MPRI – cours 2.12.2

F. Morain

Feuille d'exercices, 2014/10/06

1. (Alford/Granville/Pomerance, *Annals of Math.*, 1994) Soit Λ un entier ayant un grand nombre de diviseurs et k un entier premier avec Λ. On considère l'ensemble:

$$S(k, \Lambda) = \{p \text{ premier}, p \nmid \Lambda, k \mid p-1 \mid k\Lambda\}.$$

a) Montrer que si N est un produit d'éléments distincts de $S(k, \Lambda)$ satisfaisant $N \equiv 1 \bmod \Lambda$, alors N est un nombre de Carmichael.

b) Donner une condition suffisante sur le cardinal de $S(k, \Lambda)$ pour qu'il existe un tel N.

c) Faire des essais numériques pour confirmer votre condition.

Pour montrer qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael, il reste à montrer que l'on peut choisir Λ et k pour obtenir suffisamment de nombres de Carmichael. Cela nécessite des résultats profonds en algèbre et théorie des nombres.

2. On définit les nombres de Fibonacci et Lucas pour $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ ; \\ L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n. \end{cases}$$

(a) On pose $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$, $\beta = \overline{\alpha} = (1-\sqrt{5})/2$. Montrer que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

(b) Montrer que pour tout n, on a $F_{2n} = F_n L_n$.

(c) Montrer que pour k, on a

$$F_{4k+1} - 1 = F_k L_k L_{2k+1}, \quad F_{4k+3} - 1 = F_{k+1} L_{k+1} L_{2k+1},$$

$$F_{4k+1} + 1 = F_{2k+1} L_{2k}, \quad F_{4k+3} + 1 = F_{2k+1} L_{2k+2}.$$

Quel est l'intérêt de ces factorisations ?