Concurrence

et

Topologie Algébrique Dirigée

MPRI seconde année second semestre

jeudi 12 février 2009

durée de l'épreuve : 1h30

Exercice 1

1 - On suppose que `a`, `b`, `c` et `d` sont des sémaphores d'arité 2. Déterminer (au moyen d'un dessin sur lequel on aura grisé la région interdite) le modèle géométrique du programme suivant.

```
P(a).P(b).P(c).V(c).V(a).P(d).V(d).V(b)|
P(d).P(c).P(b).V(b).V(d).P(a).V(a).V(c)
```

On note $\overrightarrow{X}$ l'espace ordonné correspondant et on suppose par convention que les points se trouvant sur la frontière de la région interdite appartiennent au modèle.

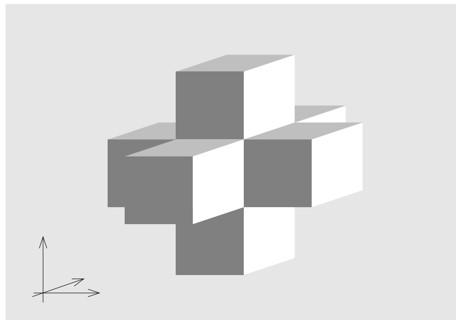
2 - Un **chemin** sur un espace ordonné $\overrightarrow{X}$ est une application continue et croissante de $\overrightarrow{[0,1]}$ dans $\overrightarrow{X}$ et un point $x \in \overrightarrow{X}$ est une **impasse** de $\overrightarrow{X}$ lorsque tout chemin (sur $\overrightarrow{X}$) δ tel que $\delta(0) = x$ est constant. Indiquer sur le dessin les impasses de $\overrightarrow{X}$.

3 - Le **bassin d'attraction** des impasses est l'ensemble B des points de $\overrightarrow{X}$ tels que pour tout chemin δ sur $\overrightarrow{X}$, si $\delta(0) \in B$ alors il existe un chemin γ sur $\overrightarrow{X}$ tel que $\gamma(0) = \delta(1)$ et $\gamma(1)$ soit une impasse. Représenter sur le dessin le bassin d'attraction des impasses de $\overrightarrow{X}$.

4 - Ecrire un programme dont le modèle géométrique est l'espace ordonné

$$\overrightarrow{X} \;=\; \overrightarrow{\mathbb{R}}^3 \backslash \big( ]1,2[\times]1,2[\times\mathbb{R} \cup]1,2[\times\mathbb{R}\times]1,2[\cup]1,2[\times]1,2[\times\mathbb{R} \big)$$

représenté par la figure ci-dessous (noter que l'on a tronqué la région interdite).



5 - On pose $\mathcal{C} = \overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X})$ la catégorie fondamentale de $\overrightarrow{X}$. Déterminer (avec une petite explication) l'entier suivant

$$\max\left\{\mathsf{Card}\big(\mathcal{C}[x,y]\big)\;\middle|\; x,y\in\overrightarrow{X}\right\}$$

On rappelle que $\mathcal{C}[x,y]$ est l'ensemble des chemins sur $\overrightarrow{X}$ à homotopie près.

Exercice 2

Quelques rappels : on note $\mathbf{1}$ l'unique catégorie ayant exactement 1 morphisme. On note $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ le produit Cartésien de deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est **réductible** lorsqu'il existe deux catégories $\mathcal{A}\neq\mathbf{1}$ et $\mathcal{B}\neq\mathbf{1}$ telles que $\mathcal{C}\cong\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, dans le cas contraire on dit que $\mathcal{C}$ est **irréductible**. La liste exhaustive des catégories vérifiant certaines propriétés est toujours donnée à isomorphisme près.

1 - Donner la liste de toutes les catégories ayant exactement 2 morphismes puis la liste de toutes les catégories ayant exactement 2 objets et 4 morphismes.

2 - Montrer que toutes les catégories connexes sans boucle ayant au plus 8 morphismes sont irréductibles.

3 - Donner une catégorie réductible connexe ayant au plus 8 morphismes et une catégorie réductible sans boucle ayant au plus 8 morphismes.

4 - Montrer qu'il existe une unique catégorie connexe sans boucle réductible ayant exactement 9 morphismes.

Exercice 3

Un **chemin** sur un espace topologique X est une application continue de $[0,1]$ sur X. Un **espace dirigé** est un couple (X,dX) où X est un espace topologique et dX est un ensemble de chemins sur X tel que :
- tous les chemins constants appartiennent à dX
- si γ et δ sont deux éléments de dX tels que $\gamma(0)=\delta(1)$ alors le chemin $\gamma\cdot\delta$

défini ci-dessous appartient encore à dX.

$$\begin{aligned} \gamma\cdot\delta \ : \ [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \delta(2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}$$

- si θ est une application continue et croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et $\delta \in dX$ alors $\delta \circ \theta \in dX$

Les morphismes d'espaces dirigés de (X, dX) vers (Y, dY) sont les applications continues de X vers Y telles que si $\delta \in dX$ alors $f \circ \delta \in dY$. On note dTop la catégorie des espaces dirigés, Po celle des espaces ordonnés, Gph celle des graphes, Cat celle des petites catégories et Top celle des espaces topologiques.

1 - Etant donné un espace ordonné $\overrightarrow{X}$, on pose dX l'ensemble des chemins sur $\overrightarrow{X}$ et X l'espace topologique sous-jacent de $\overrightarrow{X}$. Montrer que (X, dX) est un espace dirigé. En déduire un plongement de Po dans dTop que l'on note I

$$\mathsf{Po} \xrightarrow{I} \mathsf{dTop}$$

2 - On pose $\overrightarrow{X} = [0,1] \cup [2,3]$ un sous-espace ordonné de $\overrightarrow{\mathbb{R}}$, donner un automorphisme[1] de $I(\overrightarrow{X})$ qui ne soit pas un endomorphisme[2] de $\overrightarrow{X}$.

3 - Soit un espace dirigé (X, dX), une sous-partie A de X est appelée **attracteur** de (X, dX) si pour tout $\delta \in dX$ on a

$$\delta(0) \in B \Rightarrow \delta(1) \in B$$

Montrer que les attracteurs de (X, dX) sont les ouverts d'une topologie. Montrer que si f est un morphisme d'espaces dirigés de (X, dX) vers (Y, dY) et que A' est un attracteur de (Y, dY), alors $\{x \in X \mid f(x) \in A'\}$ est un attracteur de (X, dX). En déduire un foncteur $\mathbf{A}$ de dTop dans Top autre que le foncteur d'oubli.

4 - Soit un espace ordonné $\overrightarrow{X}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que les seuls attracteurs de l'espace dirigé $I(\overrightarrow{X})$ soient $\emptyset$ et X.

5 - Donner un espace dirigé qui ne soit pas dans l'image du foncteur I.

6 - Définir un foncteur $\overrightarrow{\pi_1}$ de dTop dans Cat de sorte que pour tout espace ordonné $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{\pi_1}(I(\overrightarrow{X}))$ soit la catégorie fondamentale de $\overrightarrow{X}$.

[1] Un automorphisme est un isomorphisme dont la source est égale au but.

[2] Un endomorphisme est un morphisme dont la source est égale au but.