SCHNYDER WOODS FOR GRAPHS EMBEDDED ON HIGHER GENUS SURFACES
(SUJET DE STAGE, 2024-25)
POURSUITE EN THÈSE POSSIBLE

LUCA CASTELLI ALEARDI (LIX, ECOLE POLYTECHNIQUE)

Abstract. L'objet de ce stage sera l'étude combinatoire et algorithmique d'une certaine classe de propriétés caractérisant la notion de planarité des graphes: ces propriétés (connues sous le nom de *forêts de Schnyder*) ont eu dans les trois dernières décennies des fortes répercussions et ont conduit à de nombreuses applications dans plusieurs domaines, notamment le dessin et le codage de graphes. Dans ce stage il s'agira d'étudier ces propriétés structurelles du point de vue combinatoire et algorithmique: en particulier on s'intéressera au cas de graphes de genre $g \geq 2$, pour lesquels de nombreuses questions restent ouvertes.

Thématiques: combinatoire, algorithmique, graphes.
Laboratoire d'accueil: LIX (Ecole Polytechnique), équipe "Combinatoire".
Responsables: Luca Castelli Aleardi (`amturing@lix.polytechnique.fr`).

Forêts de Schnyder

Les *forêts de Schnyder* fournissent des jolies structures combinatoires permettant de comprendre de manière fine et profonde la notion de planarité d'un graphe. L'une des premières applications conduit à des algorithmes de dessin, très simples et élégants [6, 3, 5], permettant de dessiner un graphe planaire à n sommets sur une grille de taille $O(n) \times O(n)$ en temps linéaire.

Une forêt de Schnyder est définie par une orientation et partition des arêtes en trois ensembles (rouge, bleu et noir): tout sommet a exactement trois arêtes sortantes (une pour chaque couleur), qui s'alternent de manière à satisfaire une certaine condition locale.

Dans le cas des *triangulations planaires* une telle définition locale conduit à une caractérisation globale pouvant s'exprimer de la manière suivante: les arêtes internes d'une telle triangulation peuvent se partitionner en 3 arbres couvrants de l'ensemble des sommets, chacun ayant comme racine l'un des trois sommets incidents à la face externe.

Objectifs du stage: graphes de genre supérieur

Ce stage aura pour but l'étude des généralisations des propriétés mentionnées ci-dessus au cas des graphes de genre supérieur [1]. On s'interessera à des travaux récents [1, 4, 2] où l'on propose des généralisations des forêts de Schnyder de triangulations toriques et de genre supérieur (la Figure 2 illustre les propriétés des forêts de Schnyder toriques).

Nous allons étudier l'existence et le calcul des forêts de Schnyder pour des graphes graphes de genre $g \geq 2$. Dans ce cas, la condition locale de Schnyder peut se généraliser assez facilement, en demandant que pour chaque sommet le nombre d'arêtes sortantes soir un multiple (non négatif) de 3. A titre d'exemple, pour le cas d'un double tore $g = 2$, la relation d'Euler nous dit qu'il doit y avoir une sommet de degrée sortant 9 ou bien deux sommets ayant degré sortant 6.

Il restent de nombreuses questions ouvertes à étudier: notamment, il serait intéressant de prouver que toute triangulation simple admet une forêt de Schnyder satisfaisant la condition mentionnée ci-dessus (pour l'instant il n'y a que des résultats partiels et plutôt

[1]Le *genre* d'un graphe est le plus petit entier g tel que le graphe peut se dessiner sans croisements sur une surface de genre g (les graphes planaires ont genre 0 car il peuvent se dessiner sur la sphère).

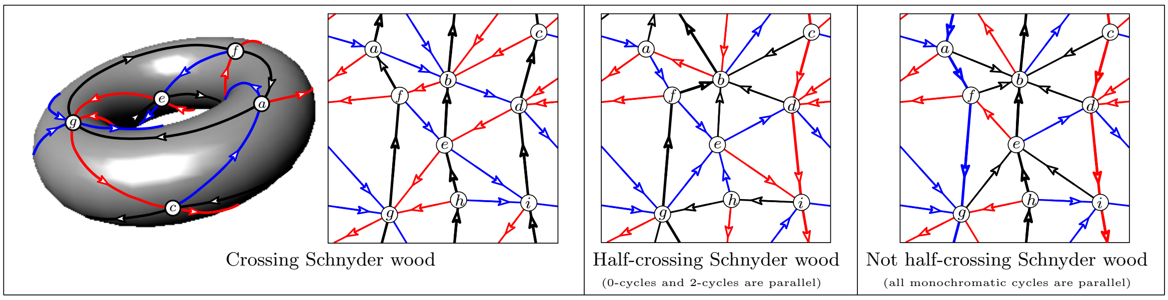

FIGURE 1. Une triangulation de genre 1 munie de trois forêts de Schnyder toriques (3-orientation et coloration des arêtes internes: chaque sommet a degrée sortant trois).

restraint, qui garantissent l'existence lorsque la *edge-width* de la triangulation est au moins $40(2^g - 1)$, ce qui constistue une limitation assez forte).

La résolution de ces problèmes nous conduira ainsi à explorer des questions très profondes et intéressantes faisant intervenir des propriétés topoligiques, combinatoires et algorithmique des graphes plongés sur des surfaces.

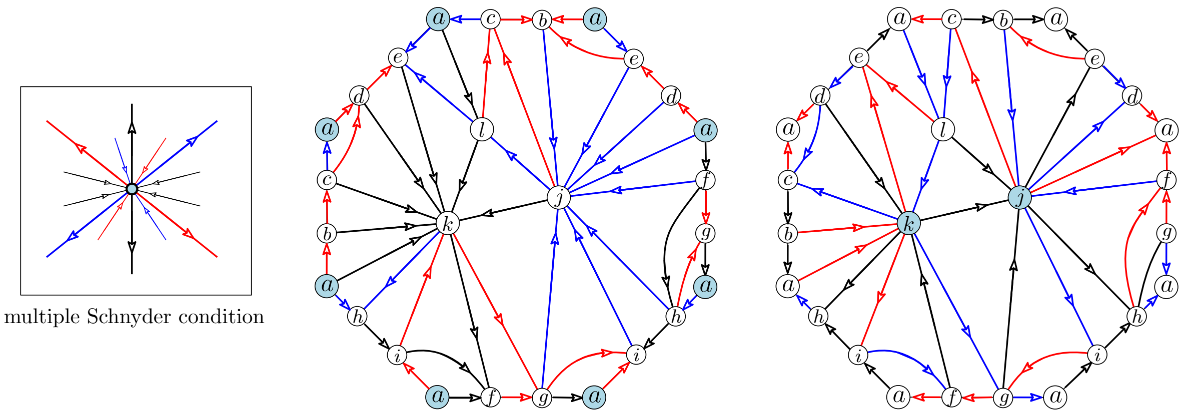

FIGURE 2. Une triangulation de genre 2 munie de deux forêts de Schnyder (le dessin est obtenu en coupant le long d'un schéma polygonal). .

References

[1] L. Castelli Aleardi, E. Fusy, and T. Lewiner. Schnyder woods for higher genus triangulated surfaces, with applications to encoding. *Discrete and Computational Geometry*, 42:489–516, 2009. Preliminary version in SoCG08.

[2] Luca Castelli Aleardi, Olivier Devillers, and Éric Fusy. Canonical ordering for graphs on the cylinder, with applications to periodic straight-line drawings on the flat cyclinder and torus. *J. Comput. Geom.*, 9(1):391–429, 2018.

[3] H. De Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10:41–51, 1990.

[4] D. Goncalves and B. Léveque. Toroidal maps : Schnyder woods, orthogonal surfaces and straight-line representations. *Discrete and Computational Geometry*, 51:67–131, 2014.

[5] Goos Kant. Drawing planar graphs using the canonical ordering. *Algorithmica*, 16(1):4–32, 1996.

[6] Walter Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. In *SoDA*, pages 138–148, 1990.