination de a entre les équations :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0.$$

Mais cette élimination donne l'intégrale générale de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$. Donc : *l'intégrale générale d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables, représente toujours, pour chaque forme de la fonction arbitraire qui y entre, la* *surface enveloppe de toutes les surfaces obtenues, en faisant varier d'une manière continue le paramètre* a *dans l'équation* $F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0$. — L'intégrale générale peut donc représenter une infinité de surfaces enveloppes, selon la forme déterminée donnée à la fonction arbitraire qui caractérise cette intégrale; et *il y a cette différence entre les surfaces représentées par l'intégrale complète et celles que représente l'intégrale générale, que les premières sont de même espèce, puisqu'elles ne diffèrent que par les valeurs numériques des paramètres* a *et* b, *tandis que les secondes varient d'espèce selon la forme assignée arbitrairement à la fonction* χ_1, *et ne sont unies entre elles que par un caractère de famille : celui de satisfaire à une même équation aux différentielles partielles.* — Maintenant, si on élimine l'arbitraire $\chi(\varphi)$ de l'intégrale générale $F[x, y, z, \chi(\varphi)] = 0$, au moyen de l'équation $\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = 0$, on obtiendra évidemment une surface enveloppe de toutes les surfaces enveloppes représentées par l'intégrale générale, lorsqu'on y fait varier d'une façon continue la forme de la fonction χ. Ainsi : *Toute solution singulière d'une équation aux différentielles partielles qui, immédiatement ou moyennant une forme convenable donnée à l'intégrale générale, peut se déduire de cette intégrale par l'élimination de la fonction arbitraire qui y entre, au moyen de la dérivée partielle de l'intégrale relative à la fonction arbitraire et égalée à zéro, représente la surface enveloppe de toutes les surfaces représentées par l'intégrale générale, quand on y fait varier d'une manière continue la forme de la fonction arbitraire.* — Mais les mêmes solutions singulières dont il vient d'être question, peuvent se déduire de l'intégrale complète $F_1(x, y, z, a, b) = 0$, en éliminant les constantes a et b de cette équation au moyen des suivantes : $\left(\frac{dF_1}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{dF_1}{db}\right) = 0$. Le résultat de cette élimination représentera donc la surface enveloppe, non-seulement des enveloppées $F_1(x, y, z, a, b) = 0$, mais encore des enveloppes $F[x, y, z, \chi(\varphi)] = 0$. Donc : *Il y a cette différence entre la solution singulière et l'intégrale générale par rapport à l'intégrale complète, que la surface représentée par la solution singulière touche absolument toutes les surfaces possibles données par l'inté-*

grale complète, tandis que la surface représentée par l'intégrale générale ne touche que celles de ces surfaces qui sont d'une certaine espèce caractérisée par la relation établie entre les paramètres de l'intégrale complète. — Si, au lieu de concevoir qu'on élimine a entre les équations :

$$F_1[x, y, z\ a, \chi_1(a)] = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0,$$

pour obtenir la surface enveloppe qui correspond à une forme déterminée donnée à la fonction arbitraire dans l'intégrale générale, on fait subsister simultanément ces équations, elles représenteront la caractéristique correspondante à cette enveloppe et à une valeur particulière de a. Mais on voit qu'alors les fonctions χ_1 et $\left(\frac{d\chi_1}{da}\right)$ ne renfermant pas les variables x, y, z, les équations de la caractéristique se trouvent composées de la même manière en x, y, z, quelle que soit la forme assignée à la fonction χ_1 ; et que, par conséquent, cette caractéristique peut être considérée comme la génératrice qui décrit à volonté une quelconque des enveloppes représentées par l'intégrale générale, lorsqu'on la fait mouvoir dans l'espace et changer ou non de forme, ce mouvement et ce changement de forme (s'il a lieu), étant soumis à une loi déterminée pour chaque enveloppe par la forme assignée à χ_1, et telle que la composition en x, y, z des équations de la génératrice soit invariablement la même. C'est justement parce que toutes les enveloppes représentées par l'intégrale générale peuvent être soumises à un même mode de génération et être regardées comme constituant une même famille de surfaces, que leur génératrice commune a reçu de Monge le nom de *caractéristique*. — Une même enveloppe peut avoir des caractéristiques différentes, parce que la même intégrale générale peut dériver de diverses intégrales complètes distinctes ; elle peut donc appartenir à la fois à des familles différentes de surfaces. — La même enveloppe peut aussi correspondre à une infinité de systèmes différents d'enveloppées; il suffit que la caractéristique reste la même, c'est-à-dire que les intersections successives des enveloppées soient toujours les mêmes. Quand les enveloppes appartiennent aux surfaces développables, elles reçoivent, d'après Monge, le nom d'*enveloppées développables.* — Les équations dont le système représente l'intégrale générale, renfermant une fonction arbitraire χ_1, on peut se proposer de déterminer cette fonction de manière que l'enveloppe correspondante à cette forme de χ_1 passe par la courbe :

$$\psi(x, y, z) = 0, \quad \psi_1(x, y, z) = 0.$$

A cet effet, il faut que la tangente à cette courbe :

$$\xi - x = \left(\frac{dx}{dz}\right)(\zeta - z), \quad \upsilon - y = \left(\frac{dy}{dz}\right)(\zeta - z),$$

se trouve constamment dans le plan tangent à l'enveloppe, en un point (x, y, z) de la courbe ($\psi = 0$, $\psi_1 = 0$), c'est-à-dire dans le plan touchant :

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\upsilon - y).$$

Les quantités p et q sont données en $x, y, z, a, \chi_1(a)$ par l'équation :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0;$$

et les quantités $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ et $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ sont des fonctions de x, y, z, fournies par les équations :

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right) + \left(\frac{d\psi}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right) + \left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right) + \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right) = 0.$$

Cela posé, la condition énoncée tantôt, donne l'équation :

$$p\left(\frac{dx}{dz}\right) + q\left(\frac{dy}{dz}\right) = 1.$$

Si on élimine x, y, z au moyen des équations $F_1 = 0$, $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, on obtiendra une équation de la forme :

$$\varpi[a, \chi_1(a)] = 0.$$

L'équation de la surface cherchée résultera donc de l'élimination de a entre les quatre équations :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0,$$

$$\varpi[a, \chi_1(a)] = 0, \quad \left(\frac{d\varpi}{da}\right) + \left(\frac{d\varpi}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0.$$

— On aurait pu déterminer la fonction χ_1 par la condition que la surface enveloppe correspondante fût circonscrite à une surface donnée. — Enfin, on peut se proposer, avec Hachette (*voir* XII^e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, page 241), de déterminer la relation qui doit exister entre les deux constantes d'une intégrale complète de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, pour que les enveloppées déduites de cette intégrale, par la variation continue de la constante qui reste arbitraire, aient pour enveloppe une surface donnée $F_3(x, y, z) = 0$. On aura la relation cherchée en éliminant les cinq quantités x, y, z, p, q entre les six équations :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0, \quad \left(\frac{dF_3}{dx}\right) + \left(\frac{dF_3}{dz}\right) p = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0, \quad \left(\frac{dF_3}{dy}\right) + \left(\frac{dF_3}{dz}\right) q = 0.$$

La fonction χ_1 déterminée, l'enveloppe sera donnée par l'élimination de a entre les équations :

$$F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)] = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\chi_1}{da}\right) = 0.$$

Exemple. — *Trouver la solution singulière et l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles :*

$$\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z^2 = \rho^2, \tag{1}$$

au moyen de son intégrale complète :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \rho^2; \tag{2}$$

et interpréter géométriquement les résultats.

Solution. — Si on pose $\beta = \varphi(\alpha)$, l'intégrale générale de l'équation (1) résultera de l'élimination de α entre les équations :

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(x-\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2=\rho^2,\\&(x-\alpha)+[y-\varphi(\alpha)]\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

et représentera, pour chaque forme assignée à la fonction φ, l'enveloppe de toutes les sphères représentées par l'intégrale complète, lesquelles sont toutes les sphères possibles ayant leurs centres dans le plan de xy, sur une courbe déterminée par la forme de la fonction φ. Cette enveloppe est une *surface canal.* La propriété des surfaces canaux consiste en ce que la normale coupe toujours la *ligne médiane* ou l'*axe curviligne* du canal. C'est ce qu'exprime l'équation (1).

La caractéristique, correspondante à une valeur donnée de l'arbitraire α, est représentée par les équations (3). Quant à l'arète de rebroussement de la surface enveloppe correspondante à une forme déterminée de la fonction φ, on l'obtiendra en éliminant α entre les équations (3) et l'équation :

$$[y-\varphi(\alpha)]\left(\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\right)-1-\left(\frac{d\varphi^2}{d\alpha^2}\right)=0. \tag{4}$$

Cherchons, maintenant, la solution singulière de l'équation (1). A cet effet, il faut éliminer α et β entre l'équation (2) et ses dérivées partielles relatives à α et β et égalées à zéro, savoir :

$$x-\alpha=0,\quad y-\beta=0.$$

On aura ainsi $z^2=\rho^2$ ou $z=\pm\rho$, équation de deux plans parallèles au plan des xy et situés de part et d'autre de ce plan à une distance ρ. Ces deux plans sont l'enveloppe générale de toutes les surfaces canaux et de toutes les sphères représentées par l'intégrale générale et l'intégrale complète. — Si, dans les équations (3), on pose $\varphi(\alpha)=a\alpha+b$, et qu'ensuite on élimine α, on aura :

$$\frac{(y-ax-b)^2}{1+a^2}+z^2=\rho^2,$$

cylindre circulaire droit, dont le rayon est ρ et dont l'axe compris dans le plan des xy est $y=ax+b$. Ce cylindre est l'enveloppée développable. On peut toujours faire mouvoir son axe dans le plan xy, de manière que l'enveloppe de toutes ses positions soit une quelconque des surfaces canaux comprises dans l'intégrale générale. Si on imprimait à cet axe un mouvement de rotation autour d'un de ses points considéré comme fixe, l'enveloppe de toutes les positions du cylindre serait une des sphères comprises dans l'intégrale complète. Ce serait un *anneau*, si l'axe du cylindre se mouvait de façon à rester toujours tangent à un cercle décrit dans le plan des xy.

Proposons-nous, enfin, de déterminer la fonction φ de manière que la section de la surface canal par le plan xz soit l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1;$$

on aura pour tangente à cette courbe :

$$\xi - x = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z}{x} (\zeta - z),$$

et pour plan tangent à l'enveloppe au même point (x, y, z) :

$$(\zeta - z) = p\,(\xi - x) + q\,(\upsilon - y).$$

Pour que la tangente soit dans le plan tangent, il faut que l'on ait :

$$-p\,\frac{a^2 z}{b^2 x} = 1;$$

mais :

$$p = -\frac{(x - a)}{z};$$

donc :

$$\frac{x - a}{x} = \frac{b^2}{a^2},$$

exprimera la condition pour que la surface canal passe par l'ellipse donnée. Il nous faut éliminer x, y et z entre les quatre équations :

$$\frac{x - a}{x} = \frac{b^2}{a^2}, \quad (x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = \rho^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

On aura ainsi la courbe :

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - \alpha^2} + \frac{[\varphi(\alpha)]^2}{b^2} = \frac{\rho^2}{b^2} - 1,$$

qui sera une ellipse ou une hyperbole, selon qu'on aura $a < b$ ou $a > b$. Il nous faudra supposer $b < \rho$, pour que la courbe ne dépasse pas les plans représentés par la solution singulière. La surface cherchée résultera alors de l'élimination de α, $\varphi(\alpha)$ et $\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)$ entre les quatre équations :

$$(x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = \rho^2,$$

$$x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{[\varphi(\alpha)]^2}{b^2} = \frac{\rho^2}{b^2} - 1,$$

$$\frac{\alpha}{b^2 - a^2} + \frac{[\varphi(\alpha)]\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)}{b^2} = 0.$$

II. — Par les radicaux.

Nous supposons que toutes les équations auxquelles nous aurons à faire sont algébriques, par rapport aux diverses quantités qui y entrent.

THÉORÈME I. — *On résout l'intégrale incomplète par rapport à la constante. S'il ne se présente aucun radical dans l'expression de cette constante, il n'y aura pas de solution singulière. Dans le cas contraire, les fonctions, placées sous les divers radicaux, égalées à zéro, seront les solutions singulières.*

EXEMPLE. — *Trouver les solutions singulières de l'équation aux différentielles partielles :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale incomplète :

$$F_2 = z - ax^2 - a^2y^2 = 0.$$

Solution. — Nous tirons de $F_2 = 0$:

$$a = -\frac{x^2}{2y^2} \pm \sqrt{\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2}},$$

ce qui donne la solution singulière :

$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{z}{y^2} = 0, \quad \text{ou} \quad z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Théorème II. — *On résout l'intégrale complète par rapport à l'une des constantes. S'il ne se présente aucun radical dans l'expression de cette constante, il n'y aura pas de solution singulière. Dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux; si ces fonctions ne renferment pas l'autre constante, elles seront les solutions singulières cherchées. Si elles renferment l'autre constante, on les résoudra par rapport à cette constante, et si, dans l'expression obtenue, il y a des radicaux, auquel cas seulement il y aura des solutions singulières, ces solutions seront les fonctions placées sous les radicaux, qu'on aura égalées à zéro.*

Exemple I. — *Trouver les solutions singulières de l'équation aux différentielles partielles :*

$$f = -4x^4 \left[2z - x \left(\frac{dz}{dx}\right) + y \left(\frac{dz}{dy}\right) \right] + y^2 \left[2z + x \left(\frac{dz}{dx}\right) - y \left(\frac{dz}{dy}\right) \right]^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale complète :

$$f_1 = z - ax^2 - bx^3y - a^2y^2 - 2abx\,y^3 - b^2x^2y^4 = 0.$$

Solution. — En résolvant par rapport à b, on trouve :

$$b = \frac{-2ay^2 - x^2 \pm \sqrt{x^4 + 4y^2z}}{2xy^3},$$

ce qui donne la solution singulière :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Exemple II. — *Trouver les solutions singulières de l'équation :*

$$\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right] z^2 = \rho^2,$$

au moyen de son intégrale complète :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \rho^2.$$

Solution. — En résolvant cette intégrale, par rapport à β, il vient :

$$\beta = y - \sqrt{\rho^2 - z^2 - (x - \alpha)^2};$$

égalant à zéro la fonction placée sous le radical, puis résolvant l'équation résultante par rapport à α, on a :

$$\alpha = x - \sqrt{\rho^2 - z^2},$$

ce qui donne la solution singulière :

$$z^2 - \rho^2 = 0.$$

Théorème III. — *On résout l'intégrale générale par rapport à la fonction arbitraire. S'il ne se présente aucun radical dans l'expression de cette fonction, il n'y a pas de solution singulière. Dans le cas contraire, on obtiendra les solutions singulières, en égalant à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux.*

Exemple. — *Trouver les solutions singulières de l'équation :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0,$$

au moyen de son intégrale générale :

$$F = z - x^2\chi(xy) - y^2[\chi(xy)]^2 = 0.$$

Solution. — L'équation $F = 0$, résolue par rapport à χ, donne :

$$\chi = -\frac{x^2}{2y^2} \pm \sqrt{\frac{x^4}{xy^4} + \frac{z}{y^2}},$$

d'où résulte la solution singulière :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

§ II. — DÉTERMINATION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES PAR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

I

Théorème. — *On obtiendra les solutions singulières d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables, en éliminant* p *et* q *entre cette équation et les suivantes, prises deux à deux :*

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{df}{dz}\right) = \frac{1}{0},$$

et mettant de côté les équations résultantes qui rentreraient dans l'intégrale générale.

Dém. — Si $F(x, y, z, \chi) = 0$ est l'intégrale générale de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, on pourra regarder cette intégrale comme le résultat de l'élimination de p et de q entre les trois équations :

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right) p + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left(\frac{d\chi}{dz}\right) p\right] = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right) q + \left(\frac{dF}{d\chi}\right)\left[\left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \left(\frac{d\chi}{dz}\right) q\right] = 0.$$

Appelons :

$$p = \varphi_1(x, y, z, \chi), \quad q = \varphi_2(x, y, z, \chi),$$

les valeurs de p et de q tirées des deux dernières équations, on aura :

$$F(x, y, z, \chi) \backsim f[x, y, z, \varphi_1(x, y, z, \chi), \varphi_2(x, y, z, \chi)] = 0.$$

Mais les solutions singulières de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, résultent de l'élimination de χ entre l'équation $F(x, y, z, \chi) = 0$, et chacune des équations $\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$, $\left(\frac{dF}{dz}\right) = \frac{1}{0}$.

Elles résulteront donc aussi de l'élimination de χ entre l'équation :

$$f[x, y, z, \varphi_1(x, y, z, \chi), \varphi_2(x, y, z, \chi)] = 0,$$

et chacune des suivantes :

$$\left(\frac{df}{d\chi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{d\chi}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\chi}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right) = \infty,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right) = \infty,$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right) + \left(\frac{df}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right) = \infty.$$

Mais χ n'étant contenu que dans φ_1 et φ_2, l'élimination de χ revient à celle de φ_1 et φ_2, partant, à celle de p et de q. Ainsi, on aura les solutions singulières de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, en éliminant p et q entre cette équation et chacune des suivantes :

$$(a)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{d\chi}\right) + \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{d\chi}\right) = 0,\\
&\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{1}{0},\\
&\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{1}{0},\\
&\left(\frac{df}{dz}\right) + \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right) = \frac{1}{0}.
\end{aligned}\right.$$

Mais on n'aurait ainsi, chaque fois, que deux équations pour l'élimination de deux quantités p et q, ce qui n'est pas suffisant; il faut donc que la première des équations (a) se décompose en deux :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{d\chi}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{d\chi}\right) = 0,$$

auxquelles on satisfait en posant :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = 0; \tag{α}$$

les trois autres équations (a) donnent :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dz}\right)=\frac{1}{0},\qquad (\beta)$$

ou :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=\frac{1}{0},$$

et :

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dq}{dy}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dq}{dz}\right)=\frac{1}{0};$$

ces six dernières rentrent, comme il est facile de le voir, dans les trois précédentes; enfin, pour des raisons analogues à celles qu'on a déjà exposées, il est inutile de tenir compte des équations $\left(\frac{df}{dp}\right)=\frac{1}{0}$, $\left(\frac{df}{dq}\right)=\frac{1}{0}$. Enfin, on remarquera qu'on satisfait aux trois dernières équations (a), en faisant subsister les équations (β) avec les équations (α). Donc, les solutions singulières de $f=0$ résulteront de l'élimination de p et de q entre cette équation et les suivantes :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dq}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dx}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dy}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dz}\right)=\infty,$$

prises convenablement deux à deux; ce qu'il fallait prouver.

Remarque I. — On aurait pu prendre, pour point de départ, une intégrale complète ou une intégrale incomplète, au lieu de prendre l'intégrale générale, et on serait toujours arrivé aux mêmes conclusions.

Rem. II. — On peut faire, sur le théorème actuel, des remarques analogues à celles que nous avons faites sur le théorème I du n° I du § précédent.

Rem. III. — Legendre a démontré, à l'aide des variations, un cas particulier du théorème actuel. C'est celui où l'équation $f(x, y, z, p, q)=0$ est algébrique en x, y, z, p et q, et délivrée de radicaux et de dénominateurs. Dans ce cas, toutes les solutions singulières de $f=0$ résultent de l'élimination de p et de q entre les trois équations :

$$f=0, \quad \left(\frac{df}{dp}\right)=0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right)=0.$$

En effet, si on prend les variations de $f=0$, dans l'hypothèse de δx et δy nuls, on aura :

$$\left(\frac{df}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{df}{dp}\right)\delta p+\left(\frac{df}{dq}\right)\delta q=0,$$

ou :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\delta z=0.$$

Or, il faut qu'on ait à la fois $\left(\frac{df}{dp}\right)=0$ et $\left(\frac{df}{dq}\right)=0$, pour qu'il existe des solutions singulières, car si les coefficients de $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)$ n'étaient pas nuls à la fois, on aurait, pour déterminer δz, l'équation linéaire aux différentielles partielles :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\delta z=0,$$

qui introduirait nécessairement une fonction arbitraire dans la valeur de δz, et, par conséquent, dans celle de $z+\delta z$, ce qui ne peut avoir lieu dans le cas des solutions singulières.

Rem. IV. — Nous avons vu, au § I, que les équations des enveloppées, celles des enveloppes correspondantes à des valeurs déterminées de la fonction arbitraire qui entre dans l'intégrale générale, enfin celle de l'enveloppe générale, représentée par la solution singulière, satisfont toutes à l'équation différentielle $f(x, y, z, p, q)=0$; les équations de la caractéristique et de l'arète de rebroussement doivent donc aussi satisfaire à l'équation $f=0$. Maintenant, comme deux enveloppées tirées de l'équation $F_1[x, y, z, a, \chi_1(a)]=0$

diffèrent par les valeurs de a, et que les plans tangents à ces deux enveloppées en un même point de la courbe d'intersection, sont inclinés l'un à l'autre, il en résulte que les valeurs de p et de q différeront pour ces enveloppées, et que, par conséquent, p et q doivent être considérés comme fonctions de a; mais si l'intersection dont il vient d'être question devient la caractéristique, les plans tangents aux enveloppées qui s'y coupent, se confondent, et l'on a : $\left(\frac{df}{da}\right) = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\right) + \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\right) = 0.$$

D'un autre côté, l'équation :

$$dz = pdx + qdy,$$

donne :

$$0 = \left(\frac{dp}{da}\right) dx + \left(\frac{dq}{da}\right) dy.$$

L'élimination de $\left(\frac{dp}{da}\right)$ et $\left(\frac{dq}{da}\right)$ entre cette équation et la suivante :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\right) + \left(\frac{df}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\right) = 0,$$

donne :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) dy - \left(\frac{df}{dq}\right) dx = 0,$$

pour équation différentielle de la caractéristique. — Pour une autre caractéristique, p et q prendront d'autres valeurs. Donc, si on élimine p et q entre les trois équations :

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad dz = pdx + qdy, \quad \left(\frac{df}{dp}\right) dy - \left(\frac{df}{dq}\right) dx = 0,$$

on aura l'équation différentielle du lieu géométrique des intersections successives des caractéristiques, c'est-à-dire de l'équation différentielle de l'arète de rebroussement.

EXEMPLE. — *Trouver la solution singulière de l'équation :*

$$f = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z^2 - \rho^2 = 0, \qquad (1)$$

et déterminer la caractéristique et l'arète de rebroussement des surfaces canaux.

Solution. — En dérivant $f = 0$ partiellement en p et q, on a :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 2pz^2 = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = 2qz^2 = 0. \qquad (2)$$

On satisfait d'abord à ces équations en posant $z = 0$, qui ne satisfait pas à $f = 0$. On y satisfait encore en posant $p = 0$ et $q = 0$, valeurs qui, transportées dans la proposée, donnent la solution singulière : $z^2 = \rho^2$.

Si on substitue les valeurs (2) dans l'équation :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) dy - \left(\frac{df}{dq}\right) dx = 0,$$

on obtient l'équation :

$$pdy - qdx = 0,$$

qui exprime que les caractéristiques des surfaces canaux sont leurs lignes de plus grande pente.

Si on élimine p et q entre les équations :

$$(1 + p^2 + q^2) z^2 = \rho^2, \quad pdy - qdx = 0, \quad dz = pdx + qdy,$$

on aura d'abord :

$$p = \frac{dx\,dz}{dx^2 + dy^2}, \quad q = \frac{dy\,dz}{dx^2 + dy^2},$$

et, par suite :

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) z^2 = \rho^2 (dx^2 + dy^2),$$

pour équation différentielle de l'arète de rebroussement.

II

On peut découvrir les solutions singulières des équations $f(x, y, z, p, q) = 0$, quand elles sont algébriques en x, y, z, p et q, par la règle suivante.

THÉORÈME. — *On détermine les coefficients différentiels partiels du second ordre :*

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right);$$

puis, entre les quatre équations qui expriment que les termes des fractions obtenues pour deux des dérivées précédentes deviennent nuls, on élimine les dérivées du second ordre qui s'y trouvent; on obtient ainsi deux équations, dont on élimine, à l'aide de la proposée, les deux dérivées $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ *et* $\left(\frac{dz}{dy}\right)$: *les équations résultantes renferment les solutions singulières.*

Dém. — En effet, l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, résulte de l'élimination de a et b entre les trois équations :

$$F_1(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0,$$
$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0.$$

Appelons :

$$a = \varphi_1(x, y, z, p, q) \quad \text{et} \quad b = \varphi_2(x, y, z, p, q),$$

les valeurs de a et de b tirées des deux dernières équations, on aura :

$$F_1[x, y, z, \varphi_1(x, y, z, p, q), \varphi_2(x, y, z, p, q)] \backsimeq f(x, y, z, p, q) = 0,$$

et, par conséquent :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)p + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)q + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right] = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-\frac{\left\{\begin{array}{r}\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)p+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)p+\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\\ +\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)p+\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{\left\{\begin{array}{r}\left(\frac{dF_1}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)+\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)q+\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\\ +\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right)+\left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)q+\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=-\frac{\left\{\begin{array}{r}\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)p+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)p+\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right]\\ +\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)p+\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=-\frac{\left\{\begin{array}{r}\left(\frac{dF_1}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)+\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)q+\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\\ +\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right)+\left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)q+\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)+\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)}.$$

Mais on a :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)p=0,\quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right)+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q=0,$$

et les solutions singulières donnent :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right)=\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF_1}{db}\right)=\left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)=0.$$

Donc :

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=\frac{N}{D}=\frac{0}{0},\quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\frac{N'}{D'}=\frac{0}{0},\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{N''}{D''}=\frac{0}{0}.$$

Maintenant, comme les valeurs de ces dérivées contiennent, en général, quatre des cinq quantités $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, il faudra, pour éliminer ces quatre quantités, joindre à la proposée deux des trois couples suivants d'équations :

$$1^{\text{er}}\text{ couple : }\left\{\begin{array}{l} N=0, \\ D=0; \end{array}\right. \qquad 2^{\text{e}}\text{ couple : }\left\{\begin{array}{l} N'=0, \\ D'=0; \end{array}\right. \qquad 3^{\text{e}}\text{ couple : }\left\{\begin{array}{l} N''=0, \\ D''=0; \end{array}\right.$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque. — Il est des équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables qui ont nécessairement une solution singulière. Pour découvrir la forme de ces équations, différentions $f=0$, d'abord par rapport à x, puis par rapport à y; nous aurons :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dz}\right) d_x z + \left(\frac{df}{dp}\right) d_x p + \left(\frac{df}{dq}\right) d_x q = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dz}\right) d_y z + \left(\frac{df}{dp}\right) d_y p + \left(\frac{df}{dq}\right) d_y q = 0.$$

Or, si ces différentielles se réduisent d'elles-mêmes à :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) d_x p = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dq}\right) d_y q = 0,$$

l'équation $f=0$, comportera nécessairement une solution singulière. Pour trouver l'intégrale complète de cette équation, on a, d'abord :

$$d_x p = 0, \quad d_y q = 0,$$

d'où :

$$p = a, \quad q = b,$$

partant :

$$z = ax + Y, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dy}\right) = b, \quad Y = by + c;$$

donc, enfin :

$$z = ax + by + c$$

sera l'intégrale complète de l'équation cherchée, pourvu qu'on pose : $c = \psi(a, b)$, puisque l'équation cherchée n'étant que du premier ordre, son intégrale complète ne peut renfermer que deux constantes arbitraires. L'équation que nous avions en vue est donc :

$$z = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \psi\left[\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right].$$

III

Théorème. — *Pour obtenir les solutions singulières d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables, supposée fonction algébrique des variables qui y entrent, il faut la résoudre par rapport à l'une des dérivées* p *ou* q ; *s'il ne se présente aucun radical dans l'expression de cette dérivée, il n'y aura pas de solution singulière. Dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux ; si ces fonctions ne renferment pas l'autre dérivée, elles seront des solutions singulières ; si elles renferment l'autre dérivée, on les résoudra par rapport à cette dérivée, et si, dans l'expression obtenue, il y a des radicaux, les fonctions placées sous ces radicaux, égalées à zéro, seront des solutions singulières. On suppose, toutefois, que les équations obtenues satisfont à l'équation différentielle et ne satisfont pas à son intégrale générale.*

Exemple I. — *Trouver la solution singulière de l'équation :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0.$$

Solution. — En résolvant l'équation $f = 0$ par rapport à p, on a :

$$p = -\frac{2x^5 + 2xy^2z - xy^3q}{x^2y^2} \pm \sqrt{\frac{4x^6}{y^4} + \frac{16x^2z}{y^2}};$$

ce qui donne la solution singulière :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

EXEMPLE. — *Trouver la solution singulière de l'équation :*

$$f = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z^2 - \rho^2 = 0, \qquad (1)$$

et déterminer la caractéristique et l'arête de rebroussement des surfaces canaux.

Solution. — En dérivant $f = 0$ partiellement en p et q, on a :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 2pz^2 = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = 2qz^2 = 0. \qquad (2)$$

On satisfait d'abord à ces équations en posant $z = 0$, qui ne satisfait pas à $f = 0$. On y satisfait encore en posant $p = 0$ et $q = 0$, valeurs qui, transportées dans la proposée, donnent la solution singulière : $z^2 = \rho^2$.

Si on substitue les valeurs (2) dans l'équation :

$$\left(\frac{df}{dp}\right) dy - \left(\frac{df}{dq}\right) dx = 0,$$

on obtient l'équation :

$$pdy - qdx = 0,$$

qui exprime que les caractéristiques des surfaces canaux sont leurs lignes de plus grande pente.

Si on élimine p et q entre les équations :

$$(1 + p^2 + q^2) z^2 = \rho^2, \quad pdy - qdx = 0, \quad dz = pdx + qdy,$$

on aura d'abord :

$$p = \frac{dx\,dz}{dx^2 + dy^2}, \quad q = \frac{dy\,dz}{dx^2 + dy^2},$$

et, par suite :

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) z^2 = \rho^2 (dx^2 + dy^2),$$

pour équation différentielle de l'arête de rebroussement.

II

On peut découvrir les solutions singulières des équations $f(x, y, z, p, q) = 0$, quand elles sont algébriques en x, y, z, p et q, par la règle suivante.

THÉORÈME. — *On détermine les coefficients différentiels partiels du second ordre :*

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right);$$

puis, entre les quatre équations qui expriment que les termes des fractions obtenues pour deux des dérivées précédentes deviennent nuls, on élimine les dérivées du second ordre qui s'y trouvent; on obtient ainsi deux équations, dont on élimine, à l'aide de la proposée, les deux dérivées $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ *et* $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ *: les équations résultantes renferment les solutions singulières.*

Dém. — En effet, l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, résulte de l'élimination de a et b entre les trois équations :

$$F_1(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q = 0.$$

Appelons :

$$a = \varphi_1(x, y, z, p, q) \quad \text{et} \quad b = \varphi_2(x, y, z, p, q),$$

les valeurs de a et de b tirées des deux dernières équations, on aura :

$$F_1[x, y, z, \varphi_1(x, y, z, p, q), \varphi_2(x, y, z, p, q)] \backsim f(x, y, z, p, q) = 0,$$

et, par conséquent :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) p + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right) p + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right) p + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right) q + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right) q + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right) q + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right] = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)p + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right] \\ \qquad + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)q + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right] \\ \qquad + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)p + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right] \\ \qquad + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)p + \left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)q + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right] \\ \qquad + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi_2}{dz}\right)q + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\end{array}\right\}}{\left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\right) + \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dp}\right)}.$$

Mais on a :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)p = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \left(\frac{dF_1}{dz}\right)q = 0,$$

et les solutions singulières donnent :

$$\left(\frac{dF_1}{da}\right) = \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{db}\right) = \left(\frac{dF_1}{d\varphi_2}\right) = 0.$$

Donc :

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \frac{N}{D} = \frac{0}{0}, \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{N'}{D'} = \frac{0}{0}, \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{N''}{D''} = \frac{0}{0}.$$

Maintenant, comme les valeurs de ces dérivées contiennent, en général, quatre des cinq quantités $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, il faudra, pour éliminer ces quatre quantités, joindre à la proposée deux des trois couples suivants d'équations :

$$1^{\text{er}}\text{ couple : }\begin{cases} N=0, \\ D=0; \end{cases}\qquad 2^{\text{e}}\text{ couple : }\begin{cases} N'=0, \\ D'=0; \end{cases}\qquad 3^{\text{e}}\text{ couple : }\begin{cases} N''=0, \\ D''=0; \end{cases}$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque. — Il est des équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables qui ont nécessairement une solution singulière. Pour découvrir la forme de ces équations, différentions $f=0$, d'abord par rapport à x, puis par rapport à y; nous aurons :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dz}\right)d_x z+\left(\frac{df}{dp}\right)d_x p+\left(\frac{df}{dq}\right)d_x q=0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)dy+\left(\frac{df}{dz}\right)d_y z+\left(\frac{df}{dp}\right)d_y p+\left(\frac{df}{dq}\right)d_y q=0.$$

Or, si ces différentielles se réduisent d'elles-mêmes à :

$$\left(\frac{df}{dp}\right)d_x p=0 \quad\text{et}\quad \left(\frac{df}{dq}\right)d_y q=0,$$

l'équation $f=0$, comportera nécessairement une solution singulière. Pour trouver l'intégrale complète de cette équation, on a, d'abord :

$$d_x p=0,\quad d_y q=0,$$

d'où :

$$p=a,\quad q=b,$$

partant :

$$z=ax+Y,\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=\left(\frac{dY}{dy}\right)=b,\quad Y=by+c;$$

donc, enfin :

$$z=ax+by+c$$

sera l'intégrale complète de l'équation cherchée, pourvu qu'on pose : $c = \psi(a, b)$, puisque l'équation cherchée n'étant que du premier ordre, son intégrale complète ne peut renfermer que deux constantes arbitraires. L'équation que nous avions en vue est donc :

$$z = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \psi\left[\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right].$$

III

Théorème. — *Pour obtenir les solutions singulières d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables, supposée fonction algébrique des variables qui y entrent, il faut la résoudre par rapport à l'une des dérivées* p *ou* q ; *s'il ne se présente aucun radical dans l'expression de cette dérivée, il n'y aura pas de solution singulière. Dans le cas contraire, on égalera à zéro les fonctions placées sous les divers radicaux; si ces fonctions ne renferment pas l'autre dérivée, elles seront des solutions singulières; si elles renferment l'autre dérivée, on les résoudra par rapport à cette dérivée, et si, dans l'expression obtenue, il y a des radicaux, les fonctions placées sous ces radicaux, égalées à zéro, seront des solutions singulières. On suppose, toutefois, que les équations obtenues satisfont à l'équation différentielle et ne satisfont pas à son intégrale générale.*

Exemple I. — *Trouver la solution singulière de l'équation :*

$$f = -4x^4\left[2z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + y^2\left[2z + x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2 = 0.$$

Solution. — En résolvant l'équation $f = 0$ par rapport à p, on a :

$$p = -\frac{2x^5 + 2xy^2z - xy^3q}{x^2y^2} \pm \sqrt{\frac{4x^6}{y^4} + \frac{16x^2z}{y^2}};$$

ce qui donne la solution singulière :

$$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0.$$

Exemple II. — *Trouver la solution singulière de l'équation :*

$$f = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z^2 - \rho^2 = 0.$$

Solution. — En résolvant l'équation $f = 0$ par rapport à p, on obtient :

$$p = \sqrt{\rho^2 - z^2 - q^2 z^2}.$$

Puis, en égalant à zéro la fonction placée sous le radical, il vient :

$$\rho^2 - z^2 - q^2 z^2 = 0,$$

d'où :

$$q = \frac{1}{z}\sqrt{\rho^2 - z^2},$$

ce qui donne la solution singulière : $z^2 = \rho^2$.

ARTICLE II. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ENTRE UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES.

Soient z une variable dépendante, et $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, n variables indépendantes. Représentons par $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, les n dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx_1}\right), \left(\frac{dz}{dx_2}\right), \left(\frac{dz}{dx_3}\right), \ldots \left(\frac{dz}{dx_n}\right)$. Une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre $n + 1$ variables pourra être représentée par :

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, z, p_1, p_2, p_3, \ldots p_n) = 0.$$

Son intégrale complète renfermera n constantes arbitraires, et son intégrale générale une fonction arbitraire d'une fonction déterminée des $n + 1$ variables.

Soient :

$$F_1[x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, z, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n] = 0,$$

l'intégrale complète, et :

$$F[x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, z, \chi(\varphi)] = 0,$$

l'intégrale générale.

I. — *Les solutions singulières de la proposée seront comprises parmi les équations résultant de l'élimination des* n *constantes arbitraires, entre l'intégrale complète et les équations suivantes, prises* n *à* n :

$$\left(\frac{dF_1}{dc_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF_1}{dc_2}\right)=0,\quad \left(\frac{dF_1}{dc_3}\right)=0,\ \ldots \left(\frac{dF_1}{dc_n}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dx_1}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_1}{dx_2}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_1}{dx_3}\right)=\frac{1}{0},\ldots \left(\frac{dF_1}{dx_n}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0}.$$

II. — *Les mêmes solutions singulières seront comprises parmi les équations résultant de l'élimination de la fonction arbitraire de l'intégrale générale entre cette intégrale et chacune des équations suivantes :*

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right)=0,\quad \left(\frac{dF}{dx_1}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dx_2}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dx_3}\right)=\frac{1}{0},\ldots \left(\frac{dF}{dx_n}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{dF}{dz}\right)=\frac{1}{0}.$$

III. — *Les solutions singulières de* $f=0$ *résulteront encore de l'élimination des* n *dérivées partielles* $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ *entre l'équation* $f=0$ *et les équations suivantes, prises convenablement* n *à* n :

$$\left(\frac{df}{dp_1}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dp_2}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dp_3}\right)=0,\ldots \left(\frac{df}{dp_n}\right)=0,$$

$$\left(\frac{df}{dx_1}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dx_2}\right)=\infty,\quad \left(\frac{df}{dx_3}\right)=\infty,\ \ldots \left(\frac{df}{dx_n}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dz}\right)=\frac{1}{0}.$$

Remarque. — Les équations de la forme :

$$z=x_1\left(\frac{dz}{dx_1}\right)+x_2\left(\frac{dz}{dx_2}\right)+x_3\left(\frac{dz}{dx_3}\right)+\ldots+x_n\left(\frac{dz}{dx_n}\right)+\psi\left[\left(\frac{dz}{dx_1}\right),\left(\frac{dz}{dx_2}\right),\left(\frac{dz}{dx_3}\right),\ldots\left(\frac{dz}{dx_n}\right)\right],$$

dont l'intégrale complète est :

$$z=c_1\,x_1+c_2\,x_2+c_3\,x_3+\ldots+c_n\,x_n+\psi\,[c_1, c_2, c_3, \ldots c_n],$$

ont toujours une solution singulière.

ARTICLE III. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU $m^{ème}$ ORDRE A $n+1$ VARIABLES.

I

A. — a. *On obtiendra les solutions singulières d'une équation différentielle partielle du* $m^{ème}$ *ordre à* $n+1$ *variables, au moyen de l'une de ses intégrales premières générales :*

$$F[x_1, x_2, x_3, \dots x_n, z;\ p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, \dots;\ p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \dots;\ p_1^{(m-1)}, p_2^{(m-1)}, p_3^{(m-1)}, \dots;\ \chi(\varphi)] = 0,$$

($p_i^{(k)}$ *désignant la* $i^{ème}$ *des dérivées partielles d'ordre* k *de* z), *en éliminant la fonction arbitraire entre l'équation* $F = 0$ *et chacune des suivantes :*

$$\left(\frac{dF}{d\chi}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx_1}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dx_2}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dx_3}\right) = \frac{1}{0}, \dots \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dz}\right) = \frac{1}{0},$$

$$\left(\frac{dF}{dp_1^{(1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_2^{(1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_3^{(1)}}\right) = \frac{1}{0}, \dots$$

$$\left(\frac{dF}{dp_1^{(2)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_2^{(2)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_3^{(2)}}\right) = \frac{1}{0}, \dots$$

. . . .

$$\left(\frac{dF}{dp_1^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_2^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF}{dp_3^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \dots$$

b. *On obtiendra les mêmes solutions singulières en éliminant les* n *constantes* $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ *entre l'intégrale première complète :*

$$F_1[x_1, x_2, x_3, \dots x_n, z;\ p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, \dots;\ p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \dots;\ p_1^{(m-1)}, p_2^{(m-1)}, p_3^{(m-1)}, \dots;\ c_1, c_2, c_3, \dots c_n] = 0,$$

et les équations suivantes, prises n *à* n :

$$\left(\frac{dF_1}{dc_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{dc_2}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{dc_3}\right) = 0, \dots \left(\frac{dF_1}{dc_n}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dx_1}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dx_2}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dx_3}\right) = \infty, \dots \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dz}\right) = \infty,$$

$$\left(\frac{dF_1}{dp_1^{(1)}}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_2^{(1)}}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_3^{(1)}}\right) = \infty, \dots$$

$$\left(\frac{dF_1}{dp_1^{(2)}}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_2^{(2)}}\right) = \infty, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_3^{(2)}}\right) = \infty, \dots$$

. . . .

$$\left(\frac{dF_1}{dp_1^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_2^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \quad \left(\frac{dF_1}{dp_3^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{0}, \dots$$

B. — *Les solutions singulières de l'équation :*

$$f\left[x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, z;\ p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, \ldots;\ p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots;\ \ldots;\ p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \ldots\right]=0,$$

s'obtiennent par l'élimination des $\dfrac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}/+1}}{\mathrm{m}!} = \dfrac{(\mathrm{n}+\mathrm{m}-1)^{\mathrm{m}/-1}}{\mathrm{m}!}$ *dérivées du* $\mathrm{m}^{\text{ème}}$ *ordre, entre* $\mathrm{f}=0$ *et les équations suivantes, prises* $\dfrac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}/+1}}{\mathrm{m}!}$ *à* $\dfrac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}/+1}}{\mathrm{m}!}$:

$$\left(\frac{df}{dp_1^{(m)}}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dp_2^{(m)}}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dp_3^{(m)}}\right)=0,\ldots$$

$$\left(\frac{df}{dx_1}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dx_2}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dx_3}\right)=\frac{1}{0},\ldots \left(\frac{df}{dx_n}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dz}\right)=\frac{1}{0},$$

$$\left(\frac{df}{dp_1^{(1)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_2^{(1)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_3^{(1)}}\right)=\frac{1}{0},\ldots$$

$$\left(\frac{df}{dp_1^{(2)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_2^{(2)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_3^{(2)}}\right)=\frac{1}{0},\ldots$$

. . . .

$$\left(\frac{df}{dp_1^{(m-1)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_2^{(m-1)}}\right)=\frac{1}{0},\quad \left(\frac{df}{dp_3^{(m-1)}}\right)=\frac{1}{0},\ldots$$

EXEMPLE. — *Trouver les solutions singulières de l'équation aux différentielles partielles du second ordre à trois variables :*

$$f=(1+x)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2-2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left[(1+x)\left(\frac{dz}{dx}\right)-z\right]+\left[(1+x)\left(\frac{dz}{dx}\right)-z\right]y=0.$$

Solution. — Il n'y a lieu ici que d'employer l'équation $\left(\dfrac{df}{dp_1^{(2)}}\right)=0$, $p_1^{(2)}$ représentant $\left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)$, car l'équation $f=0$ ne renferme que $\left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)$ en fait de dérivées du second ordre ; elle est algébrique, rationnelle et entière en x, y, z, $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$. On a donc :

$$\left(\frac{df}{dp_1^{(2)}}\right)=(1+x)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{dz}{dy}\right)\left[(1+x)\left(\frac{dz}{dx}\right)-z\right]=0.$$

Éliminant $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ entre cette équation et $f=0$, on a :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - y(1+x) = 0,$$

pour solution singulière de la proposée. Cette solution singulière a pour intégrale générale :

$$z = (1+x)\,\chi(y),$$

qui est encore une solution singulière de la proposée, solution remarquable en ce qu'elle renferme une fonction arbitraire, et en ce qu'elle paraît aussi étendue que l'intégrale générale de la proposée, car cette intégrale, développée par la série de Mac-Laurin, suivant les puissances de y, est :

$$z = \chi(x) + \frac{y}{1}\cdot\frac{\left(\frac{d^2\chi}{dx^2}\right)}{2\left[\left(\frac{d\chi}{dx}\right) - \frac{\chi(x)}{1+x}\right]} + \ldots,$$

et ne renferme, comme on le voit, qu'une fonction arbitraire.

II

Une équation différentielle partielle du $m^{ème}$ ordre à $n+1$ variables, peut avoir des solutions singulières multiples. Pour les obtenir, on passera successivement des solutions singulières simples aux solutions singulières doubles, de celles-ci aux solutions singulières triples, et ainsi de suite.

LIVRE SECOND.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

Nous examinerons le seul cas qui ait une signification géométrique : c'est celui de deux équations différentielles du premier ordre à trois variables :

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y, z, p, q) = 0, \\ f_2(x, y, z, p, q) = 0, \end{array}\right.$$

z et y étant les variables dépendantes, et p et q représentant les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

I — Soit :

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l} F'_1(x, y, z, a_1, a_2) = 0, \\ F'_2(x, y, z, a_1, a_2) = 0, \end{array}\right.$$

le système d'équations qui satisfont à (α) en qualité d'intégrales générales ou complètes. Par une élimination convenablement dirigée, on pourra toujours faire en sorte que chacune des équations (β) ne renferme qu'une constante. Soient :

$$(\gamma)\left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, z, a_1) = 0, \\ F_2(x, y, z, a_2) = 0, \end{array}\right.$$

les transformées.

Les équations (α) résulteront de l'élimination des constantes a_1 et a_2 entre les équations (β) et leurs dérivées complètes immédiates, savoir :

$$(\delta)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dy}\right)p+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q=0,\\&\left(\frac{dF_2}{dx}\right)+\left(\frac{dF_2}{dy}\right)p+\left(\frac{dF_2}{dz}\right)q=0.\end{aligned}\right.$$

Mais les équations résultantes de cette élimination resteront les mêmes, si, au lieu de regarder a_1 et a_2 comme constantes, on les considère comme des fonctions de x, y et z, pourvu que les équations (δ) restent les mêmes. Mais, en considérant a_1 et a_2 comme variables, les dérivées complètes et immédiates des équations (γ) sont :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left(\frac{dF_1}{dy}\right)p+\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q+\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left[\left(\frac{da_1}{dx}\right)+\left(\frac{da_1}{dy}\right)p+\left(\frac{da_1}{dz}\right)q\right]=0,$$

$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right)+\left(\frac{dF_2}{dy}\right)p+\left(\frac{dF_2}{dz}\right)q+\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left[\left(\frac{da_2}{dx}\right)+\left(\frac{da_2}{dy}\right)p+\left(\frac{da_2}{dz}\right)q\right]=0,$$

ou :

$$\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dy}\right)p+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_1}{dz}\right)q=0,$$

$$\left[1+\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dx}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dx}\right)+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dy}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dy}\right)p+\left[1+\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dz}\right)}\right]\left(\frac{dF_2}{dz}\right)q=0,$$

équations qui se réduisent aux équations (δ), si l'on a les relations :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dx}\right)}=0,\quad\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dy}\right)}=0,\quad\frac{\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)\left(\frac{da_1}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_1}{dz}\right)}=0,\\&\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dx}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dx}\right)}=0,\quad\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dy}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dy}\right)}=0,\quad\frac{\left(\frac{dF_2}{da_2}\right)\left(\frac{da_2}{dz}\right)}{\left(\frac{dF_2}{dz}\right)}=0,\end{aligned}\right\}(A)$$

relations auxquelles on satisfait :

1° En posant à la fois :

$$\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)=0,\quad \left(\frac{dF_2}{da_2}\right)=0; \qquad (a)$$

2° Ou, en posant simultanément :

$$\left(\frac{da_1}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{da_1}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{da_1}{dz}\right)=0,\ \left(\frac{da_2}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{da_2}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{da_2}{dz}\right)=0; \quad (b)$$

3° Ou, en posant conjointement :

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_2}{dx}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_2}{dz}\right)=\frac{1}{0}; \quad (c)$$

4° Ou, enfin, en réunissant une ou plusieurs des équations (b) avec les équations non correspondantes du groupe (c). Donc :

Les solutions singulières du système $f_1=0$, $f_2=0$, *résulteront de l'élimination des constantes* a_1 *et* a_2 *entre les intégrales complètes* $F_1=0$ *et* $F_2=0$, *d'une part, et, d'autre part, les équations :*

$$\left(\frac{dF_1}{da_1}\right)=0,\ \left(\frac{dF_2}{da_2}\right)=0,\ \left(\frac{dF_1}{dx}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_1}{dy}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_1}{dz}\right)=\frac{1}{0};$$
$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right)=\frac{1}{0},\ \left(\frac{dF_2}{dz}\right)=\frac{1}{0},$$

prises convenablement deux à deux.

Rem. — On arriverait au même résultat par la considération des radicaux, dans l'hypothèse de F_1 et F_2, algébriques en x, y, z, a_1, a_2.

II. — On trouverait aisément que : *Pour déduire des équations* $f_1=0$, $f_2=0$ *elles-mêmes, leurs solutions singulières, on ramènera d'abord, par une élimination convenable, l'équation* $f_1=0$ *à ne renfermer que* p, *et l'équation* $f_2=0$ *à ne renfermer que* q; *puis, on éliminera* p *et* q *entre les transformées et leurs dérivées partielles relatives à* p *et à* q *et égalées à zéro, ou relatives à* x, *à* y *ou à* z *et égalées à l'infini, les équations obtenues par ces dérivations étant prises deux à deux convenablement.*

Rem. I. — Par la considération des radicaux, et dans l'hypothèse où les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ sont des fonctions algébriques de x, y, z, p et q, on arriverait à des conclusions semblables.

Rem. II. — Dans la même hypothèse, Legendre raisonne ainsi qu'il suit : Si on fait varier y, z, p, q dans les équations (α), on aura :

$$\left(\frac{df_1}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{df_1}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{df_1}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{df_1}{dq}\right)\delta q = 0,$$

$$\left(\frac{df_2}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{df_2}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{df_2}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{df_2}{dq}\right)\delta q = 0,$$

ou :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{df_1}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{df_1}{dq}\right)\frac{d\delta z}{dx} + \left(\frac{df_1}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{df_1}{dz}\right)\delta z = 0,\\ \left(\frac{df_2}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{df_2}{dq}\right)\frac{d\delta z}{dx} + \left(\frac{df_2}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{df_2}{dz}\right)\delta z = 0.\end{aligned}\right\}(\varepsilon)$$

On suppose que les équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ sont délivrées de radicaux et de dénominateurs. Maintenant, il doit être possible de faire disparaître $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$ des équations précédentes, car, en faisant varier y et z dans l'équation finie en x, y, z, ces quantités $\frac{d\delta y}{dx}$ et $\frac{d\delta z}{dx}$ ne s'y trouveraient pas. Prenons donc un coefficient indéterminé θ, multiplions la deuxième équation (ε) par ce coefficient, ajoutons la résultante à la première équation (ε), nous aurons :

$$\left[\left(\frac{df_1}{dp}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dp}\right)\right]\frac{d\delta y}{dx} + \left[\left(\frac{df_1}{dq}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dq}\right)\right]\frac{d\delta z}{dx} + \left[\left(\frac{df_1}{dy}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dy}\right)\right]\delta y + \left[\left(\frac{df_1}{dz}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dz}\right)\right]\delta z = 0,$$

équation où, pour chasser $\frac{d\delta y}{dx}$ et $\frac{d\delta z}{dx}$, il faut faire :

$$\left(\frac{df_1}{dp}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dp}\right) = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{df_1}{dq}\right) + \theta\left(\frac{df_2}{dq}\right) = 0,$$

d'où l'on tire, par l'élimination de θ :

$$\left(\frac{df_1}{dp}\right)\left(\frac{df_2}{dq}\right) - \left(\frac{df_1}{dq}\right)\left(\frac{df_2}{dp}\right) = 0,$$

équation qui doit avoir lieu dans le cas des solutions singulières. En éliminant p et q entre cette équation et les proposées, on aura ces solutions. Ce résultat ne diffère du précédent, qu'en ce qu'ici on n'a pas supposé comme là, que l'équation $f_1 = 0$ ne renfermait que la dérivée p, et l'équation $f_2 = 0$ que la dérivée q.

Remarques générales. — 1° Les équations :

$$(\alpha)\ \begin{cases} f_1\,(x, y, z, p, q) = 0, \\ f_2\,(x, y, z, p, q) = 0, \end{cases}$$

sont satisfaites par le système d'intégrales complètes :

$$(\gamma)\ \begin{cases} F_1\,(x, y, z, a_1) = 0, \\ F_2\,(x, y, z, a_2) = 0, \end{cases}$$

et par le système de solutions singulières :

$$(\zeta)\ \begin{cases} \varphi_1\,(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2\,(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Mais on peut encore satisfaire aux équations (α) en prenant une des équations (ζ) avec l'équation non correspondante du groupe (γ), pourvu que le système ainsi formé, soit compatible. Pour être sûr d'avoir un tel système, on substituera l'une des équations (ζ) dans les équations (α) ; si ces équations (α) s'accordent par cette substitution, l'intégrale complète de la résultante, jointe à l'équation (ζ) qu'on a prise, formera un système mixte compatible et satisfaisant aux équations (α).

Exemple. — *Trouver les solutions singulières du système :*

$$\left[y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}\right]^2 - 8x\frac{dy}{dx}.\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$zy - x\left[y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right] = 0,$$

d'abord au moyen des intégrales complètes :

$$zy = a_1 x - \frac{a_1^2}{4}, \quad xy^2 = a_2\,(4x - a_1),$$

puis par les équations différentielles, enfin par les variations; en outre, former le système mixte.

Solution.— Le système des intégrales complètes peut se transformer en :

$$F_1 = yz - a_1 x + \frac{a_1^2}{4} = 0,$$

$$F_2 = 4a_2^2 yz - 4a_2 x^2 y^2 + x^2 y^4 = 0.$$

Il n'y a lieu d'employer que les équations $\left(\frac{dF_1}{da_1}\right) = 0$, $\left(\frac{dF_2}{da_2}\right) = 0$, qui conduisent, l'une et l'autre, à la solution singulière $yz = x^2$. Mais, pour avoir un système de deux équations, il faut joindre $yz - x^2 = 0$ à une des équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$. Pour trouver celle de ces équations qui est compatible avec $yz - x^2 = 0$, nous substituons cette dernière dans les proposées, qui se réduisent toutes deux à :

$$y - 2x\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où, en intégrant et désignant par a_3 une nouvelle constante arbitraire, l'on tire :

$$y^2 = a_3 x.$$

Le système :

$$yz - x^2 = 0, \quad \text{et} \quad y^2 - a_3 x = 0,$$

est identique avec celui des équations :

$$yz - x^2 = 0 \quad \text{et} \quad xy^2 = a_2(4x - a_1),$$

quand on pose :

$$a_2 = \frac{a_1 a_3}{4},$$

car l'équation :

$$yz = a_1 x - \frac{a_1^2}{4},$$

donne :

$$z = a_1 \frac{x}{y} - \frac{a_1^2}{4} \cdot \frac{1}{y},$$

et l'équation :

$$xy^2 = a_2(4x - a_1),$$

donne :

$$xy = 4a_2 \cdot \frac{x}{y} - a_1\, a_3\, \frac{1}{y},$$

ou, à cause de $a_2 = \frac{a_1 a_3}{4}$,

$$xy = a_3 \left[a_1 \frac{x}{y} - \frac{a_1^2}{4} \cdot \frac{1}{y} \right] \quad \text{ou} \quad xy - a_3 z = 0,$$

équation qui, multipliée par x, puis ajoutée à l'équation $yz - x^2 = 0$, au préalable multipliée par y, donne :

$$xy - a_3 z = 0.$$

Le système :

$$\begin{cases} yz - x^2 = 0 \\ y^3 - a_3 x = 0 \end{cases}$$

est donc un système mixte.

Maintenant, il sera facile d'arriver à l'équation $yz - x^2 = 0$ par l'équation :

$$\left(\frac{df_1}{dp}\right) \left(\frac{df_2}{dq}\right) = \left(\frac{df_1}{dq}\right) \left(\frac{df_2}{dp}\right).$$

On continuera ensuite de la manière précédente.

2° Considérons les deux équations :

$$F_1 (x, y, z, a) = 0,$$
$$F_2 (x, y, z, a) = 0,$$

ne renfermant qu'une constante arbitraire chacune. Elles pourront être considérées comme représentant une série de courbes dans l'espace, lorsqu'on y fait varier a d'une manière continue. Le lieu géométrique des intersections successives de ces courbes, est dit *enveloppe;* et les courbes $[F_1 = 0,\ F_2 = 0]$, *enveloppées*. On aura l'enveloppe en éliminant a entre les équations :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \left(\frac{dF_1}{da}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF_2}{da}\right) = 0.$$

Mais, comme pour exprimer une courbe dans l'espace, il est nécessaire et suffisant d'avoir deux équations, et que l'élimination précédente conduira à trois équations, il en résulte que les courbes $[F_1 = 0,\ F_2 = 0]$ n'auront pas toujours une enveloppe, et qu'elles n'en auront une que quand les trois équations se réduiront à deux. Quand il y a une enveloppe, les équations de cette enveloppe forment généralement un système de solutions singulières des équations différentielles dont $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont des intégrales.

Exemple. — *Trouver l'enveloppe de toutes les intersections successives des plans normaux consécutifs d'une courbe gauche.*

Solution. — Ces intersections sont parfois nommées *axes*. Elles ont pour équation :

$$(\xi - x)\,dx + (\upsilon - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \tag{1}$$

$$(\xi - x)\,d^2x + (\upsilon - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = 0, \tag{2}$$

lorqu'on considère x, y, z, comme des fonctions d'une même variable indépendante t, qui jouera ici le rôle du paramètre a dans les courbes $[F_1 = 0,\ F_2 = 0]$. Or, si on différentie les équations précédentes, on n'introduira qu'une équation nouvelle :

$$\begin{aligned}&(\xi - x)\,d^3x + (\upsilon - y)\,d^3y + (\zeta - z)\,d^3z\\ &- 3\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) = 0.\end{aligned}$$

Donc, il existe une courbe qui a pour tangentes les normales aux plans osculateurs de la première courbe. L'équation de cette enveloppe résultera de l'élimination de t entre les équations (1), (2) et (3).

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Toute la première partie de notre travail, conduit à ce théorème :

Toute solution singulière peut être obtenue sous forme finie par le simple procédé de l'élimination.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

CHAPITRE I.

Applications analytiques.

La connaissance des solutions singulières d'une équation différentielle peut servir à son intégration de deux manières distinctes. En effet, ces solutions connues, 1° on peut en débarrasser l'équation différentielle, qui prend alors une signification plus restreinte, devient plus simple, et, partant, plus accessible aux procédés ordinaires du calcul intégral ; 2° on peut souvent former le facteur d'intégrabilité immédiate qui, une fois déterminé, conduit sur-le-champ à l'intégrale complète de la proposée.

§ I. — INTÉGRATION PAR LA SÉPARATION DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Cette séparation peut s'effectuer par la méthode de Lagrange, ou par celle de Poisson. Lagrange différencie l'équation différentielle donnée mise sous une forme convenable, et arrive à une autre équation différentielle dont l'ordre est plus élevé d'une unité que celui de la première ; il cherche, ensuite, l'intégrale première de cette nouvelle équation ; puis, entre cette intégrale première et l'équation proposée, il élimine le coefficient différentiel d'ordre le plus élevé ; il arrive ainsi à une intégrale première de la proposée.

Mais ce procédé ne peut être appliqué généralement que lorsqu'on connaît déjà cette intégrale première ; ensuite, il élève l'ordre de l'équation différentielle. Son usage est donc restreint à certaines classes d'équations différentielles où la différentiation manifeste immédiatement deux facteurs, dont celui d'ordre inférieur renferme toutes les solutions singulières.

Poisson délivre une équation de ses solutions singulières au moyen d'un changement de variables, de sorte que l'équation transformée reste de même ordre que la proposée et devient beaucoup plus simple.

Exemple. — Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - m - n)\, y \pm \sqrt{y^2 (m-n)^2 + 4k (m-x)(n-x)}}{2 (m-x)(n-x)}.$$

A cet effet, commençons par en faire disparaître la solution singulière :

$$y^2 (m-n)^2 + 4k (m-x)(n-x) = 0.$$

Multiplions donc la proposée par :

$$\frac{m-n}{\sqrt{y^2 (m-n)^2 + 4k (m-x)(n-x)}};$$

et choisissons une fonction z de x et de y, la suivante, par exemple :

$$z = l\left[y (m-n) + \sqrt{y^2 (m-n)^2 + 4k (m-x)(n-x)}\right],$$

telle que sa dérivée partielle relative à y soit justement le premier membre de la proposée multipliée comme nous l'avons dit ; cette proposée deviendra :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\pm (m-n)}{2(m-x)(n-x)} + \frac{(2x-m-n)\left[y (m-n) + 4k (m-x)(n-x)\, c^{-z}\right]}{2 (m-x)(n-x)\sqrt{y^2(m-n)^2 + 4k (m-x)(n-x)}}.$$

Mais l'équation en x, y, z, donne :

$$y(m-n) = \frac{e^z - 4k(m-x)(n-x)e^{-z}}{2},$$

$$\sqrt{y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)} = \frac{e^z + 4k(m-x)(n-x)e^{-z}}{2};$$

donc :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(2x-m-n) \pm (m-n)}{2(m-x)(n-x)},$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$dz = \frac{dx}{x-m}, \quad dz = \frac{dx}{x-n},$$

délivrées de solution singulière, et qui s'intègrent immédiatement. En intégrant la première, on a :

$$z = la + l(x-m),$$

a étant la constante arbitraire.

Cette équation étant substituée dans la primitive en x, y, z, donne :

$$y - m = \frac{a(x-m)}{2} + \frac{2k(x-n)}{a},$$

qui est l'intégrale demandée.

L'intégration de l'équation $dz = \dfrac{dx}{x-n}$ aurait conduit au même résultat.

§ II. — FORMATION DU FACTEUR D'INTÉGRABILITÉ PAR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Nous restreindrons la question aux équations différentielles du premier ordre à deux variables, en remarquant qu'on peut étendre ce que nous en dirons aux équations des ordres supérieurs et à un nombre quelconque de variables.

A. — Lemmes fondamentaux.

LEMME I. — *Toute solution singulière donne une valeur infinie au facteur propre à rendre intégrable l'équation différentielle du premier ordre à deux variables, à laquelle elle satisfait.*

Dém. — Supposons l'équation différentielle mise sous la forme :

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0;$$

si nous appelons z le facteur fonction de x et de y propre à rendre intégrable cette équation, nous aurons :

$$z\left(P + Q\frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

pour différentielle immédiate de l'intégrale générale :

$$a = \Pi\,(x, y)$$

de la proposée. Nulle solution singulière ne pouvant vérifier l'équation $a = \Pi\,(x, y)$ ne pourra non plus vérifier l'équation (1); mais elle satisfait à la proposée et annulle, par conséquent, le facteur $P + Q\frac{dy}{dx}$; elle doit donc rendre infinie la fonction z; ce qu'il fallait prouver.

Cette démonstration est due à Laplace; on en trouve une autre dans le *Calcul intégral* du marquis de Condorcet.

LEMME II. — *Si* z *ou* $\frac{1}{z}$ *est le facteur d'intégrabilité immédiate de l'équation* $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$, $z = 0$ *satisfera à cette équation.*

Dém. — Ce théorème est dû à Euler. Voici comment il le démontre. Selon que z ou $\frac{1}{z}$ sera le facteur d'intégrabilité, on aura, pour la condition d'intégrabilité immédiate :

$$\left(\frac{d_y\,(Pz)}{dy}\right) = \left(\frac{d_x\,(Qz)}{dx}\right),$$

ou :

$$\left(\frac{d_y\left(\frac{P}{z}\right)}{dy}\right) = \left(\frac{d_x\left(\frac{Q}{z}\right)}{dx}\right).$$

En effectuant les différentiations et multipliant au préalable la seconde par $-z^2$, on obtient :

$$(A)\left\{\begin{array}{l} P\left(\frac{dz}{dy}\right)-Q\left(\frac{dz}{dx}\right)+z\left[\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]=0, \\ \text{et } P\left(\frac{dz}{dy}\right)-Q\left(\frac{dz}{dx}\right)-z\left[\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]=0. \end{array}\right.$$

Ces équations se réduisent, l'une et l'autre, à :

$$P\left(\frac{dz}{dy}\right)-Q\left(\frac{dz}{dx}\right)=0 \qquad (a)$$

pour $z=0$; mais $z=0$ donne :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)=-\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx},$$

valeur qui, substituée dans (a), donne :

$$P\left(\frac{dz}{dy}\right)+Q\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

ou :

$$P+Q\frac{dy}{dx}=0;$$

donc l'équation $z=0$ satisfait à la proposée.

Remarque. — La démonstration précédente suppose que les équations (A) se réduisent à leurs deux premiers termes par l'hypothèse de $z=0$. Or, Euler (*Institutiones calculi integralis*, p. 414 et 416) a signalé deux cas où les équations (A) ne se réduisent pas à l'équation (a) pour $z=0$. Le premier cas a lieu, quand z étant le facteur d'intégrabilité immédiate, l'hypothèse $z=0$ rend P ou Q infini. En effet, si P devient $\frac{1}{0}$ pour $z=0$, alors $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ devient ∞, et $z\left(\frac{dP}{dy}\right)$ devenant par suite $\frac{0}{0}$, ne s'évanouit plus. Mais Jean Trembley a remarqué, avec raison, que si l'on prépare l'équation $Pdx+Qdy=0$, de façon que P et Q ne soient point affectés de dénominateurs, ils ne peuvent devenir infinis pour $z = 0$, ce qui fait disparaître l'exception.

La deuxième exception signalée par Euler a lieu lorsque, $\frac{1}{z}$ étant le facteur d'intégrabilité immédiate, l'hypothèse $z = 0$ fait évanouir P ou Q. En effet, si $z = 0$ donne $P = 0$, par exemple, la deuxième des équations (A) devient :

$$Q\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Mais si on remarque, avec Trembley, que Q n'étant pas nul, on doit avoir $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, on verra que z ne renferme pas x, et que, par conséquent, la supposition de $z = 0$ donnera $y =$ *constante*, partant, $\frac{dy}{dx} = 0$, de sorte qu'on aura encore $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui fait disparaître la deuxième exception.

Trembley a fait connaître une exception plus réelle : c'est lorsque z est de la forme e^u, u étant une fonction sans dénominateur. En effet, on doit avoir alors :

$$\left(\frac{d_y\,(Pe^u)}{dy}\right) = \left(\frac{d_x\,(Qe^u)}{dx}\right),$$

d'où, en développant et divisant tout par e^u :

$$P\left(\frac{du}{dy}\right) - Q\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

équation qui n'a plus la forme (A).

Le théorème d'Euler n'est donc généralement vrai que pour les facteurs algébriques.

De ce théorème découlent les propositions suivantes :

COROLLAIRE I. — *Si le facteur qui rend l'équation* $\mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} = 0$

une différentielle exacte, est z, *et si* z $= 0$ *satisfait à cette équation, ce sera une intégrale particulière.*

Dém. — Soit $a = \Pi\,(x, y)$ l'intégrale générale de l'équation différentielle $Pdx + Qdy = 0$, on aura :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + \left(\frac{d\Pi}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = z\left[P + Q\,\frac{dy}{dx}\right] = 0,$$

équation qui se partage en deux :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = zP, \quad \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = zQ,$$

et comme $z = 0$ ne rend infinie aucune des fonctions P et Q, on a, dans cette hypothèse :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = 0.$$

La fonction Π est donc égale à une constante pour $z = 0$, et comme d'ailleurs $z = 0$ satisfait, par hypothèse, à la proposée, elle est une intégrale particulière.

Corollaire II. — *Si le facteur qui rend l'équation* Pdx $+$ Qdy $= 0$ *une différentielle exacte, est* $\frac{1}{\mathrm{z}}$, *et si* z $= 0$ *satisfait à cette équation, ce sera une intégrale particulière ou une solution singulière, selon que les équations* $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ *donneront pour* Π *une valeur constante ou une valeur variable.*

Dém. — En effet, le facteur d'intégrabilité immédiate étant $\frac{1}{z}$, on doit avoir identiquement :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + \left(\frac{d\Pi}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\left(P + Q\,\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

équation qui se partage en deux :

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \frac{P}{z}, \quad \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \frac{Q}{z}.$$

Maintenant, comme $z = 0$ satisfait, par hypothèse, à l'équation proposée et ne fait évanouir aucune des fonctions P et Q, on a, pour $z = 0$:

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = \infty, \quad \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) = \infty.$$

Si ces équations conduisent à $\Pi =$ *constante*, $z = 0$ sera une intégrale particulière de la proposée ; si, au contraire, on obtient pour Π une quantité variable, cette quantité ne satisfaisant pas à l'intégrale de $P + Q\,\frac{dy}{dx} = 0$, sera une solution singulière de la proposée ; ce qu'il fallait prouver.

Corollaire III. — En combinant les deux corollaires précédents, on voit que : *Les intégrales particulières et les solutions singulières entrent comme facteurs dans la composition du facteur d'intégrabilité.*

B. — Détermination du facteur d'intégrabilité.

Voici maintenant comment Trembley opère, pour trouver le facteur d'intégrabilité :

1° *Il cherche des solutions singulières et des intégrales particulières de la proposée ; il multiplie toutes ces fonctions entre elles, après avoir donné à chacune un exposant à déterminer ; il multiplie, en outre, le produit par* e^u, u *étant une fonction de* x *et de* y *à déterminer, s'il a reconnu que le facteur d'intégrabilité ne peut être algébrique ;*

2° *Il substitue le produit obtenu à la place de* z, *dans l'équation de condition :*

$$\left(\frac{d_y\,(Pz)}{dy}\right) - \left(\frac{d_x\,(Qz)}{dx}\right) = 0;$$

3° *Il égale à zéro les différents termes de cette équation, et les équations résultantes lui servent à déterminer les valeurs des exposants inconnus.*

EXEMPLE I. — Soit l'équation :

$$(x^2 - r^2)\, dy - [xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}]\, dx = 0.$$

Nous savons que sa solution singulière est $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; on vérifie immédiatement que $x^2 - r^2 = 0$ est une intégrale particulière. On pose donc :

$$z = (x^2 + y^2 - r^2)^{\rho}\, (x^2 - r^2)^{\sigma}.$$

Cette valeur, substituée dans la condition d'intégrabilité, donne, après toute réduction, une équation satisfaite par $\rho = -\frac{1}{2}$ et $0 = -1$. Le facteur d'intégrabilité est donc :

$$z = \frac{1}{(x^2 - r^2)\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}.$$

EXEMPLE II. — Soit l'équation :

$$y^2\sqrt{a + x} + ay\sqrt{a - x} - a\sqrt{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

On trouve qu'elle est satisfaite par $y = 0$, de sorte qu'après avoir reconnu que le facteur d'intégrabilité ne peut être algébrique, on pose :

$$z = e^u . y^{\mu}.$$

Substituant dans l'équation de condition, il vient :

$$(y^2\sqrt{a + x} + ay\sqrt{a - x})\left(\frac{dz}{dy}\right) + a\sqrt{a}\sqrt{a^2 - x^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$
$$+ \left(2y\sqrt{a + x} + a\sqrt{a - x} - \frac{ax\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) z = 0.$$

Substituant à z sa valeur et divisant tout par $e^u\, y^{\mu - 1}$, il vient :

$$(y^2\sqrt{a + x} + ay\sqrt{a - x})\,[y\left(\frac{du}{dx}\right) + \mu] + a\sqrt{a}\sqrt{a^2 - x^2}.\, y\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$+ \left[2y\sqrt{a + x} + a\sqrt{a - x} - \frac{ax\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] y = 0,$$

ou, en développant :

$$y^3\left(\frac{du}{dx}\right)\sqrt{a-x}+ay^2\left(\frac{du}{dy}\right)\sqrt{a-x}+(\mu+2)\,y^2\sqrt{a+x}$$

$$+\,a(\mu+1)\,y\sqrt{a-x}+a\sqrt{a}\sqrt{a^2-x^2}.\,y\left(\frac{du}{dx}\right)-\frac{axy\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-x^2}}=0.$$

En posant $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, on détruit les deux premiers termes. Le troisième s'évanouit pour $\mu=-2$; le reste de l'équation devient :

$$-a\sqrt{a-x}+a\sqrt{a}\left(\frac{du}{dx}\right)\sqrt{a^2-x^2}-\frac{ax\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-y^2}}=0,$$

d'où :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a+x}}+\frac{x}{a^2-x^2},$$

et, en intégrant :

$$u=\frac{2\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}-l\sqrt{a^2+x^2}.$$

Le facteur d'intégrabilité cherché est donc :

$$z=\frac{1}{y^2}\left[e^{\frac{2\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}-l\sqrt{a^2-x^2}}\right]\quad\text{ou}\quad z=\frac{e^{\frac{2\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}}}{y^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

CHAPITRE II.

Applications géométriques.

La théorie des enveloppes des courbes planes ou à double courbure et des surfaces n'est, pour ainsi dire, que l'expression concrète, la représentation géométrique de la théorie des solutions singulières.

Tout ce que nous avons dit des enveloppes, dans la première partie de notre travail, nous dispense d'y revenir. Nous ajouterons seulement que la théorie des développées, celles de la génération des courbes et des surfaces, toutes les théories enfin qui se rattachent, de près ou de loin, à celle de l'enveloppement, sont encore une application des principes émis dans la première partie. Nous n'exposerons pas, même en raccourci, ces théories, quelque élégantes et importantes qu'elles soient d'ailleurs. Nous nous bornerons à traiter deux exemples tirés l'un et l'autre de l'optique mathématique.

Exemple I. — *Trouver les équations des diacaustiques et des catacaustiques.*

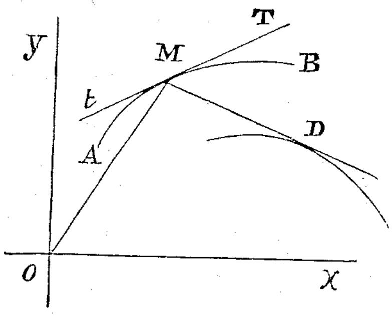
Solution. — Malus est le premier qui se soit occupé de ces courbes. Voici, en quelques mots, les résultats de son analyse.

1° Si on suppose un point lumineux placé devant une *surface réfléchissante,* l'analyse montre qu'il y a sur cette surface deux systèmes de courbes différentes, telles que les rayons réfléchis sur chacune d'elles, forment une surface développable. Lamé appelle ces courbes *lignes de réflexion;* une ligne de l'un des systèmes coupe à angles droits toutes les lignes de l'autre. L'arête de rebroussement de la surface développable correspondante à chaque ligne de réflexion, est une *catacaustique.* L'ensemble des catacaustiques de chacun des deux systèmes de surfaces développables, constitue la *surface catacaustique.* Il y a donc deux surfaces catacaustiques auxquelles tous les rayons réfléchis sont à la fois tangents. La courbe d'intersection des deux surfaces catacaustiques donne un *maximum* de lumière réfléchie pour un œil placé de manière à la recevoir; si cette courbe devient un point, il prend le nom de *foyer.*

2° Il existe de même, sur la *surface réfringente,* deux systèmes de *lignes de réfraction* qui se coupent à angles droits, et pour chacune desquelles les rayons réfractés forment une surface développable. Les arêtes de rebroussement de ces surfaces sont les *diacaustiques.* Il y a donc deux systèmes de diacaustiques, qui forment deux *surfaces diacaustiques* auxquelles tous les rayons réfractés sont à la fois tangents. L'intersection de ces deux surfaces donne un *maximum* de lumière réfractée pour un œil placé de manière à la recevoir; si cette courbe devient un point, ce point se nomme *foyer.*

Ainsi, les catacaustiques sont les enveloppes des rayons lumineux réfléchis sur une ligne de réflexion ; et les diacaustiques, les enveloppes des rayons lumineux réfractés sur une ligne de réfraction.

Fig. 12.



Soit AB la courbe réfléchissante ou réfringente $F(x, y) = 0$, O le point lumineux que nous prendrons pour origine des coordonnées ; M le point d'incidence du rayon OM; (x, y) ses coordonnées; λ et μ les angles que font respectivement avec l'axe des x positifs, le rayon incident et le rayon dévié ; les *cosinus* des angles que ces rayons font avec la tangente tT à la courbe AB au point $M\,(x, y)$ seront :

$$\cos \lambda . \frac{dx}{ds} + \sin \lambda \frac{dy}{ds}, \quad \cos \mu . \frac{dx}{ds} + \sin \mu . \frac{dy}{ds};$$

de sorte que, comme les angles d'incidence et de déviation sont dans un rapport constant k, on aura :

$$\cos \mu + \frac{dy}{dx} \sin \mu = k \left(\cos \lambda + \frac{dy}{dx} \cos \nu\right);$$

mais, en appelant ξ et υ les coordonnées d'un point D du rayon dévié (réfléchi ou réfracté), et en posant, pour abréger :

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \delta' = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\upsilon - y)^2},$$

il viendra :

$$\cos \lambda = \frac{x}{\delta}, \quad \sin \lambda = \frac{y}{\delta}, \quad \cos \mu = \frac{\xi - x}{\delta'}, \quad \sin \mu = \frac{\upsilon - y}{\delta'},$$

d'où :

$$\frac{\xi - x + (\upsilon - y)\dfrac{dy}{dx}}{\delta'} - k\,\frac{x + y\dfrac{dy}{dx}}{\delta} = 0. \qquad (D)$$

C'est l'équation du rayon dévié, ou de la droite enveloppée qui répond au point (x, y) de la courbe $F(x, y) = 0$. Si on différentie cette équation par rapport à x, en y considérant y et $\frac{dy}{dx}$ comme fonctions de x; puis, éliminant $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ entre l'équation (D), sa dérivée, et l'équation $F = 0$ et ses dérivées des deux premiers ordres, on aura en ξ, υ, l'équation de l'enveloppe. Ce sera une catacaustique, si on suppose $k = -1$, et une diacaustique si k représente l'indice de réfraction relatif au passage d'un milieu dans l'autre.

M. Quetelet, dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, a rattaché cette théorie à celle des développées. Il considère la catacaustique pour une courbe quelconque éclairée par un point brillant, comme la développée d'une autre courbe, laquelle a la propriété d'être l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe réfléchissante, et qui passent par le point brillant. De même, il considère la diacaustique pour une courbe quelconque éclairée par un point brillant comme l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe dirimante, et dont les rayons sont aux distances au point émanateur, dans un rapport constant, qui est l'indice de réfraction.

Exemple II. — *Théorie des ombres.* — Lorsqu'un corps opaque est éclairé par un corps lumineux de dimensions finies, les deux surfaces développables enveloppant, l'une, tous les plans tangents aux deux corps, qui laissent ces corps d'un même côté; et l'autre, tous les plans tangents qui passent entre ces corps, limitent, dans l'espace, la *partie éclairée*, l'*ombre* et la *pénombre;* et les lignes de contact de ces deux surfaces avec le corps opaque, séparent sur ce corps la pénombre, d'une part, de l'ombre pure, et, d'autre part, de la lumière complète. — Soient :

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad \text{et} \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

les surfaces respectives du corps opaque et du corps lumineux. Le plan qui touche F_1 au point (x_1, y_1, z_1) et F_2 au point (x_2, y_2, z_2) sera indifféremment :

$$z - z_1 = p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1), \tag{1}$$

ou :

$$z - z_2 = p_2(x - x_2) + q_2(y - y_2), \tag{2}$$

p_1, q_1, p_2, q_2 étant donnés par les relations :

$$p_1 = -\frac{\left(\dfrac{dF_1}{dx_1}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dz_1}\right)}, \quad q_1 = -\frac{\left(\dfrac{dF_1}{dy_1}\right)}{\left(\dfrac{dF_1}{dz_1}\right)},$$

$$p_2 = -\frac{\left(\dfrac{dF_2}{dx_2}\right)}{\left(\dfrac{dF_2}{dz_2}\right)}, \quad q_2 = -\frac{\left(\dfrac{dF_2}{dy_2}\right)}{\left(\dfrac{dF_2}{dz_2}\right)}.$$

Des équations (1) et (2) on tire :

$$z_1 - p_1x_1 - q_1y_1 = z_2 - p_2x_2 - q_2y_2. \tag{3}$$

et l'on a, d'ailleurs:

$$p_1 = p_2, \quad (4) \qquad q_1 = q_2. \tag{5}$$

Les équations (3), (4), (5) jointes aux équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, serviront à éliminer x_2, y_2, z_2, et à déterminer y_1 et z_1 en fonction de x_1 ; par suite de quoi, l'équation (3) prendra la forme :

$$z = x . \varphi (x_1) + y . \psi (x_1) + \varpi (x_1).$$

En éliminant x_1 entre cette équation et sa dérivée relative à x_1, égalée à zéro, savoir :

$$0 = x \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + y \left(\frac{d\psi}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\varpi}{dx_1}\right),$$

on aura les deux surfaces cherchées qui peuvent être considérées comme les deux nappes d'une même surface, puisqu'elles seront données par une même équation.

Enfin, on déterminera la *ligne de séparation d'ombre et de pénombre* et la *ligne de séparation de pénombre et de lumière,* en éliminant x_2, y_2, z_2 entre les cinq équations :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad z_1 - p_1x_1 - q_1y_1 = z_2 - p_2x_2 - q_2y_2, \quad p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2.$$

CHAPITRE III.

Applications mécaniques.

C'est Lagrange qui a donné la signification géométrique des solutions singulières, et qui a montré leur usage dans la théorie des courbes et des surfaces. Mais il restait à déterminer leur rôle dans la mécanique. C'est ce que Poisson a fait le premier, tout en exprimant le désir qu'on levât les difficultés qui subsistent encore dans cette matière.

Les problèmes de mécanique dans lesquels on peut avoir à considérer des solutions singulières, sont de deux espèces. Dans les uns, il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps soumis à une force donnée, lorsqu'on connaît, en outre, les conditions initiales du mouvement; les autres consistent à déterminer des courbes sur lesquelles un corps soumis à une force donnée puisse se mouvoir en remplissant certaines conditions. Dans les premiers, la trajectoire est unique; dans les seconds, rien n'empêche qu'il y ait diverses courbes satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Première classe de problèmes mécaniques. — Lagrange a montré que, par la combinaison du principe de d'Alembert et du principe des vitesses virtuelles, on pouvait, dans tous les cas, donner les équations différentielles d'un mouvement quelconque, c'est-à-dire ramener toute question de mécanique à un problème de calcul intégral. En effet, ces équations formées, il ne reste à trouver que leurs intégrales et à déterminer les constantes. Mais ces équations peuvent être susceptibles de solutions singulières qu'il importe d'interpréter dans chaque cas, si l'on veut avoir la solution complète du problème de mécanique donné. Or, il peut arriver : 1° que les solutions singulières seules satisfassent à ce problème; 2° qu'il ne faille tenir aucun compte de ces solutions; 3° enfin, ce qui est plus remarquable, que le mouvement du système soit représenté, pendant un certain temps, par les intégrales, et, pendant un autre temps, par les solutions singulières. C'est ce qui résultera des exemples suivants :

Exemple I. — *Déterminer le mouvement rectiligne d'un corps partant d'un point donné avec une vitesse donnée, et soumis à l'action d'une force attractive ou répulsive constamment dirigée vers le point de départ, et proportionnelle à une puissance positive et fractionnaire de la distance du mobile à ce point.*

Solution. — Soit t le temps après lequel le mobile est à une distance x du point de départ; et a le *coefficient* de la force donnée (son intensité à l'unité de distance), l'équation différentielle du mouvement sera :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n, \quad n > 0 \quad \text{et} \quad < 1;$$

et a étant > 0 dans le cas d'une force attractive; et < 0 dans le cas d'une force répulsive. L'équation (1) a pour intégrale première :

$$\frac{dx^2}{dt^2} = b^2 + \frac{2ax^{n+1}}{n+1}, \tag{2}$$

(b étant la vitesse initiale, puisque, pour $x = 0$, on se trouve au point de départ), et pour solution singulière :

$$x = 0. \tag{3}$$

Si b n'est pas nul, il ne faudra tenir aucun compte de la solution singulière $x=0$, car, dans ce cas, le corps doit d'abord être mis en mouvement; et ce mouvement ne sera jamais interrompu, car, s'il y a répulsion, le corps doit s'éloigner indéfiniment du point de départ; et, s'il y a attraction, il doit faire, de part et d'autre de ce point, une suite infinie d'oscillations égales et d'égale durée. C'est ce que représente l'équation (2).

Dans le cas de $b = 0$, l'équation (2) peut encore s'intégrer, et donne :

$$t = c + \frac{2}{1-n}\sqrt{\frac{1+n}{2a}}.\, x^{\frac{1-n}{2}}, \tag{4}$$

c étant la constante arbitraire. On la déterminera, en supposant que le temps se compte à partir du point de départ du mobile; car alors $t = 0$ donne $x = 0$, et, partant, $c = 0$; donc (4) devient :

$$t = \frac{2}{1-n}\left(\frac{1+n}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1-n}{2}}.$$

Dans ce cas, c'est l'équation (3), c'est-à-dire la solution singulière qui résout le problème, car il est visible qu'alors le mobile doit rester au point de départ, puisqu'en ce point sa vitesse et la force qui le sollicite sont toutes deux nulles; et qu'il faut rejeter l'intégrale (5), d'où, au reste, on ne peut rien conclure, quand a est négatif, parce qu'alors la valeur de t devient imaginaire.

L'équation (2) a aussi une solution singulière :

$$(n+1)\, b^2 + 2a\, x^{n+1} = 0,$$

ou :

$$x = \sqrt[n+1]{-\frac{(n+1)\, b^2}{2a}} = constante;$$

mais qui doit être rejetée, puisqu'elle ne satisfait pas à l'équation différentielle (1) du mouvement.

Remarque. — Les équations différentielles d'un mouvement quelconque sont, en général, du second ordre ; leurs intégrales premières ne leur sont donc pas équivalentes, car, d'une part, les solutions singulières des équations différentielles ne sont pas comprises dans ces intégrales ; et, d'autre part, les solutions singulières de ces intégrales premières ne sont pas comprises dans les équations différentielles du mouvement.

EXEMPLE II. — *Déterminer le mouvement rectiligne d'un corps soumis à l'action d'une force retardatrice proportionnelle à la racine carrée de la vitesse du mobile.*

Solution. — Soient v la vitesse, t le temps compté à partir de l'origine du mouvement, a le coefficient de la force donnée ; l'équation différentielle du mouvement sera :

$$\frac{dv}{dt} = -a\sqrt{v}. \tag{1}$$

Cette équation a pour intégrale générale :

$$v = \left[\sqrt{b} - \frac{at}{2}\right]^2, \tag{2}$$

(b représentant la vitesse initiale) ; et pour solution singulière :

$$v = 0. \tag{3}$$

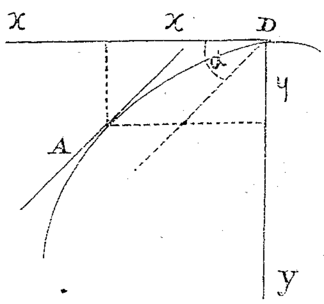
Si $b = 0$, le corps devra rester en repos ; et c'est la solution singulière $v = 0$ qui donne la véritable solution du problème. Si b n'est pas nul, le corps doit se mettre en mouvement, et ce mouvement doit continuer jusqu'à ce que la force retardatrice l'ait annulé. Donc, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, le mouvement du corps sera donné par l'intégrale (2) ; et, au bout de ce temps, c'est la solution singulière (3) qui fait voir que le mobile passe à l'état de repos et y persiste.

Remarque. — Poisson a appelé l'attention des géomètres sur cette difficulté, que les équations différentielles d'un mouvement absolument déterminé, puissent être satisfaites par plusieurs équations qui remplissent, en outre, les conditions initiales du mouvement. Ce fait ne tiendrait-il pas à ce que les équations différentielles sont plus générales que le problème qu'elles sont appelées à résoudre ; et cela, parce qu'on n'a pu faire entrer dans ces équations certaines conditions implicites que toute question comporte généralement?

Deuxième classe de problèmes mécaniques. — Ce sont les seuls qu'Euler ait résolus en vue des solutions singulières. (Voir *Mechanica*, t. II, nos 268, 303, 305.) Voici celui qu'Euler résout au n° 268.

Exemple III. — *Trouver une courbe telle qu'un corps pesant, projeté avec une vitesse horizontale donnée, se meuve sur cette courbe en conservant toujours la même vitesse horizontale.*

Fig. 13.



Solution. — Prenons pour axes coordonnés deux droites rectangulaires, l'une horizontale, l'autre verticale, ayant leur origine à la position initiale D du point donné. Soient b la vitesse horizontale, dirigée suivant l'axe des x, et v la vitesse au bout du temps t, dirigée suivant la tangente au point A à la courbe inconnue; enfin g la pesanteur. La vitesse horizontale devant toujours être égale à b, on aura :

$$v \cos \alpha = b, \quad \text{ou} \quad v \frac{dx}{ds} = b,$$

ou :

$$\frac{vdx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = b. \qquad (1)$$

La vitesse verticale due à la hauteur y sera :

$$v \sin \alpha = \sqrt{2gy} \quad \text{ou} \quad v \frac{dy}{ds} = \sqrt{2gy}, \quad \text{ou} \quad \frac{vdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{2gy}. \qquad (2)$$

L'élimination de v entre (1) et (2) donnera l'équation différentielle de la courbe cherchée, savoir :

$$bdy = dx . \sqrt{2gy}. \qquad (3)$$

Cette équation a pour intégrale complète :

$$4b^2y = [x\sqrt{2g} + c]^2,$$

ou, puisque $x = 0$ et $y = 0$ entraînent $c = 0$:

$$2b^2y = gx^2, \tag{4}$$

équation d'une parabole dont le sommet est au point de départ, et dont l'axe est la verticale passant par ce point.

L'équation (3) a pour solution singulière $y = 0$, c'est-à-dire une droite horizontale passant par le point de départ. Ainsi, la courbe cherchée peut être une parabole ou une droite horizontale.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION. — Définition, terminologie et histoire des solutions singulières; plan et division du mémoire	973
Première partie. — *Théorie des solutions singulières.*	979
LIVRE PREMIER. — *Équations différentielles isolées*	*id.*
Section première. — *Équations à deux variables*	*id.*
Introduction. — Nombre des constantes arbitraires de la solution singulière; comment certaines solutions singulières peuvent s'obtenir par les séries	*id.*
CHAPITRE I. — *Des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables*	984
ARTICLE I. — *Détermination d'équations primitives renfermant toutes les solutions singulières*	*id.*
§ I. — Par l'intégrale générale. — Deux méthodes; leurs rapports et leurs différences	985
I. — Théorie de Lagrange, fondée sur la variation des constantes arbitraires; trois théorèmes qui la constituent; signification géométrique de certaines solutions singulières; interprétation des équations qui les fournissent; triple démonstration du théorème I; remarques et exemples	986
II. — Théorie de M. Timmermans, basée sur la considération des radicaux; remarques et exemples	1021
§ II. — Par l'équation différentielle elle-même. — Trois méthodes; leurs rapports et leurs différences	1024
I. — Théorie de Laplace et de Legendre, fondée sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent nulles ou infinies; trois théorèmes qui la constituent; triple démonstration du premier; signification géométrique et construction des solutions singulières; remarques et exemples	1025

Pages.

II. — Théories de Poisson et de Lagrange, fondées sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent indéterminées 1044

A. — *Théorie de Poisson.* — Théorème de ce savant et les deux règles qui en résultent; remarques et exemples . . . . *id.*

B. — *Théorie de Lagrange.* — Théorème de ce savant, avec ses conséquences; les deux règles qui en résultent; remarques et exemples 1049

III. — Théorie de M. Timmermans, basée sur la considération des radicaux; théorème qui la constitue, avec remarques et exemples 1068

§ III. — A posteriori par la méthode des coefficients et des exposants à déterminer. — Règle de Trembley et exemple. 1072

ARTICLE II. — *Distinction des solutions singulières et des intégrales particulières* 1073

§ I. — On connait l'intégrale générale 1074

A. — *Méthode de Lagrange* . . . . *id.*

B. — *Méthode de Poisson* 1075

C. — *Méthode de M. Timmermans.* — Conséquences et exemples 1076

§ II. — On ne connait pas l'intégrale générale 1082

I. — Théories d'Euler, de Laplace et de Poisson, fondées sur des développements en séries 1083

A. — *Théorie d'Euler* . . . . *id.*

B. — *Théorie de Laplace* 1086

C. — *Théorie de Poisson* 1095

II. — Théories de Cauchy et de M. Timmermans. — Leurs valeurs, leurs rapports et leurs différences; exemples. 1104

A. — *Criterium de M. Timmermans,* fondé sur les radicaux; conséquences et exemples 1105

B. — *Criterium de Cauchy,* fondé sur les intégrales définies singulières; trois théorèmes qui la constituent; exemples 1113

ARTICLE III. — *Introduction et suppression de solutions singulières* 1124

§ I. — Introduction de solutions singulières . . . . *id.*

I. — On ne donne pas l'équation différentielle. — Procédé de Lagrange; remarques et exemples . . . . *id.*

II. — On donne l'équation différentielle. — Procédé de Poisson; remarques et exemples 1132

§ II. — Suppression de solutions singulières 1140

Pages.

I. — PROCÉDÉ DE POISSON, fondé sur la transformation des variables 1140

II. — PROCÉDÉ DE LAGRANGE, fondé sur la différentiation . 1144

Remarque générale sur l'article III 1145

CHAPITRE II. — *Des solutions singulières des équations différentielles à deux variables des ordres supérieurs.* . . . 1150

SOUS-CHAPITRE I. — Solutions singulières simples 1152

ARTICLE I. — *Détermination d'équations comprenant toutes les solutions singulières simples* . . . . *id.*

§ I. — PAR LES INTÉGRALES COMPLÈTES . . . . *id.*

I. — THÉORIE DE LAGRANGE, fondée sur la variation des constantes arbitraires; huit théorèmes qui la constituent; signification géométrique des solutions singulières simples, et interprétation des équations qui les fournissent; remarques et exemples. 1153

II. — THÉORIE DE M. TIMMERMANS, fondée sur les radicaux; règle et exemples 1173

§ II. — PAR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ELLE-MÊME. — Trois théories; leurs rapports et leurs différences 1175

I. — THÉORIE DE LAPLACE ET DE LEGENDRE, fondée sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent nulles ou infinies; trois théorèmes qui la constituent; remarques et exemples. . . . . *id.*

II. — THÉORIES DE POISSON ET DE LAGRANGE, fondées sur la considération des fonctions que les solutions singulières rendent indéterminées. 1188

A. — *Théorie de Poisson.* — Théorème de ce savant; les deux règles qui en résultent; remarques et exemples. . . . . *id.*

B. — *Théorie de Lagrange.* — Théorème de ce savant avec ses conséquences; les deux règles qui en résultent; remarques et exemples. 1192

III. — THÉORIE DE M. TIMMERMANS, fondée sur les radicaux; règle et exemple. 1203

§ III. — A POSTERIORI. — Procédé de Trembley appliqué à un exemple 1204

ARTICLE II. — *Distinction des solutions singulières et des intégrales particulières*. 1205

§ I. — ON CONNAIT DES INTÉGRALES. — Deux méthodes en six théorèmes; remarques et exemples. . . . . *id.*

§ II. — ON NE CONNAIT PAS D'INTÉGRALE. 1210

ARTICLE III. — *Introduction et suppression de solutions singulières* . . . . *id.*

Pages.

§ I. — Suppression. — Double procédé 1240

§ II. — Introduction. — Procédé de Lagrange généralisé; exemple 1241

SOUS-CHAPITRE II. — Solutions singulières multiples. — Quatre théorèmes et remarques 1214

Section deuxième. — *Équations différentielles à plus de deux variables* 1227

CHAPITRE I. — *Équations différentielles totales* . . . . . . *id.*

ARTICLE I. — *Satisfaisant aux conditions d'intégrabilité* . *id.*

§ I. — Équations du premier ordre. . . . . *id.*

I. — Solutions singulières déduites de l'intégrale générale. 1228

II. — Solutions singulières déduites de l'équation différentielle elle-même. — Procédé de Laplace. 1230

§ II. — Équations des ordres supérieurs. 1234

ARTICLE II. — *Ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité.* — Vraie signification de ces conditions découverte par Monge; procédé de Laplace et règle d'Euler pour le premier ordre. 1235

CHAPITRE II. — *Équations différentielles partielles*. 1241

INTRODUCTION, déterminant le nombre *maximum* des fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans les solutions singulières de ces équations . . . . *id.*

ARTICLE I. — *Équations du premier ordre à trois variables.* 1243

§ I. — Solutions singulières déduites des intégrales. . . 1244

I. — Par la variation des constantes et des fonctions arbitraires. — Trois théorèmes; signification géométrique des solutions singulières, de l'intégrale générale, de l'intégrale complète et des intégrales incomplètes; leurs relations; remarques et exemples. . . . . . . *id.*

II. — Par les radicaux. — Trois théorèmes et exemples . 1274

§ II. — Solutions singulières déduites de l'équation différentielle elle-même 1277

I. — Par les fonctions que les solutions singulières rendent nulles ou infinies . . . . *id.*

II. — Par les fonctions que les solutions singulières rendent indéterminées. 1282

III. — Par les radicaux. 1286

ARTICLE II. — Équations du premier ordre à plus de trois variables. 1287

ARTICLE III. — Équations du *même* ordre à $n+1$ variables. 1289

Pages.

LIVRE SECOND. — *Équations différentielles simultanées.* — On n'examine que le cas de deux équations du premier ordre à trois variables; système de solutions singulières déduit du système des intégrales complètes ou des équations différentielles elles-mêmes; systèmes mixtes; signification géométrique du système des solutions singulières; remarques et exemples 1292

CONCLUSION de la première partie 1299

Deuxième partie. — *Applications de la théorie des solutions singulières* 1300

CHAPITRE I. — *Applications analytiques* . . . . *id.*

§ I. — Intégration par la séparation des solutions singulières. *id.*

§ II. — Formation du facteur d'intégrabilité par les solutions singulières. — Lemmes fondamentaux; procédé de Trembley 1302

CHAPITRE II. — *Applications géométriques.* — Théorie des caustiques et théorie des ombres 1309

CHAPITRE III. — *Applications mécaniques.* — Deux classes de problèmes 1313

TABLE DES FIGURES.

Figure 1 1000
— 2 1010
— 3 et 4 1012
— 5 1013
— 6 1014
— 7 1015
— 8 1017
— 9 1019
— 10 et 11 1022
— 12 1311
— 13 1317

FIN DU MÉMOIRE SUR LA QUESTION DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.