

MPRO - Programmation Mathématique Avancée

Tous documents manuscrits autorisés

Exercice 1 — *Produit scalaire de matrices SDP* (1 points)

Soient X et S deux matrices qui appartiennent à S_n^+ , montrer que dans ce cas $\langle X, S \rangle \geq 0$.

► Correction

Comme la matrice X est SDP elle peut s'écrire $X = xx^T$, on a donc $\langle xx^T, S \rangle = x^T S x \geq 0$ puisque $S \succeq 0$.

Exercice 2 — *Optimisation semi-définie et dualité* (2 points)

Soit le programme semi-défini suivant :

$$(SDP) \begin{cases} \min & 1 - 2y \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 1 - 2y & z \\ y & z & t \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

1. Calculer son dual ($DSDP$).
2. Y-a-t-il forte dualité pour ces programme? Si non, quelle est la valeur du saut de dualité? Justifiez.

► Correction

1. On réécrit le primal

$$(SDP) \begin{cases} \max & -X_{22} \\ \text{s.t.} & X_{11} = 0 \\ & 2X_{13} + X_{22} = 1 \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

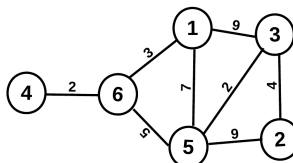
On introduit les variables duales β_1 et β_2 et on obtient :

$$(DSDP) \begin{cases} \min & \beta_2 \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_2 + 1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

2. Pour (SDP) , comme $X_{11} = 0$, on a x et y qui valent 0. De plus, en prenant $t \geq 0$ et $z \geq 0$, tel que $t - z^2 \geq 0$, on a une solution réalisable de valeur 1. La valeur optimale est donc 1. Pour $(DSDP)$, il faut que $\beta_2 = 0$ pour avoir une solution réalisable, et donc la valeur optimale est 0. La saut de dualité vaut donc 1.

Exercice 3 — *MacCut* (2 points)

Soit le graphe G de 6 sommets et 8 arêtes suivant :



1. Ecrire la matrice Laplacienne associée au graphe G .
2. Formuler le problème de la coupe maximale par un problème quadratique en variables $\{-1, 1\}$ en utilisant la matrice Laplacienne.
3. Donner une formulation équivalente par un programme semi-défini positif.

► **Correction**

$$1. L = \begin{pmatrix} 19 & 0 & -9 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 13 & -4 & 0 & -9 & 0 \\ -9 & -4 & 15 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -7 & -9 & -2 & 0 & 23 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

2.

$$(MC) \begin{cases} \max & 4.75x_1^2 - 4.5x_1x_3 - 3.5x_1x_5 - 1.5x_1x_6 + 3.25x_2^2 - 2x_2x_3 - 4.5x_2x_5 \\ & + 3.75x_3^2 - x_3x_4 + 0.5x_4^2 - x_4x_6 + 5.75x_5^2 - 2.5x_5x_6 + 2.5x_6^2 \\ s.t. & x \in \{-1, 1\}^6 \end{cases}$$

3.

$$(SDP) \begin{cases} \max & 4.75X_{11} - 4.5X_{13} - 3.5X_{15} - 1.5X_{16} + 3.25X_{22} - 2X_{23} - 4.5X_{25} \\ & + 3.75X_{33} - X_{34} + 0.5X_{44} - X_{46} + 5.75X_{55} - 2.5X_{56} + 2.5X_{66} \\ s.t. & \begin{pmatrix} 1 & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & 1 & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{31} & X_{32} & 1 & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & 1 & X_{45} & X_{46} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & 1 & X_{56} \\ X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & rang(X) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 — Programmation quadratique en variables binaires (2 points)

Soit le problème quadratique suivant :

$$(P) \begin{cases} \min & 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 \\ s.t. & x \in \{0, 1\}^3 \end{cases}$$

1. Le problème (P) est-il convexe ? Justifiez.
2. Proposer une reformulation linéaire équivalente de (P) . Justifiez.
3. Proposer une reformulation quadratique et convexe de (P) sachant que ses valeurs propres valent $(4.6, -2.9, 1.3)$.

► **Correction**

1. Le Hessien de (P) est $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ il est indéfini puisque $q_{11} = 0$ et $q_{21} \neq 0$

2.

$$(PL) \begin{cases} \min & 4y_{12} + 6y_{13} + x_2 + 2x_3 \\ s.t. & y_{12} \geq 0 \\ & y_{12} \geq x_1 + x_2 - 1 \\ & y_{13} \geq 0 \\ & y_{13} \geq x_1 + x_3 - 1 \\ & x \in \{0, 1\}^3 \end{cases}$$

Les contraintes de linéarisation \leq sont inutiles dans (PL) , car les coefficients de y_{12} et y_{13} sont positifs et que ces variables n'interviennent que dans l'objectif et les contraintes de linéarisation.

Les variables y_{ii} sont également inutiles puisque $x_i^2 = x_i$.

3.

$$(PC) \begin{cases} \min & 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2.9x_1^2 + 3.9x_2^2 + 4.9x_3^2 - 2.9x_1 - 2.9x_2 - 2.9x_3 \\ \text{s.t.} & x \in \{0, 1\}^3 \end{cases}$$