

Concurrence et Topologie Algébrique Dirigée

Emmanuel Haucourt

19 février 2013

Table des matières

1	Pourquoi et Comment	3
1.1	Produit Cartésien et Parallélisme	4
1.1.1	Catégories	4
1.1.2	Produit Cartésien	5
1.1.3	La syntaxe du langage PV	8
1.1.4	Une sémantique ensembliste du langage PV	9
1.1.5	Une autre sémantique ensembliste du langage PV	10
1.2	Espaces Ordonnés	13
1.2.1	Espaces Topologiques	13
1.2.2	La catégorie des espaces ordonnés	14
2	La Catégorie Fondamentale	18
2.1	Foncteurs et Transformations Naturelles	18
2.2	La catégorie des graphes	24
2.3	Homotopie de chemins	29
3	Catégories sans boucle	39
3.1	Origine	39
3.2	Le théorème de <i>Seifert - Van Kampen</i>	42
3.3	Le monoïde des catégories finies, connexes, sans boucle et non vide	45
4	Catégorie des Composantes	52
4.1	A quoi ça sert ?	52
4.2	Morphismes de <i>Yoneda</i>	53
4.3	Systèmes de <i>Yoneda</i>	55
4.4	Quotient et Localisation	58
4.5	Description de la catégorie des composantes	59
5	Algèbre cubique	62
5.1	Cubes	62
5.2	Régions cubiques	62
5.3	Aspect théorique du calcul de la forme normale	64
5.4	Un peu de topologie	66
5.5	Algèbre de <i>Boole</i> graduée des régions cubiques	67

6	Ce dont on a pas parlé	68
6.1	Où sont passées les boucles ?	68
6.2	Que pourrait-être une catégorie “localement sans boucle” ?	70

Chapitre 1

Pourquoi et Comment

La **topologie algébrique dirigée** est née de l'idée que les traces d'exécution d'un programme peuvent être vues comme des chemins sur un espace topologique dont les points représentent les états du système (potentiellement) atteints en cours d'exécution. On passe alors d'un état à un autre de façon "continue" en visitant une infinité d'autres états.

Des modèles de la concurrence plus "classiques" envisagent ces états comme un ensemble. Une trace d'exécution est alors une suite (potentiellement infinie) de "flèches"¹ faisant passer d'un état du système à un autre de façon "atomique". Dans de tels modèles, le temps est en un certain sens "discret".

Cependant la sémantique du langage de programmation considéré impose des contraintes de "causalité" entre les états. Elles sont, par exemple dans le cas des **systèmes de transitions** [Win95], formalisées par une structure de graphe étiqueté dont les sommets sont les états, tandis que dans le cas des **traces de Mazurkiewicz** [Win95] elles se traduisent par des relations (sur l'ensemble des états) soumises à des axiomes qui évoquent les traces d'exécution. Dans le cadre de la topologie algébrique dirigée, chaque espace topologique sera également pourvu d'une structure qui représente ces contraintes. Selon la nature de cette structure, on aura des **espaces ordonnés** [Nac65], des **espace localement ordonnés**, des **courants** (ou **streams** [Kri07]) ou des **d-espaces** [Gra03].

Chacune de ces notions donne lieu à une catégorie ainsi qu'à une définition de **catégorie fondamentale**. Ces différentes approches s'inscrivent dans un cadre qui permet de décrire cette construction de façon générale. En particulier, la catégorie fondamentale d'un espace topologique n'est autre que son groupoïde fondamental [Hig71, Spa95, Bro06] : cette construction élémentaire de la topologie algébrique est pour l'essentiel la seule à laquelle il soit fait référence dans ces notes qui, pour autant, ne supposent aucune connaissance en topologie

1. on pourrait aussi écrire "transitions" ou "actions".

algébrique “classique”.

Le vocabulaire de la théorie des catégories et quelques uns de ses concepts de base sont indispensables. Ils sont distillés, selon les besoins, tout au long de ce cours ainsi que quelques rappels de topologie élémentaire. En ce qui concerne la théorie des catégories, des ouvrages tels [Awo06], [Bor94a] ou [Mac98] couvrent (largement) le spectre des concepts dont nous aurons besoin, celui de *Steve Awodey* étant sans doute le plus accessible.

1.1 Produit Cartésien et Parallélisme

1.1.1 Catégories

Une **catégorie** \mathcal{C} est définie par une collection d’**objets** notée $\text{Ob}(\mathcal{C})$, une collection de **morphismes** notés $\text{Mo}(\mathcal{C})$, trois “applications” id , s et t

$$\text{Mo}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{s}} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{\text{t}} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C})$$

ainsi que par une “application” appelée (**loi de**) **composition** de \mathcal{C} définie sur la collection des paires (γ, δ) de morphismes de \mathcal{C} telles que $\text{s}(\gamma) = \text{t}(\delta)$. L’image de la paire (γ, δ) par cette application est notée $\gamma \circ \delta$ et appelée **composée** de δ suivi de γ . Les objets $\text{s}(\gamma)$ et $\text{t}(\gamma)$ sont la **source** et le **but** du morphisme γ . Le morphisme $\text{id}(x)$, plus souvent noté id_x , est l’**identité** de l’objet x . Ces données forment une catégorie lorsqu’elles vérifient les axiomes suivants :

- La loi de composition est associative
- Pour tout morphisme γ on a $\text{id}_{\text{t}(\gamma)} \circ \gamma = \gamma = \gamma \circ \text{id}_{\text{s}(\gamma)}$
- Pour tout objet x on a $\text{s}(\text{id}_x) = x = \text{t}(\text{id}_x)$
- Pour tous morphismes γ et δ tels que $\text{s}(\gamma) = \text{t}(\delta)$
on a $\text{s}(\gamma \circ \delta) = \text{s}(\delta)$ et $\text{t}(\gamma \circ \delta) = \text{t}(\gamma)$

Une **sous-catégorie** de \mathcal{C} est la donnée d’une sous-collection M de $\text{Mo}(\mathcal{C})$ et d’une sous-collection O de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ telles que

- si x appartient à O , alors id_x appartient à M
- si γ est un élément de M , alors $\text{s}(\gamma)$ et $\text{t}(\gamma)$ appartiennent à O et
- si δ est un élément de M tel que $\text{s}(\gamma) = \text{t}(\delta)$, alors la composée $\delta \circ \gamma$ appartient à M .

Les restrictions des applications id , s , t et \circ aux collections O et M fournissent alors une structure de catégorie.

On dit qu’un morphisme γ de x vers y est un **isomorphisme** lorsqu’il existe un morphisme δ de y vers x tel que $\delta \circ \gamma = \text{id}_x$ et $\gamma \circ \delta = \text{id}_y$. On dit alors que δ (respectivement γ) est l’**inverse** de γ (respectivement δ) et on note $\delta = \gamma^{-1}$ et $\gamma = \delta^{-1}$ (on vérifie que tout morphisme admet au plus un inverse). On dit aussi que deux objets x et y sont **isomorphes**, ce que l’on note $x \cong y$, lorsqu’il

existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

L'exemple standard est la catégorie des ensembles, elle est notée **Set**. Il est bien connu que la collection de tous les ensembles n'en est pas un, cependant la théorie des catégories perd beaucoup de son intérêt si l'on se refuse à manipuler de telles collections. Il faut seulement retenir qu'en théorie des catégories ce problème n'a rien d'artificiel et qu'aucune des solutions qui ont été proposées pour le résoudre ne fait l'unanimité.

Lorsque la collection des morphismes d'une catégorie est un ensemble, on dit qu'elle est **petite**. Par opposition, une catégorie qui n'est pas petite est quelquefois qualifiée de **grande**.

Dans tous les cas, les catégories \mathcal{C} que nous aborderons seront toutes **localement petites**, c'est-à-dire que pour tous objets x et y de \mathcal{C} , la collection des morphismes dont la source et le but sont x et y est un ensemble que l'on note $\mathcal{C}[x, y]$.

La catégorie **opposée** de \mathcal{C} , notée \mathcal{C}^{op} , est obtenue en échangeant les rôles des applications source et but de la catégorie \mathcal{C} . Autrement dit \mathcal{C} et \mathcal{C}^{op} ont les mêmes objets et les mêmes morphismes mais γ est un morphisme de x vers y dans \mathcal{C}^{op} de si et seulement si c'est un morphisme de y vers x dans \mathcal{C} .

Dans le contexte de ce cours, chaque objet d'une grande catégorie pourra être vu comme une abstraction de tous les états potentiellement visités lors de l'exécution d'un programme (nous dirons simplement que l'objet représente le programme). Les morphismes sont en quelque sorte des "simulations".

1.1.2 Produit Cartésien

Le **produit Cartésien** de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des paires (a, b) d'éléments de $A \cup B$ telles que $a \in A$ et $b \in B$. Il est naturellement accompagné de deux **projections** π_A et π_B définies par $\pi_A(a, b) = a$ et $\pi_B(a, b) = b$. Les fonctions π_A et π_B appartiennent respectivement aux ensembles $\text{Set}[A \times B, A]$ et $\text{Set}[A \times B, B]$ et vérifient la propriété suivante : pour tout ensemble X l'application suivante est une bijection.

$$\begin{aligned} \text{Set}[X, A \times B] &\longrightarrow \text{Set}[X, A] \times \text{Set}[X, B] \\ h &\longmapsto (\pi_A \circ h, \pi_B \circ h) \end{aligned}$$

Plus généralement, étant donnés deux objets a et b d'une catégorie \mathcal{C} , un **produit Cartésien** de a et b (dans \mathcal{C}) est défini, lorsqu'il existe, comme la donnée d'un objet c de \mathcal{C} et d'un élément (π_a, π_b) de $\mathcal{C}[c, a] \times \mathcal{C}[c, b]$ tel que pour tout

objet x de \mathcal{C} l'application suivante soit une bijection.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[x, c] &\longrightarrow \mathcal{C}[x, a] \times \mathcal{C}[x, b] \\ h &\longmapsto (\pi_a \circ h, \pi_b \circ h) \end{aligned}$$

On dit alors que le triplet (c, π_a, π_b) vérifie la **propriété universelle** du produit Cartésien.

La notion de produit Cartésien dans une catégorie quelconque est ainsi directement liée à celle de produit Cartésien d'ensembles. Il faut cependant noter que dans la plupart des catégories, le produit Cartésien n'est pas défini de façon unique en ce sens que l'on peut avoir deux triplets distincts (c, π_a, π_b) et (c', π'_a, π'_b) qui vérifient tous deux sa propriété universelle. Mais dans ce cas on a un isomorphisme ϕ de c vers c' tel que $\pi_a \circ \phi = \pi'_a$ et $\pi_b \circ \phi = \pi'_b$, en voici la preuve :

Comme le triplet (c, π_a, π_b) vérifie la propriété universelle du produit Cartésien, on obtient en posant $x := c'$ un élément $\phi \in \mathcal{C}[c', c]$ tel que

$$\pi_a \circ \phi = \pi'_a \quad \text{et} \quad \pi_b \circ \phi = \pi'_b$$

Le même argument appliqué à c' fournit un élément $\phi' \in \mathcal{C}[c, c']$ tel que

$$\pi'_a \circ \phi' = \pi_a \quad \text{et} \quad \pi'_b \circ \phi' = \pi_b$$

On a donc

$$\pi_a \circ \phi \circ \phi' = \pi_a \quad \text{et} \quad \pi_b \circ \phi \circ \phi' = \pi_b$$

Toujours en vertu de la propriété universelle du produit Cartésien vérifiée par le triplet (c, π_a, π_b) , on obtient en posant $x := c$ un unique élément $\xi \in \mathcal{C}[c, c]$ tel que

$$\pi_a \circ \xi = \pi_a \quad \text{et} \quad \pi_b \circ \xi = \pi_b$$

Or $\xi = \text{id}_c$ et $\xi = \phi \circ \phi'$ sont deux solutions possibles aux équations précédentes donc $\phi \circ \phi' = \text{id}_c$ et on vérifie de même que $\phi' \circ \phi = \text{id}_{c'}$ ce qui donne l'isomorphisme annoncé.

Réciproquement, si le triplet (c, π_a, π_b) vérifie la propriété universelle du produit Cartésien et que ϕ est un isomorphisme de c' vers c , alors le triplet $(c', \pi_a \circ \phi, \pi_b \circ \phi)$ la vérifie également et les deux triplets sont dits isomorphes.

Pourvu que l'on ait montré l'existence d'un triplet (c, π_a, π_b) qui vérifie la propriété universelle du produit Cartésien, "le" produit Cartésien de a et b fait implicitement référence à la classe de tous les triplets isomorphe à (c, π_a, π_b) . Néanmoins, dans la plupart des catégories, on dispose d'un représentant que l'on note $a \times b$ de même que pour $f \in \mathcal{C}[x, a]$ et $g \in \mathcal{C}[x, b]$, on note $f \times g$ l'unique élément de $\mathcal{C}[x, a \times b]$ tel que $\pi_a \circ (f \times g) = f$ et $\pi_b \circ (f \times g) = g$. En particulier, si $a \times b$ existe et si $a \cong a'$ et $b \cong b'$ alors $a' \times b'$ existe aussi et

$a \times b \cong a' \times b'$. On appelle **classe d'isomorphisme** d'un objet de \mathcal{C} la collection de tous les objets de \mathcal{C} qui lui sont isomorphes. Les remarques précédentes nous permettent alors de définir sans ambiguïté le produit Cartésien de deux classes d'isomorphisme.

Exercice 1 : Montrer que $a \times b$ existe si et seulement si $b \times a$ existe et que

$$a \times b \cong b \times a$$

Pour tout entier non nul n , on définit de façon similaire le produit Cartésien de n objets a_1, \dots, a_n à l'aide de n -uplets et dans ce cas on note la $i^{\text{ème}}$ projection π_i plutôt que π_{a_i} : un produit Cartésien de (a_1, \dots, a_n) est un $(n + 1)$ -uplet (c, π_1, \dots, π_n) où c est un objet de \mathcal{C} , $\pi_i \in \mathcal{C}[c, a_i]$ et tel que l'application ci-dessous soit bijective

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[x, c] &\longrightarrow \mathcal{C}[x, a_1] \times \dots \times \mathcal{C}[x, a_n] \\ h &\longmapsto (\pi_1 \circ h, \dots, \pi_n \circ h) \end{aligned}$$

Exercice 2 : Etant donnés trois objets a, b et c tels que $a \times b, b \times c$ et $a \times b \times c$ existent, montrer que

$$(a \times b) \times c \cong a \times b \times c \cong a \times (b \times c)$$

Le produit Cartésien dans **Set** définit en particulier une opération binaire, commutative et associative à isomorphisme près. En outre le produit Cartésien d'un singleton et d'un ensemble est clairement isomorphe à cet ensemble. Cela suggère que le singleton (ou pour être plus formel la collection de tous les singletons) est l'élément neutre du produit Cartésien dans **Set**. Par convention, on définit donc le produit Cartésien du 0-uplet dans **Set** comme le singleton dont on choisit $\{\emptyset\}$ pour représentant. Ce qui nous permet d'étendre la définition qui précède au cas où $n = 0$. La propriété universelle pour le produit Cartésien du 0-uplet dans une catégorie \mathcal{C} affirme alors que pour tout objet x de \mathcal{C} , l'application suivante est une bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[x, c] &\longrightarrow \{\emptyset\} \\ h &\longmapsto \emptyset \end{aligned}$$

autrement dit que pour tout objet x il y a dans \mathcal{C} un unique morphisme de x vers c . On dit que c est l'objet **terminal** de la catégorie \mathcal{C} , encore une fois, son unicité n'est garantie qu'à isomorphisme près et on le note \top .

Une catégorie \mathcal{C} est dite **Cartésienne** lorsque tout n -uplet d'objets de \mathcal{C} admet un produit Cartésien. En particulier, la catégorie des ensembles est Cartésienne.

Exercice 3 : Supposons que la catégorie \mathcal{C} admette un objet terminal, montrer que pour tout objet a de \mathcal{C} , les produits Cartésiens $\top \times a$ et $a \times \top$ existent et que

$$a \times \top \cong a \cong \top \times a$$

Revenons à des considérations informatiques et supposons que l'on ait associé à chaque programme \vec{P} un objet $\llbracket \vec{P} \rrbracket$ de \mathcal{C} qui soit par définition son modèle. Supposons en outre que l'on dispose d'un objet X fixé tel que pour tout programme \vec{P} , le homset $\mathcal{C}[X, \llbracket \vec{P} \rrbracket]$ soit en un certain sens (ou tout du moins contienne) l'ensemble des traces d'exécution du programme. Alors étant donnés deux programmes \vec{P} et \vec{Q} , si $\llbracket \vec{P} \mid \vec{Q} \rrbracket \cong \llbracket \vec{P} \rrbracket \times \llbracket \vec{Q} \rrbracket$, la propriété qui caractérise le produit Cartésien affirme que toute trace d'exécution du programme $\llbracket \vec{P} \mid \vec{Q} \rrbracket$ est uniquement déterminée par deux traces d'exécution prises indépendamment, l'une dans l'ensemble des traces d'exécution de \vec{P} et l'autre dans celui des traces d'exécutions de \vec{Q} . C'est pourquoi, lorsque hypothèses susmentionnées soient satisfaites, on dit que \vec{P} et \vec{Q} s'exécutent **indépendamment** l'un de l'autre. Plus généralement, on dira que les programmes $\vec{P}^{(1)}, \dots, \vec{P}^{(n)}$ s'exécutent **indépendamment** les uns des autres lorsque

$$\llbracket \vec{P}^{(1)} \mid \dots \mid \vec{P}^{(n)} \rrbracket \cong \llbracket \vec{P}^{(1)} \rrbracket \times \dots \times \llbracket \vec{P}^{(n)} \rrbracket$$

1.1.3 La syntaxe du langage PV

Le langage PV a été introduit par *Edsger Wybe Dijkstra* comme un exemple épuré à l'extrême de syntaxe permettant la mise en concurrence de processus séquentiels [Dij68]. Ce langage ne possède en effet que deux primitives de synchronisation P et V mis pour les mots hollandais “pakken” (prendre) et “vrijlaten” (rendre). On se donne un ensemble \mathcal{S} dont les éléments sont appelés **sémaphores**. A chaque sémaphore s on associe une **arité** c'est-à-dire un entier $\alpha_s \geq 2$ de sorte que pour chaque entier $\alpha \geq 2$, il existe une infinité de sémaphores d'arité α . Les seules **instructions** du langage sont P(s) et V(s) où s est un sémaphore. Les **processus** du langage sont les suites finies d'instructions. Lorsque P est un processus et j un entier inférieur ou égal à la longueur de P , on note $P(j)$ la $j^{\text{ème}}$ instruction du processus, en particulier $P(1)$ désigne la première instruction. Les processus sont écrits en séparant les instructions par des points, essentiellement pour la lisibilité, en voici deux exemples :

$$\begin{aligned} & P(a) . V(a) \\ & P(a) . P(b) . V(a) . V(b) \end{aligned}$$

Enfin, un programme PV est une suite finie de processus que l'on a séparé par l'opérateur \mid qui indique la mise en concurrence. Ainsi

$$P(a) . V(a) \mid P(a) . V(a)$$

est un exemple de programme PV constitué de deux processus identiques alors que

$$P(a) . P(b) . V(a) . V(b) \mid P(b) . P(a) . V(b) . V(a)$$

est un exemple de programme PV constitué de deux processus distincts. Ainsi tout programme PV peut être vu comme une matrice d'instructions dont chaque ligne est un processus.

1.1.4 Une sémantique ensembliste du langage PV

On peut voir les programmes PV comme des vecteurs de processus, on les notera \vec{P} de sorte que \vec{P}_i est le $i^{\text{ème}}$ processus du programme tandis que $\vec{P}_i(j)$ est la $j^{\text{ème}}$ instruction du $i^{\text{ème}}$ processus de ce programme. Si \vec{P} est constitué de n processus et que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ on note l_i le nombre d'instructions du processus \vec{P}_i (ces dernières étant indexées de 1 à l_i), alors l'expression $\vec{P}_i(j)$ n'a de sens que lorsque $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq l_i$ et on pose²

$$\text{dom}(\vec{P}) := \{0, \dots, l_1\} \times \dots \times \{0, \dots, l_n\}$$

Par analogie avec le vocabulaire de l'algèbre linéaire, on appelle **base canonique** de \mathbb{N}^n l'ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ des n -uplets définis par

$$e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La **fonction d'occupation** du processus \vec{P}_i est une fonction notée Φ_i définie pour tous les triplets $(\mathbf{s}, \gamma, \tau)$ tels que

- 1) \mathbf{s} est un sémaphore,
- 2) γ est une fonction de $\{0, \dots, l\}$ (où $l \in \mathbb{N}$) dans $\text{dom}(\vec{P})$ telle que
 - i) $\gamma(0) = \vec{0}$ c'est-à-dire le n -uplet d'entiers nuls
 - ii) pour tout $t < l$, le vecteur $\gamma(t+1) - \gamma(t)$ appartient à la base canonique
- 3) $0 \leq \tau \leq l$.

La fonction d'occupation est définie par induction de la façon suivante :

$\Phi_i(\mathbf{s}, \gamma, 0) = \mathbf{false}$ et pour tout entier $t > 0$, si $\gamma(t) - \gamma(t-1)$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique on pose

$$\Phi_i(\mathbf{s}, \gamma, t) = \begin{cases} \mathbf{true} & \text{si } \vec{P}_i(\pi_i(\gamma(t))) = \mathbf{P}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{false} & \text{si } \vec{P}_i(\pi_i(\gamma(t))) = \mathbf{V}(\mathbf{s}) \\ \Phi(\mathbf{s}, \gamma, t-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Intuitivement γ est une trace d'exécution potentielle et le fait que $\gamma(t) - \gamma(t-1) = e_i$ indique qu'à l'étape t le $i^{\text{ème}}$ processus du programme \vec{P} exécute une instruction. Les termes du n -uplet $\gamma(t)$ peuvent alors être vus comme les pointeurs d'instruction de chacun des processus qui constitue le programme \vec{P} , ainsi $\pi_i(\gamma(t))$ est l'indice de la prochaine instruction que le processus \vec{P}_i doit exécuter. Le booléen $\Phi_i(\mathbf{s}, \gamma, t)$ répond à la question : "le sémaphore \mathbf{s} est-il occupé par le processus \vec{P}_i à l'étape t de la trace d'exécution γ ". La **jaugue d'occupation**

². On a volontairement inclus 0 dans les intervalles d'entiers dont le produit constitue $\text{dom}(\vec{P})$.

des ressources Φ associe à chaque triplet de l'ensemble de définition commun à toutes les fonction Φ_i l'entier

$$\Phi(\mathbf{s}, \gamma, t) := \text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \Phi_i(\mathbf{s}, \gamma, t) = \text{true}\}$$

Dans cette sémantique, on définit les **traces d'exécutions** du programme comme les applications γ de $\{0, \dots, l\}$ dans $\text{dom}(\vec{P})$ (où $l \in \mathbb{N}$) telles que pour tout sémaphore \mathbf{s} et tout entier $t \in \{0, \dots, l\}$, le triplet (\mathbf{s}, γ, t) soit dans l'ensemble de définition de Φ et satisfasse l'inégalité ci-dessous.

$$\Phi(\mathbf{s}, \gamma, t) < \alpha_{\mathbf{s}}$$

Exercice 4 : Montrer qu'il existe une application Ψ définie sur $\mathcal{S} \times \text{dom}(\vec{P})$ telle que pour tout triplet (\mathbf{s}, γ, t) pris dans l'ensemble de définition de Φ on a

$$\Phi(\mathbf{s}, \gamma, t) = \Psi(\mathbf{s}, \gamma(t))$$

On dit que la jauge des ressources n'a pas de mémoire. On peut alors définir une sémantique du programme \vec{P}

$$\llbracket \vec{P} \rrbracket := \{ \vec{x} \in \text{dom}(\vec{P}) \mid \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} \ \Psi(\mathbf{s}, \vec{x}) < \alpha_{\mathbf{s}} \} \subseteq \mathbb{N}^n$$

Par définition, on dit alors que deux programmes \vec{P} et \vec{Q} s'exécutent **en parallèle** lorsque

$$\llbracket \vec{P} \mid \vec{Q} \rrbracket = \llbracket \vec{P} \rrbracket \times \llbracket \vec{Q} \rrbracket$$

1.1.5 Une autre sémantique ensembliste du langage PV

Nous allons donner une autre sémantique au langage PV à l'aide d'ensembles. Elle permet de caractériser le fait que les processus P_1, \dots, P_n qui concourent dans le programme $P_1 \mid \dots \mid P_n$ s'exécutent en parallèle, c'est-à-dire indépendamment les uns des autres, par le fait que la sémantique $\llbracket P_1 \mid \dots \mid P_n \rrbracket$ du programme $P_1 \mid \dots \mid P_n$ soit le produit Cartésien des ensembles $\llbracket P_1 \rrbracket, \dots, \llbracket P_n \rrbracket$ qui sont les sémantiques de chacun des processus.

On note \mathbb{R}_+ la demi-droite des nombres réels positifs c'est-à-dire $[0, +\infty[$. Pour chaque processus P , chaque sémaphore \mathbf{s} et chaque point $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$a_x := \max \{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq x \text{ et } P(k) = \text{P}(\mathbf{s}) \}$$

et

$$b_x := \min \{ k \in \mathbb{N} \mid a_x \leq k \text{ et } P(k) = \text{V}(\mathbf{s}) \}$$

avec la convention $\max \emptyset = \min \emptyset = \infty$. On dit alors que le sémaphore \mathbf{s} est **occupé** par le processus P au point x lorsque $x \in [a_x, b_x[$. La **partie occupée** (par le processus P) du sémaphore \mathbf{s} est définie comme

$$B_{\mathbf{s}}(P) := \{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{s} \text{ est occupé par } P \text{ au point } x \}$$

Exercice 5 : Soient x et y deux éléments de \mathbb{R}_+ montrer que

- 1) si $a_x = a_y$, alors $b_x = b_y$
- 2) si $a_x = \infty$ alors $b_x = \infty$.
- 3) si $x \leq y$ et $a_y = \infty$, alors $a_x = \infty$.

Exercice 6 : Construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites d'éléments de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telles que

$$B_s(P) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n[$$

On note alors χ_P^s la fonction indicatrice de l'ensemble $B_s(P)$ i.e.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_s(P) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Chaque programme $P_1 | \dots | P_n$ va être représenté par une sous-partie de \mathbb{R}_+^n c'est-à-dire le produit Cartésien de n copies de \mathbb{R}_+ . Intuitivement, le nombre de processus concurrents fixe la "dimension" du modèle. Si $\vec{f} := (f_1, \dots, f_n)$ est un n -uplet de fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} et $\vec{x} := (x_1, \dots, x_n)$ un n -uplet d'éléments de \mathbb{R}_+ , autrement dit un point de \mathbb{R}_+^n , on pose

$$\vec{f} \cdot \vec{x} := \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

En particulier, si $\vec{\chi}$ est le n -uplet $(\chi_{P_1}^s, \dots, \chi_{P_n}^s)$ des fonctions indicatrices de chacun des ensembles $B_s(P_1), \dots, B_s(P_n)$, on définit la **région interdite** engendrée par le sémaphore s dans le modèle du programme $P_1 | \dots | P_n$ comme

$$F_s := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \vec{\chi} \cdot \vec{x} \geq \alpha \}$$

où α l'arité du sémaphore s . La **région interdite** du programme est alors

$$F := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} F_s$$

Le modèle du programme, noté $\llbracket P_1 | \dots | P_n \rrbracket$, est par définition le complémentaire de sa région interdite dans \mathbb{R}_+^n .

Exercice 7 : Montrer que le modèle d'un programme PV constitué d'un seul processus est \mathbb{R}_+ .

Exercice 8 : Etant donné un programme \vec{P} et un sémaphore s , montrer que pour chaque \vec{x} appartenant à l'ensemble de définition de la fonction de jauge Ψ (définie dans la section précédente) on a $\Psi(s, \vec{x}) = \vec{\chi} \cdot \vec{x}$.

On dit que deux programmes $P_1 | \dots | P_n$ et $Q_1 | \dots | Q_m$ s'exécutent **en parallèle** lorsque

$$\llbracket (P_1 | \dots | P_n) | (Q_1 | \dots | Q_m) \rrbracket = \llbracket P_1 | \dots | P_n \rrbracket \times \llbracket Q_1 | \dots | Q_m \rrbracket$$

Cette définition se généralise au cas de N programmes $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_N$ dont on dira qu'ils s'exécutent en parallèle lorsque

$$\llbracket \vec{P}_1 | \dots | \vec{P}_N \rrbracket = \llbracket \vec{P}_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket \vec{P}_N \rrbracket$$

L'idée sous-jacente est que les régions interdites sont la manifestation des conflits qui surviennent entre processus lorsque plusieurs d'entre eux souhaitent accéder à des ressources alors que ces dernières ne suffisent pas à satisfaire toutes les requêtes.

Traïtons le cas du programme $P(\mathbf{a}) . V(\mathbf{a}) | P(\mathbf{a}) . V(\mathbf{a})$ et notons P le processus $P(\mathbf{a}) . V(\mathbf{a})$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a

x	a_x	b_x	$\chi_P^s(x)$
$[0, 1[$	∞	∞	0
$[1, 2[$	1	2	1
$[2, 3[$	1	2	0

La région interdite du programme est donc $[1, 2[\times [1, 2[$. En particulier, les deux processus qui constituent ce programme, chacun vu comme un programme qui ne possède qu'un seul processus, ne s'exécutent pas en parallèle.

Exercice 9 : Déterminer la région interdite du programme

$$P(\mathbf{a}) . P(\mathbf{b}) . V(\mathbf{a}) . V(\mathbf{b}) | P(\mathbf{b}) . P(\mathbf{a}) . V(\mathbf{b}) . V(\mathbf{a})$$

Exercice 10 : Trouver trois programmes \vec{P}_1, \vec{P}_2 et \vec{P}_3 de sorte que pour chaque paire $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ on ait

$$\llbracket \vec{P}_i | \vec{P}_j \rrbracket = \llbracket \vec{P}_i \rrbracket \times \llbracket \vec{P}_j \rrbracket$$

bien que

$$\llbracket \vec{P}_1 | \vec{P}_2 | \vec{P}_3 \rrbracket \neq \llbracket \vec{P}_1 \rrbracket \times \llbracket \vec{P}_2 \rrbracket \times \llbracket \vec{P}_3 \rrbracket$$

Une remarque : l'idée de caractériser le parallélisme *via* une notion de produit Cartésien se retrouve en théorie des Probabilités. En effet, une famille de variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur un espace mesuré (Ω, μ) est dite indépendante lorsque la loi de probabilité du vecteur aléatoire \vec{X} est le produit des lois de probabilités de chacune de ses composantes, autrement dit lorsque

$$\mu(\{\vec{X} \in U_1 \times \dots \times U_n\}) = \mu(\{X_1 \in U_1\}) \cdots \mu(\{X_n \in U_n\})$$

pour chaque n -uplet (U_1, \dots, U_n) de sous-parties mesurables de Ω . Typiquement, un joueur a dans sa main une pièce et un dé qu'il lance simultanément, l'univers des possibles est

$$\Omega := \{\text{pile, face}\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

toute sous-partie de Ω est mesurable et la probabilité que l'événement $\{(b, n)\}$ survienne est $\mu_{\text{pièce}}(\{b\}) \cdot \mu_{\text{dé}}(\{n\})$.

Les sémantiques que nous venons de donner ne sont pas satisfaisantes, on aimerait en effet que le homset $\text{Set}[[0, 1], \llbracket \vec{P} \rrbracket]$ ne contienne que des traces d'exécution, c'est-à-dire que pour chacun de ses éléments γ , la restriction de γ à l'ensemble

$$\{t \in \mathbb{N} \mid \gamma(t) \in \text{dom}(P)\}$$

soit une trace d'exécution au sens de la section précédente. Pour ce faire, on va prendre pour modèles des programmes du langage PV des objets de catégories autres que Set .

Exercice 11 : Trouver un programme \vec{P} et un élément de $\text{Set}[[0, 1], \llbracket \vec{P} \rrbracket]$ qui ne soit pas une trace d'exécution de \vec{P} .

1.2 Espaces Ordonnés

Le plus ancien article traitant d'espaces ordonnés que j'ai pu trouver est dû à *Samuel Eilenberg* [Eil41]. Les espaces ordonnés ont aussi été très étudiés par *Leopoldo Nachbin* initialement pour servir en analyse fonctionnelle, on trouve notamment une série d'articles [Nac48a, Nac48b, Nac48c] publiés en 1948 puis un livre [Nac65] qui pour l'essentiel reprend leur contenu. On y trouve en particulier des adaptations au cadre des espaces ordonnés de plusieurs résultats classiques de topologie élémentaire. Du point de vue informatique, les travaux de *E. W. Dijkstra* [Dij68] puis de *Scott D. Carson* et *Paul F. Reynolds Jr* [CJ87] ont montré que ces objets mathématiques offrent un modèle très intuitif du langage PV.

1.2.1 Espaces Topologiques

Un espace topologique est un ensemble X muni d'une collection $\mathcal{O}(X)$ de sous-partie de X qui vérifie les propriétés suivantes :

- \emptyset et X appartiennent à $\mathcal{O}(X)$
- si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}(X)$, alors

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}(X)$$

- pour $n \in \mathbb{N}$, si O_0, \dots, O_n sont des éléments de $\mathcal{O}(X)$, alors

$$\bigcap_{i=0}^n O_i \in \mathcal{O}(X)$$

Les éléments de $\mathcal{O}(X)$ sont appelés les **ouverts** de X et le complémentaire d'un ouvert de X est un **fermé** de X . Par la suite, X désignera aussi bien l'espace topologique que son ensemble sous-jacent. Si X et Y sont deux espaces topologiques, une application **continue** de X vers Y est un élément f de $\text{Set}[X, Y]$ tel que pour tout ouvert O de Y , l'ensemble

$$f^{-1}(O) := \{x \in X \mid f(x) \in O\}$$

soit un ouvert de X .

Exercice 12 : Vérifier que la collection des sous-parties O de la droite réelle \mathbb{R} telles que pour tout $x \in O$ il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq O$, forme une topologie (dite **standard**) sur \mathbb{R} .

Exercice 13 : Vérifier que la collection des espaces topologiques forme une catégorie Cartésienne notée **Top** dont les morphismes sont les applications continues. Calculer $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit un espace topologique X et A une sous-partie de X . Vérifier que la collection des sous-parties de A de la forme $A \cap O$ où O est un ouvert de X donne à A une structure d'espace topologique. Cette structure est dite **induite** sur A par X .

En particulier, le segment unité $[0, 1]$ hérite de la topologie standard de \mathbb{R} et on définit les **chemins** sur un espace topologique X comme les éléments de l'ensemble

$$\text{Top}[[0, 1], X]$$

1.2.2 La catégorie des espaces ordonnés

Un **espace ordonné**³ est un espace topologique X équipé d'une relation d'ordre \sqsubseteq sur son ensemble sous-jacent dont le graphe

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \sqsubseteq y\}$$

est une sous-partie fermée de $X \times X$. On désigne alors cet espace ordonné par \vec{X} .

On dit d'un espace topologique X qu'il est **séparé** (au sens de *Hausdorff*) lorsque pour tout point distincts x et x' de X , il existe deux ouverts O et O' tels que $x \in O$, $x' \in O'$ et $O \cap O' = \emptyset$. Un espace topologique est séparé si et

3. Aussi appelé *pospace* comme contraction de *partially ordered (topological) space*.

seulement si la diagonale $\{(x, x) \mid x \in X\}$ est une sous-partie fermée de $X \times X$.

Exercice 15 : Montrer que l'espace topologique sous-jacent d'un espace ordonné est séparé. Montrer que pour tout espace séparé X équipé de la relation d'égalité sur X est un espace ordonné.

Exercice 16 : Vérifier que la droite réelle \mathbb{R} muni de sa topologie et de sa relation d'ordre standard forme un espace ordonné que l'on note $\overrightarrow{\mathbb{R}}$.

Exercice 17 : Vérifier que la collection des espaces ordonnés forme une catégorie Cartésienne notée \mathbf{Po} dont les morphismes sont les applications continues et croissantes autrement dit un morphisme de \overrightarrow{X} vers \overrightarrow{Y} est un élément de l'ensemble $\mathbf{Top}[X, Y] \cap \mathbf{Pos}[\sqsubseteq_X, \sqsubseteq_Y]$.

Exercice 18 : Soit un espace ordonné \overrightarrow{X} et A une sous-partie de l'ensemble X . Montrer que la topologie et l'ordre induits par ceux de \overrightarrow{X} sur A donnent à A une structure d'espace ordonné.

En vertu des résultats précédents, si \overrightarrow{P} est un programme PV alors son modèle $\llbracket \overrightarrow{P} \rrbracket$ est une sous-partie de \mathbb{R}_+^n (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$) il hérite donc d'une structure d'espace ordonné induite par celle $\overrightarrow{\mathbb{R}_+^n}$. Il en va de même du segment unité $[0, 1]$ qui hérite de la structure d'espace ordonné de $\overrightarrow{\mathbb{R}}$: on note $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ l'espace ordonné qui en résulte. On définit alors les **chemins** sur un espace ordonné \overrightarrow{X} comme étant les éléments de

$$\mathbf{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], \overrightarrow{X}]$$

i.e. les chemins γ sur l'espace topologique X tels que si $t \leq t'$, alors $\gamma(t) \sqsubseteq_x \gamma(t')$.

Exercice 19 : Montrer qu'un chemin γ sur un espace ordonné est constant (i.e. $\forall t, t' \in [0, 1] \gamma(t) = \gamma(t')$) si et seulement si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Exercice 20 : Montrer qu'un élément θ de $\mathbf{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]]$ est surjectif si et seulement si $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$.

Théorème 1 Soit \overrightarrow{P} un programme PV, tout chemin sur $\llbracket \overrightarrow{P} \rrbracket$ induit une trace d'exécution de \overrightarrow{P} et réciproquement, toute trace d'exécution de \overrightarrow{P} est induite par un chemin sur $\llbracket \overrightarrow{P} \rrbracket$.

A la fin de la section précédente, nous avons vu que l'ensemble $\mathbf{Set}[[0, 1], \llbracket \overrightarrow{P} \rrbracket]$ contient de nombreux "parasites" en plus de toutes les traces d'exécution de \overrightarrow{P} . En contraste, le Théorème 1 affirme que l'ensemble $\mathbf{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], \llbracket \overrightarrow{P} \rrbracket]$ ne contient que des traces d'exécution de \overrightarrow{P} et même qu'il les contient toutes. De

ce point de vue, on peut dire qu'aucun chemin sur le modèle d'un programme PV n'est pathologique. Le résultat qui suit précise cette idée dans un contexte plus général. Un chemin sur \vec{X} est en particulier un élément de $\text{Set}[[0, 1], \llbracket \vec{P} \rrbracket]$. Avec un peu de théorie des ensembles on prouve l'existence d'une bijection (isomorphisme dans Set) entre les ensembles $[0, 1]$ et $[0, 1] \times [0, 1]$. La courbe de *Peano* fournit même un exemple d'application continue et surjective de $[0, 1]$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$. En termes de traces d'exécution, de telles applications sont pathologiques.

En général, on définit l'**image** d'un élément f de $\text{Po}[\vec{X}, \vec{Y}]$ comme la sous-partie de Y suivante

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

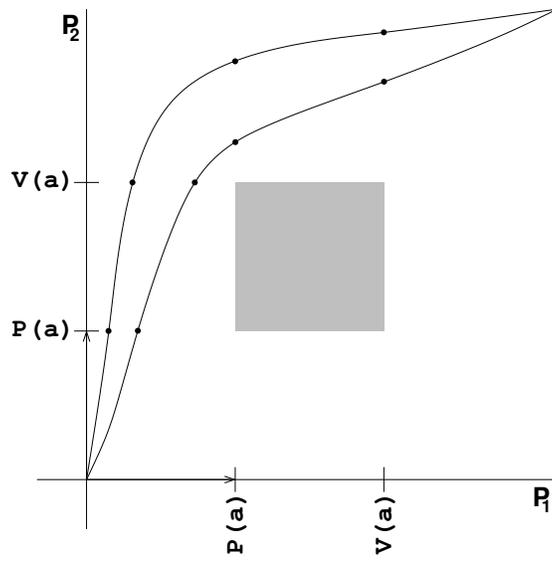
que l'on équipe de la structure d'espace ordonné induite pas celle de \vec{Y} . Dans le cas où γ est un chemin constant, l'ensemble sous-jacent de son image est réduit à un singleton, dans tous les autres cas :

Théorème 2 L'image d'un chemin non constant sur un espace ordonné est isomorphe à $[\vec{0}, \vec{1}]$.

Par définition, toute sous-partie A d'un espace ordonné \vec{X} isomorphe à $[\vec{0}, \vec{1}]$ est l'image d'un chemin et il est facile de voir qu'il existe même une infinité (indénombrable) de chemins dont l'image est A . En effet, pour tout élément θ de $\text{Po}[[\vec{0}, \vec{1}], [\vec{0}, \vec{1}]]$ les chemins γ et $\gamma \circ \theta$ ont la même image dès lors que θ est surjectif. Le Théorème 2 permet donc de réduire le problème de la classification des chemins sur un espace ordonné à la classification de ses sous-parties isomorphe à $[\vec{0}, \vec{1}]$. Néanmoins, étant donné un programme \vec{P} et deux points x et y de son modèle $\llbracket \vec{P} \rrbracket$, il existe encore une famille infinie (indénombrable) de chemins γ sur $\llbracket \vec{P} \rrbracket$ tels que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, dont les images sont deux à deux distinctes et qui malgré cela représentent tous la même trace d'exécution.

Dans le cas du programme $P(\mathbf{a}) \cdot V(\mathbf{a}) \mid P(\mathbf{a}) \cdot V(\mathbf{a})$ les images distinctes de deux chemins ayant les mêmes extrémités et représentant tous deux la trace d'exécution suivante

$$P_2 : P(\mathbf{a}) \rightarrow P_2 : V(\mathbf{a}) \rightarrow P_1 : P(\mathbf{a}) \rightarrow P_1 : V(\mathbf{a})$$



La prochaine partie du cours décrit un invariant (la catégorie fondamentale) qui va permettre de supprimer ces redondances lorsque les extrémités des chemins sont fixées.

Chapitre 2

La Catégorie Fondamentale

Samuel Eilenberg et *Saunders MacLane* ont jeté les bases de la théorie des catégories afin, entre autres, de clarifier la formalisation de la topologie algébrique. En effet, des notions telles que l'homotopie et l'homologie induisent des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes. La notion de catégorie fondamentale est liée à celle d'homotopie et elle induit un foncteur que nous allons décrire après avoir donné quelques compléments de théorie des catégories.

2.1 Foncteurs et Transformations Naturelles

Les foncteurs sont les morphismes de catégories. Pourvu que l'on prenne quelques précautions avec la notion de collection, on peut rassembler les foncteurs d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} pour former une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles¹.

Un **foncteur** f d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} est défini par deux "applications" notées $\text{Ob}(f)$ et $\text{Mo}(f)$ telles que la loi de composition de \mathcal{C} soit préservée et que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} \text{Mo}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ \text{Mo}(f) \downarrow & & \downarrow \text{Ob}(f) \\ \text{Mo}(\mathcal{D}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xleftarrow{\text{id}'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} & \text{Ob}(\mathcal{D}) \end{array}$$

c'est-à-dire que pour chaque objet x et chaque morphisme γ de \mathcal{C} :

- la source de $\text{Mo}(f)(\gamma)$ est $\text{Ob}(f)(s(\gamma))$
- le but de $\text{Mo}(f)(\gamma)$ est $\text{Ob}(f)(t(\gamma))$
- l'identité de $\text{Ob}(f)(x)$ est $\text{Mo}(f)(\text{id}_x)$

1. Les équations satisfaites par ces diverses structures donnent les axiomes de la notion de 2-catégories.

et pour chaque morphisme δ de \mathcal{C} telle que $s(\gamma) = t(\delta)$ la composée de $\text{Mo}(f)(\delta)$ suivie de $\text{Mo}(f)(\gamma)$ est $\text{Mo}(f)(\gamma \circ \delta)$.

Par la suite on écrira f aussi bien pour désigner $\text{Ob}(f)$ que $\text{Mo}(f)$. On peut ainsi résumer les axiomes précédents par $s'(f(\gamma)) = f(s(\gamma))$, $t'(f(\gamma)) = f(t(\gamma))$, $\text{id}'_{f(x)} = f(\text{id}_x)$ et $f(\gamma \circ \delta) = f(\gamma) \circ' f(\delta)$ où \circ et \circ' représentent les lois de composition de \mathcal{C} et \mathcal{D} , ou encore tous les englober dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma \circ \delta} & \\ x & \xrightarrow{\delta} y \xrightarrow{\gamma} & z \\ & \xrightarrow{f(\gamma \circ \delta)} & \\ f(x) & \xrightarrow{f(\delta)} f(y) \xrightarrow{f(\gamma)} & f(z) \end{array}$$

Etant donnés deux objets x et y de \mathcal{C} la restriction de $\text{Mo}(f)$ à $\mathcal{C}[x, y]$ induit une fonction à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{D}[\text{Ob}(f)(x), \text{Ob}(f)(y)]$. Lorsque pour tous objets x et y de \mathcal{C} cette restriction est injective (respectivement surjective), on dit que le foncteur est **fidèle** (respectivement **plein**). Un foncteur plein et fidèle est dit **pleinement fidèle**. Un foncteur fidèle tel que pour tous objets x et y on ait

$$\text{Ob}(f)(x) = \text{Ob}(f)(y) \Rightarrow x = y$$

est appelé un **plongement**. L'exercice qui suit est une version "allégée" du lemme de *Yoneda*.

Exercice 21 : Montrer que toutes les petites catégories peuvent être plongées dans **Set**.

Lorsque \mathcal{C} est une sous-catégorie de \mathcal{D} , les inclusions de $\text{Mo}(\mathcal{C})$ dans $\text{Mo}(\mathcal{D})$ et de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ dans $\text{Ob}(\mathcal{D})$ induisent un foncteur **inclusion** de \mathcal{C} dans \mathcal{D} . Lorsque ce dernier est plein, on dit que \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} .

Exercice 22 : Vérifier que la collection des petites catégories forme, avec les foncteurs, une catégorie Cartésienne localement petite que l'on note **Cat** en vérifiant en particulier que le produit Cartésien

$$\left(\left(\text{Mo}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C}) \right), \circ \right) \times \left(\left(\text{Mo}(\mathcal{D}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xleftarrow{\text{id}'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{D}) \right), \circ' \right)$$

est égal à

$$\left(\left(\text{Mo}(\mathcal{C}) \times \text{Mo}(\mathcal{D}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s \times s'} \\ \xleftarrow{\text{id} \times \text{id}'} \\ \xrightarrow{t \times t'} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D}) \right), \circ \times \circ' \right)$$

On dit qu'un foncteur f de \mathcal{C} vers \mathcal{D} **préserve le produit Cartésien** lorsque pour tout couple (x, x') d'objets de \mathcal{C} , si le produit $x \times x'$ existe dans \mathcal{C} , alors le produit $f(x) \times f(x')$ existe dans \mathcal{D} et est isomorphe à $f(x \times x')$.

Exercice 23 : Vérifier que la collection des monoïdes et de leurs morphismes forme une catégorie Cartésienne localement petite que l'on note **Mon**. Montrer que l'on peut définir les monoïdes comme les petites catégories n'ayant qu'un objet et décrire un plongement de **Mon** dans **Cat** qui préserve le produit Cartésien.

Exercice 24 : Vérifier que la collection des groupes et de leurs morphismes forme une catégorie Cartésienne localement petite que l'on note **Gr** et décrire un plongement de **Gr** dans **Mon** qui préserve le produit Cartésien.

Exercice 25 : Vérifier que la collection des groupes Abéliens et de leurs morphismes forme une catégorie Cartésienne localement petite que l'on note **Ab** et décrire un plongement de **Ab** dans **Gr** qui préserve le produit Cartésien.

Exercice 26 : Vérifier que la collection des ensembles ordonnés et de leurs morphismes forme une catégorie Cartésienne localement petite que l'on note **Pos**. Etant donné un ensemble ordonné (X, \sqsubseteq) , montrer que

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \sqsubseteq y\}$$

est l'ensemble des morphismes d'une catégorie dans laquelle la source et le but de (x, y) sont respectivement x et y . En déduire un plongement de **Pos** dans **Cat** qui préserve le produit Cartésien.

Etant donné deux foncteurs f et g de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , une **transformation naturelle** de f vers g est une collection $(\eta_x)_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ telle que $\eta_x \in \mathcal{D}[fx, gx]$ et pour tout morphisme α de $\mathcal{C}[x, y]$ on ait le diagramme commutatif suivant :

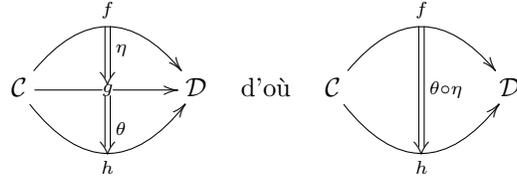
$$\begin{array}{ccc} fx & \xrightarrow{f\alpha} & fy \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ gx & \xrightarrow{g\alpha} & gy \end{array}$$

autrement dit, $g\alpha \circ \eta_x = \eta_y \circ f\alpha$. On représente cette situation par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \eta \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{D} \\ & g & \end{array}$$

Etant données η et θ des transformations naturelles respectivement de f vers g et de g vers h , où f, g et h sont des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , on définit la composée

$\theta \circ \eta$ par $(\theta_x \circ \eta_x)_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$. Schématiquement on a

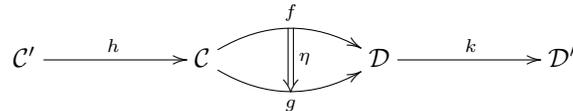


La composition se fait composante par composante de sorte que l'associativité de la composition des transformations naturelles découle de celle de la composition dans \mathcal{B} . De plus, la collection $(\text{id}_{fx})_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ est une transformation naturelle de f vers f que l'on note id_f . La notation est justifiée par l'égalité suivante.

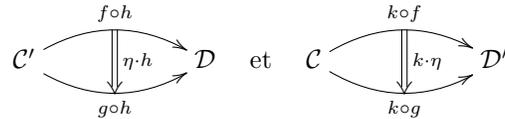
$$\eta \circ \text{id}_f = \eta = \text{id}_g \circ \eta$$

Exercice 27 : Vérifier que la collection des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} forme une catégorie $\text{Fun}[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ dont les transformations naturelles sont les morphismes. On remarque en particulier que si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont des petites catégories, alors l'ensemble des objets de $\text{Fun}[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, que l'on note aussi $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, est le homset $\text{Cat}[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

En fait, les foncteurs dont le but est \mathcal{C} et ceux dont la source est \mathcal{D} agissent à droite et à gauche sur les morphismes de $\text{Fun}[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Formellement, étant donné deux foncteurs f et g de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , une transformation naturelle η de f vers g , un foncteur h de \mathcal{C}' vers \mathcal{C} et un foncteur k de \mathcal{D} vers \mathcal{D}' , la collection $(\eta_{hx'})_{x' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')}$ est une transformation naturelle de $f \circ h$ vers $g \circ h$ tandis que $(k\eta_x)_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ est une transformation naturelle de $k \circ f$ vers $k \circ g$. Ces deux nouvelles transformations naturelles sont respectivement notées $\eta \cdot h$ et $k \cdot \eta$. On a les diagrammes suivants



d'où



En outre on a des règles d'associativité et de distributivité faisant intervenir la composition des foncteurs notée \circ , celle des transformations naturelles que nous noterons également \circ et l'opérateur \cdot défini précédemment.

$$\left. \begin{aligned} h' \cdot (h \cdot \eta) &= (h' \circ h) \cdot \eta \\ (\eta \cdot k) \cdot k' &= \eta \cdot (k \circ k') \\ (h \cdot \eta) \cdot k &= h \cdot (\eta \cdot k) \end{aligned} \right\} \text{associativité mixte}$$

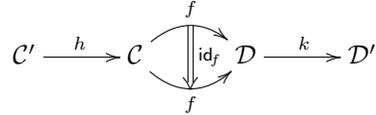
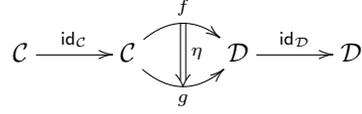
$$\left. \begin{aligned} h \cdot (\eta' \circ \eta) &= (h \cdot \eta') \circ (h \cdot \eta) \\ (\eta' \circ \eta) \cdot k &= (\eta' \cdot k) \circ (\eta \cdot k) \end{aligned} \right\} \text{distributivité de } \cdot \text{ sur } \circ$$

L'opérateur \cdot satisfait pour sa part

$$\text{id}_{\mathcal{D}} \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \text{id}_{\mathcal{C}}$$

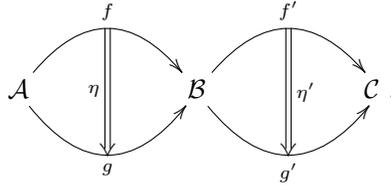
et

$$\text{id}_f \cdot h = \text{id}_{f \circ h} \text{ et } k \cdot \text{id}_f = \text{id}_{k \circ f}$$



Noter bien que $h \cdot (\eta' \circ \eta)$ et $(h \cdot \eta') \circ \eta$, de même que $(\eta' \circ \eta) \cdot k$ et $\eta' \circ (\eta \cdot k)$, ne sont la plupart du temps même pas définis simultanément.

Nous allons définir un nouvel opérateur binaire $*$ entre transformations naturelles. Supposons que f et g soient des foncteurs de \mathcal{A} vers \mathcal{B} , que f' et g' soient des foncteurs de \mathcal{B} vers \mathcal{C} et enfin que η et η' soient des transformations naturelles respectivement de f et f' vers g et g' , ou encore schématiquement :

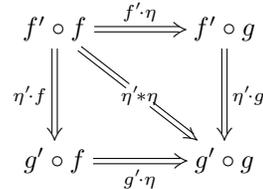


On a donc

$$\begin{array}{ccc} f' \circ f \xrightarrow{f' \cdot \eta} f' \circ g & & f' \circ f & & f' \circ g \\ & \text{et} & \eta' \cdot f \downarrow & & \downarrow \eta' \cdot g \\ g' \circ f \xrightarrow{g' \cdot \eta} g' \circ g & & g' \circ f & & g' \circ g \end{array}$$

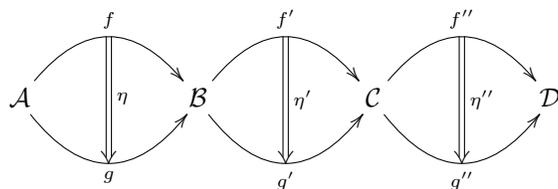
Exercice 28 : Prouver que l'on a :

$$(\eta' \cdot g) \circ (f' \cdot \eta) = (g' \cdot \eta) \circ (\eta' \cdot f)$$

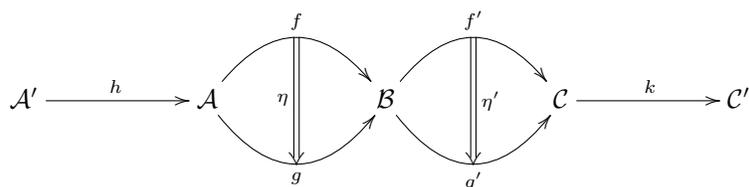


On définit alors $\eta' * \eta$ comme la transformation naturelle de $f' \circ f$ vers $g' \circ g$ décrite ci-dessus. L'opérateur $*$ est appelé **produit de Godement** ou **juxtaposition**. On a quelques nouvelles règles :

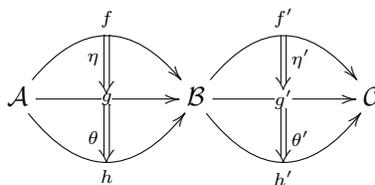
$$(\eta'' * \eta') * \eta = \eta'' * (\eta' * \eta) \quad \} \text{ associativité de } *$$



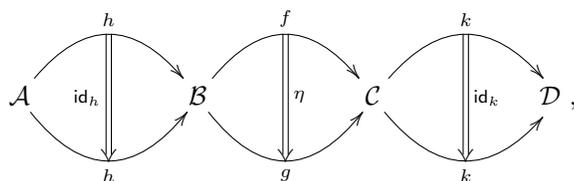
$$\left. \begin{aligned} (\eta' * \eta) \cdot h &= \eta' * (\eta \cdot h) \\ k \cdot (\eta' * \eta) &= (k \cdot \eta') * \eta \end{aligned} \right\} \text{ associativité mixte de } \cdot \text{ et } *$$



$$(\theta' \circ \eta') * (\theta \circ \eta) = (\theta' * \theta) \circ (\eta' * \eta) \quad \left. \right\} \text{ loi d'échange entre } * \text{ et } \circ$$



$$\left. \begin{aligned} \text{id}_k * \eta &= k \cdot \eta \\ \eta * \text{id}_h &= \eta \cdot h \end{aligned} \right\} \text{ composition vis-à-vis des identités}$$



Les règles relatives à \circ , $*$ et \cdot sont appelées règles de *Godement*. D'une certaine manière, au regard de son comportement vis-à-vis des identités, l'opérateur $*$ peut-être vue comme une extension de l'opérateur \cdot .

Exercice 29 : Soient une catégorie \mathcal{C} et f un **endofoncteur** de \mathcal{C} (c'est-à-dire foncteur de \mathcal{C} vers \mathcal{C}). Soient encore δ et μ des transformations naturelles de f^n vers f^{n+1} et de f^{n+1} vers f^n où $n \in \mathbb{N}$. En calculant $\mu * \mu$ et $\delta * \delta$ montrer que

$$(\mu \cdot f^n) \circ (f^{n+1} \cdot \mu) = (f^n \cdot \mu) \circ (\mu \cdot f^{n+1}) \text{ et } (f^{n+1} \cdot \delta) \circ (\delta \cdot f^n) = (\delta \cdot f^{n+1}) \circ (f^n \cdot \delta)$$

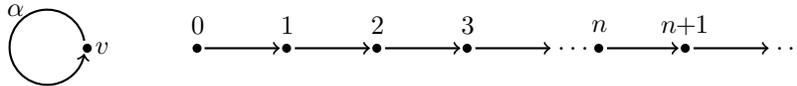
2.2 La catégorie des graphes

Un **graphe**² est défini par deux ensembles A et V dont les éléments sont respectivement les **flèches** et les **sommets** ainsi que par deux applications s et t de A dans V .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} V$$

Pour chaque flèche α , on appelle $s(\alpha)$ et $t(\alpha)$ la **source** et le **but** de α .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le graphe **segment** de **longueur** n , noté I_n , est le graphe dont les ensembles de sommets et de flèches sont respectivement $\{0, \dots, n\}$ et $\{(0, 1), \dots, (n-1, n)\}$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, la source et le but de $(k-1, k)$ sont respectivement $k-1$ et k . Par extension, le graphe **segment** de **longueur** infinie est le graphe dont les ensembles de sommets et de flèches sont respectivement \mathbb{N} et les couples $(n, n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$, on le note I_∞ .



Un morphisme de graphes est un couple d'applications (ϕ_0, ϕ_1) tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & V \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ A' & \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} & V' \end{array}$$

$$\text{i.e. } s'(\phi_1(\alpha)) = \phi_0(s(\alpha)) \text{ et } t'(\phi_1(\alpha)) = \phi_0(t(\alpha))$$

Exercice 30 : Montrer qu'il existe un unique graphe ayant un seul sommet et une seule flèche. En notant ce graphe \mathcal{Q}_1 montrer que pour tout graphe \mathcal{Q} il existe un unique morphisme de graphes de \mathcal{Q} vers \mathcal{Q}_1 .

Exercice 31 : Vérifier que les graphes et leurs morphismes forment une catégorie Cartésienne notée **Gph** en vérifiant que

$$\left(A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} V \right) \times \left(A' \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} V' \right) \cong \left(A \times A' \begin{array}{c} \xrightarrow{s \times s'} \\ \xrightarrow{t \times t'} \end{array} V \times V' \right)$$

Bien que la catégorie **Gph** soit Cartésienne, le produit n'a pas le comportement attendu. En effet, le produit $I_1 \times I_1$ est le graphe de gauche et non celui de droite.

2. Ce que l'on appelle ici "graphe" n'est rien de plus qu'un ensemble présimplicial de dimension 1.



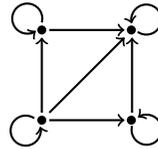
Du point de vue de la concurrence, on aimerait voir I_1 comme le passage d'un état à un autre via l'exécution d'une instruction par un processus le long de l'unique flèche du graphe. L'exécution parallèle de deux instructions est alors représentée par le graphe de droite : l'indépendance est ici formalisée par le fait que l'on peut exécuter les deux instructions dans n'importe quel ordre. On parle de sémantique par **entrelacement**, on retrouve cette approche dans la notion de **systèmes de transitions** [Win95].

Exercice 32 : Etant donnée une petite catégorie \mathcal{C} , vérifier que les ensembles $\text{Ob}(\mathcal{C})$, $\text{Mo}(\mathcal{C})$ et les applications source et but de \mathcal{C} forment un graphe appelé graphe **sous-jacent** de \mathcal{C} .

$$\left(\left(\text{Mo}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C}) \right), \circ \right) \xrightarrow{\text{Forgetful}} \left(\text{Mo}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C}) \right)$$

Par ailleurs, si f est un foncteur de \mathcal{C} vers une petite catégorie \mathcal{D} , montrer que le couple $(\text{Ob}(f), \text{Mo}(f))$ est un morphisme du graphe sous-jacent de \mathcal{C} vers le graphe sous-jacent de \mathcal{D} . Vérifier que l'on a ainsi défini un foncteur U de Cat vers Gph appelé foncteur d'**oubli**. Montrer que les graphes $U(\mathcal{C}) \times U(\mathcal{D})$ et $U(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ sont isomorphes. On considère l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$ comme une catégorie, comparer $U(\{0 < 1\})$ et I_1 .

Au travers du foncteur d'oubli nous avons vu que l'on peut considérer les graphes comme des petites catégories auxquelles on a retiré la loi de composition et les identités. Le défaut³ du produit Cartésien dans Gph est dû à l'absence des "identités". En effet, si l'on regarde l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$ comme une petite catégorie, alors le graphe sous-jacent de $\{0 < 1\} \times \{0 < 1\}$ est



où les flèches "circulaires" représentent les identités alors que la "diagonale" représente l'unique morphisme du homset auquel elle appartient. Du point de vue de la concurrence, cette flèche est l'exécution simultanée des deux instructions. Le produit Cartésien dans Cat est donc mieux adapté au contexte du parallélisme. En fait, bien que la définition des systèmes de transitions s'appuie sur la notion de graphe, les identités apparaissent implicitement via le fait que les morphismes correspondant peuvent être des fonctions "partielles". L'autre

3. Du point de vue de l'étude de la concurrence.

alternative étant d'ajouter explicitement des *idle transitions* qui jouent le rôle des identités [Win95]. L'approche que nous proposons est basée sur la notion de catégorie.

Par définition, les éléments de $\mathbf{Gph}[I_n, \mathcal{Q}]$ sont les **chemins** de **longueur** n sur le graphe \mathcal{Q} . Un chemin γ est ainsi défini par deux applications (ϕ_0, ϕ_1) , on adopte cependant une notation plus adaptée à l'intuition en posant $\gamma_k := \phi_0(k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et $\gamma_{k-1}^k := \phi_1(k-1, k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On a en particulier $\mathbf{s}(\gamma_{k-1}^k) = \gamma_{k-1}$ and $\mathbf{t}(\gamma_{k-1}^k) = \gamma_k$. On définit alors la **source** et le **but** de γ comme $\mathbf{s}(\gamma) := \gamma_0$ et $\mathbf{t}(\gamma) := \gamma_n$. Puis étant donné un chemin δ de longueur $m \in \mathbb{N}$ sur \mathcal{Q} tel que $\mathbf{s}(\gamma) = \mathbf{t}(\delta)$ il est naturel de définir la **concaténation** de δ suivi de γ , notée $\gamma \cdot \delta$, de la façon suivante

$$(\gamma \cdot \delta)_k = \begin{cases} \delta_k & \text{si } k \in \{0, \dots, m\} \\ \gamma_{k-m} & \text{si } k \in \{m, \dots, m+n\} \end{cases}$$

et

$$(\gamma \cdot \delta)_{k-1}^k = \begin{cases} \delta_{k-1}^k & \text{si } k \in \{1, \dots, m\} \\ \gamma_{k-m-1}^{k-m} & \text{si } k \in \{m+1, \dots, m+n\} \end{cases}$$

La concaténation formalise l'idée que l'on se déplace le long du chemin γ après avoir parcouru le chemin δ . Ainsi $\gamma \cdot \delta$ est un chemin de longueur $n+m$ de $\mathbf{s}(\delta) = \delta_0$ vers $\mathbf{t}(\gamma) = \gamma_n$ sur \mathcal{Q} . En outre, les chemins de longueur 0 laissent les autres chemins inchangés par concaténation, autrement dit si α et β sont des chemins de longueur nulle tels que $\alpha_0 = \mathbf{s}(\gamma)$ et $\beta_0 = \mathbf{t}(\gamma)$, alors $\beta \cdot \gamma = \gamma = \gamma \cdot \alpha$. Il s'ensuit que les sommets du graphe \mathcal{Q} sont les objets d'une petite catégorie dont les morphismes sont les chemins sur \mathcal{Q} , la loi de composition étant la concaténation et les identités les chemins de longueur nulle. Cette catégorie est notée $F(\mathcal{Q})$ et appelée la **catégorie libre** engendrée par \mathcal{Q} . En outre, un morphisme de graphes f de \mathcal{Q} vers \mathcal{Q}' induit naturellement un foncteur de $F(\mathcal{Q})$ vers $F(\mathcal{Q}')$ puisque pour tout chemin γ sur \mathcal{Q} , la composée (dans \mathbf{Gph}) $f \circ \gamma$ est un chemin sur \mathcal{Q}' et que l'on a $f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$. On a ainsi défini le foncteur **libre** F de \mathbf{Gph} vers \mathbf{Cat} .

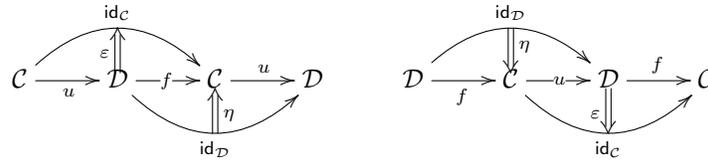
Exercice 33 : Déterminer la catégorie librement engendrée par le graphe I_∞ ainsi que la catégorie librement engendrée par le graphe n'ayant qu'un sommet et une seule flèche.

Exercice 34 : On regarde l'ensemble ordonné (\mathbb{R}, \leq) comme une petite catégorie notée \mathcal{R} , étant donnés deux réels x et y tels que $x < y$, comparer les homsets $\mathcal{R}[x, y]$ et $(F \circ U(\mathcal{R}))[x, y]$.

En général, lorsque u et f sont deux foncteurs entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D}

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{f} \end{array} \mathcal{D}$$

on dit que f est **adjoint à gauche** de u (ou de façon équivalente que u est **adjoint à droite** de f) lorsqu'il existe une transformation naturelle η de $\text{id}_{\mathcal{D}}$ vers $u \circ f$ et une transformation naturelle ε de $f \circ u$ vers $\text{id}_{\mathcal{C}}$ telles que $(u \cdot \varepsilon) \circ (\eta \cdot u) = \text{id}_u$ et $(\varepsilon \cdot f) \circ (f \cdot \eta) = \text{id}_f$. On résume l'ensemble de ces faits par la notation $f \dashv u$.



La composée $U' \circ U$ de deux foncteurs U et U' ayant respectivement pour adjoints à gauche (respectivement à droite) les foncteurs F et F' admet $F \circ F'$ pour adjoint à gauche (respectivement à droite).

On peut montrer qu'à isomorphisme près, un foncteur admet au plus un adjoint à gauche (respectivement à droite), c'est-à-dire que dans la catégorie $\text{Fun}[\mathcal{D}, \mathcal{C}]$, si les foncteurs F et F' sont adjoints à gauche (respectivement à droite) du foncteur U , alors il existe deux transformations naturelles, l'une de F vers F' et l'autre de F' vers F , dont les composées (dans la catégorie $\text{Fun}[\mathcal{D}, \mathcal{C}]$) sont respectivement id_F et $\text{id}_{F'}$.

Exercice 35 : Dans le cas où f est adjoint à gauche de u et avec les notations précédentes montrer que les applications suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f(d), c] &\longrightarrow \mathcal{D}[d, u(c)] & \mathcal{D}[d, u(c)] &\longrightarrow \mathcal{C}[f(d), c] \\ \gamma &\longmapsto u(\gamma) \circ \eta_d & \delta &\longmapsto \varepsilon_c \circ f(\delta) \end{aligned}$$

sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Le terme "foncteur adjoint" est issu d'une analogie formelle avec la notion de matrice adjointe : lorsque M est une matrice carrée d'ordre n à valeurs dans le corps des réels \mathbb{R} , la matrice M^\perp adjointe de M est celle qui pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^n vérifie l'égalité

$$\langle Mx | y \rangle = \langle x | M^\perp y \rangle$$

où $\langle _ | _ \rangle$ désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n . L'analogie apparaît au regard de la bijection fournie par l'exercice précédent et en considérant comme des "produits scalaires" les applications qui à tous couples (c, c') et (d, d') d'objets de \mathcal{C} et de \mathcal{D} associent les ensembles $\mathcal{C}[c, c']$ et $\mathcal{D}[d, d']$: les objets et les foncteurs remplacent alors les vecteurs et les matrices.

Le but des trois exercices suivants est de montrer que le foncteur libre F de Gph vers Cat est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli U de Cat vers Gph . On

fera attention au fait que le symbole \circ est mis à la fois, selon le contexte, pour désigner la composition dans \mathcal{C} , dans \mathbf{Cat} , dans \mathbf{Gph} ainsi que la composition des foncteurs et aussi celle des transformations naturelles.

Exercice 36 : Soit une petite catégorie \mathcal{C} , à chaque chemin γ de longueur n sur le graphe sous-jacent $U(\mathcal{C})$, on associe le morphisme de \mathcal{C} suivant

$$\text{id}_{\gamma_n} \circ \gamma_{n-1}^n \circ \cdots \circ \gamma_0^1 \circ \text{id}_{\gamma_0}$$

Montrer que l'on définit ainsi un foncteur $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ de $F(U(\mathcal{C}))$ vers \mathcal{C} et que la collection $(\varepsilon_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}}$ est une transformation naturelle de $F \circ U$ vers $\text{id}_{\mathbf{Cat}}$.

Exercice 37 : Soit un graphe \mathcal{Q} , on associe à chaque flèche α de \mathcal{Q} un chemin γ de longueur 1 sur \mathcal{Q} défini par $\gamma_0^1 = \alpha$. Montrer que l'on définit ainsi un morphisme de graphes $\eta_{\mathcal{Q}}$ de \mathcal{Q} vers $U(F(\mathcal{Q}))$ et que la collection $(\eta_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathbf{Gph}}$ est une transformation naturelle de $\text{id}_{\mathbf{Gph}}$ vers $U \circ F$.

Exercice 38 : Montrer les égalités $(U \cdot \varepsilon) \circ (\eta \cdot U) = \text{id}_U$ et $(\varepsilon \cdot F) \circ (F \cdot \eta) = \text{id}_F$. En déduire deux bijections réciproques l'une de l'autre entre les ensembles $\mathbf{Gph}[\mathcal{Q}, U(\mathcal{C})]$ et $\mathbf{Cat}[F(\mathcal{Q}), \mathcal{C}]$.

Les exercices suivants fournissent plusieurs exemples de foncteurs d'oubli. On rappelle en particulier que l'espace topologique sous-jacent d'un espace ordonné est séparé.

Exercice 39 : On note \mathbf{Hsd} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Top} dont les objets sont les espaces topologiques séparés. En vertu de l'exercice 15, on définit le foncteur d'oubli U de \mathbf{Po} vers \mathbf{Hsd} en associant à chaque espace ordonné son l'espace topologique sous-jacent et chaque morphisme d'espaces ordonnés son application continue sous-jacente. On définit aussi un foncteur F de \mathbf{Hsd} vers \mathbf{Po} en associant à chaque espace topologique séparé X l'espace ordonné obtenu en équipant X de la relation d'égalité. Montrer que F est l'adjoint à gauche de U .

Exercice 40 : A chaque ensemble X on associe le monoïde $F(X)$ des suites finies d'éléments de X dont la suite vide est l'élément neutre⁴. Etant donnée une application f de l'ensemble X vers l'ensemble Y , vérifier que l'application $F(f)$ qui à chaque suite (x_n, \dots, x_1) associe la suite $(f(x_n), \dots, f(x_1))$ est un morphisme de monoïde⁵. Montrer que le foncteur F ainsi obtenu admet un adjoint à droite.

La construction qui suit est la première étape vers la définition de la catégorie fondamentale d'un espace ordonné.

Soit un espace ordonné \vec{X} , le **graphe des chemins** sur \vec{X} , noté $Q(\vec{X})$, a pour flèches les chemins sur \vec{X} . L'ensemble des sommets de $Q(\vec{X})$ est X , ainsi la

4. Ce monoïde est aussi appelé monoïde des mots sur l'alphabet X .

5. La concaténation du mot w suivi du mot w' se note $w'w$, autrement dit on lit les mots de droite à gauche, ceci afin de suivre la convention standard en théorie des catégories.

source et le but d'un chemin γ sur \vec{X} sont respectivement $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. En outre, si f est un morphisme d'espaces ordonnés de \vec{X} vers \vec{Y} , alors $f \circ \gamma$ est un chemin dirigé sur \vec{Y} dont la source et le but sont respectivement $f(\gamma(0))$ et $f(\gamma(1))$. On a ainsi défini un foncteur Q de Po vers Gph.

Exercice 41 : Etant donnés deux points x et y d'un espace ordonné \vec{X} , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un chemin sur X de x vers y
- ii) il existe un chemin sur $Q(X)$ de x vers y
- iii) il existe un chemin sur $Q(X)$ de longueur 1 de x vers y

De plus, montrer que s'il existe un chemin sur \vec{X} de x vers y et un autre de y vers x , alors $x = y$ et ces deux chemins sont égaux au chemin constant $t \in [0, 1] \mapsto x \in \vec{X}$.

Exercice 42 : Montrer que l'on peut reprendre la description du foncteur Q en substituant les chemins sur un espace topologique aux chemins sur un espace ordonné, on note Q' le foncteur ainsi obtenu. Etant donnés deux points x et y d'un espace topologique X , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un chemin sur X de x vers y
- ii) il existe un chemin sur $Q'(X)$ de x vers y
- iii) il existe un chemin sur $Q'(X)$ de longueur 1 de x vers y
- iv) il existe un chemin sur X de y vers x

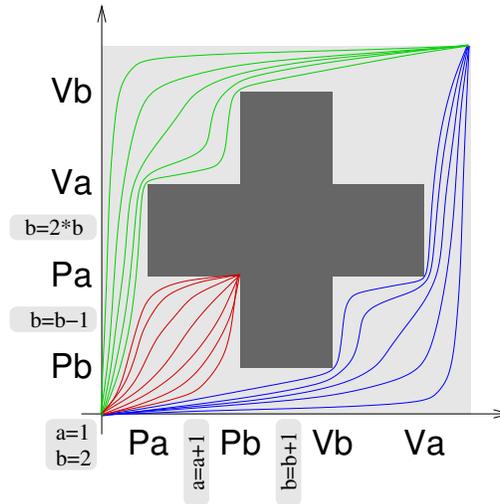
2.3 Homotopie de chemins

Sur la figure qui suit, les processus P_1 et P_2 sont respectivement représentés sur l'axe des abscisses et celui des ordonnées. On a au passage ajouté des instructions d'affectation bien qu'elles ne soient pas formellement permises par la syntaxe que nous avons donnée. Les chemins dirigés d'une même couleur sont intuitivement "proches" les uns des autres, par ailleurs ils induisent tous la même trace d'exécution. La notion d'homotopie formalise cette idée de proximité.

P1 prend a et b avant P2 => a=2 et b=4

P2 prend b et a avant P1 => a=2 et b=3

Chacun des processus P1 et P2 prend une ressource => Deadlock avec a=2 et b=1

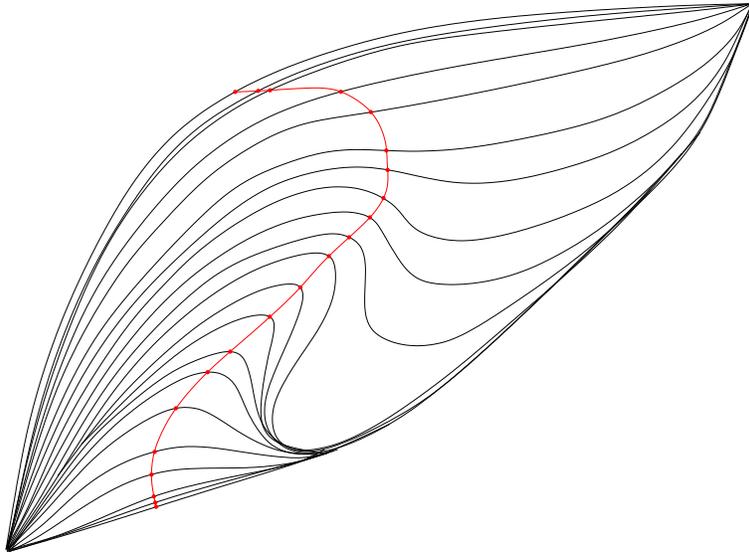


Etant donnés deux chemins γ et δ sur un espace topologique X , une **homotopie** de γ vers δ est un élément h de $\text{Top}[[0, 1] \times [0, 1], X]$ telle que :

- i) pour tout $t \in [0, 1]$ on a $h(t, 0) = \gamma(t)$ et $h(t, 1) = \delta(t)$
- ii) pour tout $s \in [0, 1]$ on a $h(0, s) = \gamma(0)$ et $h(1, s) = \gamma(1)$

Exercice 43 : Montrer que s'il existe une homotopie de γ vers δ alors γ et δ ont les mêmes extrémités autrement dit $\gamma(0) = \delta(0)$ et $\gamma(1) = \delta(1)$.

Sur la figure ci-dessous, chaque courbe noire est l'image de l'un des chemins par lequel "on passe" pour déformer γ en δ c'est-à-dire des images d'applications $t \in [0, 1] \mapsto h(t, s) \in X$ pour plusieurs valeurs fixées de s . Pour sa part, la courbe rouge décrit pour un certain $t \in [0, 1]$ fixé l'image de l'application $s \in [0, 1] \mapsto h(t, s) \in X$. On peut voir t comme la "variable de temps" et s comme le "paramètre de déformation".



Deux chemins γ et δ sur X sont deux éléments de l'ensemble $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$ tandis que h peut-être vue comme l'application qui à $s \in [0, 1]$ associe l'application ($t \in [0, 1] \mapsto h(t, s) \in X$) qui est un élément de $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$. En munissant l'ensemble $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$ d'une topologie adéquate, on voudrait pouvoir dire qu'une homotopie est un chemin sur l'espace topologique $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$. On va formaliser cette idée.

Exercice 44 : Soit un objet e d'une catégorie Cartésienne \mathcal{C} . A chaque objet x de \mathcal{C} on associe l'objet $e \times x$ et à chaque morphisme f de x vers x' on associe le morphisme $\text{id}_e \times f$. Vérifier que l'on définit ainsi un **endofoncteur**⁶ de \mathcal{C} que l'on note $e \times (-)$.

Par définition on dit qu'un objet e d'une catégorie \mathcal{C} est **exponentiable** dans \mathcal{C} lorsque le foncteur $e \times (-)$ que admet un adjoint à droite que l'on note alors $(-)^e$. Lorsque e est exponentiable, on a en particulier pour tous objets a et x de \mathcal{C} l'isomorphisme suivant

$$\mathcal{C}[e \times a, x] \cong \mathcal{C}[a, x^e]$$

Exercice 45 : Montrer que tout ensemble est exponentiable.

Il s'avère que le segment unité $[0, 1]$ est exponentiable dans \mathbf{Top} ce qui donne la bijection voulue

$$\mathbf{Top}[[0, 1] \times [0, 1], X] \cong \mathbf{Top}[[0, 1], X^{[0,1]}]$$

où $X^{[0,1]}$ est l'ensemble $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$ que l'on munit de la topologie **compacts-ouverts** : c'est-à-dire qu'une sous-partie O de $\mathbf{Top}[[0, 1], X]$ est ouverte pour

6. Un endofoncteur de \mathcal{C} est un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{C} .

cette topologie lorsque pour tout $\gamma \in O$, il existe une sous-partie compacte⁷ K de $[0, 1]$ et un ouvert O' de X tels que

$$\gamma \in \{ \delta \in \text{Top}[[0, 1], X] \mid \delta(K) \subseteq O' \} \subseteq O$$

Etant donnés deux point x et x' de X , l'ensemble des chemins sur X dont la source et le but sont respectivement x et x' hérite de la topologie de $X^{[0,1]}$: on note $X_{x,x'}^{[0,1]}$ l'espace topologique obtenu. Dès lors on peut définir une **homotopie** de γ vers δ comme un chemin sur $X_{x,x'}^{[0,1]}$ de γ vers δ .

Exercice 46 : On munit l'ensemble $\text{Top}[[0, 1], X]$ de la relation d'**homotopie** \sim_X définie par

$$\{ (\gamma, \delta) \mid \text{il existe une homotopie de } \gamma \text{ vers } \delta \}$$

Soient γ et δ deux chemins sur X , montrer que :

- i) \sim_X est une relation d'équivalence
 - ii) si f est une application continue de X vers Y et que $\gamma \sim_X \delta$, alors $f \circ \gamma \sim_X f \circ \delta$
 - iii) si θ est une application surjective et continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$, alors $(\gamma \circ \theta) \sim_X \gamma$ (Poser $h(t, s) := \gamma((1-s)t + s\theta(t))$).
- On dit que les chemins γ et δ sont **homotopes** lorsque $\gamma \sim_X \delta$.

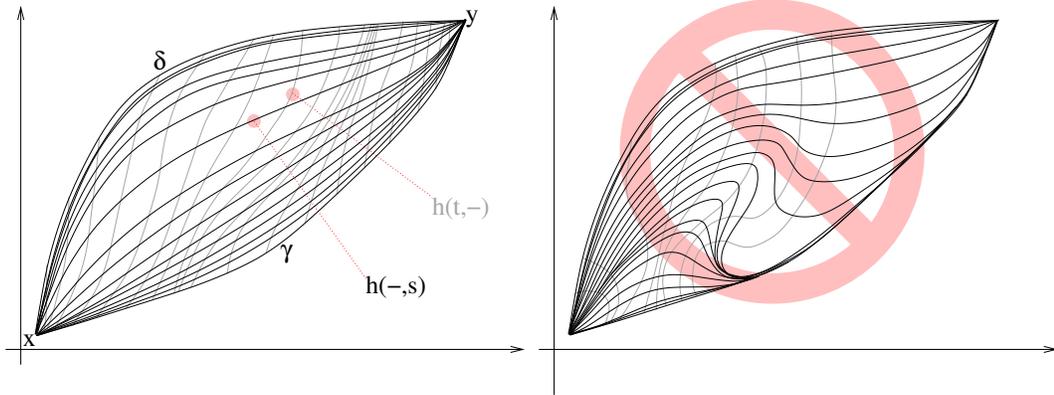
Exercice 47 : Etant donnés deux chemins γ et γ' sur X tel que $\gamma'(0) = \gamma(1)$, on peut définir le **recollement** de γ suivi de γ' comme le chemin qui a tout $t \in [0, 1]$ associe $\gamma(2t)$ lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma'(2t - 1)$ lorsque $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. On désigne ce chemin par $\gamma' \cdot \gamma$. Montrer que si $\delta \sim \gamma$ et $\delta' \sim \gamma'$ alors $\gamma' \cdot \gamma \sim \delta' \cdot \delta$.

Exercice 48 : En supposant connu le fait que le segment unité $[0, 1]$ est exponentiable dans Top , montrer que $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ est exponentiable dans Po .

La notion d'homotopie entre chemins sur un espace ordonné se déduit immédiatement de celle que nous venons de définir. En effet, étant donnés deux chemins γ et δ sur un espace ordonné \overrightarrow{X} , une homotopie de γ vers δ est un élément h de $\text{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}] \times [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], \overrightarrow{X}]$ tel que $U(h)$ soit une homotopie de $U(\gamma)$ vers $U(\delta)$ où U est le foncteur d'oubli de Po vers Top .

On se place dans le plan ordonné $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$, la figure de gauche montre deux chemins γ et δ sur $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$ et une homotopie h du premier vers le second. La figure de droite montre une homotopie h' de $U(\gamma)$ vers $U(\delta)$ qui n'induit pas une homotopie de γ vers δ . En effet, on trouve des valeurs $s \in [0, 1]$ telle que l'application $t \mapsto h'(t, s)$ ne soit pas croissante. En fait on a également des valeurs $t \in [0, 1]$ telle que l'application $s \mapsto h'(t, s)$ ne soit pas croissante.

7. Le segment unité $[0, 1]$ étant un espace topologique compact, ses sous-parties compactes sont exactement ses sous-parties fermées.



Il est facile de voir qu'une homotopie h' de $U(\gamma)$ vers $U(\delta)$ induit une homotopie de h de γ vers δ si et seulement si pour tout $s, t \in [0, 1]$ les applications $s \mapsto h'(t, s)$ et $t \mapsto h'(t, s)$ sont croissantes.

Exercice 49 : On définit sur l'ensemble $\text{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], \overrightarrow{X}]$ la relation \sqsubseteq par

$$\{(\gamma, \delta) \mid \text{il existe une homotopie de } \gamma \text{ vers } \delta\}$$

Soient γ et δ deux chemins sur \overrightarrow{X} , montrer que :

- i) \sqsubseteq est une relation d'ordre
- ii) si f est un morphisme d'espaces ordonnés de X vers Y et que $\gamma \sqsubseteq \delta$, alors $f \circ \gamma \sqsubseteq f \circ \delta$
- iii) étant donné θ et θ' deux morphismes surjectifs de $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ vers $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$, montrer qu'en posant $\theta''(t) = \max(\theta(t), \theta'(t))$ pour chaque $t \in [0, 1]$ on a encore un morphisme surjectif de $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ vers $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ et montrer que $\gamma \circ \theta \sqsubseteq \gamma \circ \theta''$ (Poser $h(t, s) := \gamma((1-s) \cdot \theta(t) + s \cdot \theta''(t))$).

On définit la relation d'homotopie $\sim_{\overrightarrow{X}}$ comme la plus petite relation d'équivalence sur $\text{Po}[[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}], \overrightarrow{X}]$ contenant \sqsubseteq . On dit que les chemins γ et δ sont **homotopes** lorsque $\gamma \sim_{\overrightarrow{X}} \delta$.

- iv) étant donné θ un morphisme surjectif de $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$ vers $[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$, montrer que γ et $\gamma \circ \theta$ sont homotopes.

Exercice 50 : Etant donné deux chemins γ et γ' sur \overrightarrow{X} tel que $\gamma'(0) = \gamma(1)$, on peut définir le **recollement** de γ suivi de γ' comme le chemin qui a tout $t \in [0, 1]$ associe $\gamma(2t)$ lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma'(2t - 1)$ lorsque $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. On désigne ce chemin par $\gamma' \cdot \gamma$. Montrer que si $\delta \sqsubseteq \gamma$ et $\delta' \sqsubseteq \gamma'$ alors $\gamma' \cdot \gamma \sqsubseteq \delta' \cdot \delta$.

Le résultat qui suit est spécifique à la topologie algébrique dirigée des espaces ordonnés. Il est grossièrement faux si l'on substitue des chemins sur un espace topologique aux chemins sur un espace ordonné dans son énoncé.

Théorème 3 Deux chemins sur un espace ordonné ayant la même image sont homotopes.

Preuve : Si l'image commune de γ et γ' est un singleton, alors $\gamma = \gamma'$. Sinon on pose $\delta(t) := \max(\gamma(t), \gamma'(t))$ pour $t \in [0, 1]$ définissant ainsi un chemin sur \overrightarrow{X} . D'après le Théorème 2 on a un isomorphisme ϕ de $[\overrightarrow{0, 1}]$ vers l'image commune de γ et γ' , on pose alors

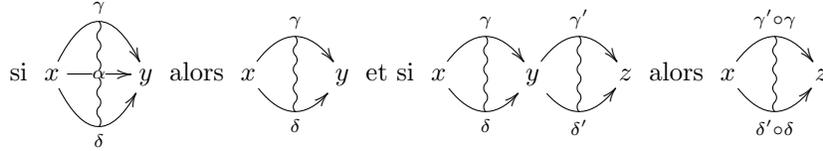
$$\begin{cases} h(s, t) := \phi\left(s \cdot \phi^{-1}(\delta(t)) + (1 - s) \cdot \phi^{-1}(\gamma(t))\right) \\ h'(s, t) := \phi\left(s \cdot \phi^{-1}(\delta(t)) + (1 - s) \cdot \phi^{-1}(\gamma'(t))\right) \end{cases}$$

ce qui définit deux dihomotopies h et h' de γ et γ' vers δ et termine la preuve.

Avant de définir la catégorie fondamentale d'un espace ordonné il nous faut introduire une dernière notion catégorique. Une **congruence** sur une petite catégorie \mathcal{C} est une relation d'équivalence \sim sur l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} telle que pour tous morphismes γ, δ, γ' et δ' :

- i) si $\gamma \sim \delta$, alors $s(\gamma) = s(\delta)$ et $t(\gamma) = t(\delta)$
- ii) si $\gamma \sim \delta$, $\gamma' \sim \delta'$ et $s(\gamma') = t(\gamma)$, alors $(\gamma' \circ \gamma) \sim (\delta' \circ \delta)$

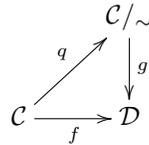
Les axiomes précédents peuvent s'exprimer à l'aide de diagrammes qui ne sont pas sans rappeler ceux que l'on a rencontrés dans le cadre des transformations naturelles.



Dans ce cas les \sim -classes d'équivalence sont les morphismes d'une catégorie notée \mathcal{C}/\sim , appelée **quotient** de \mathcal{C} par \sim , et dont les objets sont ceux de \mathcal{C} . Grâce aux axiomes i) et ii) la source, le but et la loi de composition sont définis à partir de représentants pris dans les classes d'équivalence. Les identités de \mathcal{C}/\sim sont donc les classes d'équivalence des identités. L'application qui envoie chaque morphisme de \mathcal{C} sur sa \sim -classe d'équivalence induit alors un foncteur q de \mathcal{C} vers \mathcal{C}/\sim , appelé **foncteur quotient**, qui vérifie la propriété suivante : pour tout foncteur f de \mathcal{C} vers \mathcal{D} tel que

$$\gamma \sim \delta \Rightarrow f(\gamma) = f(\delta)$$

il existe un unique foncteur g de \mathcal{C}/\sim vers \mathcal{D} tel que $f = g \circ q$.



Exercice 51 : Soit une petite catégorie \mathcal{C} . Montrer que parmi les congruences sur \mathcal{C} , il en existe une qui contient toutes les autres et une qui est contenue dans toutes les autres. De plus, si $(\sim_i)_{i \in I}$ est une famille non vide de congruences sur \mathcal{C} , montrer que

$$\bigcap_{i \in I} \sim_i$$

est une congruence sur \mathcal{C} . En déduire que pour toute relation binaire R sur l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} telle que

$$(\gamma R \delta) \implies (s(\gamma) = s(\delta) \text{ et } t(\gamma) = t(\delta))$$

l'ensemble des congruences qui contiennent R admet un plus petit élément que l'on appelle la **congruence engendrée** par R .

La notion d'homotopie induit une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins sur un espace ordonné \vec{X} , c'est-à-dire sur les flèches de $Q(\vec{X})$. On voudrait étendre cette relation à l'ensemble des chemins sur le graphe $Q(\vec{X})$, c'est-à-dire à une congruence sur $F(Q(\vec{X}))$. Pour ce faire on étend la notion de recollement à toute suite finie non vide (p_n, \dots, p_0) d'applications de l'ensemble $[0, 1]$ vers l'ensemble X vérifiant $p_k(0) = p_{k-1}(1)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Le recollement d'une telle suite est l'application de $[0, 1]$ dans X qui envoie chaque t sur $p_k((n+1)t - k)$ si $t \in [\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}]$. En particulier, si chaque terme de la suite est un chemin, que ce soit sur un espace topologique ou un espace ordonné, alors son recollement l'est aussi.

Exercice 52 : Montrer que si f est un morphisme de \vec{X} vers \vec{Y} et γ un chemin sur \vec{X} , alors $f \circ (r(\gamma)) = r((Q(f))(\gamma))$.

Soit un espace ordonné \vec{X} (respectivement un espace topologique X), étant donnés deux morphismes γ et δ de la catégorie librement engendrée par le graphe $Q(\vec{X})$ (respectivement $Q(X)$), on pose $\gamma \sim_{\vec{X}} \delta$ (respectivement $\gamma \sim_X \delta$) lorsque les recollements des suites

$$(c_y, \gamma_{n-1}^n, \dots, \gamma_0^1, c_x) \quad \text{et} \quad (c_y, \delta_{m-1}^m, \dots, \delta_0^1, c_x)$$

sont homotopes. Dans la notation précédente, n et m sont les longueurs respectives des chemins γ et δ sur le graphe $Q(\vec{X})$ (respectivement $Q(X)$). On a posé $x = \gamma_0^1(0)$ et $y = \gamma_{n-1}^n(1)$ tandis que c_x et c_y désignent les applications constantes de $[0, 1]$ dans \vec{X} respectivement égales à x et y .

Proposition 1 Etant donné un espace topologique X , la relation \sim_X est une congruence sur la catégorie librement engendrée par le graphe $Q(X)$. De plus, si f est un morphisme d'espaces topologiques de X vers Y et que $\gamma \sim_X \delta$, alors $f \circ \gamma \sim_Y f \circ \delta$.

Preuve : Utiliser l'exercice 46 en prenant garde que la relation $\sim_{\vec{X}}$ sur l'ensemble des chemins sur le graphe $Q(\vec{X})$ est en quelque sorte une extension de la relation d'homotopie (également notée $\sim_{\vec{X}}$ dans l'énoncé de l'exercice 46) sur l'ensemble des chemins sur l'espace topologique X .

Proposition 2 Etant donné un espace ordonné \vec{X} , la relation $\sim_{\vec{X}}$ est une congruence sur la catégorie librement engendrée par le graphe $Q(\vec{X})$. De plus, si f est un morphisme d'espaces ordonnés de \vec{X} vers \vec{Y} et que $\gamma \sim_{\vec{X}} \delta$, alors $f \circ \gamma \sim_{\vec{Y}} f \circ \delta$.

Preuve : Utiliser l'exercice 49 en prenant garde que la relation $\sim_{\vec{X}}$ sur l'ensemble des chemins sur le graphe $Q(\vec{X})$ est en quelque sorte une extension de la relation d'homotopie (également notée $\sim_{\vec{X}}$ dans l'énoncé de l'exercice 49) sur l'ensemble des chemins sur l'espace ordonné \vec{X} .

Pour chaque espace topologique X et chaque espace ordonné \vec{X} , les relations \sim_X et $\sim_{\vec{X}}$ sont appelées **relations d'homotopie** tandis que leurs classes d'équivalence sont les **classes d'homotopie**.

On définit alors la **catégorie fondamentale** d'un espace ordonné \vec{X} comme le quotient de la catégorie librement engendrée par le graphe des chemins sur \vec{X} par la congruence $\sim_{\vec{X}}$. On peut alors déduire de la proposition 2 que pour chaque morphisme f de \vec{X} vers \vec{Y} , il existe un unique foncteur $\vec{\pi}_1(f)$ qui fasse commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} F(Q(\vec{X})) & \xrightarrow{F(Q(f))} & F(Q(\vec{Y})) \\ q_{\vec{X}} \downarrow & & \downarrow q_{\vec{Y}} \\ \vec{\pi}_1(\vec{X}) & \xrightarrow{\vec{\pi}_1(f)} & \vec{\pi}_1(\vec{Y}) \end{array}$$

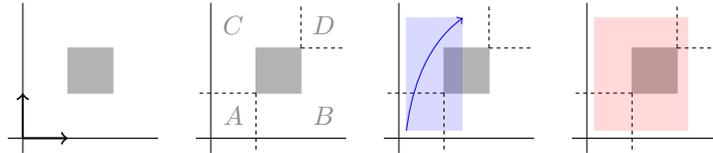
où $q_{\vec{X}}$ et $q_{\vec{Y}}$ sont les foncteurs quotient associés aux relations d'homotopie $\sim_{\vec{X}}$ et $\sim_{\vec{Y}}$. D'où le foncteur **catégorie fondamentale** de **Po** vers **Cat**.

On décrit la catégorie fondamentale de l'espace ordonné $\vec{\mathbb{R}}$ obtenu en retirant le carré ouvert $]1, 2[$ du plan réel ordonné $\vec{\mathbb{R}} \times \vec{\mathbb{R}}$. On découpe l'ensemble des objets de $\vec{\pi}_1(\vec{\mathbb{R}})$ en quatre parties $A :=]-\infty, 1]^2$, $B :=]1, +\infty[\times]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[\times]-\infty, 2[$, $C :=]-\infty, 1] \times]1, +\infty[\cup]-\infty, 2[\times]2, +\infty[$ et $D :=]2, +\infty[^2$. Ainsi étant donnés deux points x et y de \mathbb{R}^2 , l'ensemble $\vec{\pi}_1(\vec{\mathbb{R}})[x, y]$ est donné par

$$\vec{\pi}_1(\vec{\mathbb{R}})[x, y] := \begin{cases} \text{l'ensemble vide } \emptyset & \text{si } x \not\sqsubseteq y \\ \text{le singleton } \{(x, y)\} & \text{si } x \sqsubseteq y \text{ et } (x, y) \notin A \times D \\ \text{la paire } \{(x, B, y), (x, C, y)\} & \text{si } x \sqsubseteq y \text{ et } (x, y) \in A \times D \end{cases}$$

Etant donnés trois objets x, y, z de $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ et deux morphismes γ et δ respectivement pris dans $\vec{\pi}_1(\vec{X})[y, z]$ et $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y]$ le seul cas qu'il faut considéré est celui où l'on doit déterminer la composée $\gamma \circ \delta$ lorsque x et z appartiennent respectivement à A et D : le résultat est entièrement déterminé par l'élément de la partition dans lequel y se trouve, en effet

$$\gamma \circ \delta := \begin{cases} (x, B, z) & \text{si } y \in B \\ (x, C, z) & \text{si } y \in C \end{cases}$$



Le formalisme par lequel on a décrit \mathcal{C} cache une idée très simple : chaque chemin continu et croissant sur $\mathbb{R}^2 \setminus]1, 2[^2$ qui part de A et arrive en D doit passer soit au-dessus soit en-dessous du carré ouvert $]1, 2[^2$ et donc soit passer par B soit passer par C .

Exercice 53 : Un **groupoïde** est une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles. On note \mathbf{Grd} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat} dont les objets sont les groupoïdes. Etant donné un espace topologique X , montrer que le quotient de la catégorie librement engendrée par la graphe des chemins sur X par la congruence \sim_x est un **groupoïde** appelé **groupoïde fondamental** de X .

Exercice 54 : Montrer que les identités du groupoïde fondamental d'un espace topologique de même que celles de la catégorie fondamentale d'un espace ordonné sont les classes d'homotopie des chemins constants.

Exercice 55 : Montrer que le foncteur d'inclusion de \mathbf{Grd} dans \mathbf{Cat} admet un adjoint à gauche. L'idée est d'ajouter formellement au graphe sous-jacent de chaque petite catégorie \mathcal{C} une flèche $\bar{\gamma}$ pour chaque flèche γ (avec $s(\bar{\gamma}) = t(\gamma)$ et $t(\bar{\gamma}) = s(\gamma)$) puis de choisir avec discernement une congruence sur la catégorie libre que ce graphe engendre. Cette construction est un cas particulier de **catégorie de fractions** ou **localisation**. On pourra consulter le 5^{ème} chapitre de [Bor94a] pour une approche générale. Les localisations interviennent dans de nombreuses branches des mathématiques : en topologie algébrique [PGG99, GZ67], en théorie des catégories de modèles [Hov99, Hir03] ou encore en algèbre homologique [SIG03].

D'après la proposition 1 et l'exercice 53, on a en fait un foncteur π_1 de \mathbf{Top} vers \mathbf{Grd} qui associe à chaque espace topologique son groupoïde fondamental, \mathbf{Grd} étant une sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat} dont l'inclusion admet un adjoint à gauche. L'idée même d'utiliser l'algèbre pour étudier la topologie est basée sur le fait que $\pi_1(X)$ est un groupoïde.

Nous allons voir dans la prochaine partie que l'on a en fait une situation analogue avec le foncteur $\overrightarrow{\pi}_1$ pourvu que l'on remplace la catégorie des groupoïde par celle des catégories sans boucle.

Chapitre 3

Catégories sans boucle

3.1 Origine

La notion de catégorie sans boucle apparaît pour la première fois dans les travaux d'*André Haefliger* [BH99, Hae91, Hae92] dans un contexte très différent de celui qui nous intéresse, les catégories sans boucle y sont appelées *scwols* pour *small category without loops*. Nous verrons qu'elles jouent dans l'étude des espaces ordonnés le rôle que joue les groupoïdes dans l'étude des espaces topologiques.

Une catégorie \mathcal{C} est dite **sans boucle** lorsque pour tous objets x et y de \mathcal{C} , si $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}[y, x] \neq \emptyset$, alors $x = y$ et $\mathcal{C}[x, x] = \{\text{id}_x\}$. On peut voir cette propriété comme une généralisation de la propriété d'antisymétrie. On note Lf la sous-catégorie pleine de Cat dont les objets sont les petites catégories sans boucle.

Exercice 56 : Montrer que le quotient d'une catégorie sans boucle par une congruence est sans boucle.

Le résultat qui suit justifie l'intérêt que l'on porte aux catégories sans boucle.

Proposition 3 La catégorie fondamentale d'un espace ordonné est sans boucle.

Preuve : Si $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y] \neq \emptyset$ alors on a un chemin γ de x vers y sur \vec{X} . En particulier γ est une application croissante donc $\gamma(0) \sqsubseteq \gamma(1)$ i.e. $x \sqsubseteq y$. Si de plus $\vec{\pi}_1(\vec{X})[y, x] \neq \emptyset$ l'antisymétrie de la relation \sqsubseteq permet de conclure que $x = y$. Les éléments de $\vec{\pi}_1(\vec{X})[x, x]$ sont des classes d'homotopie, un représentant γ de l'une de ces classes est en particulier un chemin sur \vec{X} tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$: il est donc constant d'après l'exercice 19 et d'après l'exercice 54 la classe d'homotopie qu'il représente est une identité de $\vec{\pi}_1(\vec{X})$.

La prochaine étape consiste à fournir un théorème qui permet de calculer la catégorie fondamentale de certains espaces ordonnés. Nous aurons pour cela besoin d'examiner un point de théorie des catégories. Etant donnés deux morphismes $\alpha, \beta \in \mathcal{C}[x, y]$ on définit, lorsqu'il existe, le **coégalisateur** de α et β dans \mathcal{C} comme un objet z et un morphisme $\gamma \in \mathcal{C}[y, z]$ tels que

$$\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$$

et pour tout objet z' et tout morphisme $\gamma' \in \mathcal{C}[y, z']$ vérifiant

$$\gamma' \circ \alpha = \gamma' \circ \beta$$

on ait un unique morphisme $\zeta \in \mathcal{C}[z, z']$ tel que $\gamma' = \zeta \circ \gamma$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \gamma' & & \\
 & & \frown & & \smile \\
 x & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & y & \xrightarrow{\gamma} & z & \xrightarrow{\zeta} & z' \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Exercice 57 : Etant donnés deux ensembles X et Y , déterminer le coégalisateur de $\alpha, \beta \in \text{Set}[X, Y]$. Reprendre la question précédente avec deux espaces topologiques et deux applications continues.

Les coégalisateurs sont une abstraction de la notion de quotient. En règle générale, ils sont assez difficile à calculer et permettent de mettre en évidence des objets "pathologiques". Dans la suite, nous aurons besoin de déterminer des coégalisateurs dans Cat , la notion de congruence généralisée permet de les construire.

Soient une petite catégorie \mathcal{C} et une relation d'équivalence \sim_0 sur $\text{Ob}(\mathcal{C})$. On définit le graphe $U(\mathcal{C})/\sim_0$ dont les ensembles de sommets et de flèches sont respectivement $\text{Mo}(\mathcal{C})$ et $\text{Ob}(\mathcal{C})/\sim_0$ en composant q_0 à gauche des applications source et but

$$\text{Mo}(\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{t}]{\text{s}} \text{Ob}(\mathcal{C}) \xrightarrow{q_0} \text{Ob}(\mathcal{C})/\sim_0$$

où q_0 associe à chaque élément de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ sa \sim_0 -classe d'équivalence. En particulier $U(\mathcal{C})/\sim_0$ a le même ensemble de flèches que $U(\mathcal{C})$. L'application q_0 induit donc un morphisme de graphe de $U(\mathcal{C})$ vers $U(\mathcal{C})/\sim_0$ que l'on note encore q_0

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mo}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\text{t}]{\text{s}} & \text{Ob}(\mathcal{C}) \\
 \text{id}_{\text{Mo}(\mathcal{C})} \downarrow & & \downarrow q_0 \\
 \text{Mo}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\text{q}_0 \circ \text{t}]{\text{q}_0 \circ \text{s}} & \text{Ob}(\mathcal{C})/\sim_0
 \end{array}$$

et dont on déduit le foncteur $F(q_0)$

$$F(U(\mathcal{C})) \xrightarrow{F(q_0)} F(U(\mathcal{C})/\sim_0)$$

Une **congruence généralisée** sur \mathcal{C} est alors un couple (\sim_0, \sim_1) où \sim_0 est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets du graphe $U(\mathcal{C})$ et \sim_1 une congruence sur $F(U(\mathcal{C})/\sim_0)$ telles qu'il existe un unique foncteur q satisfaisant l'égalité $q_1 \circ F(q_0) = q \circ \varepsilon_{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{ccc} F(U(\mathcal{C})) & \xrightarrow{F(q_0)} & F(U(\mathcal{C})/\sim_0) \\ \varepsilon_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow q_1 \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{q} & F(U(\mathcal{C})/\sim_0)/\sim_1 \end{array}$$

Dans l'énoncé précédent q_1 est le foncteur quotient qui accompagne la congruence \sim_1 et pour chaque morphisme γ de $F(U(\mathcal{C}))$ on a

$$\varepsilon_{\mathcal{C}}(\gamma) := \text{id}_{\gamma_n} \circ \gamma_{n-1}^n \circ \cdots \circ \gamma_0^1 \circ \text{id}_{\gamma_0}$$

On vérifie qu'un tel foncteur q existe si et seulement si chaque morphisme γ de $F(U(\mathcal{C}))$ est \sim_1 -équivalent au chemin de longueur 1 sur $U(\mathcal{C})$ qui envoie l'unique flèche du graphe I_1 sur la flèche $\varepsilon_{\mathcal{C}}(\gamma)$. Le foncteur q et la catégorie $F(U(\mathcal{C})/\sim_0)/\sim_1$ sont respectivement appelés **foncteur quotient** et **catégorie quotient**.

De manière générale, pour toute catégorie \mathcal{D} et tout foncteur f de \mathcal{C} vers \mathcal{D} tel que

- i) $x \sim_0 y \Rightarrow f(x) = f(y)$ et
- ii) $\gamma \sim_1 \delta \Rightarrow f(\varepsilon_{\mathcal{C}}(\gamma)) = f(\varepsilon_{\mathcal{C}}(\delta))$

il existe un unique foncteur g de la catégorie quotient vers \mathcal{D} tel que $f = g \circ q$. De plus cette propriété caractérise le quotient en ce sens que si q' est un foncteur de domaine \mathcal{C} tel que tout foncteur f vérifiant i) et ii) se factorise de façon unique à travers q' en $f = g \circ q'$, alors il existe un isomorphisme ϕ du codomaine de q vers le codomaine de q' tel que $q' = \phi \circ q$.

En particulier, lorsque Σ est un ensemble de morphismes de \mathcal{C} , on note \sim_0 la relation d'équivalence sur $\text{Ob}(\mathcal{C})$ engendrée par

$$\{(s(\sigma), t(\sigma)) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

et on note \sim_1 la congruence sur $F(U(\mathcal{C})/\sim_0)$ engendrée par

$$\{(\text{id}_{t(\sigma)}, \sigma), (\sigma, \text{id}_{s(\sigma)}) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

définissant ainsi une congruence généralisée sur \mathcal{C} . La catégorie quotient est alors notée \mathcal{C}/Σ . Dans ce cas, le foncteur quotient q est caractérisé par le fait que tout foncteur f de domaine \mathcal{C} qui envoie chaque élément de Σ sur une identité se factorise de façon unique en $f = g \circ q$.

Exercice 58 : Montrer que le foncteur inclusion de \mathbf{Lf} dans \mathbf{Cat} admet un adjoint à gauche.

On construit le coégalisateur de $f, g \in \mathbf{Cat}[\mathcal{D}, \mathcal{C}]$ en posant \sim_0 la relation d'équivalence sur $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ engendrée par

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\}$$

et \sim_1 la congruence sur $F(U(\mathcal{C})/\sim_0)$ engendrée par

$$\{(f(\gamma), g(\gamma)) \mid \gamma \in \mathbf{Mo}(\mathcal{C})\}$$

le coégalisateur est alors fournit par le foncteur quotient.

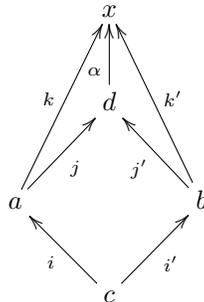
3.2 Le théorème de *Seifert - Van Kampen*

Il s'agit d'un résultat classique concernant le groupoïde fondamental d'un espace topologique. Il se transpose aisément à la catégorie fondamentale d'un espace ordonné et permet de calculer le groupoïde fondamental d'un espace topologique ou la catégorie fondamentale d'un espace ordonné "morceaux par morceaux" pourvu que le recouvrement de l'objet considéré satisfasse certaines propriétés. Dans le cas du groupoïde fondamental une preuve détaillée est disponible dans [Hig71].

Pour énoncer le théorème de *Seifert - Van Kampen* nous aurons besoin de la notion de somme amalgamée d'objets d'une catégorie ¹.

Etant donnés trois objets a, b, c d'une catégorie \mathcal{C} et un couple de morphismes $(i, i') \in \mathcal{C}[c, a] \times \mathcal{C}[c, b]$, la **somme amalgamée** du couple (i, i') est un objet d et un couple de morphismes $(j, j') \in \mathcal{C}[a, d] \times \mathcal{C}[b, d]$ tels que :

- i) $j \circ i = j' \circ i'$
- ii) pour tout objet x et tout couple de morphismes $(k, k') \in \mathcal{C}[a, x] \times \mathcal{C}[b, x]$ tels que $k \circ i = k' \circ i'$, il existe un unique morphisme $\alpha \in \mathcal{C}[d, x]$ tel que $k = \alpha \circ j$ et $k' = \alpha \circ j'$



1. Dans la terminologie anglo-saxonne, une somme amalgamée est appelée *push-out* ou *amalgamated sum*

Par abus de langage, on appelle aussi **somme amalgamée** l'objet d en omettant de faire référence à j et j' . La notion de somme amalgamée est une abstraction exprimée en terme catégorique de l'idée de "collage". La somme amalgamée n'est unique qu'à isomorphisme près. Traitons un premier exemple dans la catégorie des ensembles. On pose $A := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, $B := \{\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ et $C := \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$. Soient $i \in \text{Set}[C, A]$ et $i' \in \text{Set}[C, B]$ définis par

$$\begin{aligned} i(\mathbf{g}) &= \mathbf{b} & i'(\mathbf{g}) &= \mathbf{d} \\ i(\mathbf{h}) &= \mathbf{c} & i'(\mathbf{h}) &= \mathbf{e} \end{aligned}$$

La somme amalgamée peut alors être décrite ainsi : $D := \{\mathbf{a}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{f}\}$ et les applications $j \in \text{Set}[A, D]$ et $j' \in \text{Set}[B, D]$ définis par

$$\begin{aligned} j(\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \\ j(\mathbf{b}) &= \mathbf{g} & j'(\mathbf{d}) &= \mathbf{g} \\ j(\mathbf{c}) &= \mathbf{h} & j'(\mathbf{e}) &= \mathbf{h} \\ & & j'(\mathbf{f}) &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

On a bien "collé" les ensembles A et B en identifiant certains de leurs éléments. Plus généralement, pour déterminer la somme amalgamée de $i \in \text{Set}[C, A]$ et $i' \in \text{Set}[C, B]$, on commence par définir la **somme** de A et B comme l'ensemble

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

et on a en particulier deux inclusion "canoniques" k et k' définies par

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \sqcup B & B &\longrightarrow A \sqcup B \\ a &\longmapsto (a, 0) & b &\longmapsto (b, 1) \end{aligned}$$

On équipe alors l'ensemble $A \sqcup B$ de la relation d'équivalence \sim engendrée par

$$\left\{ (k \circ i(c), k' \circ i'(c)) \mid c \in C \right\}$$

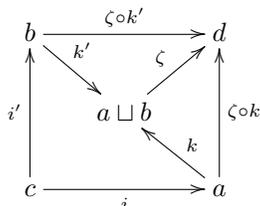
Puis on pose $j := k \circ i$ et $j' := k' \circ i'$, la somme amalgamée de (i, i') est alors (j, j') .

Exercice 59 : Avec les notations précédentes, montrer que pour tout ensemble X , on a la bijection

$$\begin{aligned} \text{Set}[A \sqcup B, X] &\longrightarrow \text{Set}[A, X] \times \text{Set}[B, X] \\ h &\longmapsto (h \circ k, h \circ k') \end{aligned}$$

puis en s'inspirant de la façon dont le produit Cartésien a été défini dans une catégorie quelconque, définir la **somme** de deux objets d'une catégorie quelconque. Décrire en particulier la somme dans les catégories **Gph** et **Cat**.

Exercice 60 : Soient i et i' deux morphismes de \mathcal{C} ayant une même source notée c . On suppose que la somme (k, k') des objets $a := t(i)$ et $b := t(i')$ existe. On suppose enfin que le coégalisateur ζ des morphismes $k \circ i$ et $k' \circ i'$ existe et on note sa cible d . Montrer que $(\zeta \circ k, \zeta' \circ k')$ est la somme amalgamée de (i, i') .



L'exercice 60 montre en particulier qu'une catégorie qui admet toutes les sommes et tous les coégalisateurs admet toutes les sommes amalgamées. En effet le calcul d'une somme amalgamée se résume aux calculs d'une somme et d'un coégalisateur.

Exercice 61 : On se place dans la catégorie \mathbf{Top} . Soit C l'espace topologique discret sur la paire $\{0, 1\}$. Posons encore $A = B = [0, 1]$ le segment unité avec sa topologie standard. Dans un premier temps, on désigne par i et i' les inclusions de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$. Montrer que la somme amalgamée de i et i' est un cercle. Dans un second temps on désigne par i' l'application de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$ qui envoie t sur $1 - t$ tandis que i est toujours l'inclusion de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$. Montrer que la somme amalgamée de i et i' est encore un cercle. Plus généralement, décrire la somme de deux espaces topologiques.

Exercice 62 : On reprend l'exercice précédent en se plaçant dans \mathbf{Po} . L'espace ordonné \overrightarrow{C} est l'espace topologique discret $\{0, 1\}$ muni de la relation d'égalité. Posons encore $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}]$. Dans un premier temps, on désigne par i et i' les inclusions de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$. Décrire la somme amalgamée de i et i' . Dans un second temps on désigne par i' l'application de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$ qui envoie t sur $1 - t$ tandis que i est toujours l'inclusion de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$. La somme amalgamée de i et i' existe-t-elle?

Le théorème de *Seifert-Van Kampen* exprime le fait que l'on peut calculer la catégorie fondamentale d'un espace ordonné en calculant les catégories fondamentales de quelques-unes de ses sous-parties ouvertes pourvu que ces dernières recouvrent l'espace topologique sous-jacent. D'après l'exercice 59 on sait que la catégorie \mathbf{Cat} admet toutes les sommes et nous avons aussi vu, à l'aide des congruences généralisées, qu'elle admet tous les coégalisateurs : en vertu de l'exercice 60 la catégorie \mathbf{Cat} admet donc toutes les sommes amalgamées et on dispose même d'une méthode pour les construire.

Enfin d'après un résultat de théorie des catégories un adjoint à gauche préserve les sommes amalgamées, or l'exercice 58 montre que le foncteur d'inclusion de \mathbf{Lf} dans \mathbf{Cat} admet un adjoint à gauche R . Pour calculer une somme

amalgamée dans \mathbf{Lf} , il suffit donc de la calculer dans \mathbf{Cat} puis de prendre son image par le foncteur R .

Venons-en à l'énoncé du théorème : étant donné un espace ordonné \vec{X} et un recouvrement ouvert $\{Y, Y'\}$ de son espace topologique sous-jacent dont les éléments héritent de structures d'espace ordonné \vec{Y} et \vec{Y}' , on note encore $\vec{Y} \cap \vec{Y}'$ la structure d'espace ordonné induite par \vec{X} sur l'intersection $Y \cap Y'$. On a alors les quatre morphismes d'espaces ordonnés suivants induits par les inclusions.

$$i : \vec{Y} \cap \vec{Y}' \subseteq \vec{Y} \quad i' : \vec{Y} \cap \vec{Y}' \subseteq \vec{Y}' \quad j : \vec{Y} \subseteq \vec{X} \quad \text{et} \quad j' : \vec{Y}' \subseteq \vec{X}$$

Théorème 4 (Seifert - Van Kampen)

Sous les hypothèses précédentes, $(\vec{\pi}_1(j), \vec{\pi}_1(j'))$ est la somme amalgamée dans \mathbf{Lf} de $(\vec{\pi}_1(i), \vec{\pi}_1(i'))$.

$$\begin{array}{ccc} \vec{Y}' & \xrightarrow{\subseteq} & \vec{X} \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ \vec{Y} \cap \vec{Y}' & \xrightarrow{\subseteq} & \vec{Y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \vec{\pi}_1(\vec{Y}') & \xrightarrow{\subseteq} & \vec{\pi}_1(\vec{X}) \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ \vec{\pi}_1(\vec{Y} \cap \vec{Y}') & \xrightarrow{\subseteq} & \vec{\pi}_1(\vec{Y}) \end{array}$$

3.3 Le monoïde des catégories finies, connexes, sans boucle et non vide

Une catégorie \mathcal{C} est dite **finie** lorsque $\mathbf{Mo}(\mathcal{C})$ est un ensemble fini. Notons que lorsque $\mathbf{Mo}(\mathcal{C})$ est un ensemble fini, l'ensemble $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ l'est aussi puisqu'il y a une identité pour chaque objet de \mathcal{C} . Notons également que deux catégories finies isomorphes ont le même nombre de morphismes. On peut donc sans ambiguïté associer à la classe d'isomorphisme d'une catégorie finie \mathcal{C} le cardinal de l'ensemble $\mathbf{Mo}(\mathcal{C})$ que l'on appelle aussi la **taille** de la catégorie. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ il y a donc, à isomorphisme près, un nombre fini de catégories de taille n .

Exercice 63 : Montrer qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule catégorie dont le nombre de morphisme est 0, on la note $\mathbf{0}$. Montrer alors que pour toute catégorie \mathcal{C} , il existe un unique foncteur de $\mathbf{0}$ vers \mathcal{C} . On dit que $\mathbf{0}$ est l'objet **initial** de la catégorie \mathbf{Cat} . Montrer qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule catégorie dont le nombre de morphisme est 1, on la note $\mathbf{1}$. Montrer alors que pour toute catégorie \mathcal{C} , il existe un unique foncteur de \mathcal{C} vers $\mathbf{1}$ qui est donc l'objet terminal de \mathbf{Cat} . Dresser la liste de toutes les catégories ayant au plus 3 morphismes.

Un morphisme d'une relation d'équivalence (X, \sim) vers une relation d'équivalence (Y, \sim') est une application f de X vers Y telle que pour tous $x, y \in X$, si $x \sim y$,

alors $f(x) \sim f(y)$. On note **Eq** la catégorie des relations d'équivalence.

Exercice 64 : On associe à chaque ensemble X deux relations d'équivalences :

$$\{(x, x) \mid x \in X\} \text{ et } X \times X$$

montrer que l'on définit ainsi respectivement deux foncteurs G et D de **Set** vers **Eq** et que

$$G \dashv U \dashv D$$

c'est-à-dire que G et D sont adjoints à gauche et à droite de U le foncteur d'oubli de **Eq** vers **Set**. Les relations $G(X)$ et $D(X)$ sont respectivement dites **discrète** et **totale**² sur X .

Etant donnée une petite catégorie \mathcal{C} on munit l'ensemble $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de la relation d'équivalence \sim engendrée³ par

$$\{(x, y) \mid \mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset\}$$

On dit alors que deux objets x et y de \mathcal{C} sont **connectés** lorsque $x \sim y$. Une catégorie est dite **connexe** lorsque deux de ses objets sont connectés quels qu'ils soient. En particulier si f est un foncteur de \mathcal{C} vers \mathcal{D} et que x et y sont deux objets connectés de \mathcal{C} , alors $f(x)$ et $f(y)$ sont deux objets connectés de \mathcal{D} . Il en résulte un foncteur de **Cat** vers **Eq**.

Exercice 65 : Soient deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , montrer que

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \cong \mathbf{0} \text{ si et seulement si } \mathcal{C} \cong \mathbf{0} \text{ ou } \mathcal{D} \cong \mathbf{0}.$$

On suppose dès lors que $\mathcal{C} \not\cong \mathbf{0}$ et $\mathcal{D} \not\cong \mathbf{0}$, montrer que

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \text{ est finie si et seulement si } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont finies,}$$

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \text{ est connexe si et seulement si } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont connexes,}$$

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \text{ est sans boucle si et seulement si } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont sans boucle,}$$

Enfin dans le cas où \mathcal{C} est finie, montrer que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \cong \mathcal{C}$ si et seulement si $\mathcal{D} \cong \mathbf{1}$.

Exhiber un contre-exemple dans le cas où \mathcal{C} n'est pas finie.

Ainsi la collection des classes d'isomorphismes des catégories finies est un ensemble infini dénombrable puisqu'il est la réunion disjointe d'une famille infinie dénombrable d'ensembles finis. D'après l'exercice 65 et avec la notion de produit Cartésien de classe d'isomorphisme⁴ comme produit, noté \times , on peut munir l'ensemble \mathcal{M} des classes d'isomorphisme des catégories finies connexes sans boucle et non vides d'une structure de monoïde commutatif dont l'élément neutre est (la classe d'isomorphisme de) $\mathbf{1}$. Dans ce qui suit, on écrira souvent "catégorie" pour "classe d'isomorphisme de catégorie".

2. Elle est aussi parfois qualifiée de **chaotique**.

3. Autrement dit la plus petite relation d'équivalence qui contienne la relation binaire donnée.

4. Voir la section 1.1.2.

Le prochain résultat important du cours s'énonce dans le cadre des monoïdes commutatifs auxquels se rapportent les quelques notions que l'on donne maintenant. Soit un monoïde commutatif $(M, *, e)$. Etant donnés deux éléments x et y de M , on dit que x **divise** y et on note $x|y$ lorsqu'il existe un élément z de M tel que $y = x * z$. On dit encore que x est un **diviseur** de y et qu'il est **non trivial** s'il n'est pas inversible, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'élément a de M tel que $x * a = e$.

Exercice 66 : Soit un élément a d'un monoïde commutatif $(M, *, e)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) a est inversible
- 2) l'application $x \in M \mapsto a * x \in M$ est surjective
- 3) l'application $x \in M \mapsto a * x \in M$ est bijective

Un élément de M est dit **irréductible** si chaque fois qu'il s'écrit comme le produit de deux éléments de M , un et un seul de ces deux éléments est inversible. Un élément de M est dit **premier** s'il n'est pas inversible et si chaque fois qu'il divise le produit de deux éléments de M , alors il divise au moins l'un des deux.

Dans le monoïde commutatif $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times, 1)$ un élément est premier si et seulement s'il est irréductible. Les nombres premiers sont ainsi souvent définis comme les éléments irréductibles de $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times, 1)$. Cependant un élément irréductible d'un monoïde commutatif n'est en général pas premier, le contre-exemple qui suit est issu d'une note de *Tadasi Nakayama* et *Junji Hashimoto* [NH50]. Dans le monoïde multiplicatif $(\mathbb{N}[X], \times, 1)$ des polynômes à coefficient dans \mathbb{N} on a

$$(1 + X)(1 + X^2 + X^4) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = (1 + X^3)(1 + X + X^2)$$

Le polynôme $1 + X$ est alors clairement irréductible mais il n'en est pas pour autant premier puisqu'il ne divise ni $(1 + X^3)$ ni $(1 + X + X^2)$. Réciproquement si l'on se place dans le semi-treillis $(\{0, 1\}, \vee, 0)$ on constate que 1 est premier sans être irréductible puisque $1 \vee 1 = 1$. Enfin le monoïde commutatif $(\mathbb{R}_+, +, 0)$ offre un exemple de monoïde dans le quel il n'y a ni élément irréductible ni élément premier.

Notons **CM** la catégorie des monoïdes commutatifs. Etant données deux fonctions ϕ et ψ de X dans \mathbb{N} , on définit la somme $\phi + \psi$ comme l'application $x \in X \mapsto \phi(x) + \psi(x) \in \mathbb{N}$. Pour chaque fonction ϕ d'un ensemble X vers \mathbb{N} on définit le **support** de ϕ comme l'ensemble des éléments de X dont l'image par ϕ n'est pas nulle.

$$\text{Supp}(\phi) := \{x \in X \mid \phi(x) \neq 0\}$$

Si ϕ et ψ sont deux fonctions dont le support est fini, alors le support de leur somme $\phi + \psi$ l'est aussi. L'ensemble des applications de X dans \mathbb{N} à support fini constitue ainsi un monoïde commutatif $F(X)$ dont l'élément neutre est l'application identiquement nulle. Ces remarques incitent à appeler **combinaison linéaire à coefficients** dans \mathbb{N} toute application ϕ de X dans \mathbb{N} à support

fini. Le coefficient d'un élément $x \in X$ dans la combinaison linéaire ϕ est par définition $\phi(x)$. D'où la notation

$$\phi := \sum_{x \in X} \phi(x) \cdot x$$

à laquelle on peut donner un sens formel pourvu que l'on identifie chaque élément $x \in X$ avec la fonction suivante

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x' &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x' = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, si f est une fonction de X vers Y et que ϕ est une application de X dans \mathbb{N} dont le support est fini, alors on définit la fonction $(F(f))(\phi)$ de Y dans \mathbb{N} de la façon suivante :

$$(F(f))(\phi) := \begin{cases} Y &\longrightarrow \mathbb{N} \\ y &\longmapsto \sum_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} \phi(x) \end{cases}$$

ce que l'on écrit encore en adoptant la notation sous forme de combinaison linéaire

$$(F(f))(\phi) := \sum_{x \in X} \phi(x) f(x)$$

ces sommes ayant un sens puisque le support de ϕ est fini. On a ainsi défini un foncteur F de \mathbf{Set} vers \mathbf{CM} dont on peut d'ailleurs vérifier qu'il admet un adjoint à droite. On dit que le monoïde commutatif $F(X)$ est **librement engendré** par X . On prendra garde au fait que la notion de "liberté" dépend implicitement du domaine du foncteur d'oubli d'une adjonction. Par exemple chacun des foncteurs d'oubli

$$\mathbf{Mon} \xrightarrow{U} \mathbf{Set} \quad \text{et} \quad \mathbf{CM} \xrightarrow{U} \mathbf{Set}$$

admet un adjoint à gauche mais ils sont différents. Ainsi étant donné un ensemble X , le monoïde librement engendré par X est celui des mots sur l'ensemble X (il n'est pas commutatif sauf lorsque X est un singleton) tandis que le monoïde commutatif librement engendré par X est celui des combinaisons linéaire à coefficients dans \mathbb{N} .

Le fait qu'un monoïde commutatif soit libre est en rapport étroit avec l'existence d'un lien entre ses éléments premiers et ses éléments irréductibles.

Proposition 4 Un monoïde commutatif est libre si et seulement si

- 1) chacun de ses éléments est un produit d'éléments irréductibles et
- 2) ses éléments premiers sont ses éléments irréductibles.

De plus les monoïdes $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes si et seulement si les ensembles X et Y sont en bijection.

En particulier le monoïde commutatif $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times, 1)$ est librement engendré par l'ensemble des entiers premiers. Il est par conséquent isomorphe à $F(X)$ pourvu que X soit un ensemble infini dénombrable.

Le monoïde commutatif $(\mathbb{N}[X], \times, 1)$ vérifie le premier axiome mais pas le second tandis que le semi-treillis $(\{0, 1\}, \vee, 0)$ vérifie le second mais pas le premier.

Le résultat qui suit est une généralisation d'un théorème dû à *Junji Hashimoto* [Has51], il a été démontré par *Thibaut Balabonski*.

Théorème 5 Un élément du monoïde $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ est premier si et seulement s'il est indécomposable.

On a déjà vu que le monoïde $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ est au plus dénombrable et il est facile de voir que les ensembles totalement ordonnés finis

$$\{0 < \dots < n\}$$

forment un ensemble infini d'éléments irréductibles de ce monoïde. Un argument de cardinalité immédiat montre en outre que tout élément de $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ s'écrit comme un produit fini d'éléments irréductibles de $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$. La proposition 4 fournit alors le résultat qui suit.

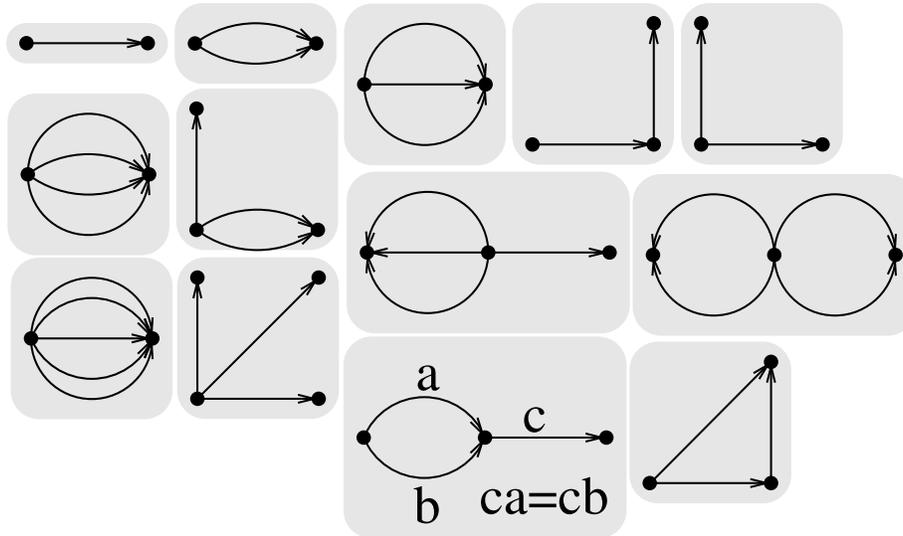
Théorème 6 Le monoïde commutatif $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ est librement engendré par l'ensemble de ses éléments irréductibles, ce dernier étant infini dénombrable.

Exercice 67 : Montrer que le monoïde commutatif des catégories sans boucle finies non vides n'est pas libre. Autrement dit que l'hypothèse de connexité ne peut être supprimée de l'énoncé du théorème 6.

Exercice 68 : Montrer que tous les éléments du monoïde commutatif $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ dont la taille est au plus 8 sont premiers et qu'il existe une unique catégorie de taille 9 qui ne soit pas première.

Ainsi le monoïde commutatif $(\mathcal{M}, \times, \mathbf{1})$ est isomorphe au monoïde commutatif $(\mathbb{N}, \times, 1)$. En particulier on peut tenter d'en déterminer les éléments premiers à l'aide d'un algorithme. On donne la liste de tous⁵ les éléments premiers de \mathcal{M} de taille au plus égale à 7, on remarque notamment que \mathcal{M} ne possède aucun élément de taille 2.

5. Cette liste n'est exhaustive qu'à opposé près.



Dans sa démonstration des théorèmes 5 et 6, *Thibaut Balabonski* décrit en fait un algorithme qui détermine la décomposition d’une catégorie sans boucle finie connexe et non vide. La complexité de cet algorithme est malheureusement très “mauvaise”.

L’existence d’une unique décomposition pour chaque élément de \mathcal{M} revêt un intérêt pratique. En effet la notion de **catégorie de composantes** permet de “réduire” la catégorie fondamentale du modèle $\llbracket \vec{P} \rrbracket$ d’un programme PV à un élément de \mathcal{M} . La décomposition de la catégorie obtenue indique alors comment on peut “regrouper” de façon “optimale” les processus du programme en sous-programmes pouvant être exécutés indépendamment les uns des autres. Traitons un exemple : on suppose que **a** et **b** sont des sémaphores d’arité 2 et que **c** est un sémaphore d’arité 3. On s’intéresse alors au programme suivant

$$\begin{aligned}
 & P(a) . P(c) . V(c) . V(a) \mid \\
 & P(a) . P(c) . V(c) . V(a) \mid \\
 & P(b) . P(c) . V(c) . V(b) \mid \\
 & P(b) . P(c) . V(c) . V(b)
 \end{aligned}$$

On remarque qu’en raison du sémaphore **a** les deux premiers processus ne peuvent pas simultanément détenir une occurrence du sémaphore **c**. La même remarque s’applique aux deux derniers processus à cause du sémaphore **b**. Ainsi la région interdite générée par le sémaphore **c** est vide ce qui revient à dire que les prises et libération du sémaphore **c** n’influence pas l’espace des traces du programme qui est en quelque sorte “équivalent” au programme

P(a).V(a) |
P(a).V(a) |
P(b).V(b) |
P(b).V(b)

Ce dernier peut alors être séparé en deux sous-programmes

P(a).V(a) | P(b).V(b) |
P(a).V(a) et P(b).V(b)

qui s'exécutent en parallèle et indépendamment l'un de l'autre. On retrouve ce résultat en calculant la décomposition de la catégorie des composantes du modèle du programme. La dernière partie du cours est consacrée à cette notion.

Chapitre 4

Catégorie des Composantes

4.1 A quoi ça sert ?

Nous avons associé un espace ordonné $[[\vec{P}]]$ à chaque programme \vec{P} écrit en langage PV et vu que les chemins sur cet espace correspondent en un certain sens aux traces d'exécutions du programme considéré. D'où l'intérêt de la catégorie $F(Q(\vec{X}))$ librement engendrée par le graphe des chemins sur un espace ordonné \vec{X} . Cependant chaque homset de $F(Q(\vec{X}))$ est vide ou contient une infinité d'éléments alors que l'examen de quelques exemples concrets donne l'intuition que les morphismes de $F(Q(\vec{X}))$ pourraient être identifiés en se référant à une notion de déformation continue issue de la structure topologique de \vec{X} . Cette idée est formalisée par la notion d'homotopie entre chemin, cette dernière induit une congruence sur $F(Q(\vec{X}))$ qui permet de définir la catégorie fondamentale de \vec{X} comme un quotient. Dans de nombreux cas on peut prouver que les homsets de la catégorie fondamentale d'un programme PV sont finis, malheureusement cette catégorie contient encore une infinité d'objets. En pratique, on constate que les lois de composition locales, c'est-à-dire les applications $\Phi_{x,y,z}$ définies par

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_1(\vec{X})[y, z] \times \vec{\pi}_1(\vec{X})[x, y] &\xrightarrow{\Phi_{x,y,z}} \vec{\pi}_1(\vec{X})[x, z] \\ (\gamma, \delta) &\longmapsto \gamma \circ \delta \end{aligned}$$

sont "isomorphes" lorsque l'on fait respectivement varier x , y et z dans des sous-parties C_x , C_y et C_z . On espère ainsi trouver une partition "optimale" de l'ensemble des objets de $\vec{\pi}_1(\vec{X})$ au sens où la loi de composition locale $\Phi_{x,y,z}$ ne dépende que des éléments de la partition auxquels appartiennent respectivement x , y et z . Les éléments de cette partition sont appelés composantes et sont les objets d'une catégorie dite "des composantes". Bien que la construction que nous allons décrire ne requiert formellement aucune restriction sur la petite catégorie \mathcal{C} à laquelle on l'applique, on obtiendra le résultat escompté unique-

ment lorsque \mathcal{C} est sans boucle. Cette contrainte n'est pas gênante puisque la catégorie fondamentale de tout espace ordonné est sans boucle.

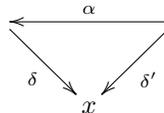
Du point de vue technique on tente de se rapprocher de la situation que l'on connaît en topologie algébrique classique et que l'on décrit maintenant. Un **squelette** d'une catégorie \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine ayant exactement un objet dans chaque classe d'isomorphisme de \mathcal{C} . On peut facilement vérifier que deux squelettes d'une même catégorie sont isomorphes, on écrira donc "le" squelette de \mathcal{C} . L'intérêt de cette notion est que toute petite catégorie est équivalente à son squelette au sens suivant : on appelle **équivalence** un foncteur pleinement fidèle dont tout objet du codomaine est isomorphe à un objet de l'image. On vérifie qu'un foncteur E de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est une équivalence si et seulement s'il existe un foncteur E' de \mathcal{D} vers \mathcal{C} tel que $E' \circ E$ et $E \circ E'$ soient respectivement isomorphes à $\text{id}_{\mathcal{C}}$ et $\text{id}_{\mathcal{D}}$. Deux catégories sont alors dites **équivalentes** lorsqu'il existe une équivalence de l'une vers l'autre et on peut prouver que c'est le cas si et seulement si leurs squelettes sont isomorphes. Dans de nombreux cas, le squelette d'une catégorie est "plus petit" que la catégorie elle-même. En topologie algébrique classique le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$ d'un espace topologique connexe par arc est connexe et équivalent au groupe $\pi_1(X)[x, x]$ quel que soit le point x : c'est le **groupe fondamental** de X . En passant du groupoïde fondamental au groupe fondamental on réduit l'ensemble des objets à un singleton sans perdre l'information "essentielle".

On voudrait avoir une situation similaire avec les catégories fondamentales des espace ordonnés. Cependant la notion de squelette est sans intérêt dans ce contexte puisqu'une catégorie sans boucle¹ est son propre squelette. Ceci est dû au fait que les seuls isomorphismes d'une catégorie sans boucle sont ses identités. L'approche développée dans ce qui suit consiste à chercher une axiomatique qui caractérise une collection de morphismes dont les propriétés sont similaires à celles des isomorphismes. On vérifie alors que l'on peut formellement inverser ces morphismes tout en préservant l'information qui nous concerne.

4.2 Morphismes de *Yoneda*

Soit un objet x d'une petite catégorie \mathcal{C} , la **catégorie au-dessus de x** est notée $\mathcal{C} \downarrow x$, ses objets sont les morphismes de \mathcal{C} dont le but est x tandis que

$$\mathcal{C} \downarrow x[\delta, \delta'] := \left\{ \alpha \in \mathcal{C}[\text{s}(\delta'), \text{s}(\delta)] \mid \delta' = \delta \circ \alpha \right\}$$



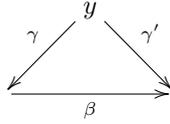
1. Rappelons que la catégorie fondamentale d'un espace ordonné est sans boucle.

On note alors $\mathcal{C}\downarrow y, x$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}\downarrow y$ dont les objets δ vérifient la propriété

$$\mathcal{C}[s(\delta), x] \neq \emptyset$$

De façon analogue on note $y\downarrow\mathcal{C}$ la **catégorie en-dessous de** y , elle a pour objets les morphismes de \mathcal{C} dont la source est y tandis que

$$y\downarrow\mathcal{C}[\gamma, \gamma'] := \left\{ \beta \in \mathcal{C}[t(\gamma), t(\gamma')] \mid \gamma' = \beta \circ \gamma \right\}$$



On note $y, x\downarrow\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $x\downarrow\mathcal{C}$ dont les objets γ vérifient la propriété

$$\mathcal{C}[y, t(\gamma)] \neq \emptyset$$

Etant donné un morphisme $\sigma \in \mathcal{C}[x, y]$ on peut en particulier définir les foncteurs F_σ (“futur”) et P_σ (“passé”) de la façon suivante

$$y\downarrow\mathcal{C} \xrightarrow{F_\sigma} y, x\downarrow\mathcal{C} \quad \mathcal{C}\downarrow x \xrightarrow{P_\sigma} \mathcal{C}\downarrow y, x$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma \longmapsto \gamma \circ \sigma & & \delta \longmapsto \sigma \circ \delta \\ \downarrow \beta \longmapsto \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \longmapsto \alpha \downarrow \\ \gamma' \longmapsto \gamma' \circ \sigma & & \delta' \longmapsto \sigma \circ \delta' \end{array}$$

En effet si $\gamma \in \mathcal{C}[y, z]$, alors $\gamma \circ \sigma \in \mathcal{C}[x, z]$ et l'ensemble $\mathcal{C}[y, z]$ n'est pas vide puisqu'il contient γ , c'est donc un objet de $y, x\downarrow\mathcal{C}$. De même si $\delta \in \mathcal{C}[z, x]$, alors $\sigma \circ \delta \in \mathcal{C}[z, y]$ et l'ensemble $\mathcal{C}[z, x]$ n'est pas vide puisqu'il contient δ , c'est donc un objet de $\mathcal{C}\downarrow y, x$.

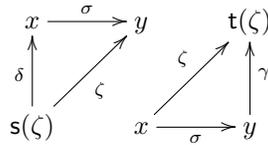
Lorsque σ est un isomorphisme de \mathcal{C} les foncteurs F_σ et P_σ sont des isomorphismes de Cat . On dira que σ est un **morphisme de Yoneda** lorsque les foncteurs F_σ et P_σ sont des isomorphismes. On peut en particulier montrer que σ est un morphisme de *Yoneda* lorsque pour tout morphisme ζ de \mathcal{C} :

si $s(\zeta) = x$ et $\mathcal{C}[y, t(\zeta)] \neq \emptyset$, alors il existe un unique γ dans $\mathcal{C}[y, t(\zeta)]$ tel que

$$\zeta = \gamma \circ \sigma$$

si $t(\zeta) = y$ et $\mathcal{C}[s(\zeta), x] \neq \emptyset$, alors il existe un unique δ dans $\mathcal{C}[s(\zeta), x]$ tel que

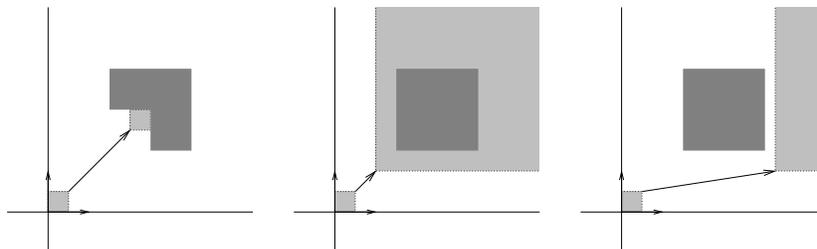
$$\zeta = \sigma \circ \delta$$



Les restrictions $\mathcal{C}[s(\zeta), x] \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}[y, t(\zeta)] \neq \emptyset$ correspondent au fait d'avoir pris les catégories $y, x \downarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \downarrow y, x$ pour codomaines respectifs des foncteurs F_σ et P_σ au lieu des catégories $x \downarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \downarrow y$. Si l'on omet ces restrictions, alors la catégorie $x \downarrow \mathcal{C}$ contient en particulier l'objet id_x et la première condition fournit un morphisme $\gamma \in \mathcal{C}[y, x]$ tel que $\gamma \circ \sigma = \text{id}_x$ tandis que la catégorie $\mathcal{C} \downarrow y$ contient l'objet id_y et que la seconde condition fournit un morphisme $\delta \in \mathcal{C}[y, x]$ tel que $\sigma \circ \delta = \text{id}_y$, le morphisme σ est alors inversible et $\gamma = \delta = \sigma^{-1}$. En particulier lorsqu'aucun des ensembles $\mathcal{C}[x, y]$ et $\mathcal{C}[y, x]$ n'est vide, tout élément de l'un est un morphisme de *Yoneda* si et seulement s'il est inversible. C'est pourquoi cette notion n'aura de véritable intérêt que lorsque \mathcal{C} est sans boucle.

En revanche on vérifie facilement qu'il existe des morphismes de *Yoneda* qui ne sont pas des isomorphismes. Il suffit de considérer l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$ comme une catégorie, hormis ses deux identités elle possède un unique morphisme de 0 vers 1, ce dernier est un morphisme de *Yoneda*.

On a représenté ci-dessous trois espaces ordonnés, sur les deux premiers un morphisme de *Yoneda* et sur le troisième un morphisme qui ne l'est pas.



Du point de vue de l'analyse de la concurrence le premier cas est pathologique. En effet en notant x et y la source et le but du morphisme de \mathcal{C} on peut trouver deux morphismes distincts de source x ayant le même but alors que ce n'est pas possible à partir de y . En un certain sens le "choix" d'aller dans une impasse a été fait le long du morphisme.

Plus formellement, si l'on ajoute un inverse à chacun des morphismes de *Yoneda* de la catégorie fondamentale de l'espace ordonné du premier exemple, on obtient une catégorie isomorphe à celle que l'on obtiendrait en ajoutant un inverse à chacun des morphismes de *Yoneda* de la catégorie fondamentale de l'espace ordonné du second exemple.

La notion de morphisme de *Yoneda* n'est donc pas suffisamment restrictive.

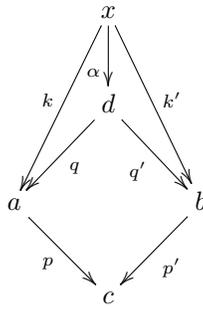
4.3 Systèmes de *Yoneda*

Les morphismes de *Yoneda* d'une catégorie se veulent être une généralisation de la notion de morphisme inversible. A ce titre ils devraient constituer une collection stable par produit fibré et somme amalgamée².

2. On parle aussi de stabilité par **changement de base** et **co-changement de base**

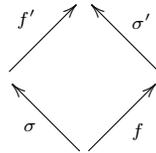
Formellement on peut définir la notion de produit fibré dans une catégorie \mathcal{C} comme la somme amalgamée dans la catégorie \mathcal{C}^{op} . Autrement dit, étant donnés trois objets a, b, c d'une catégorie \mathcal{C} et un couple de morphismes $(p, p') \in \mathcal{C}[a, c] \times \mathcal{C}[b, c]$, le **produit fibré** du couple (p, p') est un objet d et un couple de morphismes $(q, q') \in \mathcal{C}[d, a] \times \mathcal{C}[d, b]$ tels que :

- i) $p \circ q = p' \circ q'$
- ii) pour tout objet x et tout couple de morphismes $(k, k') \in \mathcal{C}[x, a] \times \mathcal{C}[x, b]$ tels que $p \circ k = p' \circ k'$, il existe un unique morphisme $\alpha \in \mathcal{C}[x, d]$ tel que $k = q \circ \alpha$ et $k' = q' \circ \alpha$



Par abus de langage, on appelle aussi **produit fibré** l'objet d en omettant de faire référence à q et q' .

Une collection Σ de morphismes de \mathcal{C} est dite stable par produit fibré et par somme amalgamée lorsque pour chaque carré



- si $\sigma' \in \Sigma$ alors le produit fibré de (f', σ') existe
- si $\sigma \in \Sigma$ alors la somme amalgamée de (f, σ) existe
- si $\sigma' \in \Sigma$ et (f, σ) est un produit fibré de (f', σ') , alors $\sigma \in \Sigma$ et
- si $\sigma \in \Sigma$ et (f', σ') est une somme amalgamée de (f, σ) , alors $\sigma' \in \Sigma$

On dit également que Σ est **stable par composition** lorsque $\sigma' \circ \sigma \in \Sigma$ dès que σ et σ' sont deux éléments de Σ tels que $s(\sigma') = t(\sigma)$. On dit aussi que Σ est **pure** lorsque deux morphismes γ et δ tels que $s(\gamma) = t(\delta)$ appartiennent à Σ dès que $\gamma \circ \delta$ appartient à Σ .

On dit qu'une collection Σ de morphismes de \mathcal{C} est un **système de Yoneda** lorsqu'elle est stable par produit fibré, par somme amalgamée, par composition,

qu'elle contient tous les isomorphismes et ne contient que des morphismes de *Yoneda*.

Proposition 5 Tout système de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle est pure.

Nous allons voir que l'ensemble de tous les systèmes de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle donnée possède une structure que l'on peut voir comme une abstraction de celle d'espace topologique. On dit qu'un ensemble ordonné est un **treillis complet** lorsque chacune de ses sous-parties (même vide) admet une borne supérieure et une borne inférieure. On note en particulier \perp (respectivement \top) le plus petit (respectivement le plus grand) élément d'un treillis complet et on a

$$\bigvee \emptyset = \perp \quad \text{et} \quad \bigwedge \emptyset = \top$$

Un treillis complet est un **treillis local** lorsque pour chaque élément x et chaque famille $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de cet ensemble on a

$$x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$$

où \vee et \wedge représentent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure. Un morphisme de treillis locaux³ de (X', \sqsubseteq') vers (X, \sqsubseteq) est une application de X vers X' telle que $f(\perp) = \perp'$, $f(\top) = \top'$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et

$$f\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{i \in I} f(x_i)$$

En particulier l'ensemble des ouverts d'un espace topologique ordonné par inclusion forme un treillis local. Par ailleurs, si f est une application continue de X' vers X , alors l'application f^* qui à chaque ouvert U de X associe son image inverse par f i.e.

$$\{x' \in X' \mid f(x') \in U\}$$

est un morphisme du treillis local des ouverts de X' vers celui des ouverts de X . En notant **Loc** la catégorie des treillis locaux, on vient de décrire un foncteur de **Top** vers **Loc**. Ce foncteur admet un adjoint à gauche dont on trouve une description dans [Bor94b], [Joh82] ou encore [PPT04].

Revenons aux systèmes de *Yoneda*. La collection des morphismes d'un groupoïde \mathcal{G} est son unique système de *Yoneda*. En règle générale la collection des morphismes inversibles d'une catégorie \mathcal{C} est son plus petit système de *Yoneda*.

Théorème 7 L'ensemble des systèmes de *Yoneda* d'une petite catégorie est un treillis complet, si de plus on suppose que cette catégorie est sans boucle alors c'est un treillis local.

3. Noter bien le sens des flèches.

La borne inférieure d'une famille non vide $(\Sigma_i)_{i \in I}$ de systèmes de *Yoneda* est son intersection et sa borne supérieure l'ensemble des composées

$$\sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$ il existe un indice i_k dans I tel que σ_k appartienne à Σ_{i_k} . La partie laborieuse de la preuve consiste à vérifier que la collection de morphismes que l'on vient de décrire est effectivement un système de *Yoneda*, elle n'est pas traitée ici. Supposons que Σ soit un système de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle et que σ soit un élément pris dans l'intersection de Σ et de la borne supérieure d'une famille non vide $(\Sigma_i)_{i \in I}$ de systèmes de *Yoneda*, alors on peut écrire σ comme $\sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0$ où σ_k appartient à un certain Σ_{i_k} . D'après la proposition 5 chaque morphisme σ_k appartient donc en fait à $\Sigma \wedge \Sigma_{i_k}$, donc σ appartient à la borne supérieure de la famille $(\Sigma \wedge \Sigma_i)_{i \in I}$ autrement dit on a bien un treillis local.

4.4 Quotient et Localisation

Etant donnée une collection Σ de morphismes d'une catégorie \mathcal{C} , les congruences généralisées permettent de définir la catégorie **quotient** de \mathcal{C} par Σ , notée \mathcal{C}/Σ , comme l'unique (à isomorphisme près) catégorie telle qu'il existe un foncteur q_Σ de \mathcal{C} vers \mathcal{C}/Σ tel que

- 1) pour tout élément σ de Σ , le morphisme $q_\Sigma(\sigma)$ est une identité et
- 2) pour tout foncteur f de \mathcal{C} vers \mathcal{D} tel que pour tout élément σ de Σ , le morphisme $f(\sigma)$ soit une identité, il existe un unique foncteur g de \mathcal{C}/Σ vers \mathcal{D} tel que $f = g \circ q_\Sigma$

Considérons le graphe \mathcal{Q} obtenu en ajoutant au graphe sous-jacent de \mathcal{C} une flèche $\bar{\sigma}$ de $t(\sigma)$ vers $s(\sigma)$ pour chaque flèche σ appartenant à Σ . Soit alors la congruence \sim engendrée par la relation binaire suivante

$$\left\{ ((\bar{\sigma}, \sigma), \text{id}_{s(\sigma)}) , ((\sigma, \bar{\sigma}), \text{id}_{t(\sigma)}) \mid \sigma \in \Sigma \right\}$$

Le **localisation** de \mathcal{C} par Σ , notée $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, est le quotient de la catégorie libre $F(\mathcal{Q})$ par la congruence \sim . On peut aussi définir $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ comme l'unique catégorie (à isomorphisme près) pour laquelle il existe un foncteur i_Σ de \mathcal{C} vers $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tel que

- 1) pour tout élément σ de Σ , le morphisme $i_\Sigma(\sigma)$ est un isomorphisme et
- 2) pour tout foncteur f de \mathcal{C} vers \mathcal{D} tel que pour tout élément σ de Σ , le morphisme $f(\sigma)$ soit un isomorphisme, il existe un unique foncteur g de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ vers \mathcal{D} tel que $f = g \circ i_\Sigma$

En particulier il existe un unique foncteur p_Σ de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ vers \mathcal{C}/Σ tel que

$$q_\Sigma = p_\Sigma \circ i_\Sigma$$

Le résultat théorique suivant valide la notion de système de *Yoneda* dans le cas des catégories sans boucle.

Théorème 8 Si Σ est un système de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle, alors le foncteur p_Σ est une équivalence.

On prouve en fait l'existence d'un foncteur j_Σ de \mathcal{C}/Σ vers $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tel que

$$p_\Sigma \circ j_\Sigma = \text{id}_{\mathcal{C}/\Sigma} \quad \text{et} \quad j_\Sigma \circ p_\Sigma \cong \text{id}_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$$

La **catégorie des composantes** d'une catégorie sans boucle \mathcal{C} est le quotient $\mathcal{C}/\overline{\Sigma}$ où $\overline{\Sigma}$ est le plus grand système de *Yoneda* de \mathcal{C} . Par extension, on dira que la catégorie des composantes d'un espace ordonné \overrightarrow{X} est la catégorie des composantes de sa catégorie fondamentale $\overrightarrow{\pi_1}(\overrightarrow{X})$.

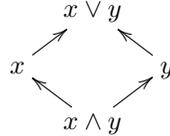
4.5 Description de la catégorie des composantes

Soit Σ un système de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle \mathcal{C} . On note \sim la relation d'équivalence sur l'ensemble des objets de \mathcal{C} engendrée par la relation binaire

$$\{(x, x') \mid \Sigma \cap \mathcal{C}[x, x'] \neq \emptyset\}$$

Une Σ -**composante** de \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} dont l'ensemble des objets est une \sim -classe d'équivalence.

Théorème 9 Chaque Σ -composante d'une catégorie sans boucle est un ensemble ordonné⁴ dans lequel chaque paire d'éléments $\{x, y\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure notées respectivement $x \wedge y$ et $x \vee y$. De plus tous les morphismes d'une Σ -composante appartiennent à Σ et les couples $(x \rightarrow x \vee y, y \rightarrow x \vee y)$ et $(x \wedge y \rightarrow x, x \wedge y \rightarrow y)$ sont respectivement la somme amalgamée et le produit fibré de $(x \wedge y \rightarrow x, x \wedge y \rightarrow y)$ et $(x \rightarrow x \vee y, y \rightarrow x \vee y)$.



Le théorème 9 affirme en particulier que si $\mathcal{C}[x, y]$ rencontre Σ , alors $\mathcal{C}[x, y]$ est un singleton, son unique élément appartenant donc à Σ . On représente cette situation par une flèche joignant x à y surmontée d'un “ Σ ”.

$$x \xrightarrow{\Sigma} y$$

A la lumière du théorème 9 on sait aussi qu'étant donnés deux objets x et y on a $x \sim y$ si et seulement s'il existe un objet z tel que

$$x \xrightarrow{\Sigma} z \xleftarrow{\Sigma} y$$

4. La relation d'ordre étant définie par $x \sqsubseteq y$ lorsque $\mathcal{C}[x, y] \neq \emptyset$.

ce qui est encore équivalent à l'existence d'un objet z' tel que

$$x \xleftarrow{\Sigma} z' \xrightarrow{\Sigma} y$$

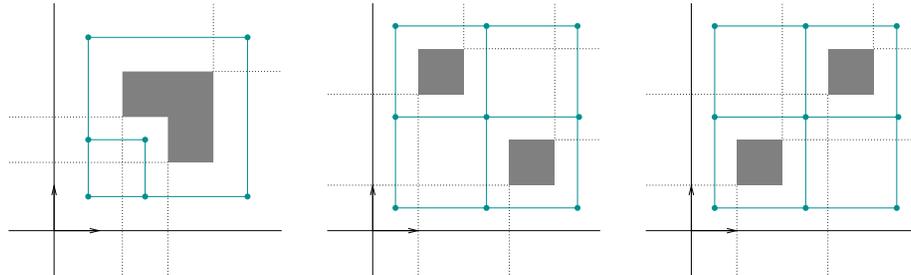
On peut alors définir une relation sur l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} et que l'on note encore \sim en posant $\gamma \sim \gamma'$ lorsque

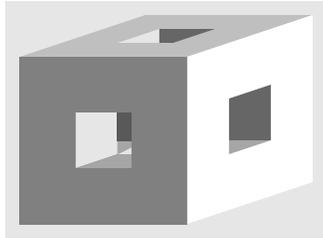
- 1) $s(\gamma) \sim s(\gamma')$ et $t(\gamma) \sim t(\gamma')$
- 2) le diagramme suivant commute

$$x \wedge x' \begin{array}{c} \xrightarrow{\Sigma} x \\ \xrightarrow{\Sigma} x' \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} y \\ \xrightarrow{\gamma'} y' \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \\ \xrightarrow{\Sigma} y \vee y' \end{array}$$

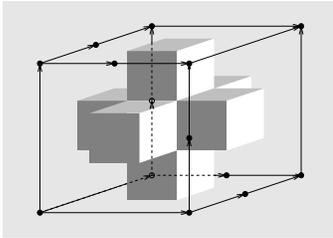
On définit en particulier la source et le but de la \sim -classe d'équivalence de γ comme les \sim -classes d'équivalence de $s(\gamma)$ et $t(\gamma)$ et on vérifie que si $x \sim y$ alors $\text{id}_x \sim \text{id}_y$. On vérifie également que si $s(\gamma) \sim t(\delta)$ alors il existe deux morphismes γ' et δ' tels que $\gamma \sim \gamma'$, $\delta \sim \delta'$ et $s(\gamma') = t(\delta')$. Cela nous permet de définir la composée des \sim -classes d'équivalence de γ et δ comme étant la \sim -classe d'équivalence de la composée $\gamma' \circ \delta'$ après avoir vérifié que cette dernière ne dépend pas des morphismes γ' et δ' . On a ainsi défini une catégorie dont les identités sont les \sim -classes d'équivalence des identités de \mathcal{C} et on démontre qu'elle est isomorphe à la catégorie quotient de \mathcal{C}/Σ .

On peut aussi décrire le quotient \mathcal{C}/Σ comme une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} pourvu que l'on choisisse convenablement un objet de \mathcal{C} dans chacune de ses Σ -composantes. Notons \mathcal{K} l'ensemble des Σ -composantes de \mathcal{C} et ϕ une fonction de \mathcal{K} dans $\text{Ob}(\mathcal{C})$ telle que $\phi(K) \in \mathcal{K}$ pour chaque Σ -composante K . Si pour toutes Σ -composantes K et K' on a $\mathcal{C}[\phi(K), \phi(K')] \neq \emptyset$ si et seulement si il existe $x \in K$ et $x' \in K'$ tels que $\mathcal{C}[x, x'] \neq \emptyset$, alors la catégorie quotient \mathcal{C}/Σ est isomorphe à la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} dont l'ensemble des objets est l'image de ϕ . À l'aide du théorème 9 on prouve que lorsque l'ensemble \mathcal{K} est fini une telle fonction ϕ existe. Les diagrammes ci-dessous illustrent cette approche.

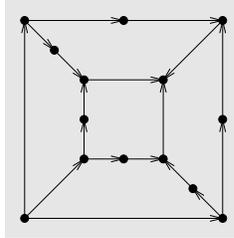




Intérieur de l'espace ordonné



Catégorie des composantes



Aplatie

D'après la remarque précédente il est clair que lorsque Σ est un système de *Yoneda* d'une catégorie sans boucle \mathcal{C} , le quotient \mathcal{C}/Σ , et donc en particulier la catégorie des composantes de \mathcal{C} , est sans boucle. D'après le théorème 8 le quotient \mathcal{C}/Σ est alors le squelette de la localisation $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$.

Chapitre 5

Algèbre cubique

Quel que soit l'espace ordonné auquel on l'applique la construction de la catégorie des composantes a un sens, cette dernière est néanmoins assez abstraite et n'offre pas beaucoup d'outil permettant d'effectuer des calculs. Nous allons donc maintenant décrire une collection d'espaces ordonnés ainsi que les opérateurs qui s'y rattachent afin de donner un cadre dans lequel les constructions théoriques des précédents chapitres peuvent être déterminées automatiquement.

5.1 Cubes

Un **cube**¹ de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un produit cartésien (au sens ensembliste) de n sous-intervalles de \mathbb{R}_+ . La collection des cubes de dimension n forme un treillis (pour l'inclusion) dont le plus petit élément est l'ensemble vide et le plus grand le cube \mathbb{R}_+^n (le produit cartésien de n copies de \mathbb{R}_+). De plus, la borne inférieure est donnée par l'intersection ensembliste. En fait, le treillis des cubes de dimension n est le produit cartésien (dans la catégorie des treillis) de n copies du treillis des intervalles : les calculs se font donc coordonnées par coordonnées.

5.2 Régions cubiques

Formellement une région cubique de dimension $n \in \mathbb{N}$ est une sous-partie de \mathbb{R}_+^n que l'on peut écrire comme une réunion ensembliste finie de cubes de dimension n . On vérifie facilement que la collection des régions cubiques de dimension n forme une sous-algèbre Booléenne de celle des sous-parties de \mathbb{R}_+^n . Mais bien que les intervalles et les cubes (de dimension n) soient faciles à représenter en machine, il en va autrement des régions cubiques : la difficulté tient au fait qu'il est combinatoirement coûteux d'obtenir la forme canonique d'une région cubique.

1. On trouve souvent la terminologie **hypercube** lorsque $n > 3$, nous ne ferons pas cette distinction.

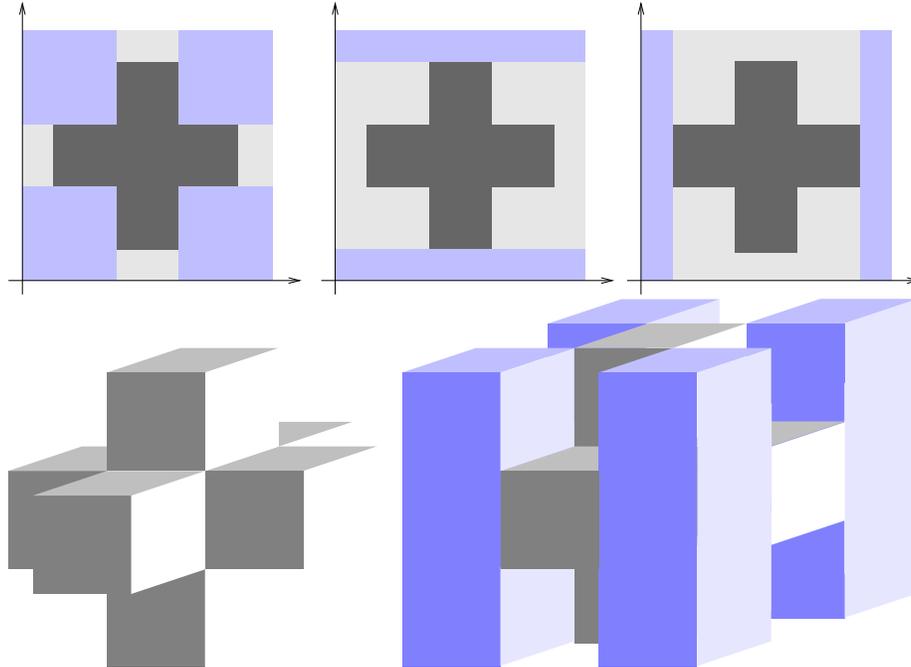
Assez naturellement on choisit de représenter une région cubique comme un ensemble de cubes, il apparaît alors clairement que plusieurs familles de cubes distinctes peuvent représenter une même région cubique. D'un point de vue théorique, la collection des familles finies de cubes forme un pré-treillis (c'est-à-dire un ensemble pré-ordonné dont toutes les paires admettent une borne supérieure et une borne inférieure) lorsqu'on l'équipe de la relation suivante :

$$(A_i)_{i \in I} \preceq (B_j)_{j \in J}$$

lorsque pour tout indice $i \in I$, il existe un indice $j \in J$ tel que $A_i \subseteq B_j$. On a clairement un morphisme α du pré-treillis des familles de cubes (de dimension n) dans celui des régions cubiques (de dimension n) qui à chaque famille associe la réunion ensembliste de ses membres

$$\alpha((A_i)_{i \in I}) := \bigcup_{i \in I} A_i$$

mais il existe aussi un morphisme γ du treillis des régions cubiques dans celui des familles finies de cubes. Afin de décrire le morphisme γ appelons **sous-cube maximal** d'une région cubique \mathcal{A} un cube C inclus dans \mathcal{A} tel que pour tout cube C' vérifiant $C \subseteq C' \subseteq \mathcal{A}$ on ait $C = C'$.



Il est clair que l'image par α de la famille des sous-cube maximaux de \mathcal{A} est précisément \mathcal{A} et que toute famille de cubes dont l'image par α est \mathcal{A} est inférieure (pour le préordre \preceq) à la famille des sous-cubes maximaux de \mathcal{A} .

Autrement dit si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie) de cubes et \mathcal{A} une région cubique alors on a

$$\alpha \circ \gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \text{ et } (A_i)_{i \in I} \preceq \gamma \circ \alpha((A_i)_{i \in I})$$

En particulier le couple (α, γ) forme donc une correspondance de *Galois*².

On souhaite effectuer des calculs dans le treillis (abstrait) des régions cubiques (de dimension n) mais on est pour cela contraint à travailler avec celui (concret) des familles finies de cubes (de dimension n). Lorsque $\alpha((A_i)_{i \in I}) = \mathcal{A}$ on dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement cubique** de la région \mathcal{A} . On dit qu'une famille de cubes $(A_i)_{i \in I}$ est (en forme) **normale** lorsque $(A_i)_{i \in I} = \gamma \circ \alpha((A_i)_{i \in I})$ et qu'elle est (en forme) **pré-normale** lorsque $\gamma \circ \alpha((A_i)_{i \in I}) \preceq (A_i)_{i \in I}$. On rappelle que la relation \preceq n'est a priori pas antisymétrique, ce n'est qu'un pré-ordre qui engendre donc une relation d'équivalence \sim sur la collection des familles finies de cubes : une telle famille $(A_i)_{i \in I}$ est en forme pré-normale lorsqu'elle est équivalente à sa forme normale ce qui signifie en termes moins abstraits que pour tout sous-cube maximal $C_{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} (la région cubique que la famille $(A_i)_{i \in I}$ recouvre) il existe un indice $i \in I$ tel que $A_i = C_{\mathcal{A}}$.

Ainsi, on représente les régions cubiques par des familles de cubes dont la forme normale est donnée par le morphisme $\gamma \circ \alpha$.

5.3 Aspect théorique du calcul de la forme normale

On donne ici les éléments de mathématiques sur lesquels s'appuie l'algorithme de détermination de la forme normale.

Lemme 1 (Borne inférieure dans le treillis des régions n -cubiques)

Un représentant (à \sim -équivalence près) de la borne inférieure de deux familles finies de n -cubes $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ est donné par $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

Preuve : Si la famille de n -cubes $(C_k)_{k \in K}$ est telle que pour tout indice $k \in K$, il existe un indice $i \in I$ et un indice $j \in J$ tels que $C_k \subseteq A_i$ et $C_k \subseteq B_j$, autrement dit un couple $(i, j) \in I \times J$ tel que $C_k \subseteq A_i \cap B_j$, alors on a bien $(C_k)_{k \in K} \preceq (A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

Lemme 2 (La borne inférieure préserve la forme pré-normale)

Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux familles finies de n -cubes, si les familles $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont pré-normales alors la famille $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi. En outre, si les deux premières familles recouvrent respectivement les régions cubiques \mathcal{A} et \mathcal{B} , la troisième recouvre la région cubique $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

2. En général une correspondance de *Galois* entre deux ensembles pré-ordonnés (X, \preceq) et (X', \preceq') est un couple $(\alpha : X \rightarrow X', \gamma : X' \rightarrow X)$ de morphismes d'ensembles pré-ordonnés tel que pour tout $x \in X$ et $x' \in X'$ on ait $\alpha \circ \gamma(x') \preceq' x'$ et $x \preceq \gamma \circ \alpha(x)$. Les morphismes α et γ sont respectivement appelés l'**abstraction** et le **concrétisation**.

Preuve : Par hypothèse de pré-normalité, on a $(A_i)_{i \in I} \sim \gamma(\mathcal{A})$ et $(B_j)_{j \in J} \sim \gamma(\mathcal{B})$ où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont les régions cubiques que représentent respectivement $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$, donc $(A_i)_{i \in I} \wedge (B_j)_{j \in J} \sim \gamma(\mathcal{A}) \wedge \gamma(\mathcal{B})$ et comme γ est le membre droit d'une correspondance de *Galois*, il préserve (à équivalence près) les bornes inférieures (i.e. $\gamma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \sim \gamma(\mathcal{A}) \wedge \gamma(\mathcal{B})$) ce qui, avec le lemme 1, donne le résultat. La seconde assertion tient à la formule (purement ensembliste) ci-dessous.

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j) \quad (1)$$

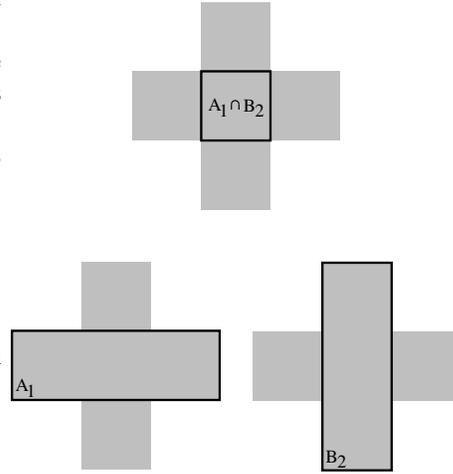
Le lemme précédent devient faux si l'on substitue "normale" à "pré-normale" : il est déjà clair que la preuve que l'on en a donnée n'est dans ce cas plus valide puisqu'elle nécessite de travailler à équivalence près. De façon plus concrète on peut observer des contre-exemples très simples : en posant

$$I=J=\{1, 2\}, \quad A_1=B_1=[1, 4] \times [2, 3] \text{ et} \\ A_2=B_2=[2, 3] \times [1, 4],$$

on a $A_1 \cap B_2 = [2, 3] \times [2, 3]$ qui n'est pas un sous-cube maximal de

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = ([2, 3] \times [1, 4]) \cup ([1, 4] \times [2, 3])$$

(voir la figure ci-contre).



Dans tous les cas, la finitude des ensembles d'indices I, J et la relation ensembliste élémentaire (1) permettent d'écrire un algorithme (naïf) qui prend deux familles de n -cubes en entrée et renvoie la famille de n -cubes

$$\{A_i \cap B_j \mid (i, j) \in I \times J\}$$

cette dernière représente en effet l'intersection des régions cubiques que représentent les familles passées en arguments : d'après le lemme 2, si toutes les deux sont des formes pré-normales, la sortie de cet algorithme l'est aussi.

Avant de poursuivre, précisons que la collection des régions cubiques de dimension n est en fait une sous-algèbre de *Boole* de celle des sous-parties de \mathbb{R}_+^n et que, par abus de langage, on identifie un n -cube avec la région cubique qu'il représente. En outre on peut très facilement obtenir la forme normale du complémentaire d'un n -cube : par définition un n -cube est un produit d'intervalles

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{I}_k$$

donc un point x de \mathbb{R}_+^n appartient à son complémentaire si et seulement s'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ telle que la $k^{\text{ème}}$ projection de x soit dans le complémentaire de \mathbb{I}_k . Or le complémentaire de l'intervalle \mathbb{I}_k dans \mathbb{R}_+ est l'union disjointe d'un

segment initial et d'un segment final de \mathbb{R}_+ (l'un comme l'autre pouvant être vide) : pour chaque coordonnée on a donc un "avant" (segment initial) cube et un "après" (segment terminal) cube. Enfin la finitude de l'ensemble d'indices I , la relation ensembliste élémentaire

$${}^c\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \left(\bigcap_{i \in I} {}^c A_i\right)$$

et le lemme 2 permettent d'écrire un algorithme (naïf) qui prend une famille de n -cubes en entrée et renvoie une forme pré-normale du complémentaire de la région cubique que représente la famille passée en entrée. Pourvu que l'on raffine très légèrement cet algorithme, on peut en fait s'assurer que la sortie soit en forme normale.

5.4 Un peu de topologie

En règle générale, l'intérieur d'une réunion de sous-parties d'un espace topologique contient mais n'est pas forcément égal à la réunion des intérieurs de ces sous-parties : autrement dit la "réunion" ne commute pas avec "l'intérieur". Cependant on a :

Lemme 3 (Intérieur d'une région cubique)

Si une famille de n -cubes $(A_i)_{i \in I}$ est pré-normale, alors l'intérieur (au sens topologique) de la région cubique qu'elle recouvre (vue comme sous-partie de \mathbb{R}_+^n) est la réunion des intérieurs des cubes de la famille, autrement dit

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ = \bigcup_{i \in I} A_i^\circ$$

Preuve : Soit un point p de l'intérieur de la région recouverte par la famille $(A_i)_{i \in I}$, il existe un voisinage V de p inclus dans cette région qui s'écrit comme un produit cartésien (ensembliste) de n intervalles ouverts de $(\mathbb{R}^+)^n$ (les ouverts de cette forme constituent une base de la topologie produit) et comme la famille $(A_i)_{i \in I}$ est pré-normale, il existe un indice i tel que $V \subseteq A_i$.

Le calcul de l'intérieur d'un cube isolé étant simple, on peut grâce au lemme qui précède obtenir l'intérieur topologique d'une région cubique dès que l'on dispose d'un recouvrement pré-normal de cette dernière. En toute généralité la clôture topologique commute avec l'opération de "réunion", le calcul de la clôture topologique d'un cube isolé étant aussi simple que celui de son intérieur on peut obtenir la clôture topologique d'une région cubique à partir de n'importe lequel de ses recouvrements (cubiques). Etant capable de déterminer la clôture comme l'intérieur d'une région cubique on peut en déterminer la frontière (topologique), cette donnée est nécessaire à la détermination de l'ensemble des impasses (ou "deadlocks") d'une région cubique et donc du programme qu'elle représente éventuellement.

5.5 Algèbre de *Boole* graduée des régions cubiques

Dans la section précédente on a décrit pour chaque n l'algèbre de *Boole* des régions cubiques de dimension n or il est clair que le produit cartésien (ensembliste) de deux régions cubiques de dimension respectives n et m est une région cubique de dimension $n+m$ ce qui suggère l'introduction d'une structure graduée.

On s'inspire pour cela de la notion d'algèbre graduée sur un corps, ainsi pour chaque entier naturel n on note \mathbb{B}_n l'algèbre de *Boole* des régions cubique de dimension n et pour chaque couple d'entiers (n, m) on a une application une application $\mu_{n,m} : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_m \longrightarrow \mathbb{B}_{n+m}$ qui à tout couple de régions cubiques $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ associe leur produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$. Le produit ainsi défini est associatif dans le sens où pour chaque quadruplet d'entiers (n, m, p, q) on a

$$(\mu_{n,m} \circ \mu_{m,p}) \circ \mu_{p,q} = \mu_{n,m} \circ (\mu_{m,p} \circ \mu_{p,q})$$

en revanche il n'est pas commutatif puisque l'on souhaite, par exemple, distinguer les rectangles $[1, 4] \times [2, 3]$ et $[2, 3] \times [1, 4]$. Par ailleurs, l'analogie avec les algèbre graduée exigerait que pour toutes régions cubiques \mathcal{A}, \mathcal{B} de dimensions respectives n et m , les applications partielles $\mu_{n,m}(\mathcal{A}, -)$ et $\mu_{n,m}(-, \mathcal{B})$ soient des morphismes d'algèbres de *Boole* : chacune préserve \wedge, \vee ainsi que l'élément nul, ce qui signifie simplement que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \times \mathcal{B} &= (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}) \\ (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \times \mathcal{B} &= (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}) \\ \mathcal{A} \times (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) &= (\mathcal{A} \times \mathcal{B}_1) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{B}_2) \\ \mathcal{A} \times (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) &= (\mathcal{A} \times \mathcal{B}_1) \cup (\mathcal{A} \times \mathcal{B}_2) \\ \mathcal{A} \times \emptyset_m &= \emptyset_{n+m} \text{ et } \emptyset_n \times \mathcal{B} = \emptyset_{n+m} \end{aligned}$$

mais pas l'élément unité puisque si $\mathcal{B} \neq (\mathbb{R}^+)^m$, alors $(\mathbb{R}^+)^n \times \mathcal{B} \neq (\mathbb{R}^+)^{n+m}$. On a en revanche la relation

$${}^c(\mu_{n,m}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) = \mu_{n,m}({}^c\mathcal{A}, \mathcal{B}) \vee \mu_{n,m}(\mathcal{A}, {}^c\mathcal{B})$$

ou bien encore dans le cas des régions cubiques

$${}^c(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = ({}^c\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \times {}^c\mathcal{B}).$$

C'est d'ailleurs grâce à cette relation que le calcul (de la forme normale) du complémentaire d'un cube est facile : il se ramène en effet à des calcul de complémentaires dans \mathbb{B}_1 , c'est-à-dire l'algèbre de *Boole* des unions finies d'intervalles de \mathbb{R}_+ . Pour finir notons que \mathbb{B}_0 ne contient que deux éléments : l'ensemble vide de dimension 0 et le singleton dont le seul élément est le vecteur nul c'est-à-dire $(\mathbb{R}^+)^0$.

Chapitre 6

Ce dont on a pas parlé

6.1 Où sont passées les boucles ?

Dans les chapitres précédents on s'est focalisé sur l'étude des espaces ordonnés dans la mesure où ils permettent de représenter les programmes écrits en langage PV. On aimerait maintenant aller plus loin et enrichir de langage PV de façon à ce qu'il permette d'écrire des boucles. Le programme suivant est un exemple simple, il est constitué d'un unique processus constitué d'une unique boucle.

```
while true
do
  P(a).V(a)
done
```

Intuitivement on voudrait pouvoir joindre les deux extrémités du segment dirigé $\overrightarrow{[0, 1]}$ de façon à obtenir un "cercle dirigé" c'est-à-dire un cercle, par exemple le cercle Euclidien¹ $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, muni d'une structure telle que les chemins sur le "cercle dirigé" soient les applications continues de la forme

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{i\theta(t)} \end{aligned}$$

où θ est une application continue et croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Plus généralement on voudrait que le cercle dirigé soit l'un des objets d'une catégorie sur laquelle on pourrait définir un foncteur catégorie fondamentale de sorte que :

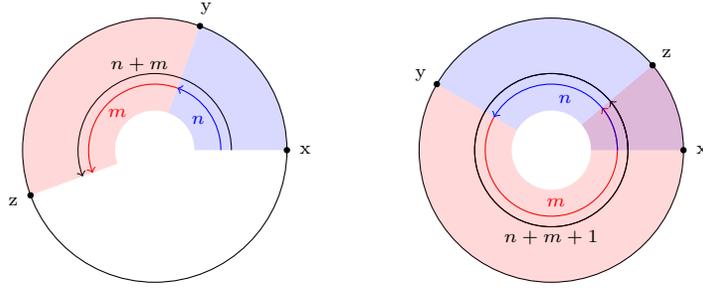
- 1) on puisse plonger \mathbf{Po} dans cette catégorie
- 2) le foncteur catégorie fondamentale défini sur cette catégorie soit une extension du foncteur $\overrightarrow{\pi}_1$ que l'on a défini sur \mathbf{Po}
- 3) la catégorie fondamentale du "cercle dirigé" soit isomorphe à la catégorie dont l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes sont respectivement S^1

1. En notant \mathbb{C} le corps des nombres complexes et $|z|$ la norme de z .

et $S^1 \times \mathbb{N} \times S^1$, de sorte que la source et le but de (x, n, y) sont respectivement x et y et que la composition est donnée par

$$(y, m, z) \circ (x, n, y) = \begin{cases} (x, n + m + 1, z) & \text{si } \widehat{xy} \cup \widehat{yz} = S^1 \\ (x, n + m, z) & \text{sinon} \end{cases}$$

où \widehat{xy} représente l'arc de cercle joignant x à y en suivant le sens de rotation trigonométrique dans le cas où $x \neq y$ et le singleton $\{x\}$ sinon.



Les identités sont de la forme $(x, 0, x)$ pour $x \in S^1$ et on appelle cette catégorie le **cercle dirigé**. Il est facile de vérifier que le cercle dirigé est isomorphe à son opposé et ne possède pas d'autres morphismes inversibles que ses identités.

Ainsi pour chaque prolongement du foncteur catégorie fondamentale $\vec{\pi}_1 : \mathbf{Po} \rightarrow \mathbf{Lf}$ on dira par extension qu'un objet pris dans le domaine du prolongement est un cercle dirigé lorsque sa catégorie fondamentale est isomorphe au cercle dirigé. En fait on prolonge facilement le foncteur catégorie fondamentale de façon à avoir un cercle dirigé, en revanche on ne sait pas étendre la notion de catégorie des composantes de manière cohérente. Pour traiter les catégories ayant des boucles, il est nécessaire de relâcher les axiomes qui caractérisent les systèmes de *Yoneda*. Ainsi dans le cas du cercle dirigé on souhaite que les morphismes de *Yoneda* soient ceux de la forme $(x, 0, y)$, notons Σ l'ensemble de tous ces morphismes. Il est clair que tout morphisme du cercle dirigé est une composition d'éléments de Σ en conséquence le quotient du cercle dirigé par Σ est isomorphe à $\mathbf{1}$. En revanche la localisation du cercle dirigé par Σ est isomorphe² à une catégorie que l'on obtient en substituant le groupe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ au monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$ et en aménageant de manière *ad hoc* la loi de composition dans la description du cercle dirigé autrement dit

$$(y, m, z) \circ (x, n, y) = \begin{cases} (x, n + m + 1, z) & \text{si } n \geq 0, m \geq 0 \text{ et } \widehat{xy} \cup \widehat{yz} = S^1 \\ (x, n + m - 1, z) & \text{si } n \leq 0, m \leq 0 \text{ et } \widehat{xy} \cup \widehat{yz} = S^1 \\ (x, n + m, z) & \text{sinon} \end{cases}$$

où \widehat{xy} et \widehat{yx} représentent respectivement les arcs de cercle joignant x à y en suivant respectivement les sens de rotation trigonométrique et anti-trigonométrique

2. Cette catégorie est aussi isomorphe au groupoïde fondamental du cercle Euclidien.

dans le cas où $x \neq y$ et le singleton $\{x\}$ sinon. Le quotient et la localisation du cercle dirigé par Σ ne sont donc pas équivalents ce qui montre que le théorème 8 n'a pas d'analogie immédiat hors du cadre des catégories sans boucle. En revanche on constate que le cercle dirigé n'a alors qu'une seule Σ -composante, en se basant sur la description de la catégorie des composantes donnée dans la section 4.5 on peut alors décider que la catégorie des composantes du cercle dirigé est $(\mathbb{N}, +, 0)$. L'axiomatisation de la notion de catégorie des composantes hors du cadre sans boucle est un problème ouvert qui fait actuellement l'objet de travaux.

6.2 Que pourrait-être une catégorie “localement sans boucle” ?

On peut montrer que l'ensemble des sous-catégories pures d'une petite catégorie \mathcal{C} forme un treillis local \mathcal{X} dont le plus grand élément est la catégorie \mathcal{C} et le plus petit la catégorie vide, la borne inférieure étant donnée par l'intersection et la borne supérieure d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ par l'ensemble des composées

$$\sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$ il existe un indice i_k dans I tel que σ_k appartienne à X_{i_k} . Les sous-catégories pures de \mathcal{C} sont en un certain sens ses “ouverts”. On peut alors se demander si les sous-catégories pures et sans boucle de \mathcal{C} engendrent le treillis local \mathcal{X} et lorsque c'est le cas, dire que la catégorie \mathcal{C} est localement sans boucle. En pratique il faut encore ajouter quelques hypothèses afin d'obtenir une notion intéressante, l'idée étant d'avoir des résultats similaires à ceux obtenus avec les catégories sans boucle, on espère notamment un résultat analogue au théorème 5 et 6.

En outre le foncteur de (\mathbb{R}, \leq) dans le cercle dirigé qui envoie chaque objet $t \in \mathbb{R}$ sur $e^{2i\pi t}$ et chaque flèche (t, t') sur le morphisme $(e^{2i\pi t}, q_{t,t'}, e^{2i\pi t'})$ où $q_{t,t'}$ est le plus petit entier inférieur à $t' - t$ suggère de penser à (\mathbb{R}, \leq) comme à un revêtement du cercle dirigé. La notion de **revêtement** est issue de la topologie algébrique classique mais intervient par analogie dans plusieurs autres contextes mathématiques [DD05].

Bibliographie

- [Awo06] Steve Awodey. *Category Theory*. Number 49 in Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2006.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999.
- [Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1 : Basic Category Theory*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3 : Categories of Sheaves*, volume 52 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and Groupoids*. BookSurge Publishing, feb 2006.
- [CJ87] Scott D. Carson and Paul F. Reynolds Jr. The geometry of semaphore programs. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 9(1):25–53, january 1987.
- [DD05] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et Théorie Galoisienne*. Nouvelle Bibliothèque Mathématique. Cassini, 2005.
- [Dij68] Edsger W. Dijkstra. Cooperating sequential processes. In *Programming Languages: NATO Advanced Study Institute*, pages 43–112. Academic Press, 1968.
- [Eil41] Samuel Eilenberg. Ordered topological spaces. *American Journal of Mathematics*, (63):39–45, 1941.
- [Gra03] Marco Grandis. Directed homotopy theory, I. the fundamental category. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 44:281–316, 2003. Preliminary version: Dip. Mat. Univ. Genova, Preprint 443 (Oct 2001). Revised: 5 Nov 2001, 26 p.
- [GZ67] Pierre Gabriel and Michel Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, volume 35 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer Verlag, 1967.
- [Hae91] André Haefliger. Complexes of groups and orbihedra. In *Group theory from a geometrical viewpoint, 26 march-6 april 1990, Trieste*, pages

- 504–540. International Centre for Theoretical Physics, World Scientific, 1991.
- [Hae92] André Haefliger. Extension of complexes of groups. *Annales de l'institut Fourier*, 42(1-2):275–311, 1992. disponible sur internet <http://www.numdam.org/>.
- [Has51] Junji Hashimoto. On direct product decomposition of partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, (54):315–318, 1951.
- [Hig71] Philip J. Higgins. *Categories and Groupoids*, volume 32 of *Mathematical Studies*. Van Nostrand Reinhold, 1971. Librement accessible sur internet <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/>.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model Categories and their Localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2003.
- [Hov99] Mark Hovey. *Model Categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1999.
- [Joh82] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1982.
- [Kri07] Sanjeevi Krishnan. A convenient category of locally ordered spaces. 2007. [arXiv:0709.3646v3](https://arxiv.org/abs/0709.3646v3) [math.AT].
- [Mac98] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1998. original edition 1971.
- [Nac48a] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces topologiques ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [Nac48b] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces uniformes ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [Nac48c] Leopoldo Nachbin. Sur les espaces uniformisables ordonnés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 226, 1948.
- [Nac65] Leopoldo Nachbin. *Topology and Order*, volume 4 of *Van Nostrand Mathematical Studies*. Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [NH50] Tadasi Nakayama and Junji Hashimoto. On a problem of Garrett Birkhoff. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 1, pages 141–142, April 1950.
- [PGG99] John F. Jardine Paul G. Goerss. *Simplicial Homotopy Theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhauser, 1999.
- [PPT04] Jorge Picado, Ales Pultr, and Anna Tozzi. *Categorical Foundations : Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory*, volume 97 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, chapter Locales, pages 49–101. Cambridge University Press, 2004.
- [SIG03] Yuri I. Manin Sergei I. Gelfand. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. 2nd edition.

- [Spa95] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 3^{ème} édition corrigée edition, 1995. Première publication 1966.
- [Win95] Glynn Winskel. *Handbook of Logic in Computer Science : Semantic Modelling*, volume 4, chapter 1. Oxford University Press, 1995.