Esercizi sulla Dualità

4.4 **Duale di un problema di PL**. Scrivere il duale del problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & & & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & \\
& x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & \geq & 2 \\
& & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\
& 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

$$x_3, x_4 \quad \text{libere}$$

4.5 **Duale del problema di trasporto**. Supponiamo di avere n impianti di produzione, ciascuno con una capacità produttiva pari a p_i, $i \leq n$, ed m depositi, aventi fabbisogno pari a d_j, $j \leq m$. Si denota con c_{ij} il costo di trasporto da un impianto i ad un deposito j. Indicando con x_{ij} la quantità di merce da trasportare dall'impianto i al deposito j, il problema di trasporto può essere formulato come segue:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{P1}) & \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\
& & \displaystyle -\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq -p_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
& & \displaystyle \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m \\
& & x_{ij} \geq 0
\end{array}
$$

Supponendo il problema ammissibile (il che equivale alla condizione $\sum_{j=1}^{m} d_j \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$, cioè che la totalità del fabbisogno non ecceda la totalità di produzione), determinare il duale del problema di trasporto e darne un'interpretazione economica.

4.6 **Scarti complementari**. Sia

$$
\begin{array}{llrcrl}
(\mathbf{P2}) & \max & 2x_1 & + & x_2 & \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq 14 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \leq 10 \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq 3
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) scrivere il problema duale;
b) verificare che $\bar{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ è soluzione ammissibile;
c) dimostrare che $\bar{x}$ è anche una soluzione ottima (teorema degli scarti complementari);
d) determinare la soluzione ottima del duale.