# CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 6

G. HANROT

Soit $G = (S, A)$, et notons $A = A_1 \cup A_2$ la partition aléatoire construite. Étant donné une arête $a \in A$, notons $X_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 si cette arête est entre les deux parties, 0 si cette arête est à l'intérieur d'une partie, et pour un sommet $u$, notons $Y_u = i$ si $u \in A_i$. Par hypothèse, on a $\Pr(Y_u = 1) = \Pr(Y_u = 2) = 1/2$.

La probabilité que $X_a$ vaille 1 est la probabilité que les deux sommets soient dans des parties différentes ; on a

$$\begin{aligned} \Pr(X_{\{u,v\}} = 1) &= \Pr((Y_u, Y_v) \in \{(1,2),(2,1)\}) \\ &= \Pr((Y_u, Y_v) = (1,2)) + \Pr((Y_u, Y_v) = (2,1)) \\ &= 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2, \end{aligned}$$

où la première égalité découle du fait que les deux évéments considérés sont disjoints, et la seconde de l'indépendance des variables aléatoires $Y_u$ et $Y_v$.

Il s'ensuit $E[X_a] = 1/2$ pour toute arête $a$, et donc, si $C = \sum_a X_a$ est la variable aléatoire qui vaut la valeur de la coupure,

$$E[C] = E\left[\sum_{a \in A} X_a\right] = \sum_{a \in A} E[X_a] = |A|/2.$$

Comme nécessairement $\mathrm{OPT} \leq |A|$, il s'ensuit qu'on obtient une valeur moyenne au moins égale à $\mathrm{OPT}/2$.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $|A| - C$, d'espérance $|A|/2$. On a

$$\Pr(C \leq 0.99|A|/2) = \Pr(|A| - C \geq 1.01|A|/2) \leq 1/1.01.$$

La probabilité qu'à l'issue de $K$ itérations, la coupure obtenue soit de valeur au plus $0.99\mathrm{OPT}/2 \leq 0.99|A|/2$ est donc majorée par $1.01^{-K}$. Il suffit donc de garantir $1.01^{-K} \leq 0.01$ pour qu'avec probabilité au moins 0.99, la coupe résultat ait valeur au moins 0.99 OPT/2. Pour ce faire, il suffit de prendre $K \geq \lceil -\log 0.01/\log 1.01 \rceil = 463$.

L'algorithme obtenu est de type Monte-Carlo : on peut renvoyer un résultat qui n'est pas une 2/0.99-approximation, avec probabilité faible. On peut le transformer en un algorithme de type Las-Vegas en itérant le calcul jusqu'à rencontrer une coupe de valeur au moins égale à $0.99|A|/2$ ; le fait que la moyenne de $C$ vaille $|A|/2$ montre qu'il en existe au moins une. La probabilité qu'on en rencontre une en exactement $k$ étapes est dominée par $(1/1.01)^k$, donc le temps moyen d'exécution est majoré par $\sum_{k \geq 0} k \cdot 1.01^{-k} = 10100$ itérations. Noter qu'avec probabilité nulle, cet algorithme peut ne pas terminer.

*Date*: 24 mars 2004.

Notons qu'il est plus délicat d'utiliser dans cet exercice l'inégalité de Chebyshev. Il faut en effet calculer la variance de $C$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(C) &= E[C^2] - E[C]^2 \\
&= \sum_{(a,b)\in A\times A} E[X_a \cdot X_b] - E[C]^2 \\
&= \sum_{a\neq b\in A\times A} E[X_a \cdot X_b] + |A|/2 - |A|^2/4
\end{aligned}$$

Il faut alors évaluer $E[X_a \cdot X_b]$. Si $a$ et $b$ n'ont pas de sommet commun, ces deux variables aléatoires sont indépendantes et on trouve donc $1/4$. Dans le cas contraire, posons $a = \{u, v\}$, $b = \{u, w\}$ avec $v \neq w$. Il vient

$$\Pr(X_a \cdot X_b = 1) = \Pr((Y_u, Y_v, Y_w) \in \{(1, 2, 2), (2, 1, 1)\} = 1/4.$$

Par suite, $\mathrm{Var}\,(C) = |A|(|A| - 1)/4 + |A|/2 - |A|^2/4 = |A|/4$, et donc l'écart-type vaut $\sqrt{|A|}/2$. Cela permet de raffiner l'inégalité ci-dessus en

$$\begin{aligned}
\Pr(C < 0.99|A|/2) &\leq \Pr(|C - E(C)| > 0.01|A|/2) \\
&= \Pr(|C - E(C)| > 0.01\sqrt{|A|}\sigma) \\
&\leq 1/(10^{-4}|A|) = 10^4/|A|,
\end{aligned}$$

qui est meilleur quand $|A|$ est grand, mais moins bon pour $|A| \leq 9900$.