

MPRO, module PMA, SOCP (2019) : corrigé

1 Exercice 1

Pour chaque indice i , nous pouvons considérer deux nouvelles variables y_i et z_i comme suit. y_i représente un majorant de x_i^2 et z_i serait un majorant du rapport $\frac{x_i^2}{1-x_i^2}$. Pour ce faire, Il suffit d'écrire les contraintes $y_i \geq x_i^2$ et $z_i(1 - y_i) \geq x_i^2$ qui sont clairement des contraintes hyperboliques et sont donc (d'après le cours) des contraintes de type SOCP. Enfin, l'inégalité linéaire $\sum_{i=1}^n z_i \leq t$ permet d'exprimer la contrainte $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-x_i^2} \leq t$.

2 Exercice 2

Puisque $K \subset \overline{K}$, alors $\overline{K}^* \subset K^*$ et $K^{**} \subset \overline{K}^{**}$. D'après le résultat prouvé dans le cours et rappelé dans l'énoncé, $\overline{K}^{**} = \overline{K}$. On déduit ainsi que $K^{**} \subset \overline{K}$.

Par ailleurs, nous savons qu'un cône dual est toujours fermé (même si le cône primal ne l'est pas : toute suite de vecteurs y_i ayant un produit scalaire non-négatif avec un cône ne peut tendre que vers une limite qui a elle aussi un produit scalaire non-négatif avec K). Ainsi K^{**} est un fermé. Or $K \subset K^{**}$, donc K^{**} est un fermé contenant K et inclus dans \overline{K} . Il en découle que $K^{**} = \overline{K}$.

3 Exercice 3

\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont 2 convexes fermés. Ils ont une intersection vide si et seulement si on peut les séparer strictement, c'est à dire si'il existerait un vecteur a telque $\min_{x \in \mathcal{E}_1} a^T x > \max_{x \in \mathcal{E}_2} a^T x$. Observons que

$\mathcal{E}_1 = \{x; (x - x_1)^T P_1^{-1} (x - x_1) \leq 1\} = \{x; \exists y, x = x_1 + P_1^{1/2} y; \|y\| \leq 1\}$. Un vecteur x de \mathcal{E}_1 minimisant $a^T x$ correspondrait à un vecteur y de norme 1 qui aurait la direction opposée à celle de $P_1^{1/2} a$. Le minimum $\min_{x \in \mathcal{E}_1} a^T x$ serait alors $a^T x_1 - \|P_1^{1/2} a\|$. On montre de la même

manière que $\max_{x \in \mathcal{E}_2} a^T x = a^T x_2 + \|P_2^{1/2} a\|$. La stricte séparation implique immédiatement que $\|P_1^{1/2} a\| + \|P_2^{1/2} a\| < a^T (x_1 - x_2)$.