Problèmes de satisfaction de contraintes : une étude logique et combinatoire

Florent Madelaine

Mots-clés

Complexité (descriptive), théorie des modèles finis, problèmes de satisfaction de contraintes (CSP), problèmes d'homomorphisme, fragment syntaxique et monotone de la logique monadique sans $\neq$ (MMSNP), algèbre de Heyting, dichotomie.

Résumé

Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) peuvent être définis en termes d'existence d'homomorphisme entre des structures finies. Dans une tentative de caractériser logiquement CSP, Feder et Vardi ont introduit un fragment de la logique existentielle du second ordre: la logique MMSNP. Ces derniers prouvent que la classe (des problèmes définis par les formules de la logique) MMSNP est équivalente (au sens de l'existence de réductions polynomiales) à la classe CSP, mais par contre, que CSP est strictement incluse dans MMSNP.

Dans cette thèse, on introduit une classe de problèmes combinatoires, qui correspondent exactement aux problèmes définis par les formules de la logique MMSNP: les problèmes de motifs interdits (FP). On développe des outils algébriques originaux qui permettent de caractériser les problèmes de motifs interdits qui ne sont pas dans CSP. Notons que cette preuve est fortement constructive, au sens où, étant donné la représentation d'un problème de motifs interdits, on peut le mettre sous une forme normale équivalente, puis, un critère simple permet de dire si le problème appartient à CSP ou non. De plus, si c'est le cas, on construit son patron (c'est-à-dire qu'on donne le problème en tant que problème de contraintes), sinon, on construit un programme de preuve interactive; pour tout candidat au rôle de patron, ce dernier construit un contre-exemple associé.

On contraste ce résultat avec un résultat indépendant et récent, dû à Tardif et Nešetřil; leur résultat donne une meilleure caractérisation dans le cas restreint que ces auteurs considèrent: le cas des problèmes de motifs interdits monochromes; par contre, notre résultat donne une meilleure construction du patron (lorsqu'un tel patron existe). Notons que leur preuve repose essentiellement sur une correspondance entre les paires duales et les paires couvrantes dans la catégorie des σ-structures. On prouve l'existence d'une telle correspondance dans le cas général d'une algèbre de Heyting (un treillis distributif muni d'un pseudo-complément, ou exponentiel). Puis, on montre que la classe des problèmes de motifs interdits est reliée à une structure d'algèbre de Heyting.

On montre aussi que FP se comporte *grosso modo* de la même façon que CSP en ce qui concerne la complexité: on donne des exemples de problèmes de motifs interdits, qui sont complets pour les classes de complexité NL,P et NP, et qui ne sont pas dans CSP. On étudie rapidement des restrictions classiques aux problèmes de motifs interdits qui sont susceptibles de faire baisser la complexité.

Finalement, on s'intéresse au problèmes d'homomorphismes entre des algèbres (structures fonctionnelles) finies dans le cas restreint de signatures composés uniquement de symboles unaires: premièrement, on montre l'existence d'une dichotomie pour un seul symbole; et deuxiémement, on montre que la classe des problèmes à deux symboles est équivalente (au sens de l'existence de réductions polynomiales) à CSP.