

# Quelques problèmes d'intérêt

---

Eric Goubault

CEA Saclay & PPS

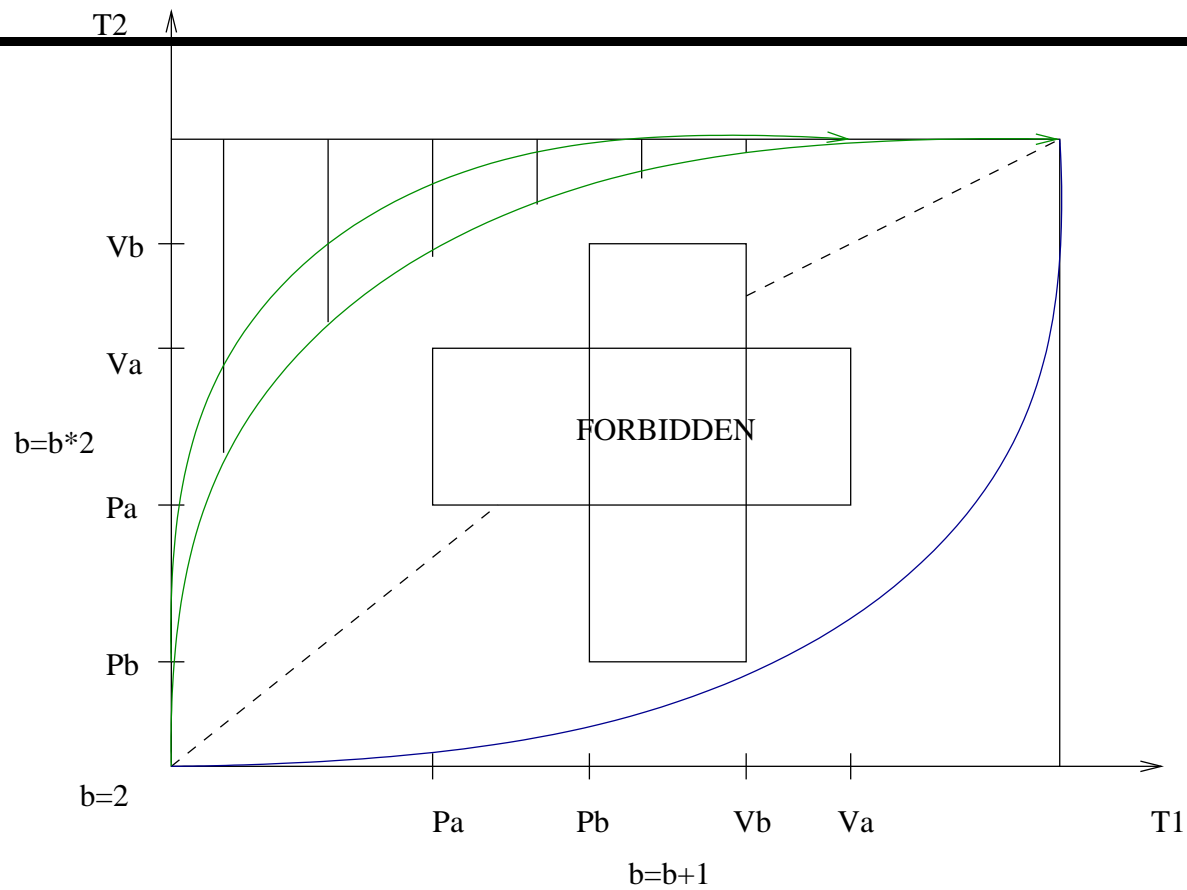
Le 27/11/03, AS “Topologie Algébrique...”

## $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_0$ dirigés

---

Le problème est de pouvoir calculer les invariants essentiels d'un système parallèle ou distribué, que sont  $\vec{\pi}_1$  et  $\vec{\pi}_0$

# Explication



T2 gets a and b before T1 does:  $b=5!$

Voir mon exposé.

## Reécriture

---

(cf. Paul-André Mélliès)

Rapports entre le transparent précédent, et la théorie des résidus des ARS de Paul-André. Voir mon exposé.

## Catégorie Flow

---

(cf. Philippe Gaucher)

- Notion de machine parallèle “universelle”? (classification des CW-complexes globulaires à équivalence d’homotopie forte par exemple) Le langage correspondrait au collage inductif de  $n$ -cellules
- Traduction des paradigmes classiques du parallélisme dans Flow, avec une “préservation” des observations modulo déformation (cf. relation d’indépendance induite dans tous les modèles du vrai parallélisme)
- Calculs?

## Homologie de Baues-Wirshing

---

(cf. Daniel Guin, Philippe Malbos, Emmanuel Haucourt)

Permet de définir de meilleurs invariants homologiques? L'idée est la suivante:

- Les coefficients dans l'homologie sont des “filtres” à l'observation des invariants homotopiques
- Exemple, homologie classique, avec coefficients dans  $Z$ : des éléments de  $H_1(X)$  sont des cycles modulo des bords (trous), représentés comme des sommes formelles dans une algèbre associative et *commutative*
- Systèmes de coefficients plus compliqués, *locaux* qui permettraient d'avoir des invariants *dirigés* plus fins.

## Catégories modèles en sémantique

---

Modèle [discret]	complexes combinatoires
Modèle [continu]	espaces topologiques
Relation discret/continu	réalisation géométrique
Composition parallèle	produit
Raffinement d'action	subdivision
Compositionnalité	Seifert/van Kampen
Points morts/atteignabilité	composantes connexes
Ordonnancements	groupe fondamental
Equivalence observationnelle	équivalence d'homotopie (faible/forte)
Propriétés calculables	invariants topologiques (homologie etc.)

## Catégories modèles

---

Permettent de résoudre le problème d'“équilibrage” suivant:

- “Suffisamment gros”: Trouver une catégorie de “modèles” avec toutes les bonnes constructions catégoriques (au moins complète et co-complète), contenant au moins certains modèles raisonnables (variétés topologiques, CW-complexes etc.)
- “Suffisamment petit”: On doit pouvoir avoir une “équivalence observationnelle” raisonnable sur cette catégorie - équivalence d'homotopie faible et forte



## Exemples

- 
- (CW-complexes  $\subseteq$  espaces topologiques).
    - Les CW-complexes ne sont pas “pathologiques”: topologie simple, construction inductive, cellules par cellules etc.
    - Tout espace topologique est faiblement équivalent à un CW-complexe. Le foncteur “remplacement cofibrant” élimine les pathologies topologiques pour donner un CW-complexe faiblement équivalent.
  - (Espaces simpliciaux de Kan  $\subseteq$  espaces simpliciaux).
    - $X \rightarrow S(|X|)$  est un remplacement cofibrant dans les espaces simpliciaux
    - $X \rightarrow |S(X)|$  est un remplacement cofibrant dans les espaces topologiques

## Notion de générateurs de la théorie homotopique

---

- Co-complétion de  $\Delta \rightarrow$  espaces simpliciaux
- Co-complétion de CW-complexes, *en conservant certaines des co-limites existantes*  $\rightarrow$  espaces topologiques
- Co-complétion de la catégorie des boules ouvertes de  $R^n$  et des fonctions continues entre ces boules  $\rightarrow$  espaces topologiques
- La théorie homotopique (*notion d'observation*) étant uniquement générée par:  $\operatorname{hocolim} U_\bullet \rightarrow X$  and  $X \times I \rightarrow X$  sont des équivalences faibles

## Deux façons de donner un sens à cela (cf. Dan Dugger)

---

- construction à partir de faisceaux de Grothendieck (à la Morel-Voevodsky)
- construction à partir de préfaisceaux simpliciaux ( $sSet^{C^{op}}$ ) à la Bousfield-Kan

## Qu'en est-il de?

---

- catégories modèles en sémantique dénotationnelle?
- travaux de Winskel sur les prefaisceaux: co-complétion, mais pas de préservation de limites existantes. Construction d'une équivalence observationnelle en sus. "Théorie des domaines"
- catégories modèles sur des espaces combinatoires (cubiques, à la Jardine)? sur des variétés topologiques ordonnées?

## Homologie de Barr-Beck sur des adjonctions pas avec Set

---

- D'une adjonction,  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  adjoint à droite de  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , on en déduit une monade  $U \circ F$  sur  $\mathcal{D}$  et une comonade  $F \circ U$  sur  $\mathcal{C}$ .
- D'une monade on en déduit un ensemble co-simplicial (augmenté).
- Classiquement, étant donné un objet en groupe abélien dans  $\mathcal{C}$ , on en déduit une homologie dans  $\mathcal{C}$ . (cf. coefficients plus généraux - Baues-Wirshing).

## Barr-Beck

---

- La monade  $T = U \circ F$  induit sur la catégorie d'Eilenberg-Moore de  $T$ -algèbres une paire de foncteurs adjoints  $F^T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^T$  à gauche de  $U^T : \mathcal{D}^T \rightarrow \mathcal{D}$ . C'est une paire de foncteur libre/oubli.
- Les foncteurs  $F$  et  $U$  induisent un foncteur  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^T$  par  $U^T \circ \Phi = U$  et  $F^T = \Phi \circ F$ .
- Une adjonction est monadique si  $\Phi$  est une équivalence de catégorie.

## Barr-Beck

---

Quand l'adjonction est monadique l'homologie de Barr-Beck s'interprète en dimension 0 et en dimension 1 comme suit:

- $H^0(X, Y)$  est isomorphe à  $\mathcal{C}(X, Y)$  (en tant qu'ensemble)
- $H^1(X, Y)$  est isomorphe à  $PO(X, Y)$ , qui est une catégorie de fibrés particuliers

## Barr-Beck

~~$p : E \rightarrow B$  dans  $\mathcal{C}$  est  $Y$ -principal si~~

---

- $Y$  opère sur  $E$ , c'est à dire que l'on a une transformation naturelle  $. : \mathcal{C}(\cdot, Y) \times \mathcal{C}(\cdot, E) \rightarrow \mathcal{C}(\cdot, E)$  vérifiant...
- L'opération de  $Y$  sur  $E$  est compatible avec  $p$ . C'est-à-dire que quelque soient  $y : B \rightarrow Y, e : B \rightarrow E$ , alors  $p(y.e) = p(e)$
- $Y$  opère transitivement, c'est-à-dire que si on a  $e_0, e_1 : B \rightarrow E$  tels que  $p(e_0) = p(e_1)$ , alors il existe un unique morphisme  $y : B \rightarrow Y$  tel que  $y.e_0 = e_1$
- on a une section  $s : U(X) \rightarrow U(E)$  dans la catégorie  $\mathcal{D}$  telle que  $s.U(p) = U(X)$

avec les morphismes évidents, cela forme une catégorie  $\underline{PO}(X, Y)$ .  
La composante connexe de  $\underline{PO}(X, Y)$  est la catégorie  $PO(X, Y)$ .



## Barr-Beck

---

(cf. Albert Burroni, Jean Goubault-Larrecq)

- On sait quand une adjonction est monadique quand  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  en particulier (Lawvere, Linton). C'est quand  $\mathcal{C}$  est équationnelle sur  $\mathbf{Set}$ .
- Quand sait-on que l'adjonction est monadique avec  $\mathbf{Grph}$ , avec  $\Delta^{op} \mathbf{Set}$ ? A t-on des invariants plus fins dans ces cas?
- Cf. Jean Goubault-Larrecq - homologie venant d'adjonction sur la catégorie des ensembles simpliciaux.

# Systèmes distribués tolérants aux pannes à la Herlihy

---

- Problèmes ouverts (hierarchie, algos randomises etc.)
- Rapport avec la topologie dirigée (cf. mon exposé Alliance)
- Encore des adjonctions et des monades dans les ensembles simpliciaux (cf. mon exposé Alliance).