

# Chapitre 1

## Richesse des systèmes dynamiques continus

### 1.1 Introduction

Ce chapitre et le suivant présentent quelques systèmes dynamiques issus de modèles de la physique, la biologie, la bioinformatique, la virologie informatique, des jeux, ou de l'informatique distribuée. Ce chapitre se focalise sur les systèmes qui ne font pas intervenir explicitement une certaine concurrence entre agents, alors que le second visera à présenter certains de ces modèles.

Comme nous l'avons annoncé dans le chapitre introductif, le but de notre discussion dans ce chapitre est multiple.

Premièrement, nous cherchons à montrer la richesse des systèmes dynamiques, de leurs comportements obtenus, et des difficultés sous-jacentes à leur étude. Presque tous les exemples de ce chapitre sont tirés de l'excellent ouvrage [Hirsch et al., 2003].

Deuxièmement, nous cherchons à démontrer l'intérêt de la classe des problèmes de Cauchy polynomiaux, à la fois par la calculabilité réelle, et par le fait qu'elle couvre vraiment la plupart des systèmes rencontrés dans la nature.

Enfin, nous cherchons à montrer par tous ces exemples que différents dispositifs sont intrinsèquement continus, et utilisables comme tels pour réaliser certains calculs.

Nous discutons aussi, à l'aide du très pédagogique article [Krivine et al., 2006], plusieurs des problèmes qui se posent lorsqu'on cherche à discrétiser des systèmes continus, argumentant par là que l'abstraction continue est souvent la bonne manière de faire.

### 1.2 Préambule mathématique

#### 1.2.1 Systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, un système dynamique à temps continu correspond à une solution d'une équation différentielle ordinaire, avec une condition initiale. C'est-à-dire, à une solution d'un problème de Cauchy du type

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = x \tag{1.1}$$

où  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $E \subset \mathbb{R}^n$  ouvert.

Une trajectoire  $y(t)$  est une fonction différentiable  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  qui satisfait l'équation.

Un système dynamique à temps discret correspond à une suite solution d'une équation de récurrence : l'analogie du problème de Cauchy (1.1) pour les systèmes à temps discret est une équation de récurrence du type

$$y_{t+1} = f(y_t), \quad y_0 = x. \tag{1.2}$$

On trouvera une discussion beaucoup plus complète dans le chapitre 3, de ce qu'on appelle en général un système dynamique.

Un ensemble semi-algébrique est une partie de  $\mathbb{R}^n$  qui se représente par un nombre fini d'égalités et d'inégalités polynomiales. Plus précisément, soit  $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  un polynôme. Notons  $U(g) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g(\mathbf{x}) > 0\}$ . Un ensemble  $E$  est semi-algébrique s'il appartient au plus petit ensemble qui contient les  $U(g)$  et qui est clos par complémentations, unions et intersections.

Par le théorème de Tarski-Seidenberg, cela correspond à tous les ensembles définissables dans la logique du premier ordre sur  $(\mathbb{R}, +, -, \times)$  : tout ensemble qui se définit à partir de constantes réelles, des opérations  $+$ ,  $-$ , et  $\times$ , des négations, conjonctions, disjonctions, et des quantifications existentielles et universelles sur des réels, est semi-algébrique.

En guise de préambule à notre discussion, disons que si la modélisation de systèmes par systèmes dynamiques est très ancienne, il faut prendre conscience que la richesse d'au moins une partie des comportements obtenus n'est discutée que depuis peu.

En particulier, comme l'écrivent Hirsch, Smale et Devaney dans la préface de la deuxième édition [Hirsch et al., 2003] de leur ouvrage, en 1970, lors de la première édition, le mot *chaos*, n'avait jamais été utilisé dans un contexte mathématique, pour parler de systèmes dynamiques. Ils écrivent ainsi

“La découverte de systèmes dynamiques si complexes comme l'application fer à cheval, les enchevêtrements homoclines, le système de Lorenz, et leur analyse mathématique, ont convaincu les scientifiques que les simples mouvements stables comme les solutions d'équilibre ou périodiques ne sont pas les comportements les plus intéressants des équations différentielles.”

## 1.2.2 Systèmes linéaires

Il s'agit des systèmes dynamiques à temps continu  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t)$ , où  $f$  est une fonction linéaire en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . En d'autres termes, il existe une matrice  $A$  telle que

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Par exemple, une particule de masse  $m$  attachée à un ressort voit sa position  $x(t)$  au temps  $t$ , liée à sa dérivée seconde, par l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + p^2 x = 0,$$

pour une certaine constante  $p$  représentant le coefficient de raideur du ressort.

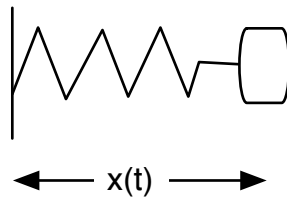


FIG. 1.1 – Oscillateur harmonique

Ce modèle est appelé le modèle de l'oscillateur harmonique, et ses solutions sont du type  $x(t) = A \cos(pt + t_0)$ .

Il s'agit bien d'un système linéaire, puisque, selon la technique classique,  $x$  s'obtient en projetant selon la première coordonnée les solutions du système

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -p^2x. \end{cases}$$

Ce qui fait la force des systèmes linéaires est leur intérêt en pratique. En effet, il est bien connu que l'étude en un point des solutions d'un système non-linéaire peut se réaliser en raisonnant sur sa linéarisation en ce point [Hirsch et al., 2003].

Cependant, leur pouvoir de modélisation est limité. Une simple dynamique comme  $x' = x(1 - x)$  n'est pas linéaire par exemple.

Les systèmes linéaires sont relativement bien compris. Par exemple, sur  $\mathbb{R}^2$ , suivant le déterminant  $\det(A)$  et la trace  $\text{tr}(A)$  de la matrice  $A$  de taille  $2 \times 2$ , on a la classification de comportements possibles de la figure 1.2 : voir [Hirsch et al., 2003].

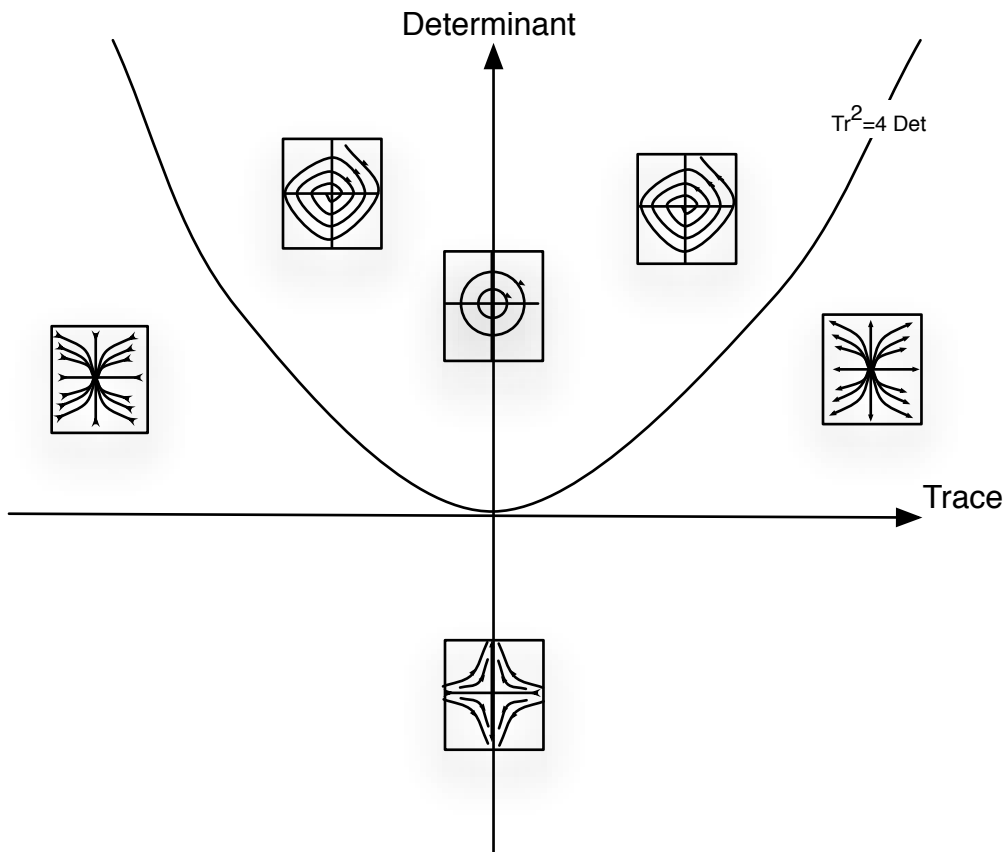


FIG. 1.2 – Représentation symbolique des dynamiques de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , en dimension 2, suivant la trace et le déterminant de  $A$  : voir [Hirsch et al., 2003].

Cette classification montre du doigt un phénomène intéressant. Tout d'abord, même si le système est linéaire, le type de dynamique obtenu est en fait fonction du déterminant et de la trace de la matrice  $A$ , c'est-à-dire une condition semi-algébrique sur les coefficients de  $A$ , et non pas une condition linéaire.

En dimension supérieure, l'analyse est plus subtile que la simple considération de la trace et du déterminant, mais l'observation reste vraie : les bons outils pour analyser des dynamiques linéaires ne sont pas des

fonctions ou des conditions linéaires, mais des conditions semi-algébriques.

Que des conditions semi-algébriques suffisent peuvent se voir comme une conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg.

Mais on peut souvent être plus explicite sur les conditions en question : par exemple, le théorème de Routh-Hurwitz affirme le résultat suivant.

**Théorème 1 (Routh-Hurwitz)** *L'origine est un point stable attracteur du système linéaire  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  sur  $\mathbb{R}^n$  ssi  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$  avec*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2k-1} & b_{2k-2} & b_{2k-3} & b_{2k-4} & b_{2k-5} & b_{2k-6} & \cdots & b_k \end{vmatrix}$$

où le polynôme caractéristique de  $A$  s'écrit  $\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$ , en d'autres termes  $b_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i |A - \lambda I|}{d\lambda^i}(0)$

Ainsi, le bon outil pour discuter des systèmes linéaires est en fait la manipulation de conditions de signes sur des polynômes.

### 1.2.3 Problèmes de Cauchy polynomiaux

Les systèmes

$$\mathbf{x}' = p(\mathbf{x}, t) \tag{1.4}$$

où  $p$  est un vecteur de polynômes (en  $\mathbf{x}$  et  $t$ ) ne sont pas des systèmes linéaires, mais la remarque précédente reste vraie appliquée à ces systèmes : l'étude de la stabilité en un point d'un système, peut se réaliser par linéarisation en ce point, et donc avec des polynômes. En quelque sorte, les polynômes permettent bien de parler de polynômes, ce que les fonctions linéaires ne permettent pas. Observons que d'une certaine façon cet argument est à la base<sup>1</sup> du modèle de Blum Shub et Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998] sur lequel nous reviendrons (dans le chapitre 5).

Suivant [Graça, 2007], nous proposons de distinguer une classe particulière d'équations différentielles, que nous nommerons les *problèmes de Cauchy polynomiaux*.

**Définition 1 (Problème de Cauchy polynomial)** *Un problème de Cauchy polynomial est un problème de Cauchy du type*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' & = p(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) & = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

où  $p(\mathbf{x}, t)$  désigne un vecteur de polynômes, et  $\mathbf{x}_0$  est une condition initiale.

Ce qui fait la réelle valeur de cette classe de système est sa généralité, et sa puissance. Immédiatement, tous les systèmes linéaires sont dans cette classe, comme toutes les dynamiques où explicitement l'équation est polynomiale. Mais cela est aussi vrai pour des systèmes qui font apparaître des fonctions comme *sin*, *cos*, *...*, et en fait même n'importe quelle fonction qui se définit à son tour par (une projection d') une solution d'un problème de Cauchy polynomial, ce qui permet d'affirmer que tous les exemples de livres comme [Hirsch et al., 2003, Murray, 2002], et en fait tous ceux de ce document sont dans cette classe.

Par exemple, considérons la dynamique d'un pendule. Les lois de la physique donnent immédiatement une dynamique du type

$$x'' + p^2 \sin(x) = 0.$$

Lorsque l'angle  $x(t)$  est faible, on peut approcher cette dynamique par l'équation de l'oscillateur harmonique, qui est linéaire. Si on ne fait pas cette hypothèse, a priori la fonction sinus rend la dynamique non directement solution d'une équation différentielle polynomiale.

<sup>1</sup>Au moins de l'existence d'une machine universelle dans le modèle de l'article initial [Blum et al., 1989].

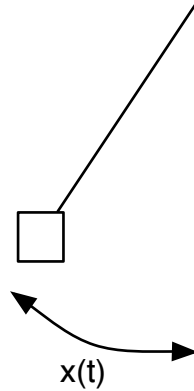


FIG. 1.3 – Pendule

Cependant, posons  $y = x'$ ,  $z = \sin(x)$ ,  $u = \cos(x)$ . Un simple calcul de dérivée montre que l'on doit avoir

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -p^2 z \\ z' &= yu \\ u' &= -yz \end{cases} .$$

Ce qui montre que la solution  $x(t)$  s'obtient bien comme la projection d'une solution un système de Cauchy polynomial.

En fait, notre lecteur pourra effectivement se persuader que tous les systèmes considérés dans des livres comme [Hirsch et al., 2003], ou [Murray, 2002] peuvent bien se ramener à des équations différentielles définies par des problèmes de Cauchy polynomiaux, ce qui montre leur intérêt pratique, ne serait-ce que pour la modélisation.

On trouvera dans [Graça, 2007] la preuve de la clôture par addition, soustraction, multiplication, division, composition, différentiation, composition inverse des fonctions (projections de) solutions de problèmes de Cauchy polynomiaux. On y trouvera même la preuve qu'une solution d'une équation du type  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t)$ , où  $f$  est un vecteur de fonctions (projections de) solutions de problèmes de Cauchy polynomiaux se ramène à un problème de Cauchy polynomial.

### 1.2.4 Problèmes de Cauchy polynomiaux et GPAC

Ces remarques ne sont pas si anodines qu'elle n'y paraissent, car elle nous semble l'incarnation de remarques profondes de calculabilité réelle.

En effet, cette classe de système dynamique prend encore plus d'intérêt si l'on réalise qu'elle capture tout ce qui est calculable par certaines machines à temps continu, comme le General Purpose Analog Computer de Shannon [Shannon, 1941].

Ce modèle de calcul est une abstraction théorique des machines continues qui existaient à l'époque de Shannon, comme l'analyseur différentiel construit pour la première fois en 1931 sous la supervision de Vannevar Bush au MIT [Bush, 1931]. Si l'informatique digitale l'a emporté, n'oublions pas son ancêtre, l'informatique analogique. Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur (le chapitre 3) sur l'histoire des machines analogiques.

En effet il a été prouvé récemment (corrigeant et simplifiant les articles [Shannon, 1941], [Pour-El, 1974], [Lipshitz and Rubel, 1987]) que :

**Théorème 2** ([Graça and Costa, 2003]) *Une fonction est GPAC-généralisable (i.e. calculable par le General Purpose Analog Computer de Shannon) si et seulement si elle est une projection d'une solution d'un problème de Cauchy polynomial.*

En fait, le GPAC, ou les systèmes polynomiaux permettent de capturer presque toutes les fonctions en pratique. En d'autres termes, Shannon avait bien raison d'appeler son modèle de calcul le "General Purpose" analog computer, puisqu'il possède bien une certaine propriété d'universalité, comme la machine de Turing possède une propriété d'universalité sur les machines discrètes, et les fonctions calculables discrètes.

Il est intéressant de réaliser que nous avons à peu près le même phénomène qu'en calculabilité classique pour certaines classes de fonctions, comme les fonctions élémentaires, introduites par [Kalmár, 1943], ou les fonctions primitives récursives.

En effet, en calculabilité classique, toutes les fonctions usuelles ou presque sont élémentaires (respectivement primitives récursives). Les seuls rares contre-exemples, comme la fonction d'Ackermann, correspondent d'une certaine façon à une diagonalisation sur cette propriété [Kalmár, 1943], [Rose, 1984]. D'autre part, en calculabilité classique, ces classes sont très robustes et stables par de nombreuses opérations.

Ici, presque toutes les fonctions sont GPAC calculables. Les propriétés précédentes attestent de la robustesse de la classe des fonctions GPAC calculables. Les quelques rares exceptions de fonctions non GPAC calculables connues sont obtenues en considérant des fonctions qui ne sont pas différentiellement algébriques : une fonction unaire  $y$  est différentiellement algébrique sur l'intervalle  $I$ , s'il existe un polynôme non nul  $p$  à coefficients réels tel que

$$p(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

sur  $I$ . Une fonction qui n'est pas différentiellement algébrique est dite *transcendentale*.

**Question 1** *Est-il possible de formaliser cela ? Peut-on relier fonctions élémentaires, primitives récursives et fonctions calculées par le GPAC, plus formellement que par cette simple analogie ?*

Parmi les fonctions transcendentalement transcendentales on compte :

**Théorème 3** *Les fonctions*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

*et la fonction zeta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k^x}$$

*ne sont pas différentiellement algébriques.*

Ces fonctions constituent en quelque sorte l'analogue d'Ackermann pour les fonctions élémentaires. La preuve pour la fonction  $\Gamma$  est due à Hölder en 1887 [Hölder, 1887]. Celle de la fonction  $\zeta$  à Hilbert, rédigée par Stadigh [Stadigh, 1902].

## 1.3 Discret versus continu

### 1.3.1 Ne soyons pas trop discrets

Après ces préambules mathématiques, venons en au coeur du sujet.

Certains de nos collègues, souvent informaticiens, ont régulièrement le travers de nous demander pourquoi nous nous intéressons à des systèmes continus, avec des arguments du type

- en informatique, rien n'est continu, tous les processus sont discrets
- le continu n'est qu'une abstraction irréaliste du monde discret
- les systèmes continus il faut de toute façon les discrétiser pour les simuler
- ...

- que fait l'informatique là-dedans
- ...

Notre réponse à ces objections constituera une suite d'exemples, pour motiver cette discussion.

### 1.3.2 Quelques systèmes dynamiques discrets

Commençons tout d'abord par présenter quelques exemples de classes de systèmes dynamiques à temps discret qui ont fait beaucoup couler d'encre. Le premier plutôt chez les informaticiens. Le second plutôt chez les mathématiciens.

#### La machine de Turing

Tout d'abord, la machine de Turing. Une machine de Turing sur l'alphabet  $\Sigma$ , avec l'ensemble d'états internes  $Q$ , correspond bien à un système dynamique à temps discret. L'état de la machine à un instant donné correspond à la donnée du contenu du ruban, de la position de la tête de lecture, ainsi que de l'état interne de la machine. Tout ceci peut se coder par exemple par un élément de l'ensemble  $\Sigma^\omega \times \mathbb{Z} \times Q$ . Le programme de la machine correspond à certaines règles d'évolutions, qui se traduisent immédiatement par une fonction de transition discrète qui donne, à partir de l'état de la machine au temps  $t$ , l'état de la machine au temps  $t + 1$ .

Voir une machine de Turing comme un système dynamique à temps discret particulier ne fait pas réellement avancer les choses (et est loin d'être original, voir par exemple [Minsky, 1967]), mais il nous semble important de comprendre que lorsqu'on discute de systèmes dynamiques à temps discret en toutes généralités, on a au moins la richesse de cette sous-classe : possibilité d'autosimulation, résultats d'indécidabilité, etc. ... La possibilité qu'une machine de Turing puisse calculer toute fonction calculable, et en particulier une autre machine de Turing, implique rapidement que c'est la classe de systèmes dynamiques la pire qu'il soit au niveau des comportements pour tous les systèmes dynamiques à temps discret (au moins du moment que la fonction de transition est calculable). En particulier, la classe des machines de Turing est une classe de systèmes chaotiques, qui peut exhiber des attracteurs étranges, etc. ...

Ces considérations apparaissent aussi sur les systèmes dynamiques à temps continu, dès que ceux-ci permettent la simulation de systèmes dynamiques à temps discrets comme les machines de Turing.

#### L'application logistique

Ayant considéré le pire, tentons de considérer le plus simple. Le plus simple serait une dynamique linéaire du type  $x(t+1) = ax(t)$ , i.e.  $x(t) = x(0)a^t$ , c'est-à-dire une dynamique d'une suite géométrique, pas vraiment intéressante.

Considérons une dynamique polynomiale sur  $\mathbb{R}$  du type

$$x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t)), \tag{1.5}$$

c'est-à-dire *l'application logistique*. On supposera  $\lambda > 0$ .

Cette dynamique est en fait motivée par une dynamique de population. En effet, si on suppose que le taux de fécondité de chaque individu est constant à chaque génération, le nombre d'individu au temps  $t$  suit la loi de Malthus

$$x(t+1) = ax(t),$$

et donc une croissance exponentielle, sans limites.

Il est nettement plus raisonnable de supposer, comme l'a fait Verhulst en 1838, que la dynamique est en fait du type

$$x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t)/M),$$

où  $M$  est la population maximale que peut supporter l'environnement. En faisant le changement de variable  $x(t) = X(t)/M$ , on retombe sur la dynamique précédente.

Depuis l'article [May, 1976], il est bien connu qu'une variété extrêmement riche de comportements est générée selon la valeur de la constante  $\lambda$ . Rappelons les propriétés principales.

Pour  $1 < \lambda < \lambda_1 = 3$ , le point fixe  $\lambda^* = 1 - 1/\lambda$  est stable, globalement attracteur et attire toute trajectoire qui part de  $x(0) \in ]0, 1[$ . Pour  $\lambda = \lambda_1$ , un cycle de longueur 2 apparaît par le biais d'une bifurcation en fourche. Ce cycle de longueur 2 reste stable et globalement attracteur pour  $x(0) \in ]0, 1[$ , et  $3 < \lambda < \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$ . Cela continue avec une suite  $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_k$  telle que pour  $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$  il y a un cycle attracteur de longueur  $2^k$ . La suite  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots$  converge vers  $\lambda^\infty \approx 3.5699$ . Pour  $\lambda^\infty < \lambda$  la dynamique devient chaotique.

La dynamique de ce système est maintenant relativement bien connue, mais avant 1976, on ne se doutait pas qu'un système dynamique en dimension 1 à temps discret, qui plus est aussi simple soit capable d'une telle richesse de comportements possibles.

Le dessin de la figure 1.4 est maintenant très souvent présent dans les livres récents sur les systèmes dynamiques.

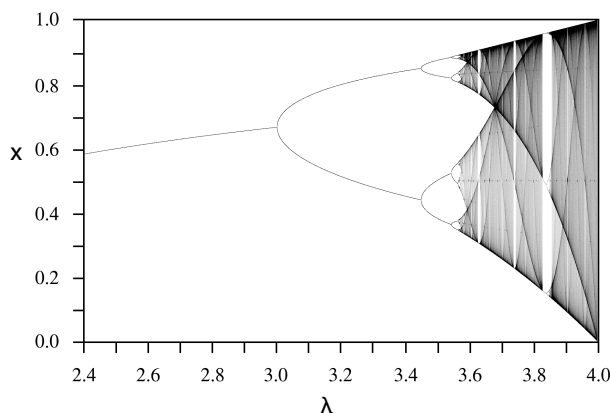


FIG. 1.4 – Diagramme d'orbites pour la famille logistique pour  $2.4 < \lambda < 4$  (image provenant de la base commune de Wikipedia)

### 1.3.3 Sur les méfaits de la discrétisation

Répetons les propos, fort pédagogiques et instructifs de [Krivine et al., 2006]. Il n'est pas possible de donner une solution analytique de la dynamique (1.5) (sauf pour  $\lambda = 4$ ). Aussi, puisque c'est la limite quand  $t$  est très grand qui est d'intérêt, il est intéressant de s'intéresser au problème continu correspondant. Le système continu correspondant est

$$y' = y(\lambda(1 - y) - 1) \quad (1.6)$$

Les solutions de (1.5) correspondent à la discrétisation par la méthode d'Euler avec un pas de 1 de l'équation continue (1.6). Cependant, il s'avère que (1.6) possède une solution analytique explicite

$$y(t) = \frac{(\lambda - 1)y_0}{\lambda y_0 + (\lambda(1 - y_0) - 1)e^{-(\lambda - 1)t}}$$

ce qui tend vers  $\lambda^* = 1 - 1/\lambda$ . En d'autres termes, la dynamique continue n'est pas chaotique, et se comporte beaucoup mieux que ses discrétisations.

Les discrétisations par la méthode d'Euler de la version continue reflètent le comportement de la version continue lorsque le pas de discrétisation est plus petit qu'une valeur caractéristique, et deviennent chaotique pour des pas de discrétisations plus grands [Krivine et al., 2006].



Ceci constitue un premier exemple de système, où la discrétisation peut introduire des complications, et rendre l'analyse beaucoup plus ardue qu'en restant dans le monde continu.

Cet exemple peut paraître artificiel, est complètement déconnecté de toute réalité. Il est vrai que l'application logistique peut sembler un jouet pour mathématiciens. Cependant, si des équations aussi simples sont problématiques, on ne peut s'attendre à beaucoup d'optimisme lorsque les équations se compliquent.

Pour les plus sceptiques de l'apport du continu, revenons à des choses bien connues. Commençons par nous persuader qu'on sait calculer autrement qu'avec un ordinateur discret. Pour cela, montrons comment réaliser facilement des opérations continues.

## 1.4 Réaliser des calculs continus

Chacun s'intéresse à la puissance des machines qu'il possède... Alors voyons ce qu'était la calculabilité du XIX<sup>ème</sup> siècle. Nous ne sommes pas en train de promouvoir l'informatique de deux siècles en arrière, mais juste de souligner que la calculabilité réelle continue ne date nullement d'aujourd'hui, et que cette calculabilité a donné par le passé de très jolis résultats mathématiques.

### 1.4.1 Mécanismes planaires

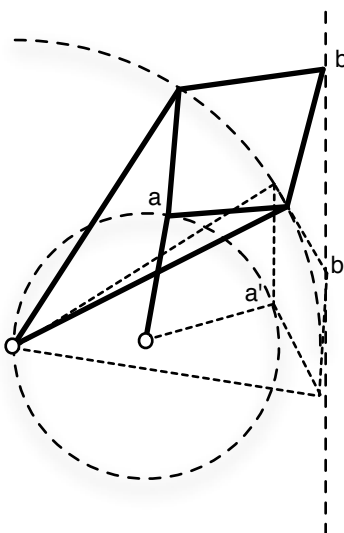


FIG. 1.5 – Mécanisme de Peaucellier. Le mouvement circulaire de  $a$  est transformé en un mouvement linéaire de  $b$ .

La puissance des mécanismes planaires constitués de barres rigides jointes à leurs extrémités par des rivets a attiré beaucoup d'attentions en Angleterre et en France dans la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, avec un regain d'intérêt en Russie dans les années 1940. Voir par exemple [Artobolevskii, 1964], [Svoboda, 1948].

Tout le monde connaît le pantographe qui permet de réaliser des dilatations. Le mécanisme de Peaucellier permet de transformer un mouvement linéaire en un mouvement circulaire.

Plus généralement, il est naturel de se poser la question de la puissance de calcul de tels dispositifs.

Elle est donnée par le théorème suivant très joli, [Artobolevskii, 1964], [Svoboda, 1948], attribué à Kempe [Kempe, 1876], formulé ici à partir de [Smith, 1998] : la puissance de tels dispositifs correspond aux ensembles semi-algébriques.

**Théorème 4 (Complétude des mécanismes planaires)** – Pour tout ensemble semi-algébrique  $S$  non-*vide*, il existe un mécanisme avec  $n$  points qui se promènent sur des segments linéaires, mais libres de se déplacer sur ces segments, et forçant la relation  $(x_1, \dots, x_n) \in S$ , où  $x_i$  sont les distances sur les segments linéaires.

– Réciproquement, le domaine d'évolution de tout mécanisme fini planaire est semi-algébrique.

On voit réapparaître de nouveau les polynômes, et les ensembles semi-algébriques.

Puisque ces mécanismes peuvent paraître antiques, passons à de l'électronique plus moderne, par plusieurs exemples.

### 1.4.2 Courbes de Lissajous

Notre premier exemple est purement pédagogique, et est ici essentiellement parce qu'il nous amuse beaucoup. Cela dit, il pose une question de fond, plus profonde qu'il n'y paraît.

**Question 2** *Qu'est ce qui est raisonnable et qui ne l'est pas quand on parle de calculs sur les réels ?*

Il est facile de générer une sinusoïde avec un circuit  $R, L, C$ , et donc une solution à l'équation  $x'' = -p^2x$ . La constante  $p$ , liée à la période du signal, s'exprime facilement en fonction de  $R, L, C$ .

Tout étudiant qui a fait des travaux pratiques de physique en terminale s'est essayé à l'oscilloscope, et a tenté de brancher sur l'entrée qui correspond à l'axe des  $x$  un tel signal sinusoïdal, et sur l'axe des  $y$  une autre sinusoïde de période distincte, correspondant à une autre constante  $q$ .

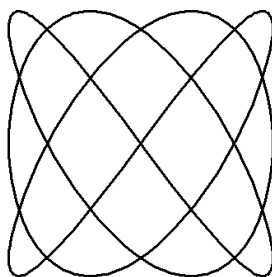


FIG. 1.6 – Une courbe obtenue pour  $p/q = 4/3$ .

En faisant varier la valeur de cette autre période, tout bon étudiant sait qu'on obtient des courbes de Lissajous : voir la figure 1.6.

**Théorème 5 (Courbes de lissajous)** – Pour  $p/q$  rationnel, la courbe est stable graphiquement sur l'oscilloscope, et permet de lire la valeur de la fraction  $p/q$ , par le nombre nombre d'oscillations de  $x$  et de  $y$  sur un cycle.

– Pour  $p/q$  irrationnel, la courbe est dense sur l'écran.

D'une certaine façon, on a un système physique de calculs capable de déterminer si le rapport de deux valeurs est rationnel ou irrationnel. Théoriquement, cela est impossible, pour des modèles de calculs sur les réels les plus classiques comme l'analyse récursive. N'est-ce pas étonnant ?

Observons que même si l'on ne croit pas au test de rationalité irrationnalité, on observera qu'étant donné  $p, q$ , le système retourne l'écriture réduite de la fraction  $p/q$ , i.e. simplifie les fractions.

Bon, les esprits les plus chagrins n'aimeront pas notre exemple, et notre modèle de calcul par oscilloscope, en discutant le comment détermine t-on si une courbe est dense ou non, ou comment lire le nombre d'oscillations de  $x$  et  $y$  quand celui-ci est grand, . . .etc. Cela dit, sauraient-ils m'expliquer ce qui est "raisonnable"

ou ne l'est pas, formellement pour ce modèle de calcul ? Et caractériser mathématiquement quelle serait sa puissance, si l'on n'autorise que des opérations "raisonnables" de lecture sur l'écran, sans faire référence à une hypothétique thèse de Church pour oscilloscope ?

Bon certes, considérons des choses plus réalistes.

### 1.4.3 Montage intégrateur

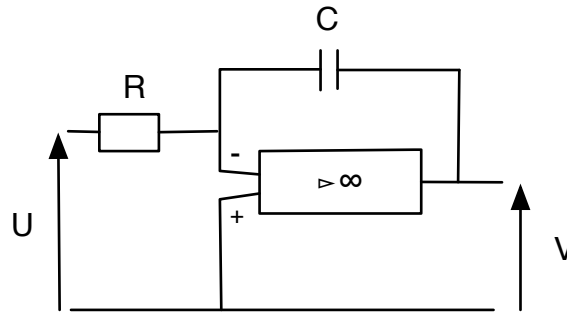


FIG. 1.7 – Un montage intégrateur utilisant un amplificateur opérationnel.

C'est un exercice classique de classe de terminale que d'exprimer la tension  $V$  de sortie en fonction de la tension  $U$  d'entrée dans le montage de la figure 1.7 comprenant un amplificateur opérationnel.

On a

$$V(t) = -1/RC \int_0^t U(t)dt,$$

i.e. le système réalise un montage intégrateur. La tension en sortie est l'intégrale de la tension en entrée.

Ceci prouve, si besoin, qu'il n'y a nul besoin de discrétiser pour calculer une intégrale. Il est ainsi facile de réaliser des opérations continues, autrement qu'avec des ordinateurs classiques.

### 1.4.4 Un ordinateur continu

Si l'on se souvient du montage intégrateur de la classe de terminale, on se souvient probablement des montages additionneurs, et on sait comment générer une tension constante.

Autrement dit, on conviendra qu'il est possible de réaliser chacune des opérations de la figure 1.8. Pour chacun des éléments de cette figure, il s'agit de réaliser un montage qui génère (à droite) en sortie la relation indiquée en fonction de ses entrées (à gauche).

On sait alors réaliser des circuits comme sur la figure 1.9, en connectant différents éléments, en autorisant les rétroactions (feedbacks).

Shannon a prouvé que ce qu'on lisait à l'une des sorties d'un tel système correspondait exactement aux fonctions calculables par sa machine, le General Purpose Analog Computer [Shannon, 1941]. Bien entendu, à cette époque, il n'y avait pas d'amplificateurs opérationnels, ni d'électronique d'ailleurs, mais on savait réaliser mécaniquement toutes les opérations de la figure 1.8, et on utilisait effectivement ces mécanismes dans les ordinateurs mécaniques de l'époque comme l'Analyseur Différentiel du MIT.

Autrement dit, on a

**Théorème 6 ([Shannon, 1941])** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- *La fonction  $f$  est calculable par un tel montage (i.e. se lit en fonction du temps à la sortie d'une unité d'un tel assemblage d'unités)*
- *La fonction  $f$  est GPAC-calculable (i.e. calculable par Analyseur Différentiel)*

– La fonction  $f$  est projection d'une solution d'un problème de Cauchy polynomial.

La preuve de Shannon (corrigée par [Pour-El, 1974, Lipshitz and Rubel, 1987, Graça and Costa, 2003]) est complètement constructive, et donne l'assemblage en fonction de la description du problème de Cauchy polynomial.

En d'autres termes, le théorème peut encore se lire comme : “nous savons calculer toute fonction solution d'un problème de Cauchy polynomial, en temps réel, sans utiliser le moindre ordinateur discret. Réciproquement, on ne peut pas faire plus.”

Croisé avec nos remarques sur le fait que toutes les fonctions usuelles sont projections d'une solution d'un problème de Cauchy polynomial, sauf quelques rares exemples ressemblant à une diagonalisation, n'est-on pas en train de dire que le GPAC capture le bon modèle de ce qui est calculable sur les réels ?

**Question 3** *Il y'a t'il une thèse de Church pour les calculs en temps continu ?*

Les gens de l'analyse récursive diront que non, puisque la fonction  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$  est calculable au sens de l'analyse récursive, alors qu'elle n'est pas GPAC calculable. Mais on compare deux notions de calculs distinctes : dans le modèle de l'analyse récursive, on parle de calculs à la limite, et dans le GPAC de calcul en temps réel. Cela mène à la question suivante, nettement moins ambitieuse, sur laquelle nous reviendrons.

**Question 4** *Quelle est la puissance exacte du GPAC, si l'on ne se restreint pas aux fonctions calculées en temps réel ? Le GPAC est-il réellement moins puissant que les machines de Turing ?*

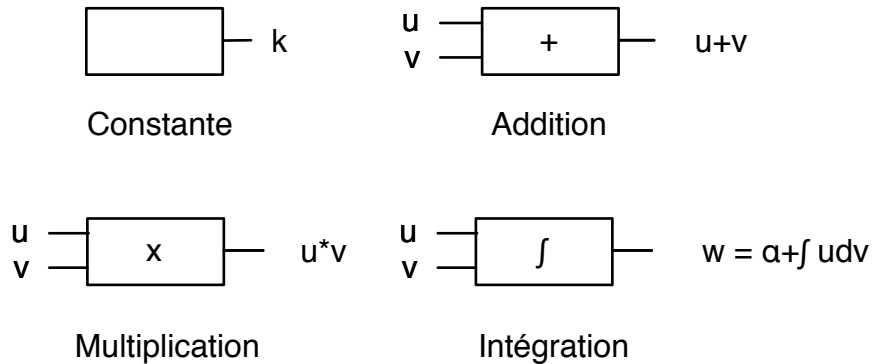


FIG. 1.8 – Les différentes unités de base d'un GPAC (la sortie  $w$  d'un opérateur d'intégration satisfait  $w'(t) = u(t)v'(t)$ ,  $w(t_0) = \alpha$  pour une condition initiale  $\alpha$ ).

## 1.5 Des systèmes dynamiques remarquables

Oublions quelques pages le besoin de voir des systèmes de calculs dans tous les dispositifs, et discutons de différents systèmes dynamiques de la littérature.

Notre discussion vise uniquement à montrer la richesse des comportements possibles pour des systèmes dynamiques, en discutant parfois des problèmes de discrétisation associés. Elle se poursuivra dans le chapitre suivant, en discutant cette fois des modèles faisant intervenir certaines notions de concurrence.

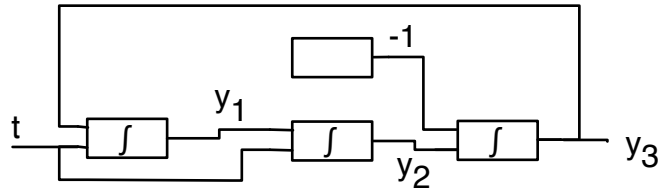


FIG. 1.9 – Génération de cos et sin par un GPAC. Sous forme de système d'équations, on a  $y_1' = y_3$ ,  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2' = y_1$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $y_3' = -y_2$ ,  $y_3(0) = 0$ . Il en suit que  $y_1 = \cos$ ,  $y_2 = \sin$ ,  $y_3 = -\sin$ .

### 1.5.1 En météorologie

Le système dynamique chaotique le plus célèbre est sans contestation le système formulé par Lorenz en 1963 comme un modèle (largement simplifié) de la convection atmosphérique

Le système de [Lorenz, 1963] s'écrit

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= \rho x - y - xz \\ z' &= xz - bz \end{cases}$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $b$  sont trois paramètres réels.

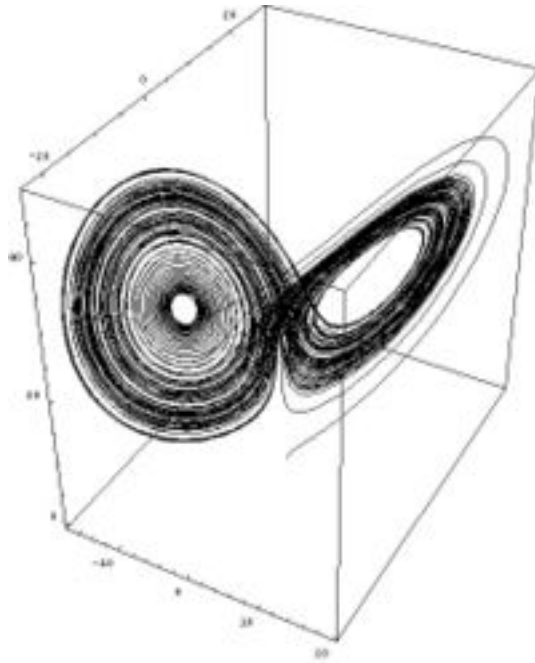


FIG. 1.10 – Une dynamique du système de Lorenz (image provenant de la base commune de Wikipedia).

Pour  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $b = 8/3$ , le système possède ce que l'on appelle un attracteur étrange. Avant que le modèle ne devienne la proie des scientifiques, les seuls attracteurs connus pour des systèmes dynamiques continus étaient des points fixes et des orbites closes [Hirsch et al., 2003]. Les trajectoires convergent vers l'attracteur, cependant deux conditions initiales arbitrairement proches diffèrent ultimement dans leur manière

de converger vers cet attracteur. De mêmes phénomènes ont été exhibés ensuite pour d'autres dynamiques, comme pour l'attracteur de Rosler.

Nous renvoyons à [Hirsch et al., 2003], pour une introduction. Nous observerons que pour étudier ce système dynamique continu, les auteurs de [Hirsch et al., 2003], le remplacent par une dynamique discrète, en fait une dynamique hybride. Cela montre, si besoin est, que les systèmes discrets, et surtout les systèmes hybrides, sont pertinents pour l'analyse de systèmes continus.

On observera que le système est de dimension 3. Les phénomènes chaotiques du même type en dimension 2 ne sont pas possibles en raison du Théorème de Poincaré-Bendixon.

## 1.5.2 En chimie

### Modèle de Lotka-Volterra

Lotka observa dans [Lotka, 1920] que l'ensemble de réactions couplées, autocatylitiques suivant possède des propriétés dynamiques remarquables.

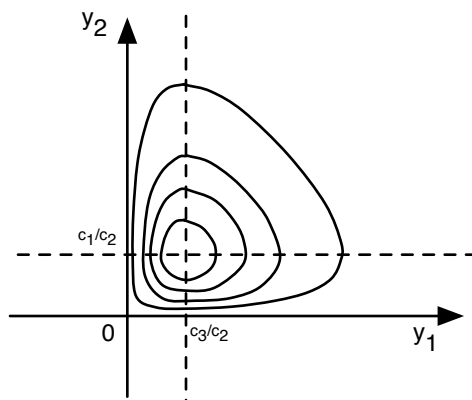
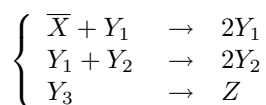


FIG. 1.11 – Dynamiques du modèle de Lotka-Volterra

Mis en équation, la dynamique est simplement

$$\begin{cases} y_1' & = c_1 y_1 - c_2 y_1 y_2 \\ y_2' & = c_2 y_1 y_2 - c_3 y_2 \end{cases}$$

où  $c_1, c_2, c_3$  sont les constantes cinétiques des réactions.

Cette dynamique coïncide avec la dynamique proposée par Volterra en 1925 [Volterra, 1931] comme un modèle simple des systèmes proies prédateurs sur lesquels nous reviendrons.

**Théorème 7** *Le système possède un point stable  $y_1 = c_3/c_2$ ,  $y_2 = c_1/c_2$ . Toutes les trajectoires partant d'un autre point que celui-ci s'avère former des courbes closes, en laissant invariant la quantité  $H(u, v) = \alpha(u - \log u) + (v - \log v)$ , où  $u = c_2 y_1/c_3$ ,  $v = c_2 y_2/c_1$ ,  $\alpha = c_3/c_2$ . En d'autres termes, les trajectoires sont les courbes de niveau de la fonction  $H$  : voir la figure 1.11*

Le système est instructif pour plusieurs raisons. D'une part, il montre de façon théorique que certains mécanismes chimiques peuvent provoquer des oscillations. Cependant le modèle est purement formel, sans lien direct avec un système réel, et à vrai dire avant la réaction découverte par Belousov, discutée plus loin, la plupart des chimistes pensaient que cela était impossible d'observer physiquement de telles oscillations, en raison des principes de la thermodynamique.

Surtout, c'est un exemple fort bien discuté dans [Krivine et al., 2006], à propos de problèmes liés à la discrétisation.

En effet, [Krivine et al., 2006] montre que tout schéma d'Euler explicite de simulation de la dynamique de ce système ne conserve pas la fonction  $H$ , et donc qu'en pratique les oscillations divergent dans toute simulation numérique par une méthode d'Euler. Il est possible de construire un schéma d'Euler implicite qui fonctionne [Krivine et al., 2006], mais cela montre encore une fois que discrétiser un système continu est souvent très problématique, et donne lieu à des systèmes qui ne simulent pas fidèlement le système sous-jacent.

## Réaction de Belousov-Zhabotinsky

La réaction oscillante la plus connue est sans conteste la réaction découverte par Belousov en 1950.

Belousov s'intéressait au cycle de Krebs, et notamment au rôle de l'acide citrique dans ce cycle. Le cycle de Krebs est un mécanisme biochimique complexe intervenant dans le métabolisme des sucres dont le glucose. Belousov cherchait à comprendre le rôle de l'acide citrique qui est oxydé dans ce cycle. Il pensa le doser grâce au bromate de potassium, mais la réaction était trop lente et il ajouta un catalyseur. Mais il constata alors que le milieu réactionnel changeait de couleur périodiquement. Il entreprit alors une étude approfondie en variant le pH de la solution et en ajoutant un indicateur coloré. Cependant toutes ses tentatives de publications furent refusées par des jurys hostiles à l'idée d'oscillations chimiques, argumentant avec la thermodynamique sur l'impossibilité de la chose. Il publia uniquement une note dans le journal méconnu *Sbornik Referatov po Radiacni Medecine*, reprise dans [Field and Burger, 1985]

En 1961, Anatol Zhabotinsky, étudiant en biophysique à l'Université de Moscou, consacra son travail de thèse à l'étude approfondie de la réaction de Belousov [Zaikin and Zhabotinsky, 1970]. Suivant la suggestion de son professeur S. E. Schnoll, il remplaça l'acide citrique par l'acide malonique et obtint un système dans lequel l'amplitude des oscillations était encore plus grande que dans le système original.

Pendant plusieurs années, la réaction de Belousov-Zhabotinsky resta une curiosité de laboratoires, peu connue en particulier à cause du contexte politique de l'époque [Dupuis and Berland, 2004].

On connaît maintenant plusieurs exemples de réactions oscillantes. Nous renvoyons à [Murray, 2002, Field and Burger, 1985] pour de plus amples discussions de cette réaction.

### 1.5.3 En physique

#### Équation de Van der Pol

Considérons un circuit  $R, L, C$  comme sur la figure ci-dessous où  $R$  n'est pas une résistance parfaite : une résistance parfaite introduirait une relation linéaire entre la tension à ces bornes et l'intensité qui la traverse. Supposons que cette relation soit en fait une certaine fonction  $V = f(i)$ .

En posant,  $L = C = 1$ ,  $x$  l'intensité qui traverse le solénoïde,  $y$  la tension aux bornes du condensateur, le système doit vérifier

$$\begin{cases} x' &= y - f(x) \\ y' &= -x \end{cases}$$

ce qu'on appelle *l'équation de Lienard*.

Dans le cas  $f(x) = x^3 - x$ , on obtient *l'équation de van der Pol*.

$$x' = y - x^3 + x$$

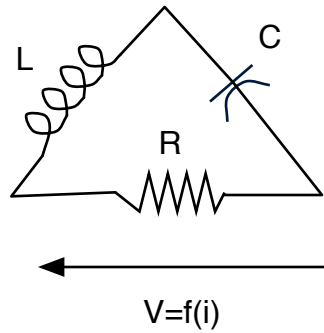


FIG. 1.12 – Circuit  $R,L,C$

Le résultat suivant est un joli exercice classique de mathématiques. Le résultat est très joli, car la preuve ne consiste pas du tout à exhiber la solution périodique, mais à utiliser des arguments de topologie (point fixe) sur une section de Poincaré du système.

**Théorème 8** *Il y a une solution non triviale périodique de l'équation de van der Pol, et toute autre solution (sauf le point d'équilibre instable à l'origine) tend vers cette solution. En d'autres termes, le système oscille.*

Si l'on considère

$$\begin{cases} x' &= y - f_\mu(x) \\ y' &= -x \end{cases}$$

avec  $f_\mu(x) = x^3 - x$ ,  $\mu \in [-1, 1]$ , on retrouve le système de van der Pol pour  $\mu = 1$ . On observe une bifurcation de Hopf : pour  $\mu < 0$ , toutes les solutions convergent vers l'origine : le système est sans vie. Lorsque  $\mu$  devient positif, la solution périodique apparaît, le système se met à osciller et, d'une certaine façon, prend vie.

### Problème des $n$ -corps

Le problème des  $n$ -corps consiste à résoudre les équations du mouvement de  $n$  corps en interaction gravitationnelle, connaissant leurs masses et leurs positions et vitesses initiales.

Tout étudiant non-amnésique sait que le problème à deux corps est entièrement soluble analytiquement, en utilisant les lois de Newton et de Kepler.

Contrairement à une idée répandue, le problème à trois corps possède une solution analytique exacte, découverte par Sundman en 1909 [Henkel, 2001]. Malheureusement cette solution se présente sous la forme d'une série infinie de convergence très lente, ce qui la rend inutile en pratique.

Dans le cas de  $n$ -corps, pour  $n > 2$ , en dehors de quelques cas rares où une solution exacte est connue, on utilise en général des méthodes de résolution approchées.

Comme le fait remarquer [Krivine et al., 2006], observons que toute discrétisation du schéma de mouvement du problème à 2-corps par une méthode d'Euler explicite ne simule pas correctement le mouvement des 2 corps. En effet, ces schémas ne conservent pas l'énergie du mouvement.

Comme le fait observer, [Coullet et al., 2004], [Krivine et al., 2006], pour l'anecdote observons que Newton dans ses *Principia* en 1687, qui ne connaissait pas le calcul différentiel inventé ultérieurement, a fait un raisonnement géométrique discret pour établir la théorie de l'attraction universelle, en utilisant un schéma de discrétisation implicite, emprunté à Robert Hooke. Il est remarquable que son schéma ait le mérite de conserver l'énergie [Coullet et al., 2004], [Krivine et al., 2006], alors qu'un schéma de discrétisation d'Euler explicite n'aurait pas permis le raisonnement aussi simplement.



# Bibliographie

- [Artobolevskii, 1964] Artobolevskii, I. (1964). *Mechanisms for the generation of plane curves*. Macmillan, New York. Translated by R.D. Wills and W. Johnson.
- [Blum et al., 1998] Blum, L., Cucker, F., Shub, M., and Smale, S. (1998). *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag.
- [Blum et al., 1989] Blum, L., Shub, M., and Smale, S. (1989). On a theory of computation and complexity over the real numbers; NP completeness, recursive functions and universal machines. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 21(1) :1–46.
- [Bush, 1931] Bush, V. (1931). The differential analyser. *Journal of the Franklin Institute*, 212(4) :447–488.
- [Coullet et al., 2004] Coullet, P., Monticelli, M., and Treiner, J. (2004). L’algorithme de Newton-Hooke. *Bulletin de l’Union des physiciens*, 861 :193–206.
- [Dupuis and Berland, 2004] Dupuis, G. and Berland, N. (2004). Belousov-zhabotinsky reaction. In Scott, A., editor, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, volume 3600. Routledge, Taylor and Francis group.
- [Field and Burger, 1985] Field, R. and Burger, M., editors (1985). *Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems*. Wiley, New York.
- [Graça, 2007] Graça, D. (2007). *Thèse de Daniel Graça, titre à fixer*. PhD thesis, IST. en rédaction.
- [Graça and Costa, 2003] Graça, D. S. and Costa, J. F. (2003). Analog computers and recursive functions over the reals. *Journal of Complexity*, 19(5) :644–664.
- [Henkel, 2001] Henkel, M. (2001). Sur la solution de sundman du probleme des trois corps. *Philosophia Scientiae*, 5 :161.
- [Hirsch et al., 2003] Hirsch, M. W., Smale, S., and Devaney, R. (2003). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press.
- [Hölder, 1887] Hölder, O. (1887). Über die eigenschaft der gamma funktion keiner algebraische differentialgleichung zu genügen. *Math. Ann.*, 28 :1–13.
- [Kalmár, 1943] Kalmár, L. (1943). Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára. *Mate és fizikai lapok*, 50 :1–23.
- [Kempe, 1876] Kempe, A. (1876). On a general method of describing plane curves of the n–th degree by linkwork. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7 :213–216.
- [Krivine et al., 2006] Krivine, H., Lesne, A., and Treiner, J. (2006). Discrete-time and continuous-time modelig : some bridges and gaps. *Mathematical Structures in Computer Science*. In print.
- [Lipshitz and Rubel, 1987] Lipshitz, L. and Rubel, L. A. (1987). A differentially algebraic replacement theorem, and analog computability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 99(2) :367–372.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Science*, 20 :130–141.
- [Lotka, 1920] Lotka, A. (1920). Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Science, USA*, 6 :410–415.
- [May, 1976] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261 :459–467.

- [Minsky, 1967] Minsky, M. L. (1967). *Computation : Finite and infinite machines*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [Murray, 2002] Murray, J. D. (2002). Mathematical biology. I : An introduction. In *Biomathematics*, volume 17. Springer Verlag, third edition.
- [Pour-El, 1974] Pour-El, M. B. (1974). Abstract computability and its relation to the general purpose analog computer (some connections between logic, differential equations and analog computers). *Transactions of the American Mathematical Society*, 199 :1–28.
- [Rose, 1984] Rose, H. (1984). *Subrecursion*. Oxford university press.
- [Shannon, 1941] Shannon, C. E. (1941). Mathematical theory of the differential analyser. *Journal of Mathematics and Physics MIT*, 20 :337–354.
- [Smith, 1998] Smith, W. D. (1998). Plane mechanisms and the downhill principle.
- [Stadigh, 1902] Stadigh, V. E. E. (1902). Ein satz ueber funktionen die algebraische differentialgleichungen befriedigen und ueber die eigenschaft der function  $\zeta(s)$  keiner solchen gleichung zu genügen. Thesis, Helsinki.
- [Svoboda, 1948] Svoboda, A. (1948). *Computing Mechanisms and Linkages*. McGraw Hill. Dover reprint 1965.
- [Volterra, 1931] Volterra, V. (1931). *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris.
- [Zaikin and Zhabotinsky, 1970] Zaikin, A. N. and Zhabotinsky, A. M. (1970). Concentration wave propagation in two-dimensional liquid phase self oscillating system. *Nature*, 255 :535–537.