

Partie “Mixed Integer Nonlinear Programming”

Claudia D’Ambrosio, LIX - École Polytechnique
dambrosio@lix.polytechnique.fr

1 Problèmes de packing (3 points)

1. Considérons une boîte et un ensemble d’objets $j = 1, \dots, c$ qui doivent être emboîtés dans la boîte. Nous supposons que la boîte et les objets ont la même hauteur, donc nous pouvons donc considérer uniquement deux dimensions comme dans la Figure 1. La boîte est de longueur L et de profondeur W . Nous souhaitons trouver la position optimale dans la boîte de chaque objet en maximisant le nombre d’objets emboîtés.

Une solution réalisable doit satisfaire les contraintes implicites suivantes: si un objet est emboîté, il doit rester dans la boîte, si deux objets sont emboîtés ils peuvent se toucher, mais pas se chevaucher, etc.

Considérons trois différents problèmes, un pour chaque forme d’objet :

- Le losange avec une distance entre le centre et les sommets égale à r (les diagonales sont équivalentes et de longueur $2r$);
- Le cercle avec un rayon de longueur r ;
- Le carré avec des côtés de longueur $2r$.

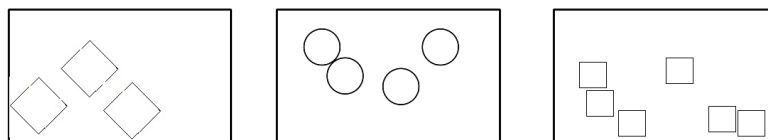


Figure 1: Les 3 formes d’objet

- (a) Trouver une formulation MINLP pour chacun des trois problèmes.
Décrire les caractéristiques (difficultés) de chaque problème, etc. (**piste**: les problèmes peuvent être formulés avec le même MINLP en changeant uniquement la norme utilisée pour modéliser la forme des objets.)
- (b) Pour chacun des trois problèmes: expliquer s’il est convexe ou non convexe et pourquoi.
Comment vous résoudriez ces trois problèmes?

2 Reformulations (4 points)

2.1 Reformulation exacte

Proposez une reformulation PLNE **exacte** pour le MINLP suivant:

$$\min \sum_{j \in J} c_j x_j^2 \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \in J \quad (3)$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in J. \quad (4)$$

2.2 Relaxation

Considérez le MINLP suivant:

$$\min (x_1 x_2 x_3 + x_2^2 + 4x_2 x_3 - 5x_1) \quad (5)$$

$$2x_1 x_2 x_3 + 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \geq 0 \quad (6)$$

$$0 \leq 4x_1 - 3x_3 \leq 3 \quad (7)$$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad (8)$$

$$x_2 \in \{0, 1\} \quad (9)$$

$$x_3 \geq 0. \quad (10)$$

Définissez une borne supérieure pour la variable continue x_3 et expliquez comment et pourquoi votre borne est valide. Proposez une relaxation PLNE du problème.

2.3 Forme standard

Considérez le MINLP suivant:

$$\max \left(\frac{x_1 x_4}{x_3} + x_1 x_2 x_3 x_4 \right) \quad (11)$$

$$4x_1^2 \leq 2 \quad (12)$$

$$0 \leq 4x_1 - 3x_3 \leq 3 \quad (13)$$

$$0 \leq x_1 \leq 5 \quad (14)$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1 \quad (15)$$

$$1 \leq x_3 \leq 3 \quad (16)$$

$$x_4 \in \{0, 1\}. \quad (17)$$

$$(18)$$

Écrivez la forme standard du problème et expliquez comment l'obtenir. Écrivez le MINLP convexe obtenu en "convexifiant" la forme standard et expliquez comment l'obtenir.