Partie "Programmation Non Linéaire"

Claudia D'Ambrosio, LIX - École Polytechnique
dambrosio@lix.polytechnique.fr

Solve the two exercises below.

1. **Radar location problem.** We are given a set of coordinates (X_i, Y_i) with $i \in \mathbb{L}$, which represent the location of $|\mathbb{L}|$ strategic points. We want to decide the location (in terms of coordinates) of radars needed to control the strategic points. Each radar can control each point within a radius of value R , however, for security reasons, we assume that at maximum P points can be controlled by each radar (consider P as a maximum capacity). All the strategic point has to be assigned to a radar. The cost of installation of each radar is F and we aim at minimizing the installation cost.
 - (a) Find a MINLP formulation for the problem. Describe the characteristics of the problem.
 - (b) Assume that the location of each radar has to be chosen in the set of coordinates (X_j, Y_j) $j \in \mathbb{S}$. Adapt the model of the previous point and try to simplify it as much as possible.
 - (c) Which is the relationship between the first and the second model? Explain in details.

Comments:

- Both in point (a) and (b), there is a trivial upper bound on the number of radars needed (different).
2. **The Office Assigment problem.** We are n people and n possible offices to which we can assign the people. The collaboration matrix C is composed of elements c_{ij} that is equal to 1 if person i and person j work together on a project, 0 otherwise. Finally, we are given a so-called distance matrix $D = [d_{kl}]$ where d_{kl} represents the distance between office k and office l . We aim at minimizing the total cost of all office assignments that is proportional to the total distance of the offices of the people who collaborate on the same project.
 - (a) Find a MINLP formulation for the problem.
 - (b) Exactly reformulate the MINLP formulation above so it becomes a MILP.
 - (c) Write the AMPL file(s) to solve the problem(s) above.

Partie "Programmation Semidéfinie"

Frédéric Roupin, LIPN - Université Paris Nord
 roupin@lipn.univ-paris13.fr

Exercice 1. On définit (Q) (programme quadratique en variables 0-1) et (R) (programme quadratique continu) :

$$(Q) \begin{cases} \max & x^T A x \\ \text{s.c.} & b^T x = c \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad (R) \begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T A x \\ \text{s.c.} & x^T B x = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 = c \end{cases}$$

où c est un réel positif, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $b_i > 0$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, et A une matrice symétrique réelle $n \times n$ quelconque. Remarque : la matrice B est diagonale.

1. Etablir que (R) est une relaxation de (Q) . Est-ce une relaxation convexe ?
2. Déterminer la valeur optimale de (R) . Pour cela :
 - Effectuer un changement de variable en utilisant le fait que $b_i > 0$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, et donc que B peut se décomposer en $B = L^T L$ avec L inversible.
 - En remarquant que la matrice $L^{-1T} A L^{-1}$ est symétrique réelle et donc diagonalisable dans une base orthonormée (i.e. s'écrire MDM^T avec D diagonale et $M^T M = I$) effectuer un nouveau changement de variable pour obtenir une formulation équivalente de (R) dont la solution optimale est évidente (et que l'on donnera !).
3. Soit le programme semidéfini $(SDP) \begin{cases} \max & A \bullet X \\ \text{s.c.} & B \bullet X = c \\ & X \succeq 0 \end{cases}$
 - (a) Ecrire $(DSDP)$ le programme dual de (SDP) . Existe-t-il un saut de dualité entre $(DSDP)$ et (SDP) ?
 - (b) Comparer $(DSDP)$ et (R) . Que peut-on en conclure concernant les valeurs optimales de (SDP) et de (R) ?
4. Proposer une autre relaxation semidéfinie de (Q) qui soit meilleure que (SDP) .

Exercice 2. Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté comportant n sommets, dont chaque arc (v_i, v_j) est valué par un réel positif c_{ij} . On cherche dans G une coupe orientée C de valeur maximale. Rappels : Une coupe orientée C est un ensemble d'arcs qui induit une partition de V en V_1 et V_2 et telle que chaque arc dans C possède son origine dans V_1 et son autre extrémité dans V_2 . La valeur d'une coupe C est la somme des valuations des arcs de C .

1. Soit y_0 une variable quelconque à valeur dans $\{-1, 1\}$. On considère les variables de décision $y_i \in \{-1, 1\}$ pour i dans $\{1, \dots, n\}$. Etablir que pour tout arc (v_i, v_j) on a $1 + y_0 y_i - y_0 y_j - y_i y_j \geq 0$. Montrer que l'on peut interpréter les valeurs des variables y_i de façon à avoir $1 + y_0 y_i - y_0 y_j - y_i y_j = 4$ si l'arc (v_i, v_j) est dans la coupe C et $1 + y_0 y_i - y_0 y_j - y_i y_j = 0$ sinon.
2. En déduire une modélisation de ce problème comme un programme quadratique (P) en variables à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
3. Proposer une relaxation semidéfinie de (P) .

Module MPA – partie Ben Ameer

Exercice 1 :

Montrez que la contrainte $(\max(0, x_1)^3 + \max(0, x_2)^3)^{\frac{1}{3}} \leq t$ s'exprime bien sous la forme d'un programme conique de second ordre que vous explicitez.

Exercice 2 :

Montez que le cône de Lorentz (ou le cône de second ordre) est égal à son cône dual.

Exercice 3 :

Etant donnée une fonction f évaluée en r points, on cherche à l'approximer le mieux possible par le logarithme d'une fonction affine. Le problème s'écrit alors sous la forme de :

$$\min_{x,y} \max_{1 \leq i \leq r} \left| \ln(a_i^t x + y) - f(a_i) \right| \quad \text{où } x \text{ est un vecteur et } y \text{ est un scalaire.}$$

Montrez que ce problème s'exprime sous la forme d'un programme conique de second ordre.