Représentations compactes de structures de données géométriques

Soutenance de thèse, 12 décembre 2006, LIX

Luca Castelli Aleardi

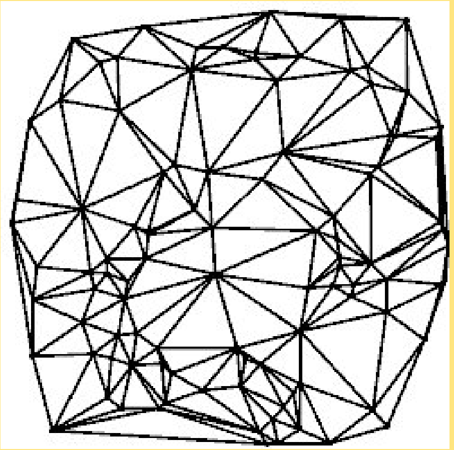
Geometrica - INRIA Sophia

LIX École Polytechnique

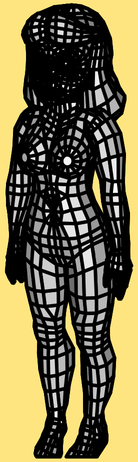
Le domaine de recherche

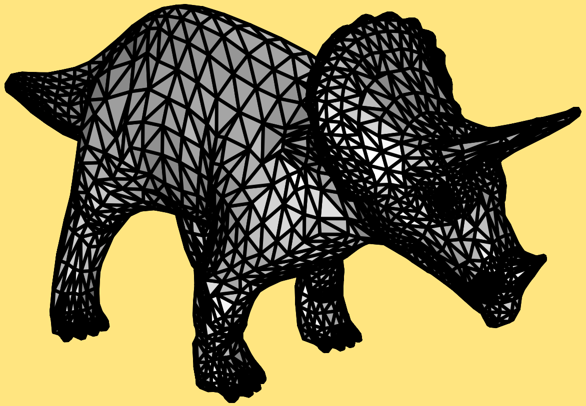
Données structurées de nature géométrique

Triangulations et graphes

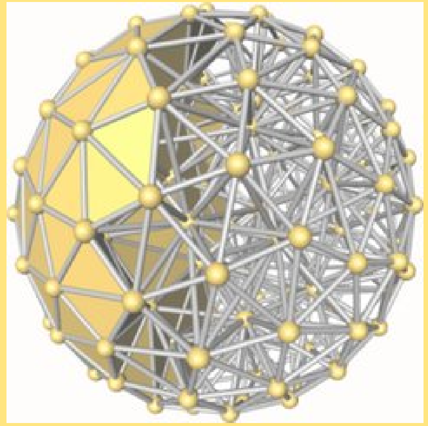


maillages surfaciques



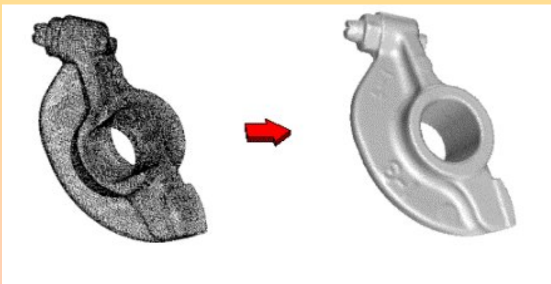


maillages volumiques

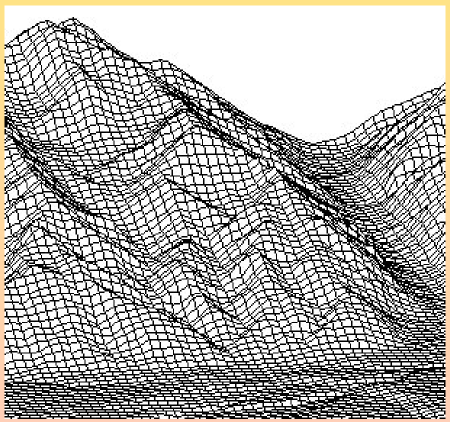


Domaines d'application

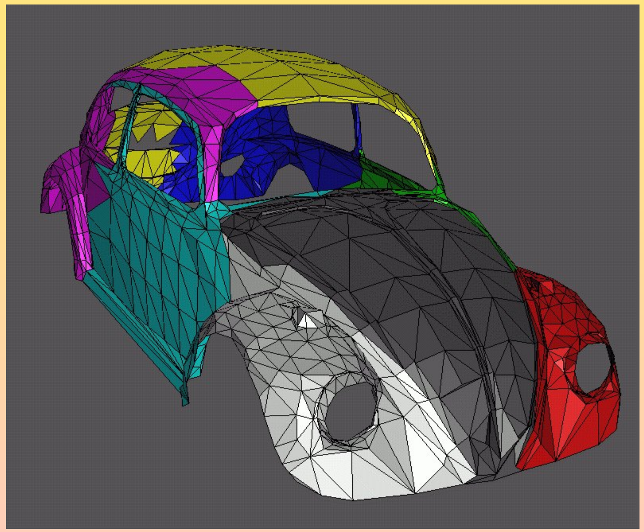
Recontruction de surfaces



GIS Technology

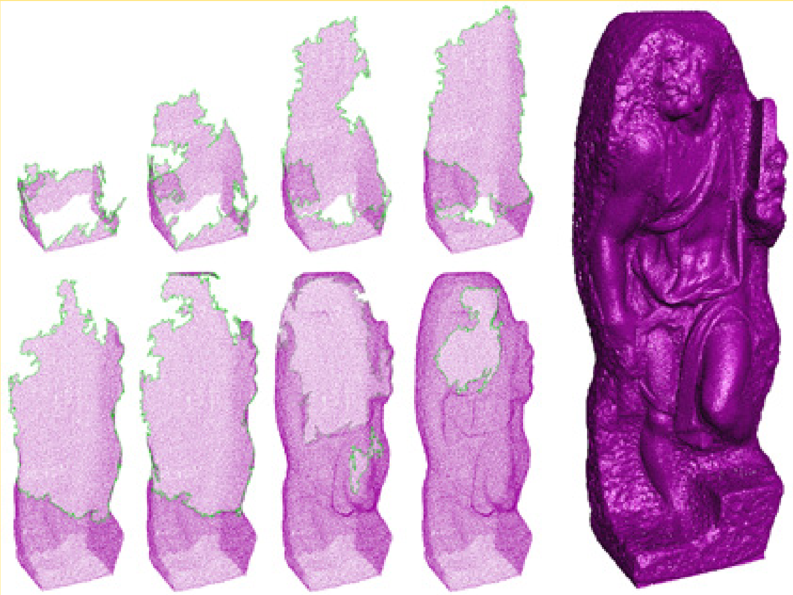


Modélisation géométrique



Masses de données

L'explosion de la taille des données pose des pbs de traitement



Statue de St. Matthieu (Stanford's Digital Michelangelo Project, 2000)

186 million de sommets

6 Giga octets (stockage sur disque)

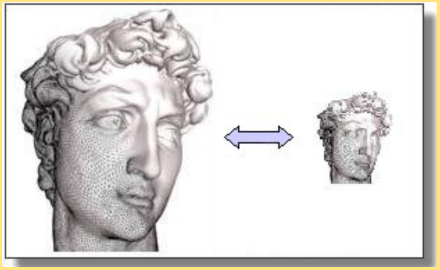
dizaines de minutes (temps pour la lecture de disque dur)

Statue du David (Stanford's Digital Michelangelo Project, 2000)
2 milliards de polygons
32 Giga octets (sans compression)

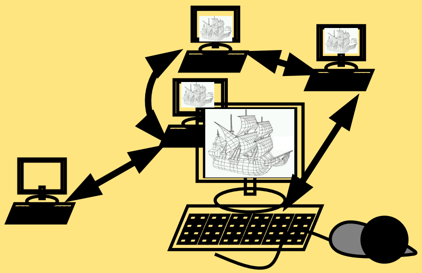
Pas d'algorithme et structure de données pouvant traiter le modèle tout entier

Thèmes de recherche

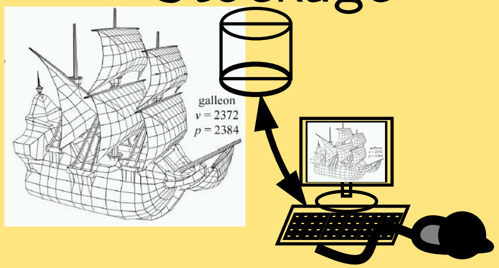
Compression de maillages



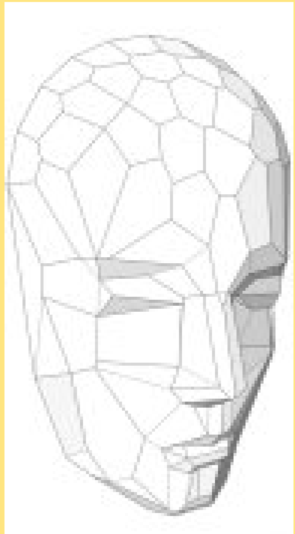
Transmission sur réseau

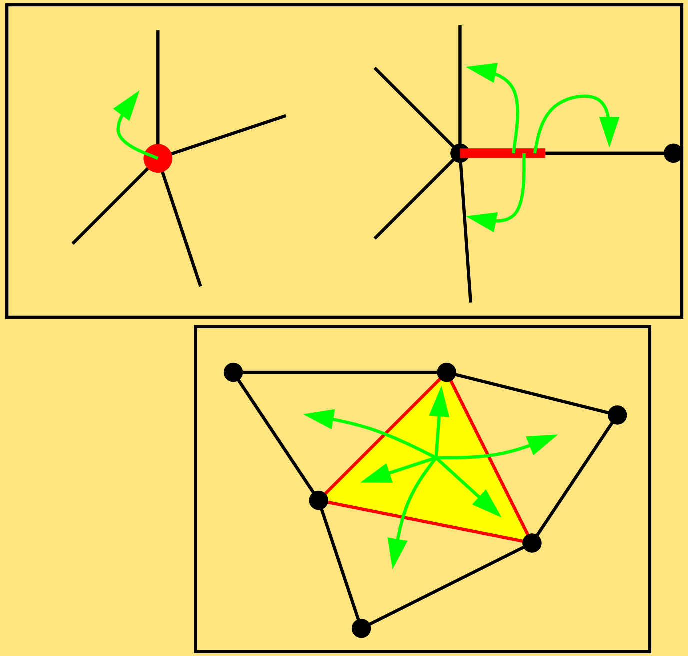


Stockage

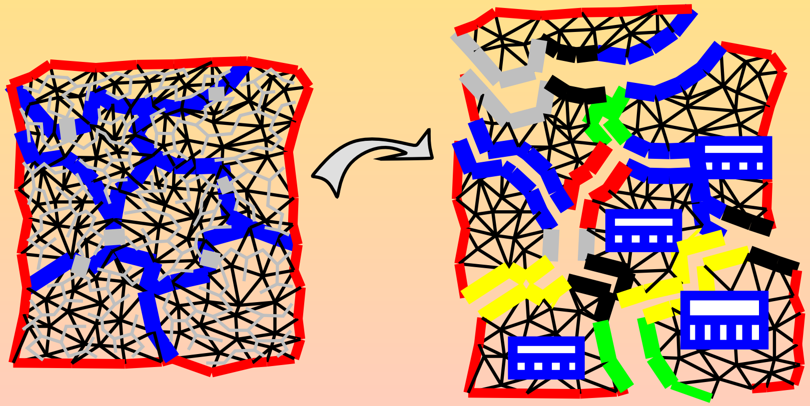


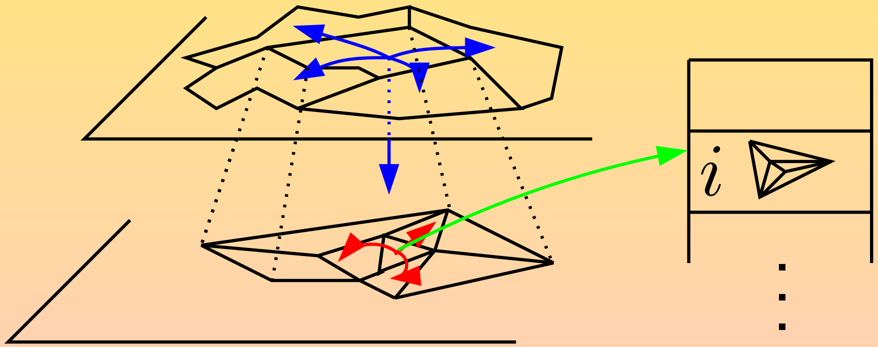
Structures de données géométriques





Représentations compactes d'objets géométriques

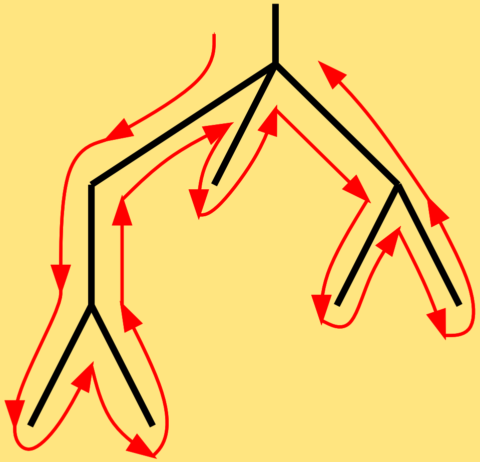


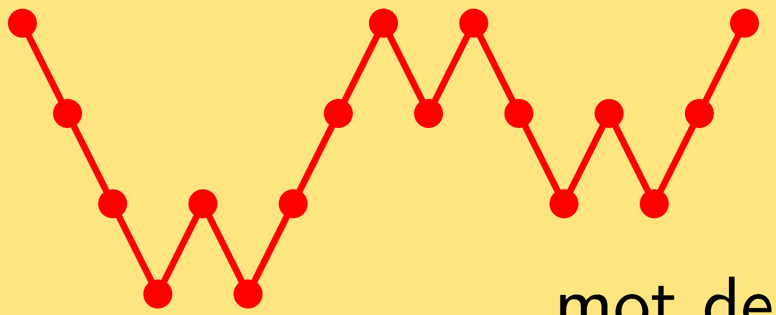


Représentations compactes

Un exemple: arbres binaires et ordonnés

arbre ordonné à n arêtes





mot de parenthèses équilibré

$1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0$

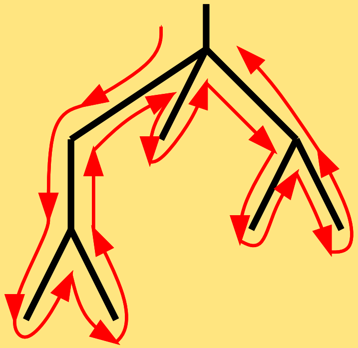
$\Rightarrow 2n$ bits pour coder un arbre avec n arêtes.

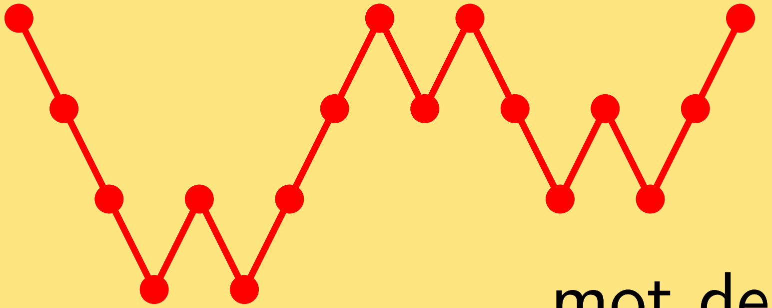
Énumération des arbres plans avec n arêtes.

$$\|\mathcal{B}_n\| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \approx 2^{2n} n^{-\frac{3}{2}}$$

Un exemple: arbres binaires et ordonnés

arbre ordonné à n arêtes





mot de parenthèses équilibré

$$1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0$$

$\Rightarrow 2n$ bits pour coder un arbre avec n arêtes.

Ce codage est "asymptotiquement optimal".

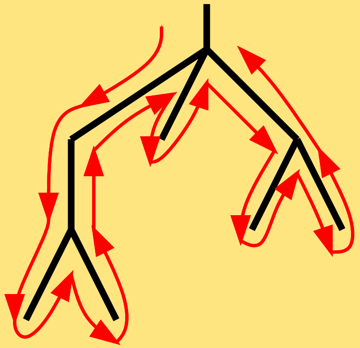
- le coût mémoire d'un objet correspond asymptotiquement à l'entropie de la classe;

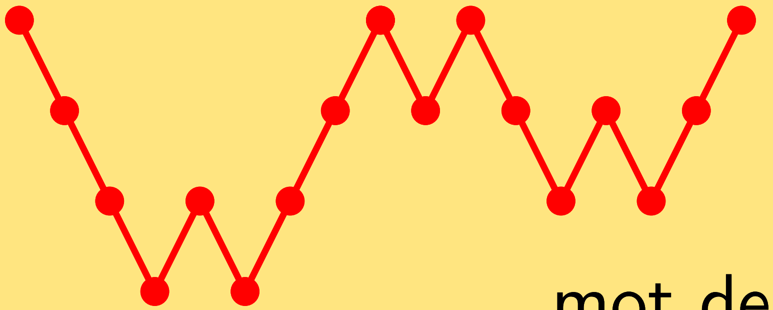
$$log_2 \|\mathcal{B}_n\| = 2n + O(\lg n)$$

Un exemple: arbres binaires et ordonnés

Le code de contour d'un arbre plan (arbre ordonné).

arbre ordonné à n arêtes





mot de parenthèses équilibré

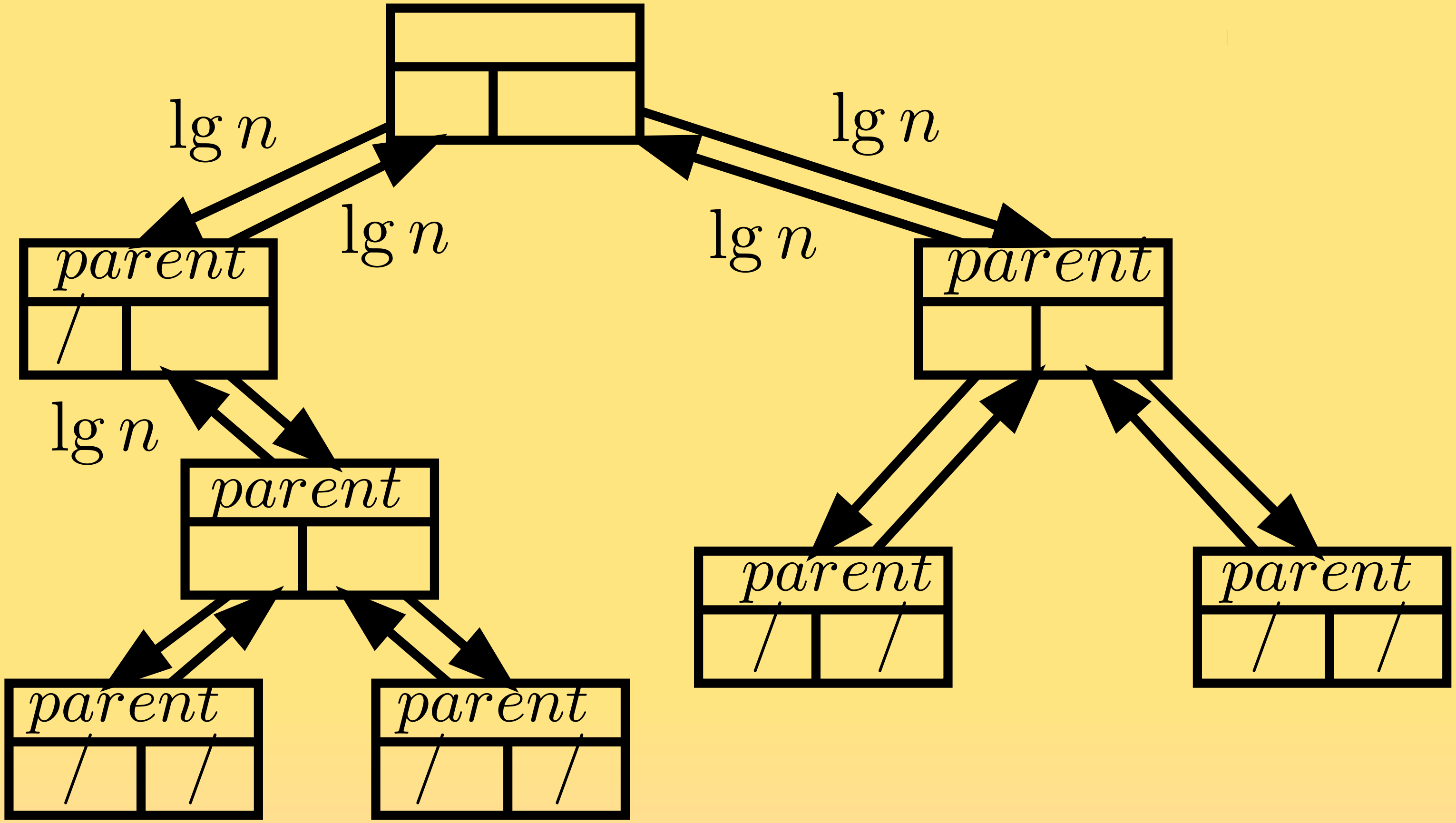
$1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0$

$\Rightarrow 2n$ bits pour coder un arbre avec n arêtes.

mais ne permet pas de repondre efficacement à des requêtes d'adjacence

Un exemple: arbres binaires et ordonnés

Représentation explicite par pointeurs



il est possible de tester en temps $O(1)$ l'adjacence entre sommets

ce codage n'est pas optimal: il faut $\Theta(n \lg n)$ bits

Peut-on faire mieux?

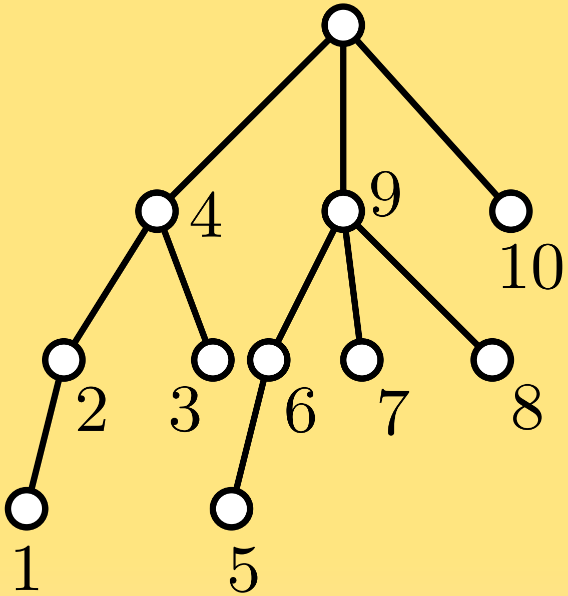
un codage compact (asymptotiquement optimal)

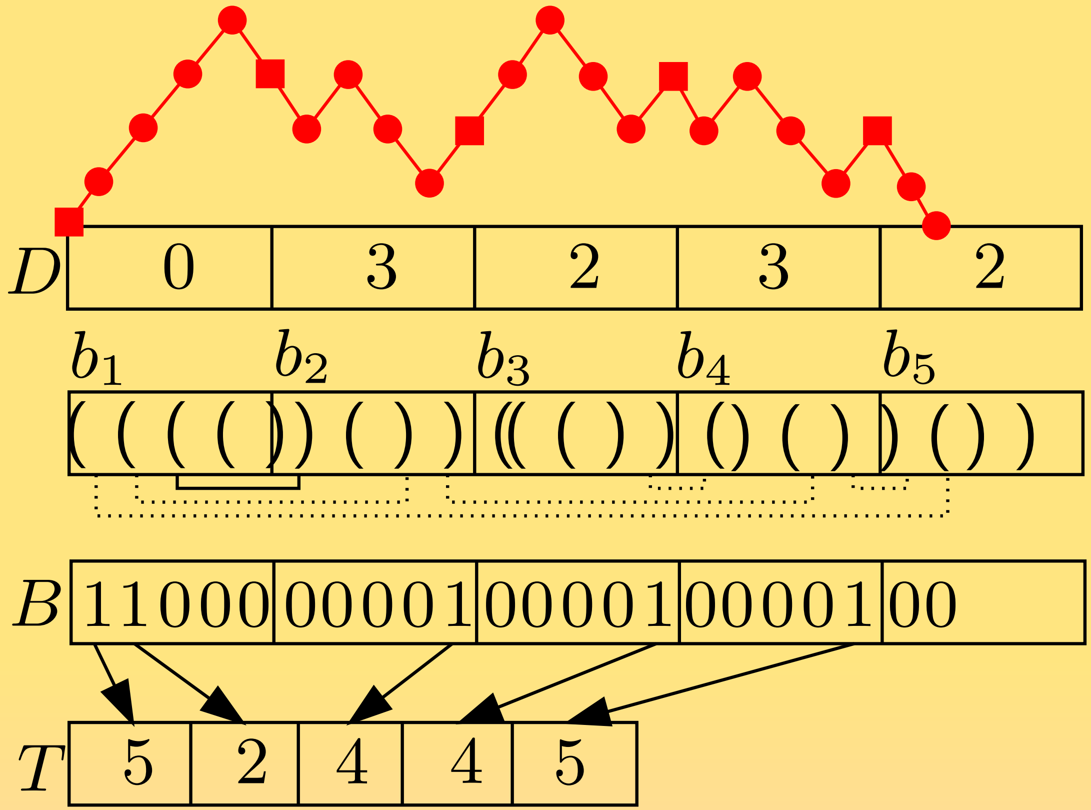
requêtes efficaces (en temps constant)

Un exemple: arbres binaires et ordonnés

(Jacobson, Focs89, Munro et Raman Focs97)

Pour le arbres et les mots de parenthèses... OUI





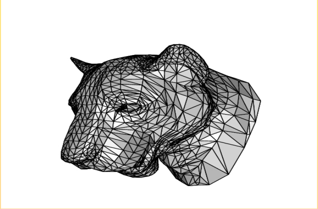
il est possible de tester en temps $O(1)$ l'adjacence entre sommets

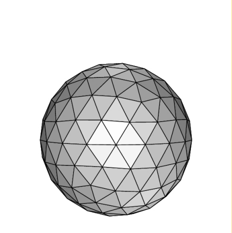
ce codage est asymptotiquement optimal

$2n + o(n)$ bits suffisent

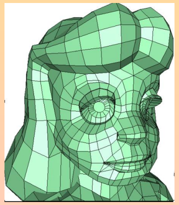
Données géométriques

Triangulations à bord

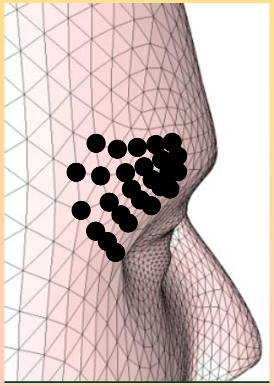




Triangulations de la sphère



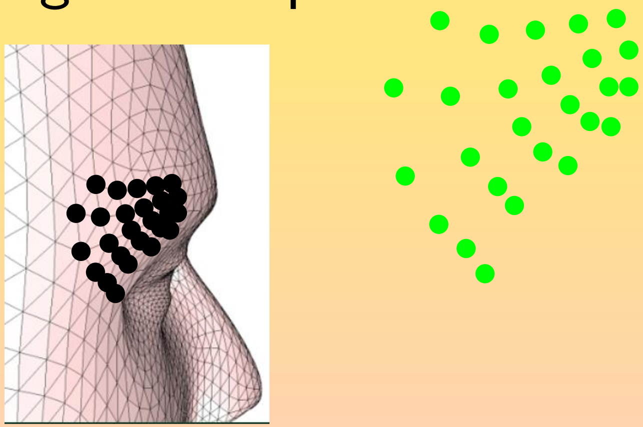
cartes planaires 3-connexes
(maillages polygonaux)



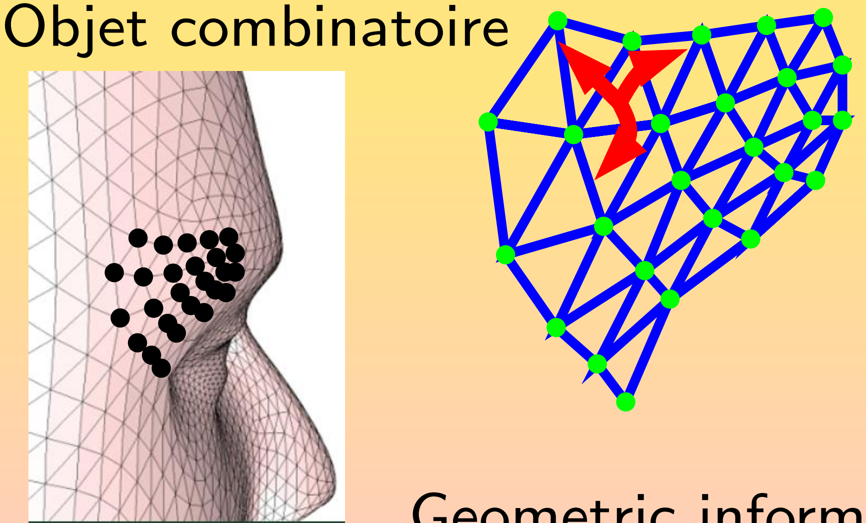
Quel type d'information?

Géométrie et connectivité

Objet géométrique



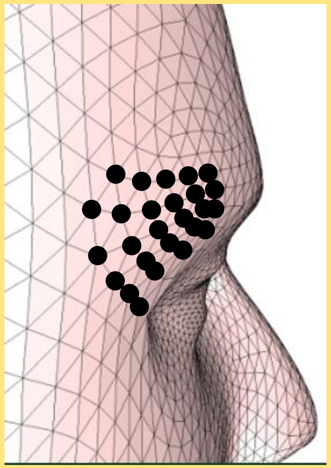
Objet combinatoire

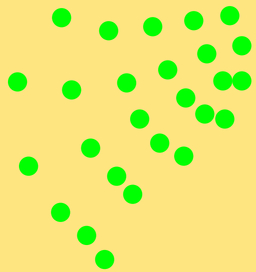


Geometric information

Information géométrique

Objet géométrique





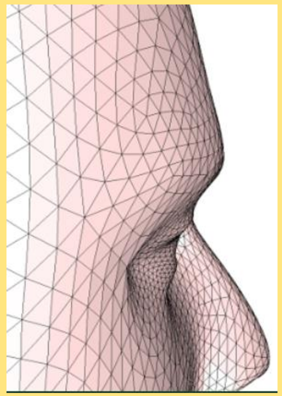
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entre 30 et 96 bits par sommet

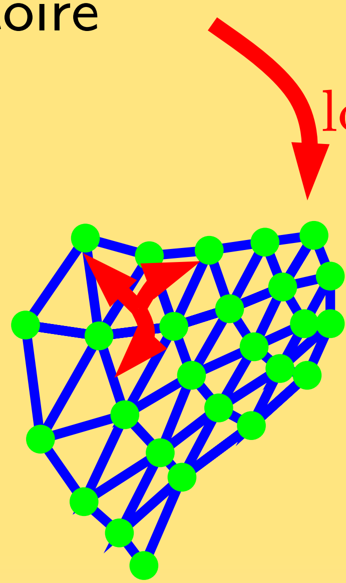
Information de connectivité

sommets	1 référence à un triangle
triangles	3 rréférences aux sommets 3 références aux triangles

Objet combinatoire



$\log n$ ou 32 bits

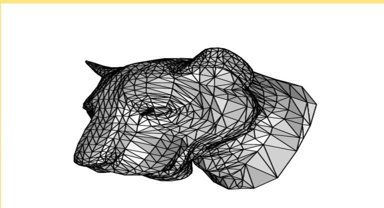


$$2 \times n \times 6 \times \log n$$
$$n \times 1 \times \log n$$
$$13n \log n$$

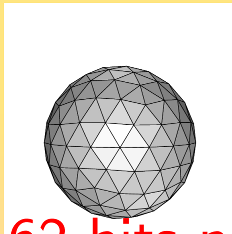
$416n$ bits
Connectivité

Les limites entropiques sont connues...

Triangulations à bord

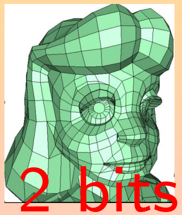


2.17 bits par triangle



Triangulations de la sphère

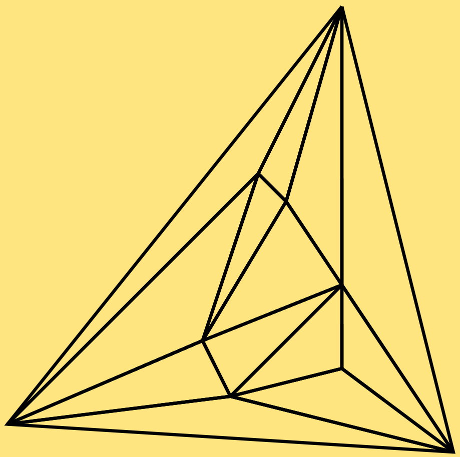
1.62 bits par triangle

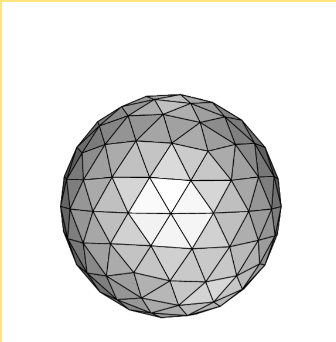


cartes planaires 3-connexes
(maillages polygonaux)

2 bits par arête

Énumération et entropie des cartes





Énumération des triangulations de la sphère (Tutte, 1962)

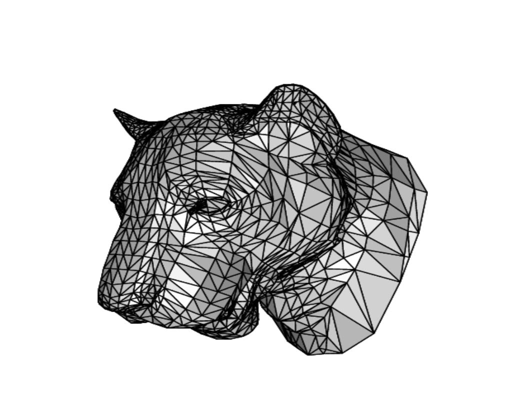
$$\Psi_n = \frac{2(4n+1)!}{(3n+2)!(n+1)!} \approx \frac{16}{27}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}n^{-5/2}(\frac{256}{27})^n$$

Entropie

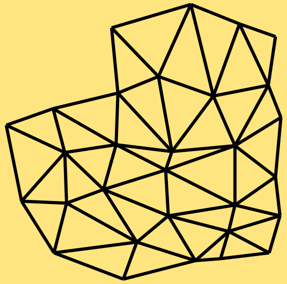
$$\frac{1}{n}\log_2 \Psi_n \approx \log_2(\frac{256}{27}) \approx 3.2451 \text{ bits/vertex}$$

Énumération et entropie des cartes

Triangulations à bord



$n+1$ sommets internes, $m = 2n+k$ faces



$$f(n,k) = \frac{2 \cdot (2k-3)!\,(2k+4n-1)!}{(k-1)!\,(k-3)!\,(n+1)!\,(2k+3n)!}$$

$$f'(m,k) = \frac{2 \cdot (2k-3)!\,(2m-1)!}{(k-1)!\,(k-3)!\,(\frac{m-k}{2}+1)!}$$

énumération des triangulations d'un polygon ayant m faces

$$F(m) = \lg(\sum_{k \geq 3}^{m} f'(m,k)) \approx 2.175m$$

3.24 bits/sommets$=1.62$ bits/face < 2.17 bits/face

Compression de maillages

Données géométriques

simple compression

VRML, $\boxed{\text{288 or 114 bits/vertex}}$

[Edgebreaker] $\boxed{\text{3.67bits/vertex}}$ (borne sup. garantie)

[Poulalhon Schaeffer] $\boxed{\text{3.24bits/vertex}}$ (garantie optimale)

[Touma Gotsman] $\approx\boxed{\text{2bits/vertex}}$ (heuristique)

PS $1101000110000010010000011001000000000$

TG $V_5V_5V_6V_5V_4V_5V_8V_5V_5V_4S_4V_3V_4$

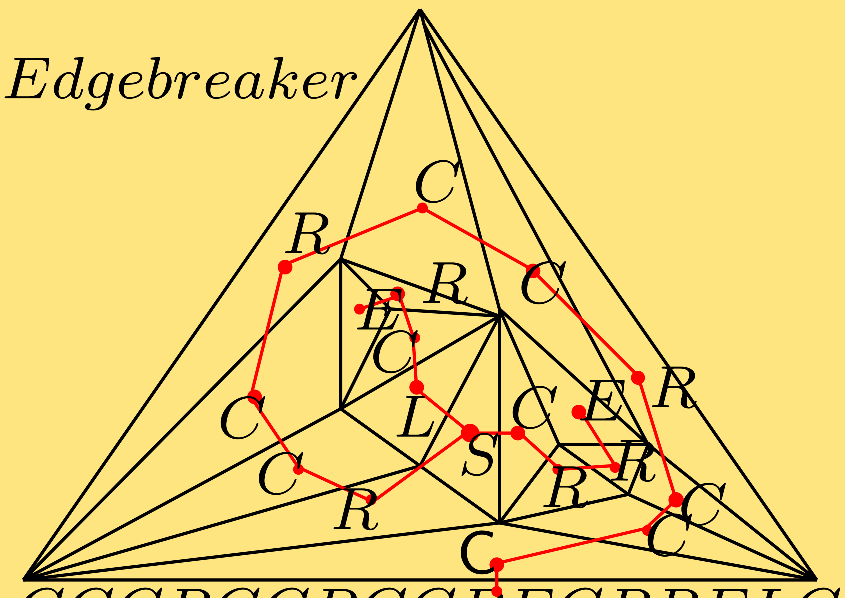
EB $CCCRCCRCCRECRRELCRE$

codages implicites

Codage de graphes et arbres couvrants

framework visuel général (Isenburg Snoeyink)

Edgebreaker

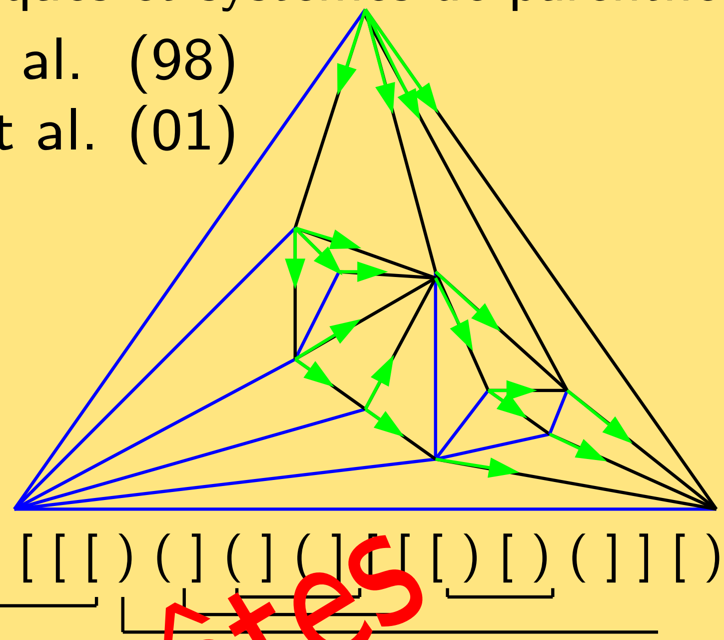


$CCCRCCRCCRECRRELCRE$

Ordres canoniques et systèmes de parenthèses multiples

Chuang et al. (98)

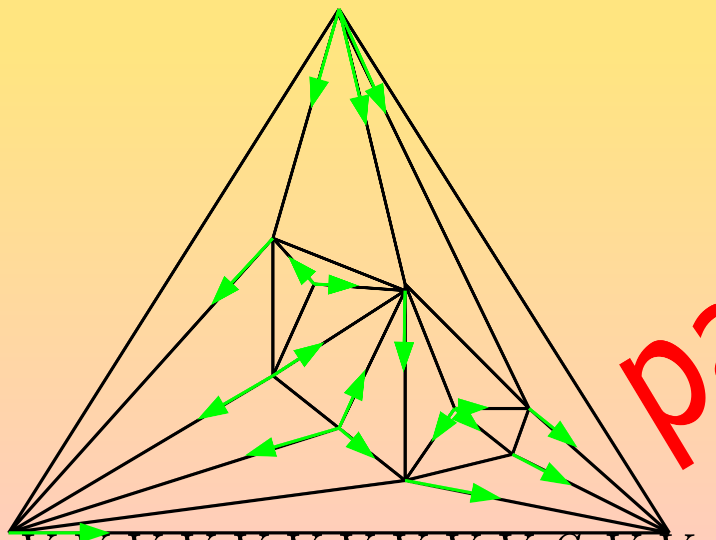
- Chiang et al. (01)



([[[ ) ( ] ( ] ( ] [[[ ) [ ) ( ]] [ ) . . .

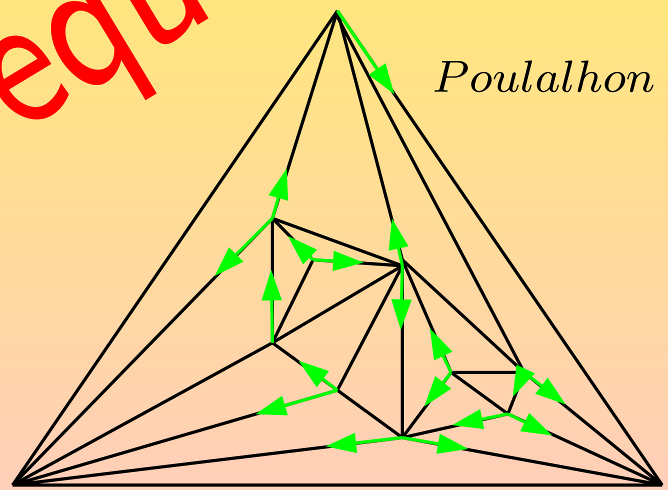
pas de requêtes

Touma Gotsman ('98)



$V_5 V_5 V_6 V_5 V_4 V_5 V_8 V_5 V_5 V_4 S_4 V_3 V_4$

Poulalhon Schaeffer (2003)



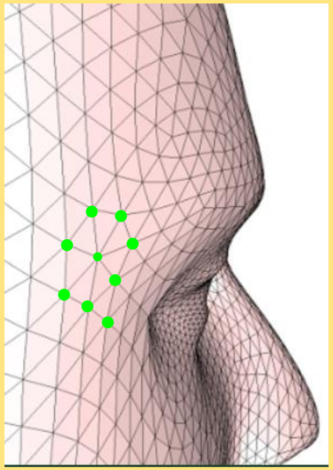
110100011000001001000001100100000000

Structures de données géométriques

Structures de données géométriques

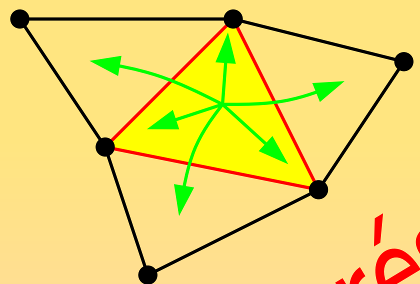
Représentations explicites

Maillage triangulaire



Combinatoire

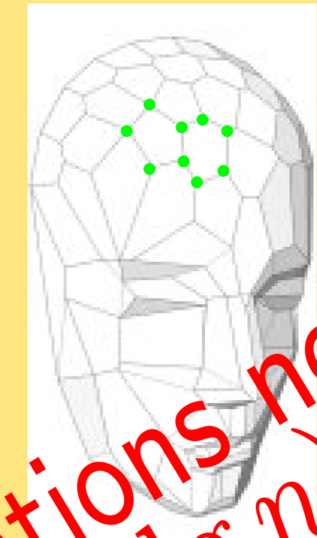
```
struct triangle{
  triangle *t1, *t2, *t3;
  vertex *v1, *v2, *v3;
}
struct vertex{
  triangle * root;
  int label;
}
```



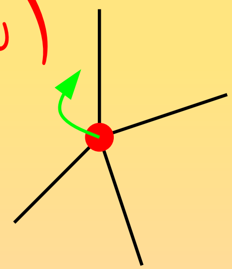
Géométrie

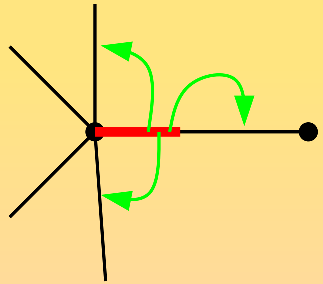
```
struct point{
  float x;
  float y;
}
point vertex_geometry[max_label];
```

Maillage polygonal



```
struct edge{
  edge * oppo;
  edge * next;
  edge * prev;
  vertex * origin;
}
struct vertex{
  edge * root;
  int label;
}
```





```
struct point{
  float x;
  float y;
}
point vertex_geometry[max_label];
```

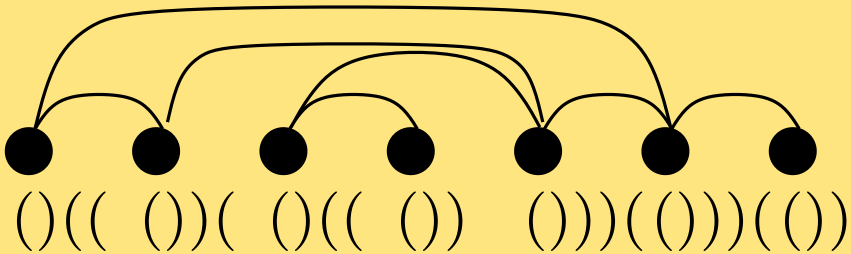
représentations non compactes

$\Theta(n \lg n)$ bits

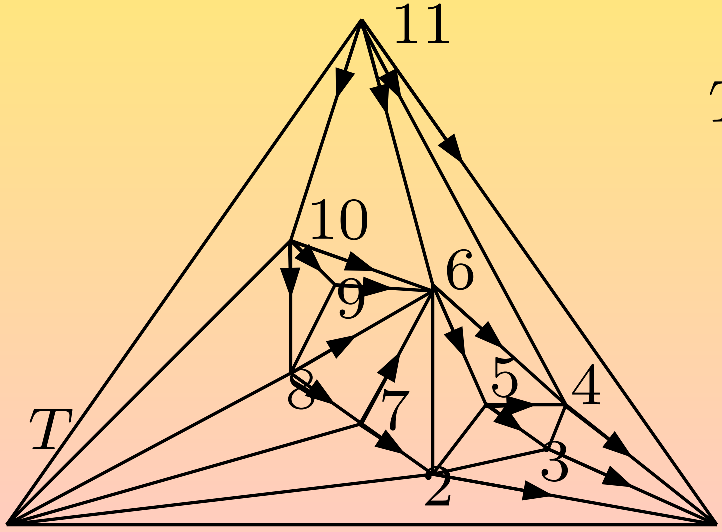
Représentations compactes de graphes: travaux existants

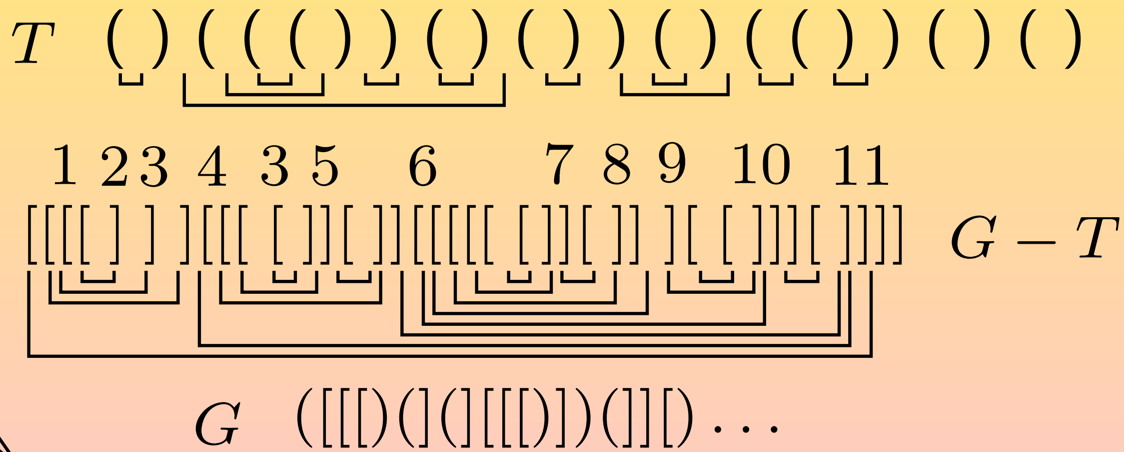
Travaux existants: représentations compactes de graphes

Graphes planaires, plongements livresques et ordres canoniques



Codage	3-c.	triang.
Jacobson	$64n$	$64n$
Munro Raman	$8n + 2e$	$7m$
Chuang et al.	$2e + 2n$	$3.5m$
Chiang et al.	$2e + 2n$	$4m$
Blandford et al.	$O(n)$	$O(m)$

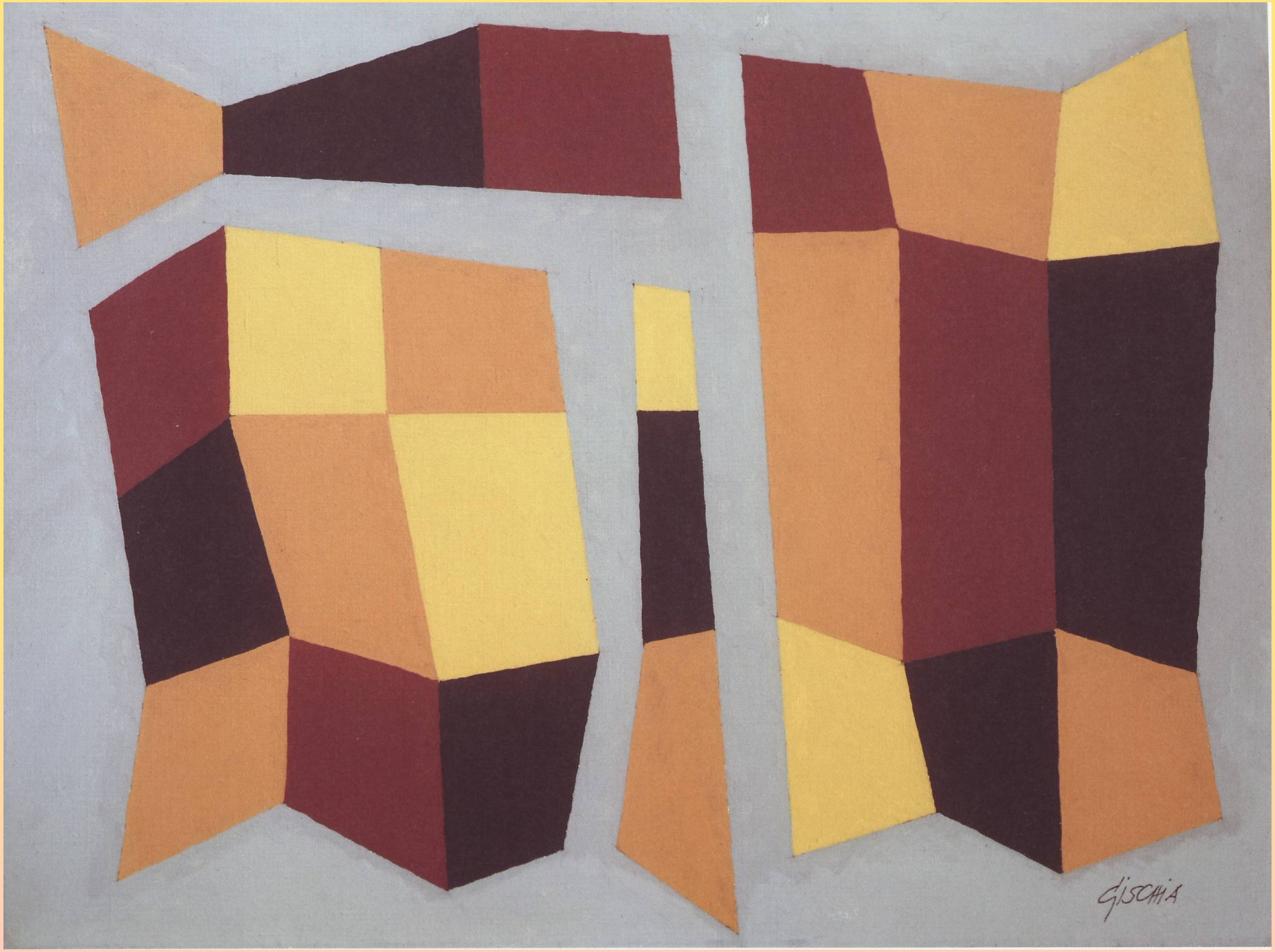




Notre schéma algorithmique pour la représentation de cartes et maillages

Premier ingrédient: décomposition

Décomposition de quadrangulations... vue par L. Gischia



Deuxième ingrédient: pretraitement et stockage

Arithmétisons donc un peu (La leçon, Eugène Ionesco, 1951)

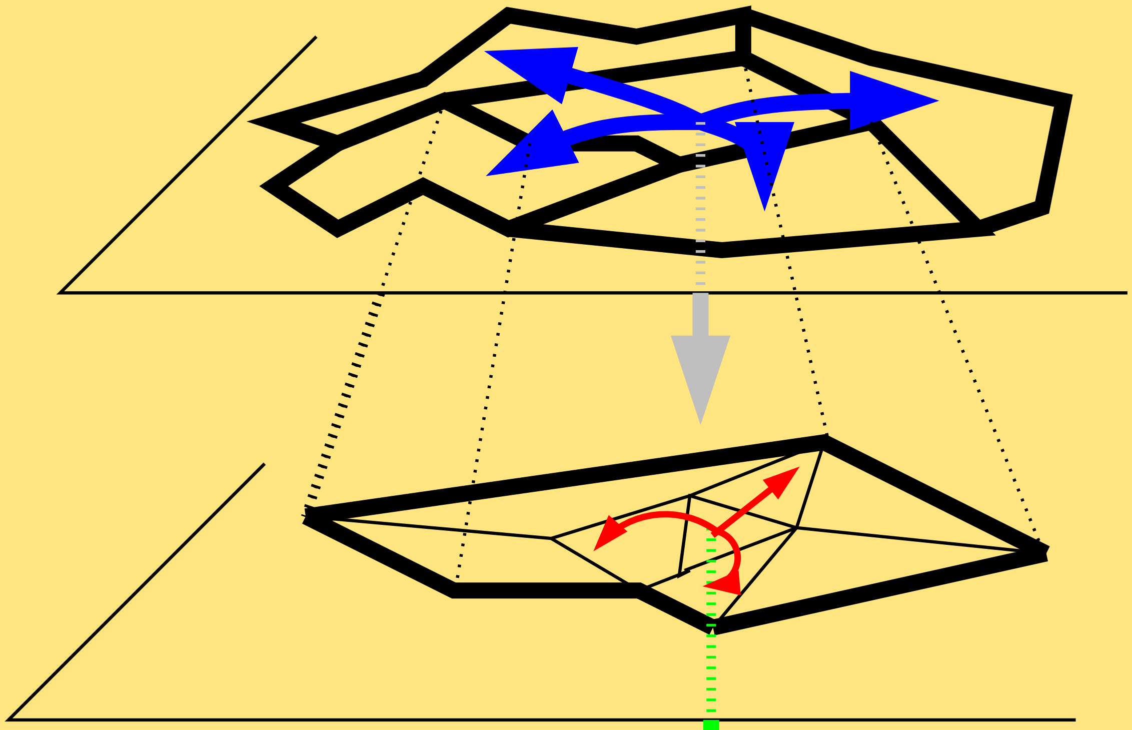
Au cours d'une lecon privée en préparation du doctorat total, une jeune fille discute d'arithmétique avec son professeur.

le professeur Ecoutez-moi, Mademoiselle, si vous n'arrivez pas à comprendre profondément ces principes, ces archétypes arithmétiques, vous n'arriverez jamais à faire correctement un travail de polytechnicien... Encore moins ne pourra-t-on vous charger d'un cours à l'Ecole polytechnique... combien font, par exemple, $3.755.918.261$ multiplié par $5.162.303.508$?
l'élève (très vite) ca fait 193891900145...
le professeur(de plus en plus étonné calcule mentalement) Oui... Vous avez raison... le produit est bien... (il bredouille inintelligiblement)... Mais comment le savez-vous, si vous ne connaissez pas les principes du raisonnement arithmétique?

l'*élève*: C'est simple. Ne pouvant me fier à mon raisonnement, j'ai appris par coeur tous les résultats possibles de toutes les multiplications possibles.

Notre schéma de représentation

Aperçu de la structure hiérarchique

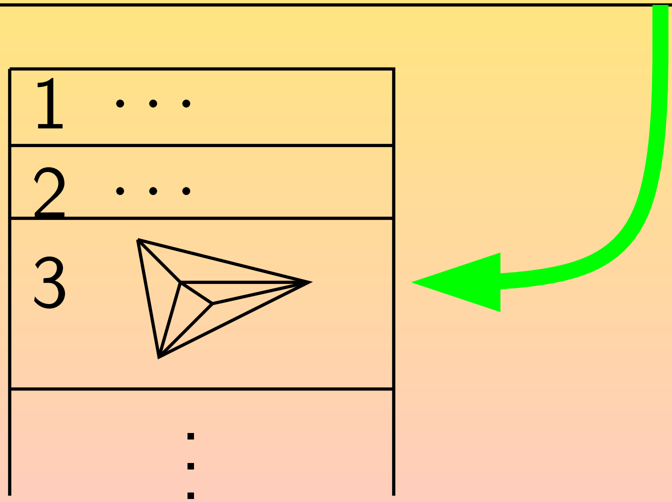


Niveau 1:

- $\Theta(\frac{n}{\log^2 n})$ régions de taille $\Theta(\log^2 n)$, représentés par pointeurs au niveau 2

Niveau 2:
dans chacune des $\frac{n}{\log^2 n}$ régions:

- $\Theta(\log n)$ régions de taille $C \log n$, représentées par pointeurs au niveau 3

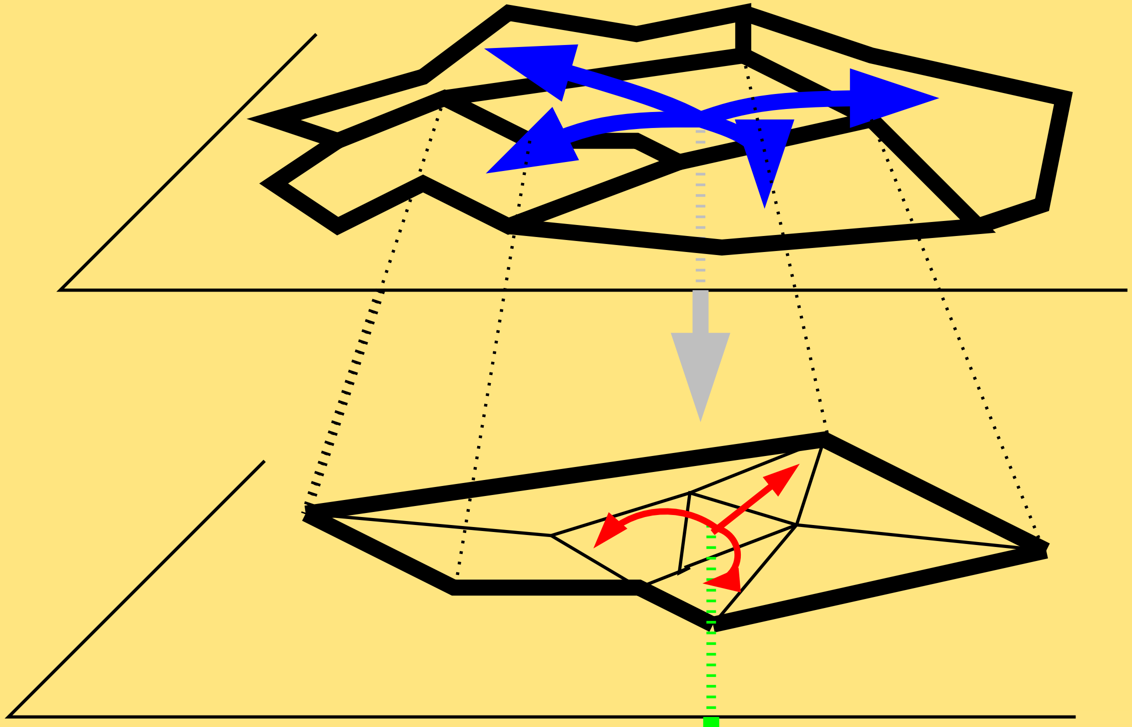


Niveau 3: catalogue exhaustif des régions de taille $i < C \log n$:

- description explicite complète.

Notre schéma de représentation

Aperçu de la structure hiérarchique



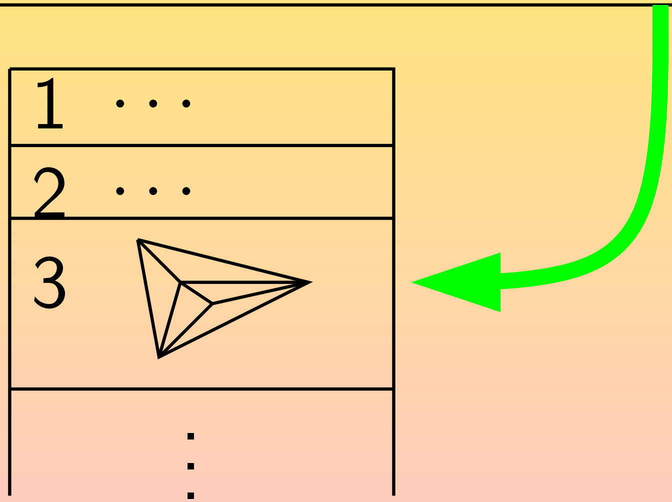
Niveau 1:

- $\Theta(\frac{n}{\log^2 n})$ régions de taille $\Theta(\log^2 n)$, représentés par pointeurs au niveau 2
- pointeurs globaux de taille $\boxed{\log n.}$

Niveau 2:

dans chacune des $\frac{n}{\log^2 n}$ régions:

- $\Theta(\log n)$ régions de taille $C \log n$, représentés par pointeur au niveau 3
- pointeurs locaux de taille $\boxed{\log \log n.}$

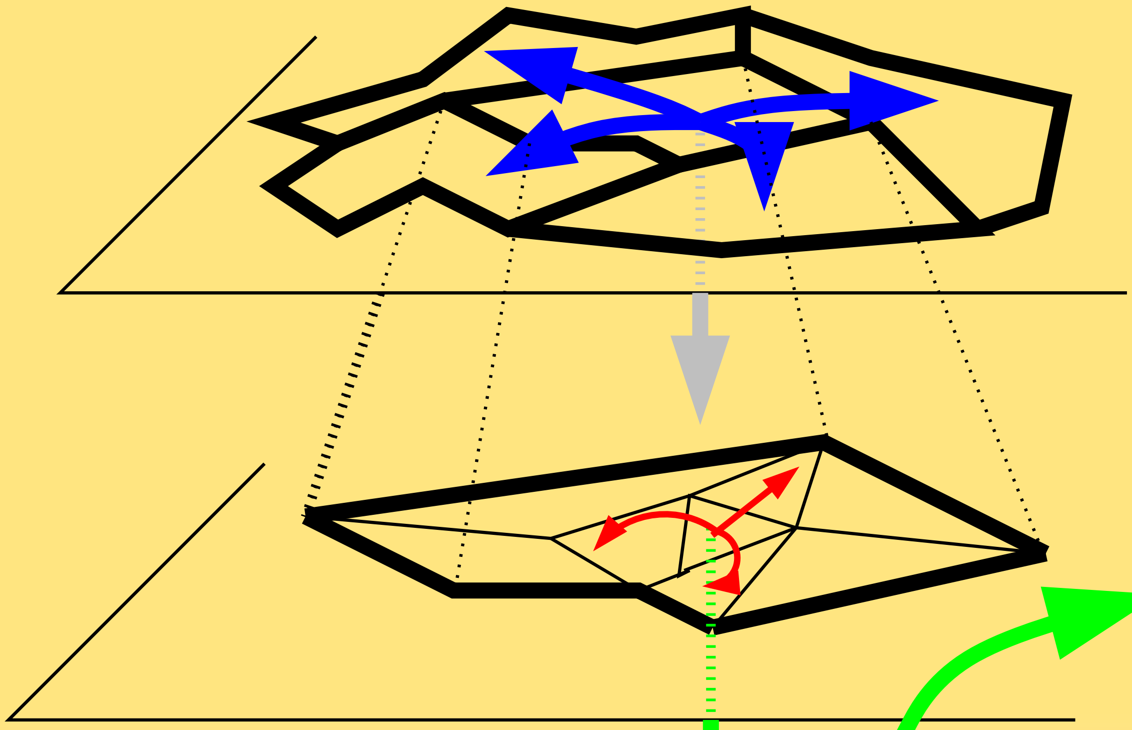


Niveau 3: catalogue exhaustif des regions de taille $i < C \log n$:

- description explicite complète.

Notre schéma de représentation

Aperçu de la structure hiérarchique



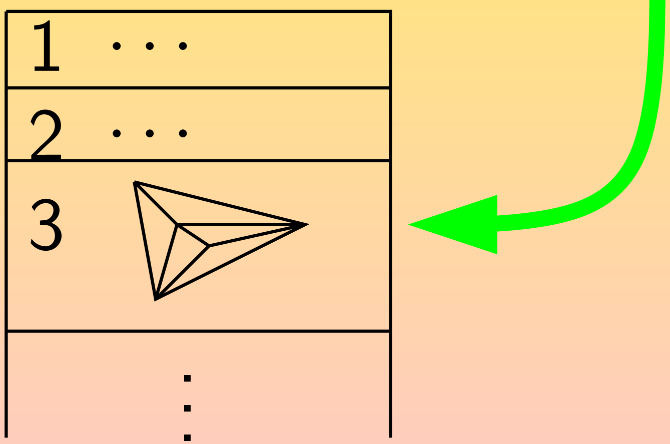
Niveau 1:

- $\Theta(\frac{n}{\log^2 n})$ régions de taille $\Theta(\log^2 n)$, représentés par pointeurs au niveau 2
- pointeurs globaux de taille $\boxed{\log n.}$

Niveau 2:

dans chacune des $\frac{n}{\log^2 n}$ régions:

- $\boxed{\Theta(\log n)}$ régions de taille $C \log n$ représentés par pointeur au niveau 3
- pointeurs locaux de taille $\boxed{\log \log n.}$



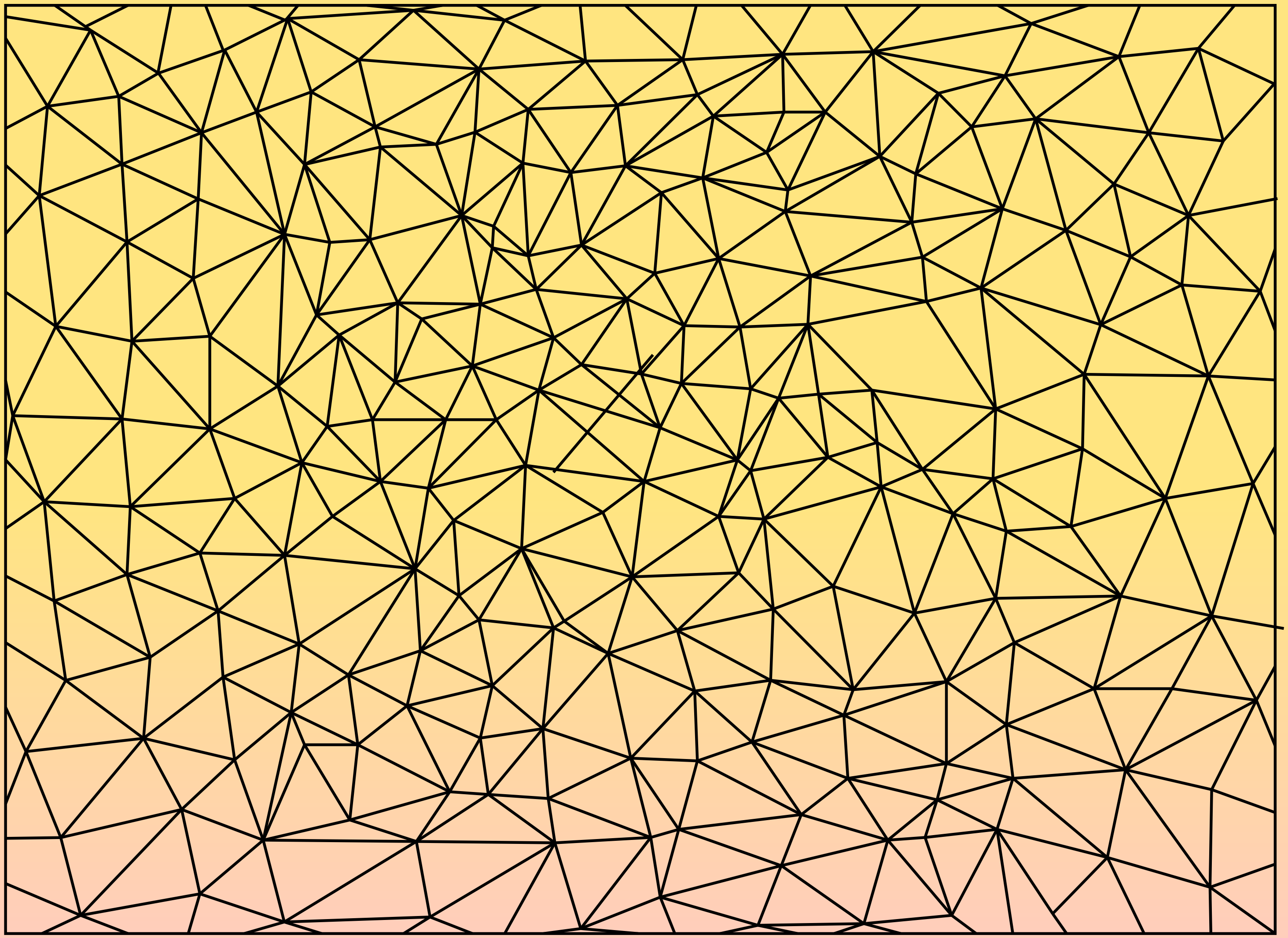
Coût dominant en espace

Niveau 3: catalogue exhaustif des regions de taille $i < C \log n$:

- description explicite complète.

Représentations compactes de maillages

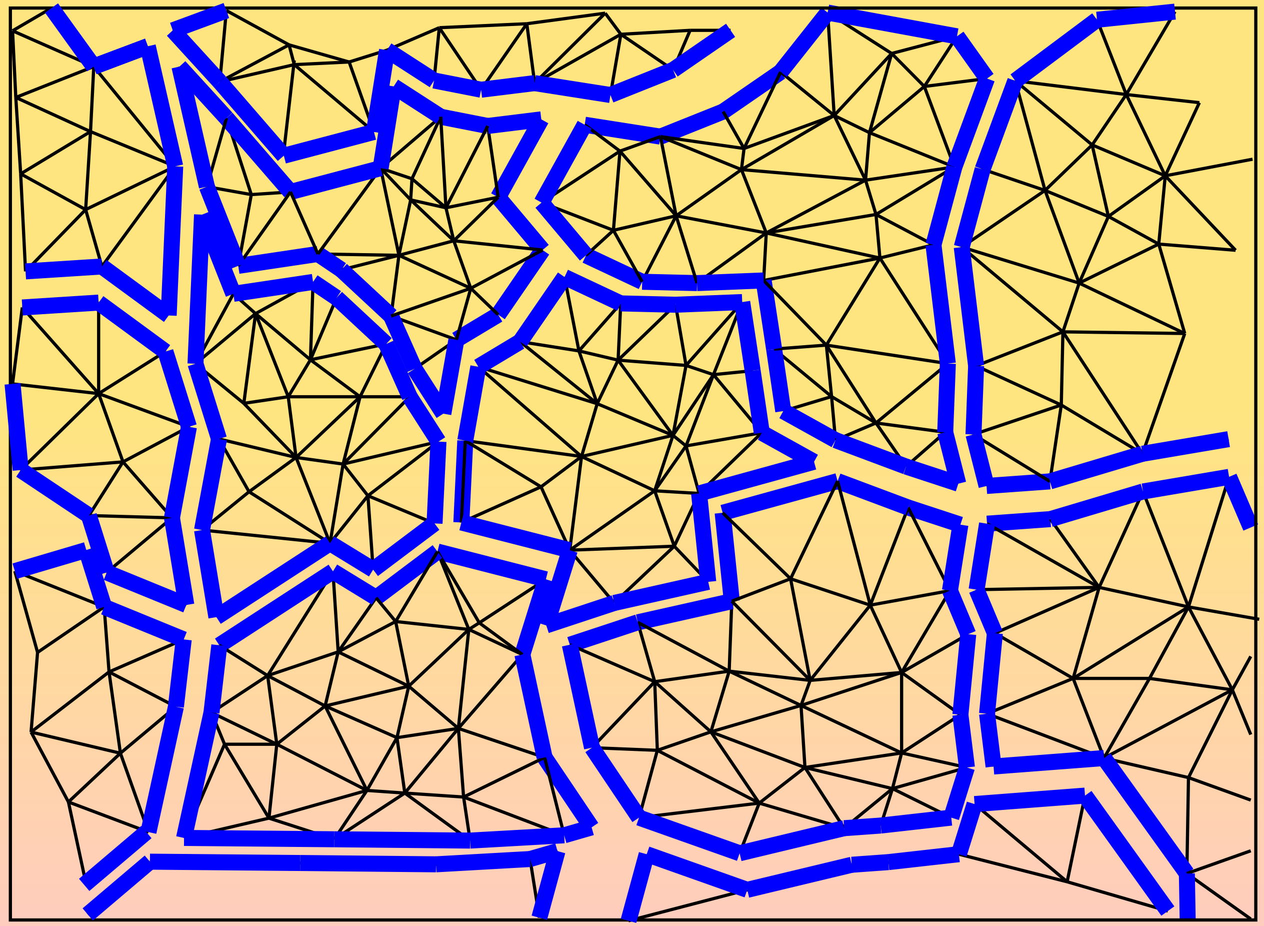
On part d'une triangulation de taille m (nombre de faces)



Représentations compactes de maillages

On décompose en sous triangulations de taille polylog

micro triangulations de taille entre $\frac{1}{12}\lg m$ et $\frac{1}{4}\lg m$

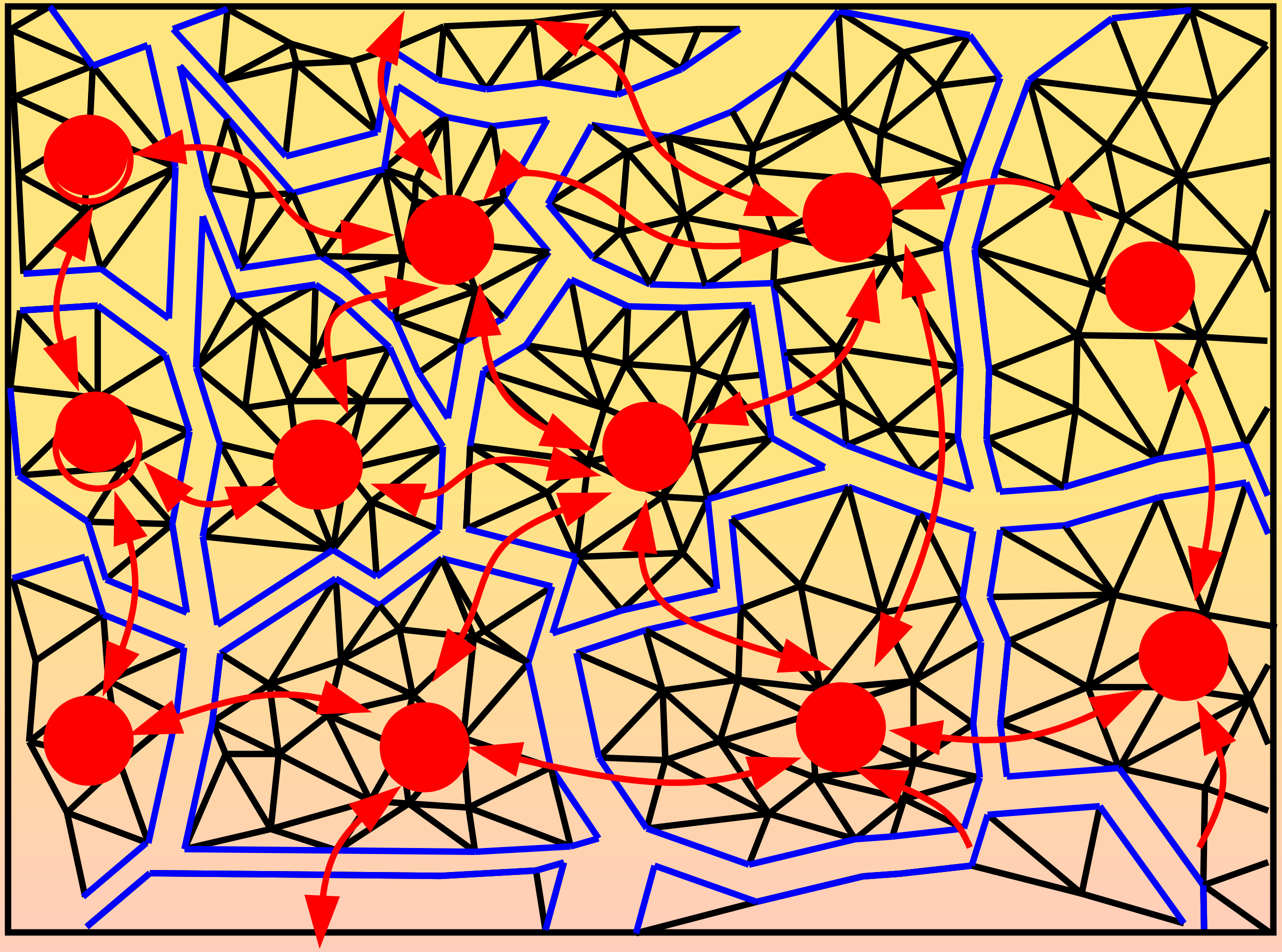


Graphes des micro triangulations

graphe G:

- un nœud pour chaque micro région,
- un arc pour tout paire de micro régions adjacentes

G est une carte localement planaire

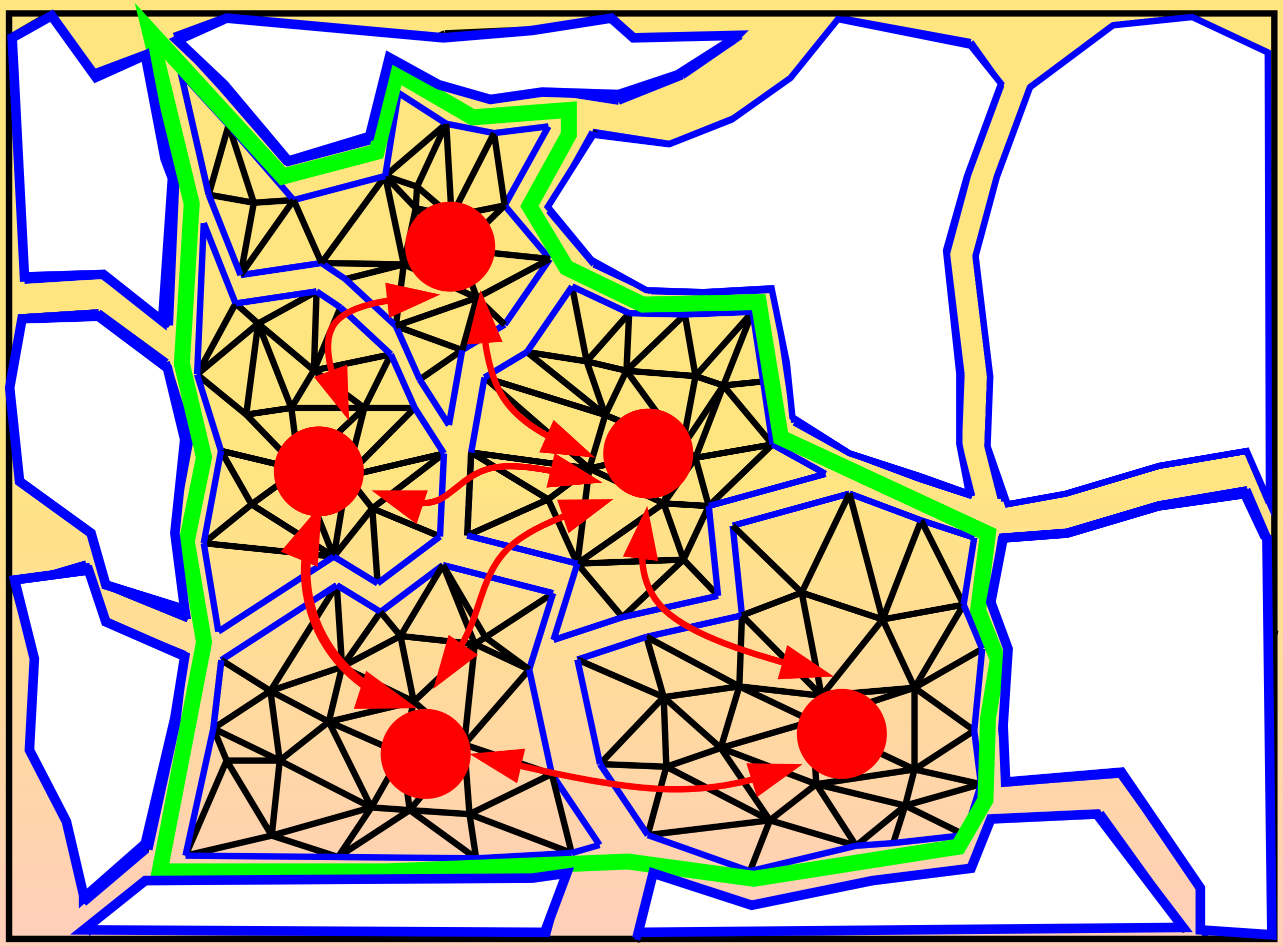


graphe G

$O(\frac{m}{\log m})$ noeuds

Sous-graphe des micro régions dans une mini

G_i est une sous-carte de G contenant $O(\lg m)$ micro triangulations adjacentes



$O(\log^2 m)$ triangles

graphe G_i

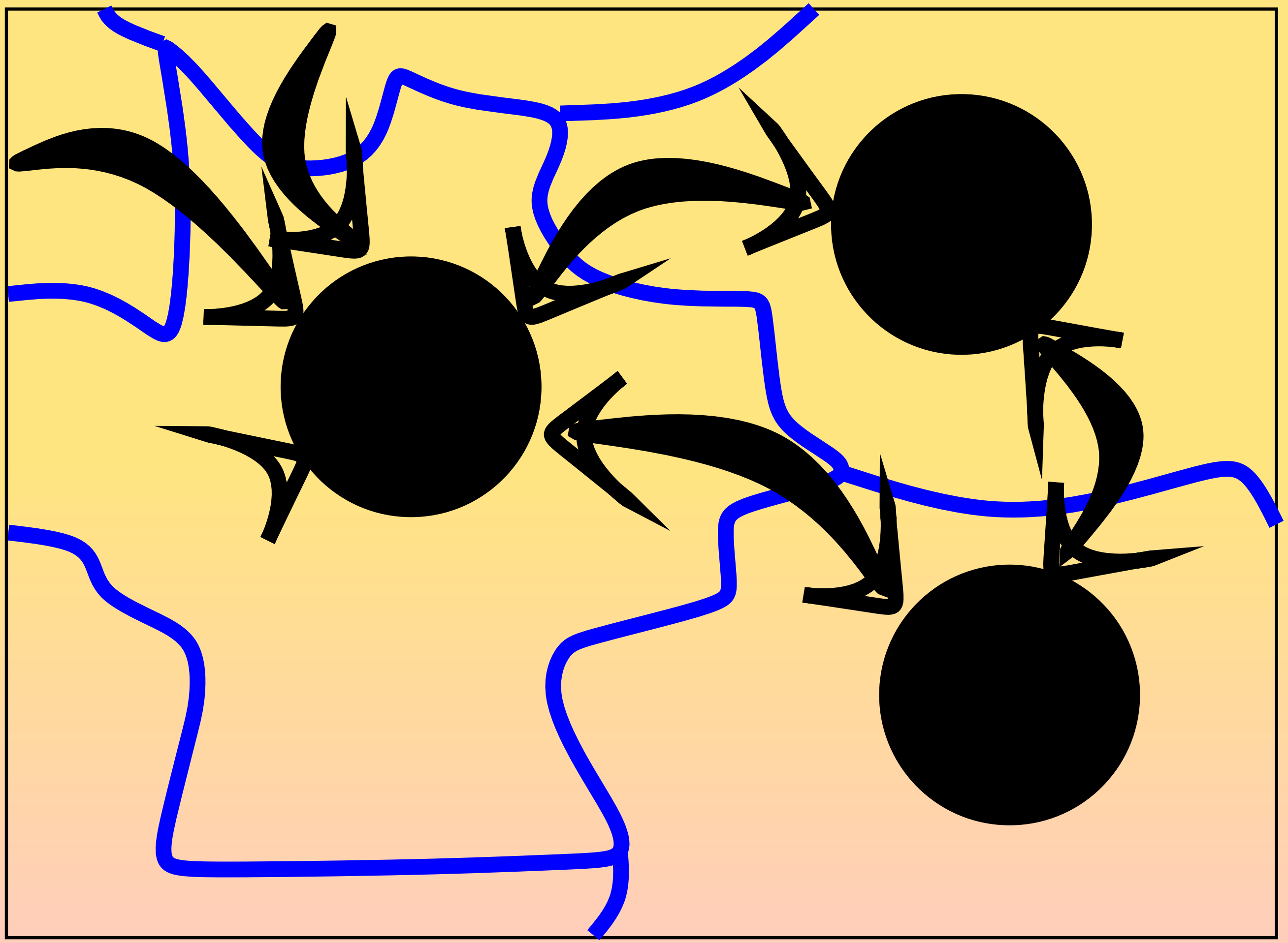
$O(\log m)$ noeuds

Graphes des mini triangulations

graphe F:

- un nœud pour chaque mini région,
- un arc pour tout paire de mini régions adjacentes

F est une carte planaire



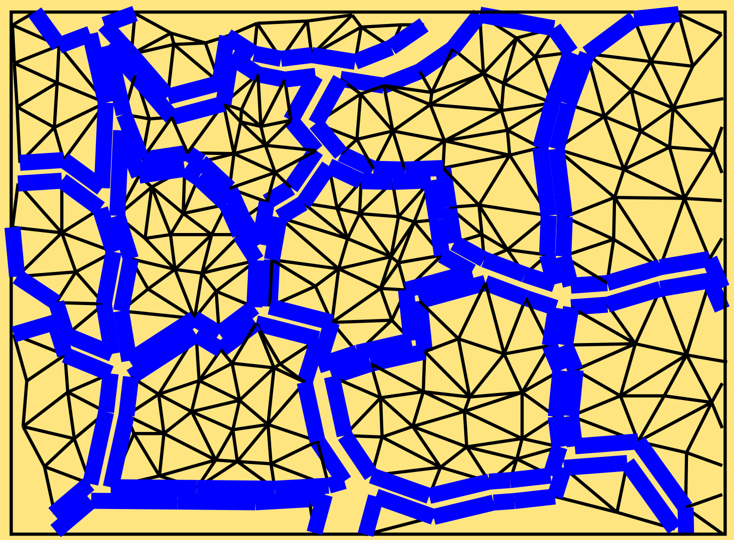
graphe F

$O(\frac{m}{\log^2 m})$ noeuds

Coût asymptotique de la représentation

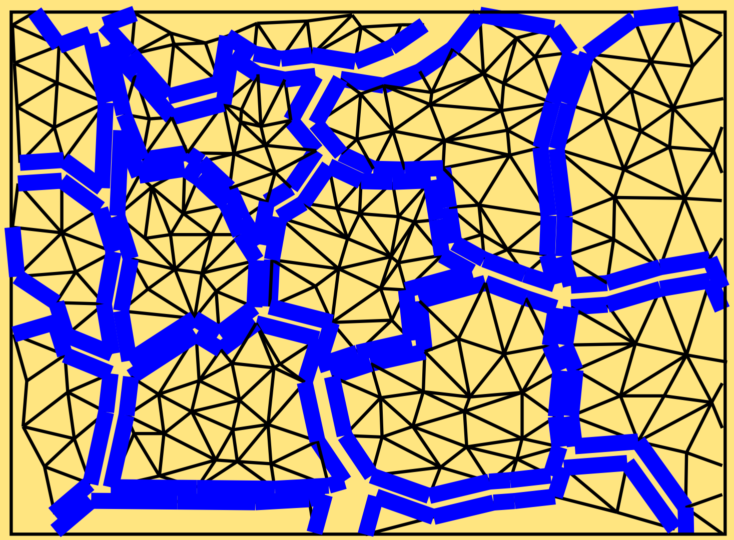
Notre schéma de représentation

Coût des graphes G et F



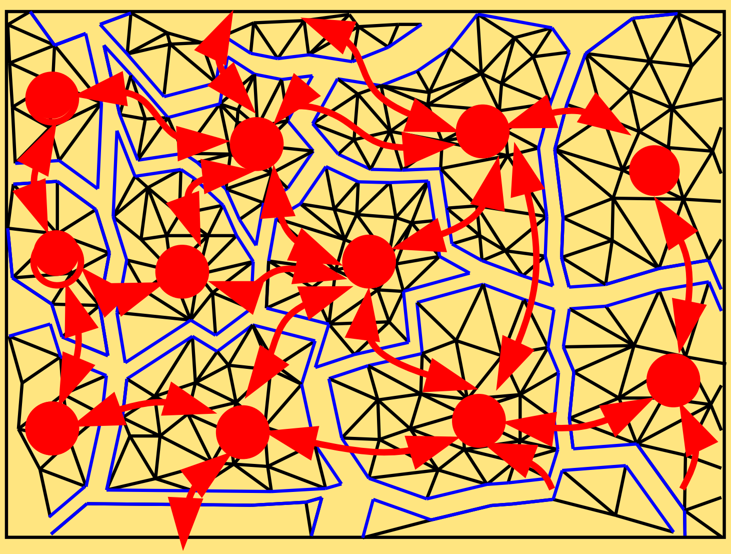
$O(\frac{m}{\log m})$ micro régions

Notre schéma de représentation



$O(\frac{m}{\log m})$ micro régions

graphe G

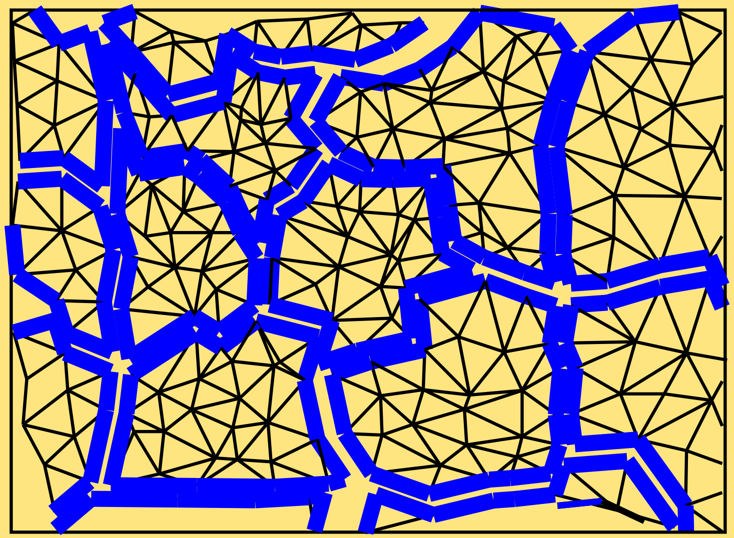


$O(\frac{m}{\log m})$ nœuds

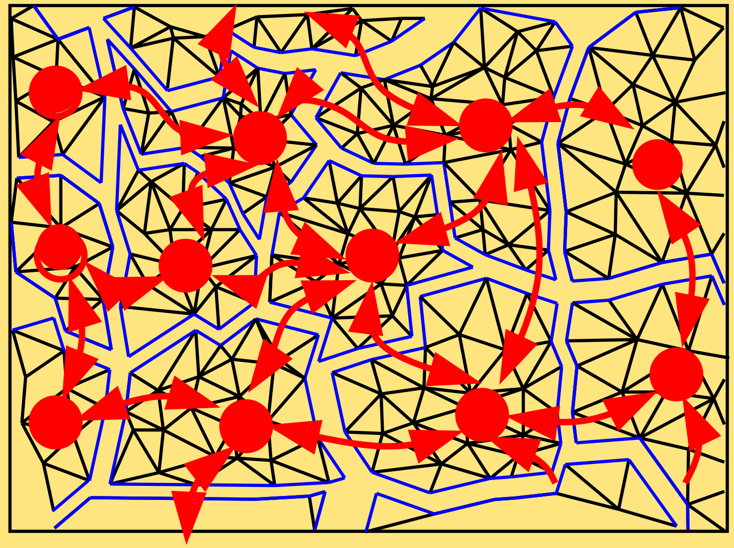
G est localement planaire et donc creux

$$E(G) = O(\frac{m}{\lg m})$$

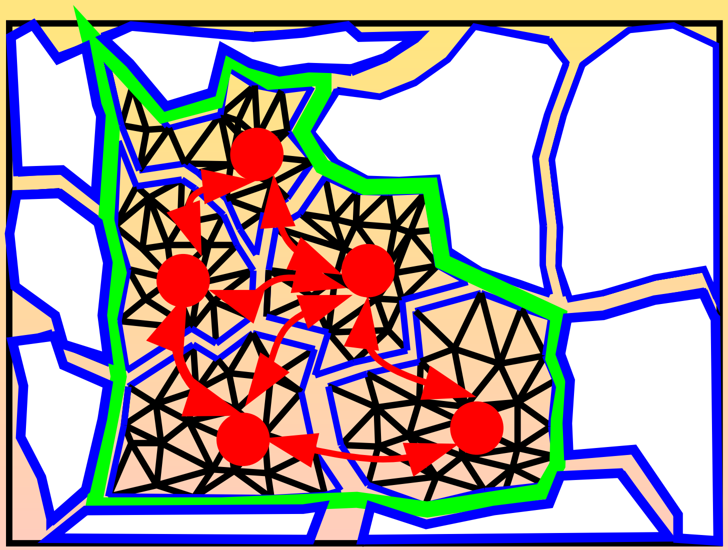
Notre schéma de représentation



graphe G



graphe G_i $\quad O(\log m)$ nœuds



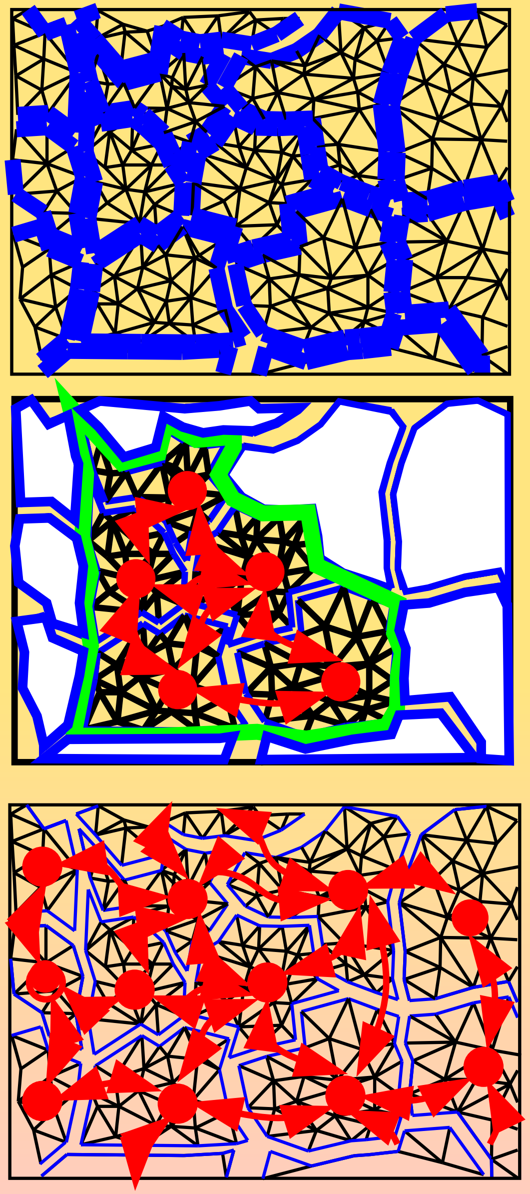
$$\sum_i \|E(G_i)\| = O(\frac{m}{\lg m})$$

$O(\frac{m}{\log m} \log\log m)$ bits

On peut utiliser des pointeurs locaux de taille $\boxed{\log\log m}$ pour représenter de manière explicite les graphes G_i

Notre schéma de représentation

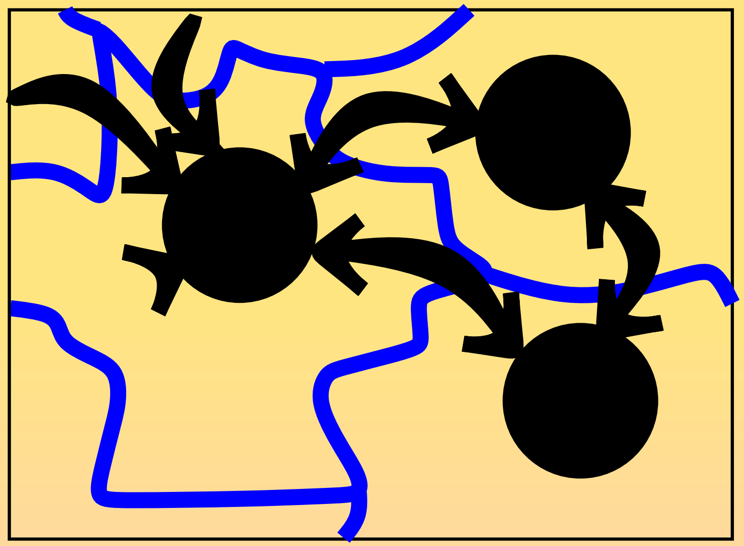
On peut utiliser des pointeurs de taille $\log m$



F est planaire et globalement creux

graphe F

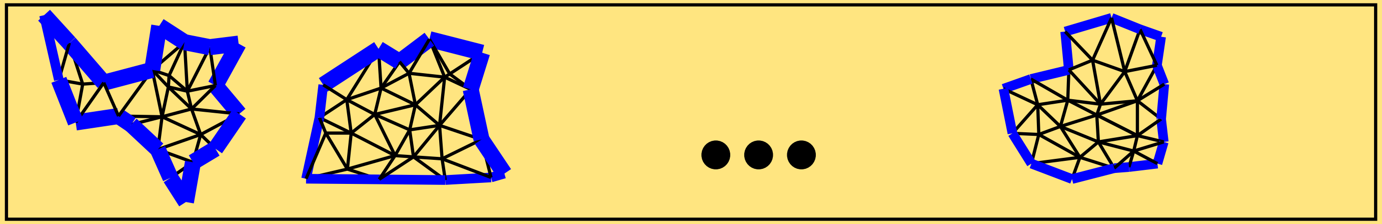
$O(\frac{m}{\log^2 m})$ arcs



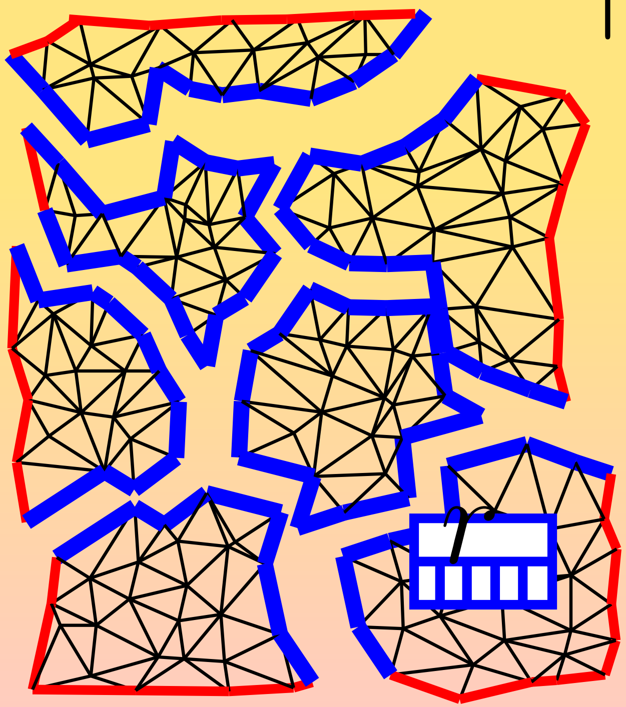
$O(\frac{m}{\log^2 m} \log m)$ bits

Coût du catalogue

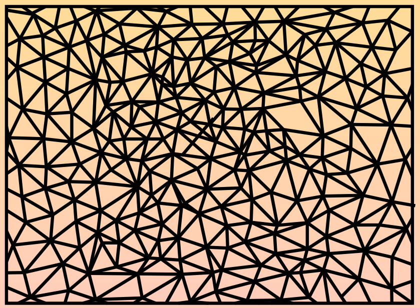
Catalogue exhaustif des micro régions



$$\|A\| \approx 2^{\frac{1}{4}2.175r} \leq 2^{\frac{1}{4}2.175\,\lg m}$$



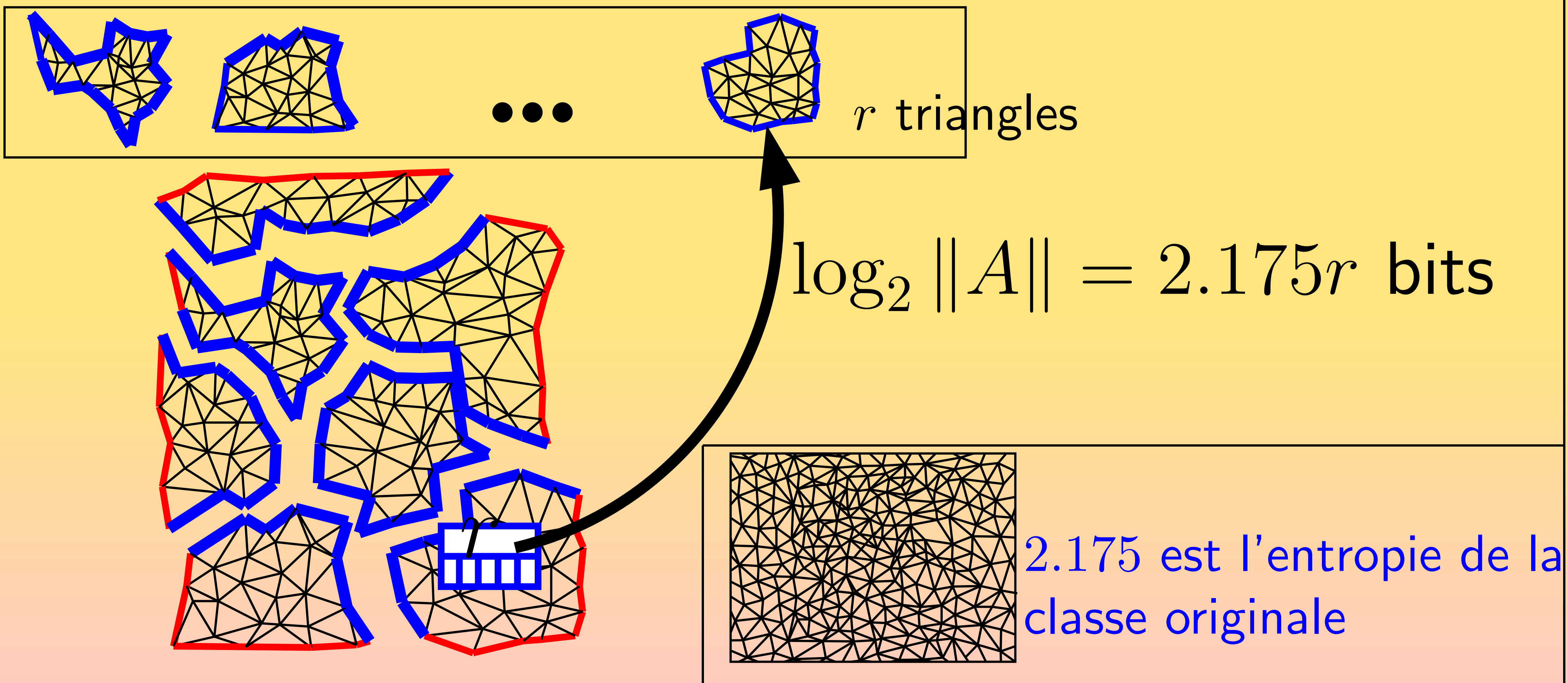
Le catalogue exhaustif des micro régions ayant au plus r triangles a taille negligéable



2.175 est l'entropie de la classe originale

Coût des références vers le catalogue

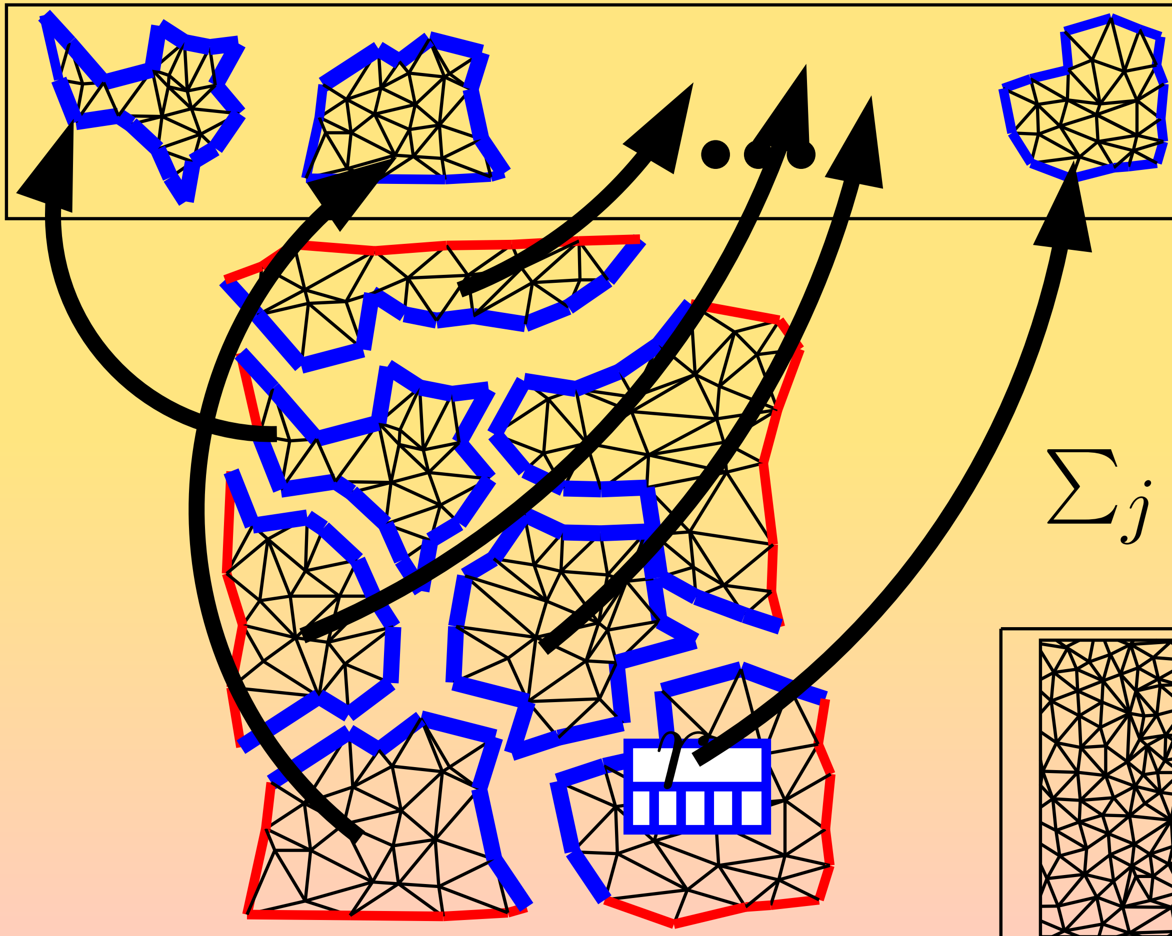
Le coût d'un pointeur dépend de la taille du catalogue



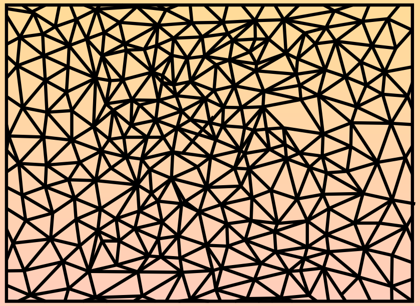
Représentations compactes de maillages

Terme dominant

La somme des pointeurs vers le catalogue exhaustif fournit le terme dominant



$\sum_j 2.175 r_j = \boxed{2.175m}$ bits



2.175 est l'entropie de la classe originale

Représentations compactes de maillages

Théorème (Castelli Aleardi, Devillers et Schaeffer, WADS05)
Pour des triangulations planaires à m triangles il existe une représentation succincte permettant le test d'adjacence en temps $O(1)$ necessitant

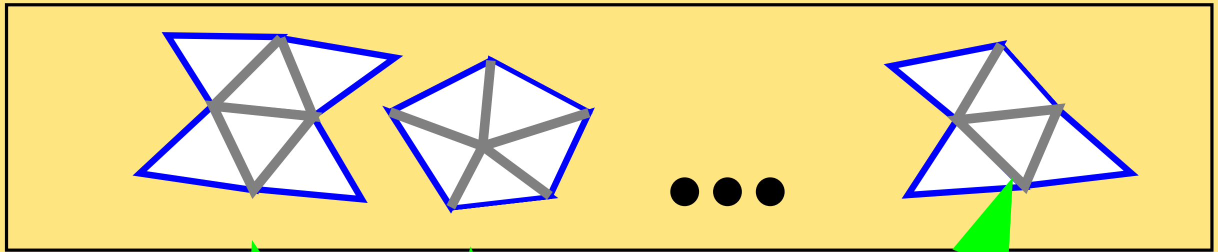
$$2.175m + O(m\frac{\lg \lg m}{\lg m}) = 2.175m + o(m) \text{ bits}$$

En genre supérieur g on a

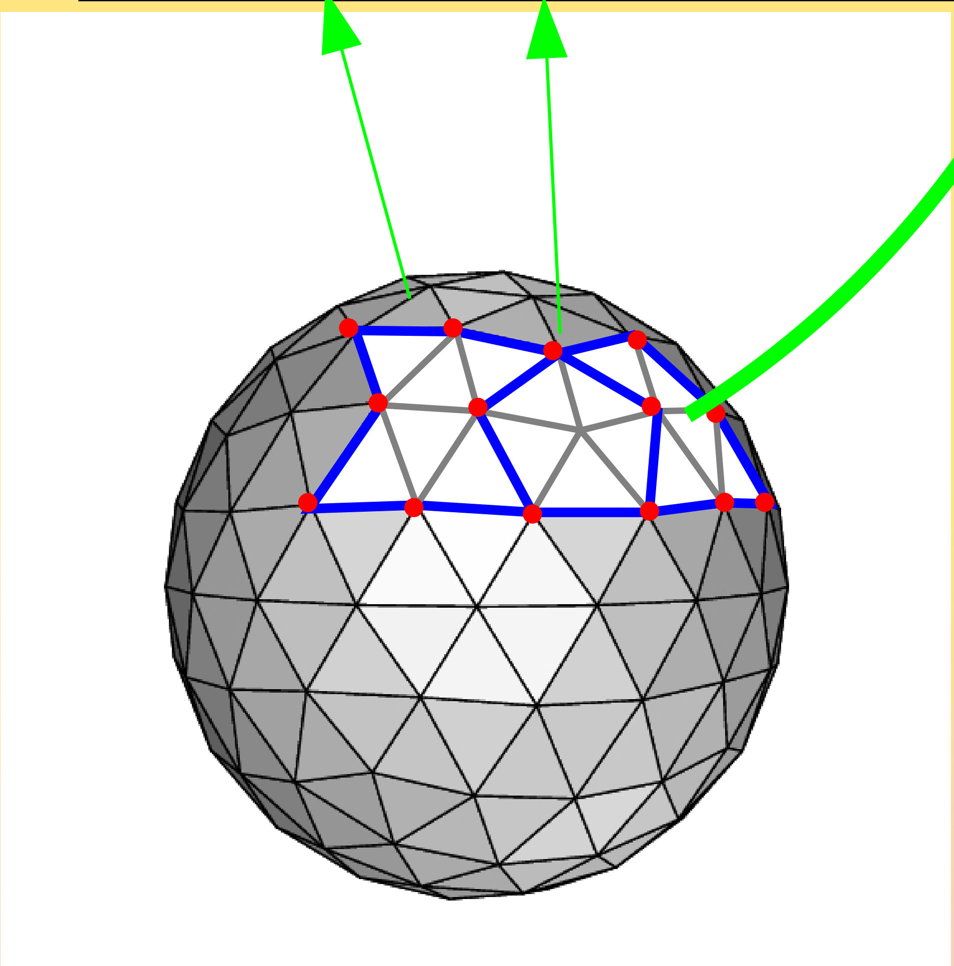
$$2.175m + 36(g-1)\lg m + O(m\frac{\lg \lg m}{\lg m} + g \lg \lg m) \text{ bits}$$

Représentations compactes de maillages

Aucune hypothèse sur la complexité du bord

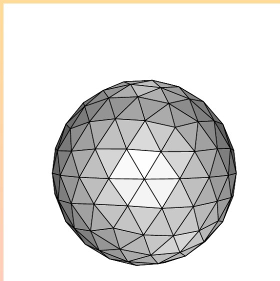


$$\|A\| \approx 2^{\frac{1}{4}2.175r}$$



$$\log_2 \|A\| = 2.175r \text{ bits}$$

$$\sum_j 2.175 r_j = \boxed{2.175m} \text{ bits}$$

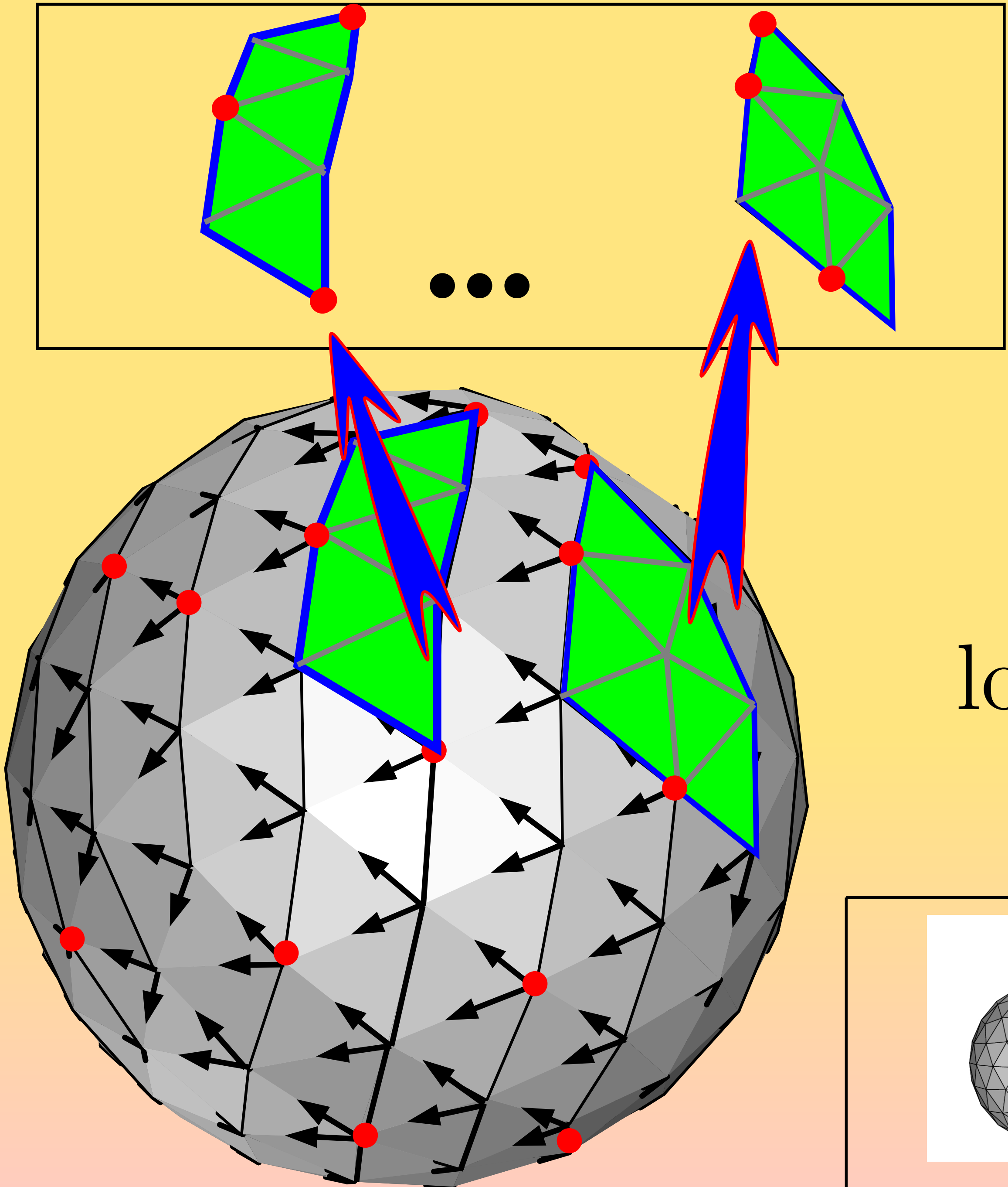


$\boxed{1.62m}$ est l'entropie de la classe originale

Peut-on atteindre l'optimalité?

Représentations succinctes

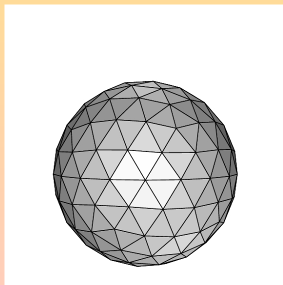
Une décomposition plus astucieuse



$$\|A\| = ?$$

Un catalogue plus petit

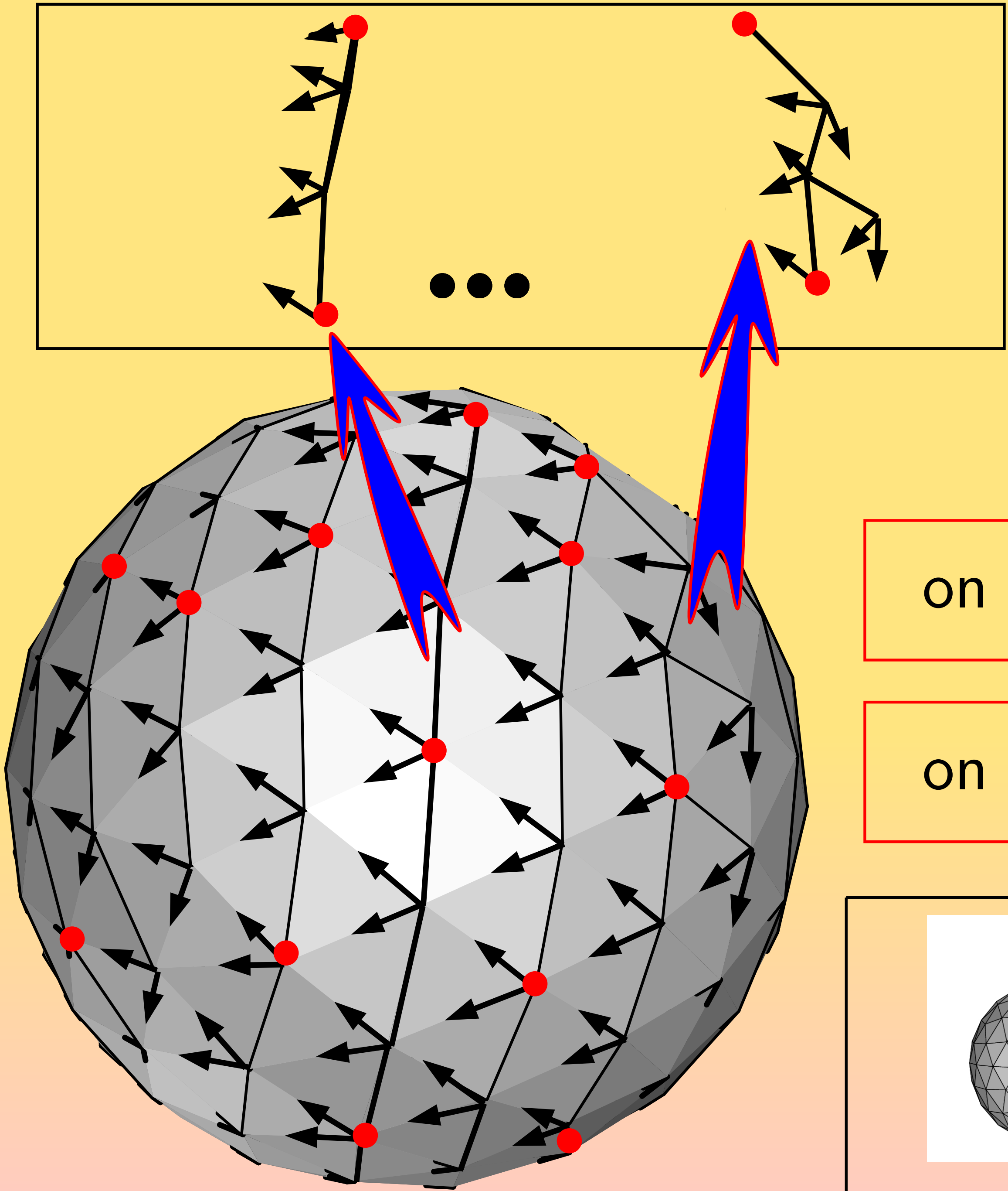
$$\log_2 \|A\| = ? \text{ bits}$$



$1.62m$ est l'entropie de la classe originale

Représentations succinctes

Une décomposition plus astucieuse ... à base d'arbres couvrants

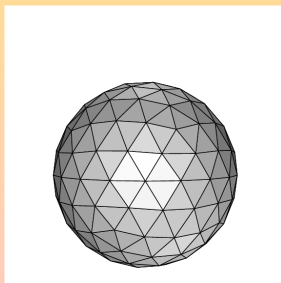


$$\|A\| << 2^{2.175r}$$

Un catalogue plus petit

on décompose en micro arbres

on compte en terme de sommets



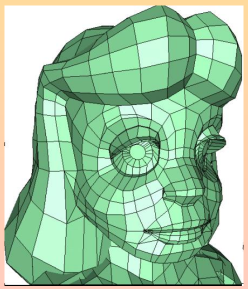
$1.62m$ est l'entropie de la classe originale

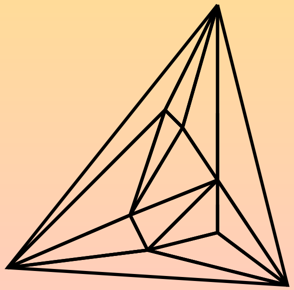
Triangulations et cartes planaires succinctes

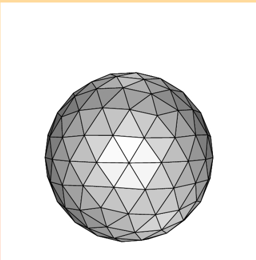
(Castelli Aleardi, Devillers et Schaeffer, SoCG06)

Théorème
Pour certaines classes de cartes planaires (triangulations et graphes 3-connexes) il existe une représentation succincte optimale, permettant la navigation en temps $O(1)$. Le coût correspond asymptotiquement à l'entropie:

- $1.62m$ bits, pour les triangulations de la sphère de taille m;
- $2e$ bits, pour les graphes 3-connexes à e arêtes.

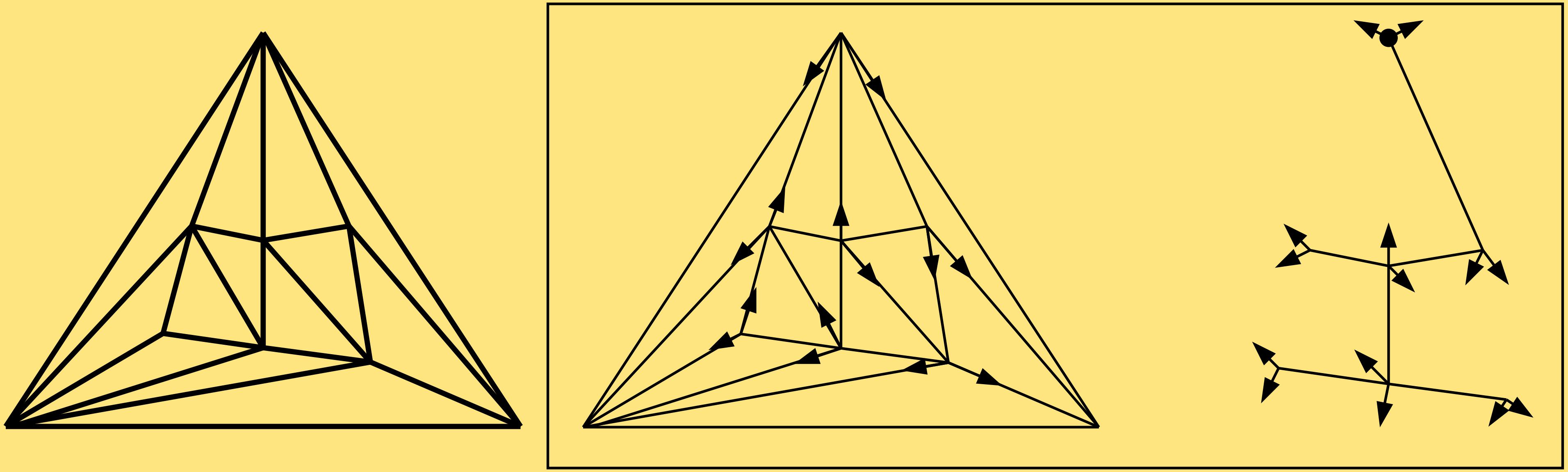




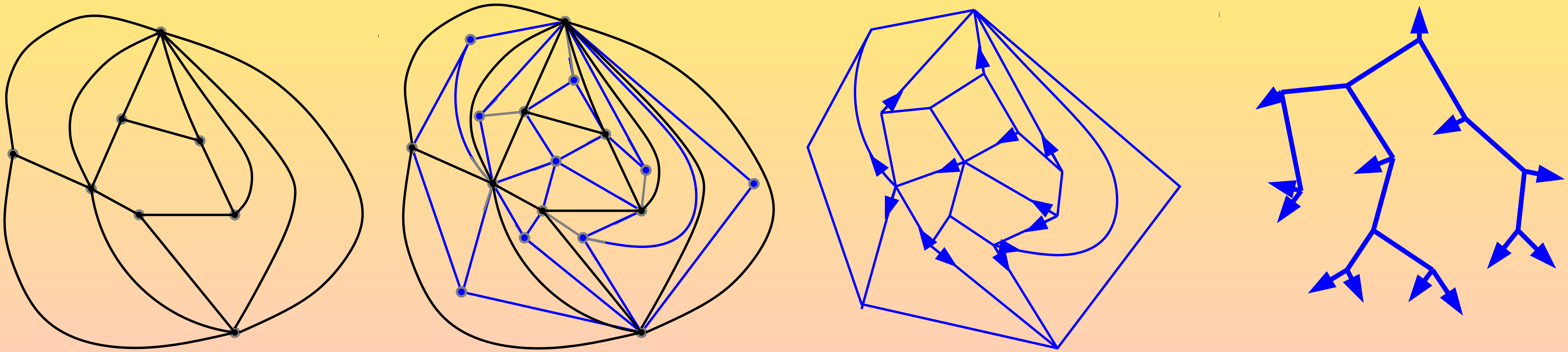


Cartes planaires et arbres bourgeonnants

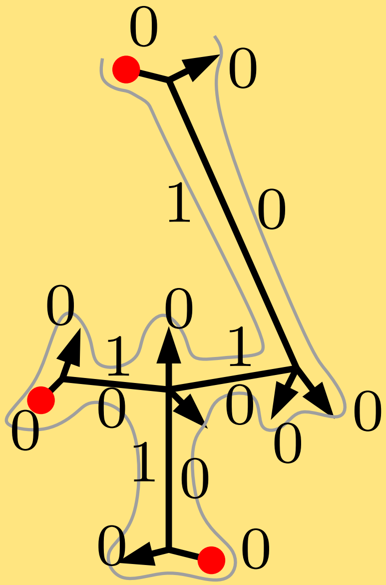
(triangulation planaires, Poulalhon et Schaeffer 2003)



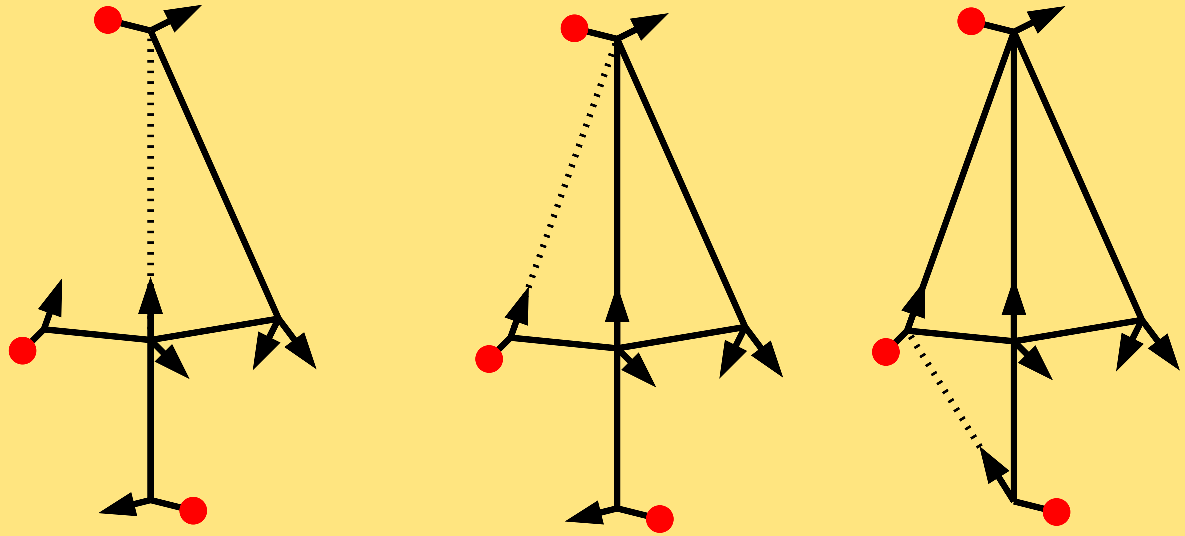
(cartes planaires 3-connexes, Fusy Poulalhon et Schaeffer 2005)

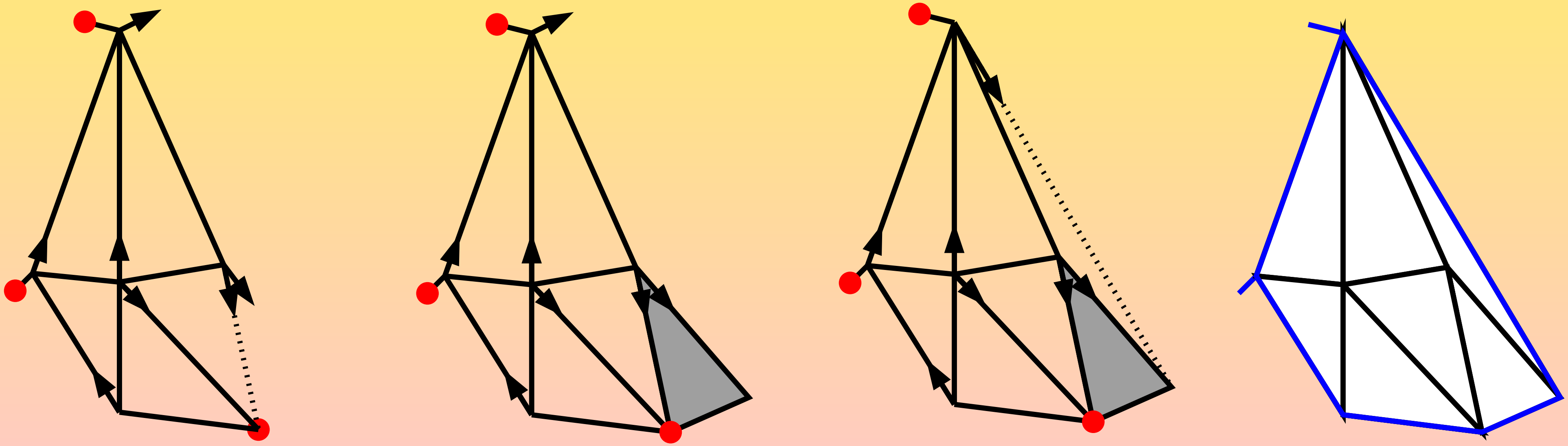


Une nouvelle opération de clôture locale

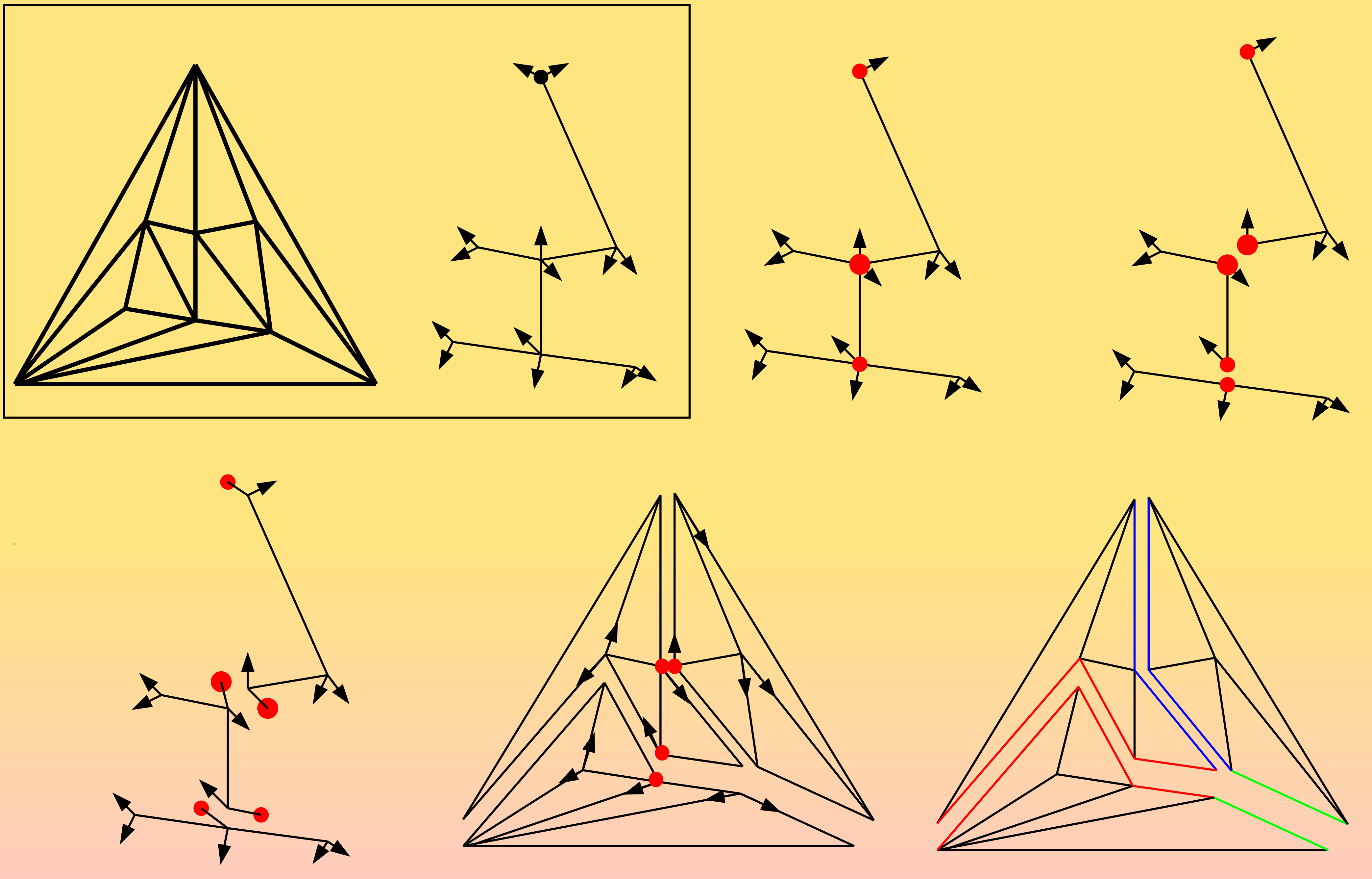


11010001000000000000
1001010000

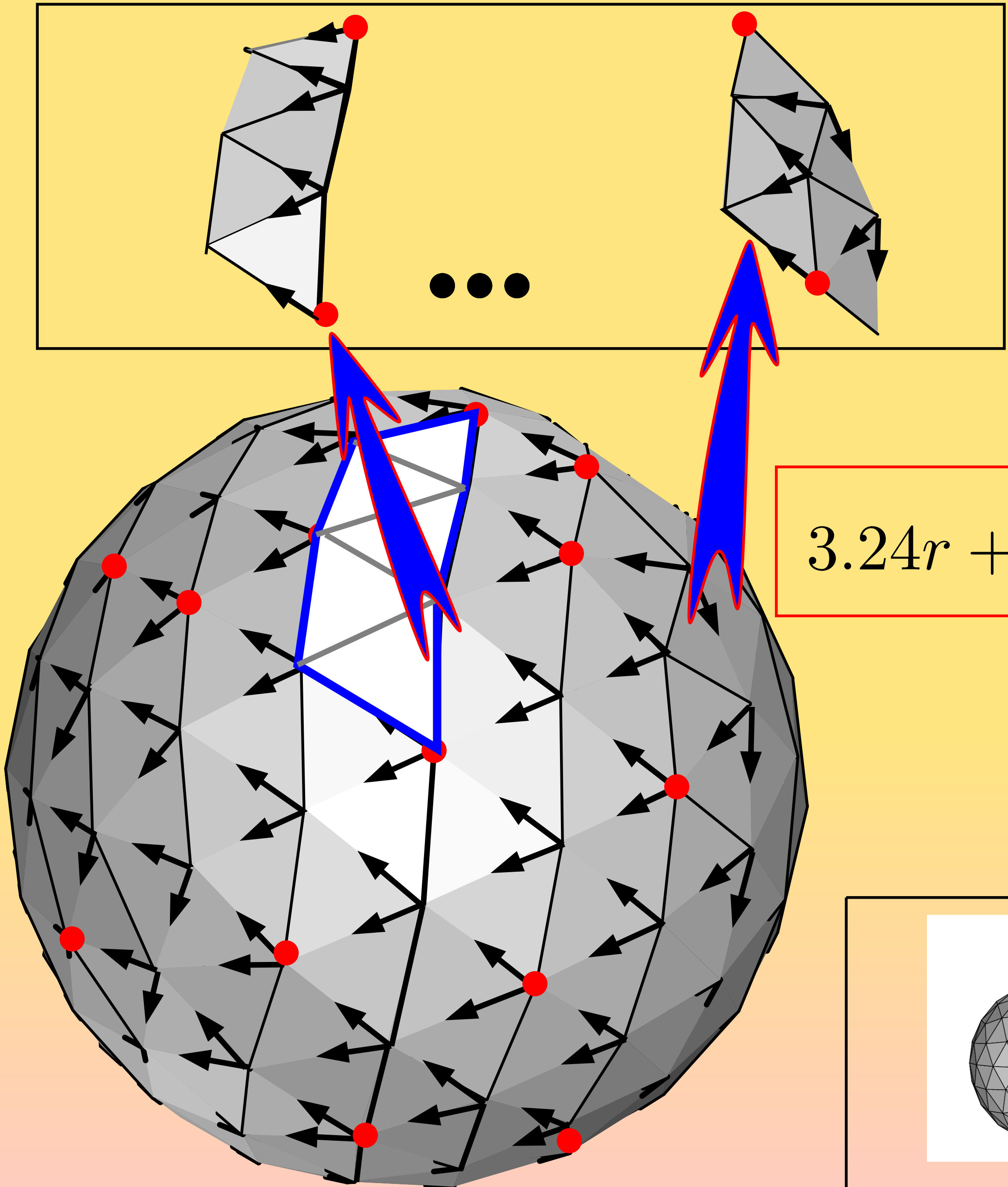




Une meilleure stratégie de décomposition



Coût en mémoire: terme dominant

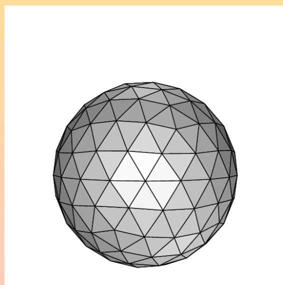


$$\|A_r\| = \|\sum_w A_{r,w}\|$$

$$\|A_{r,w}\| = 2^{3.24r} \cdot \binom{2r}{w}$$

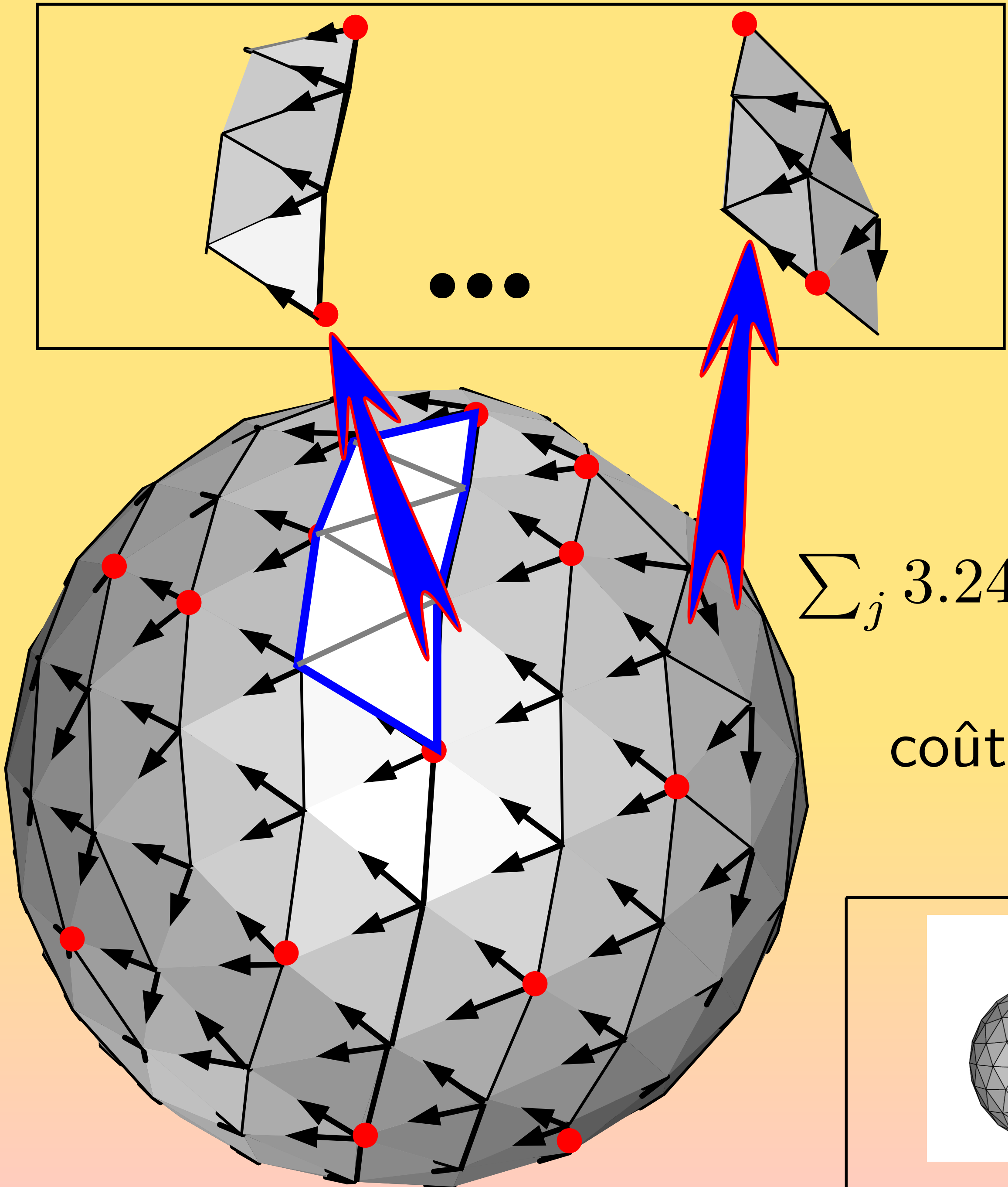
$\boxed{3.24r + w \lg r}$ bits

coût d'une référence



$3.24n$ ou $1.62m$
est l'entropie de la
classe originale

Coût en mémoire: terme dominant

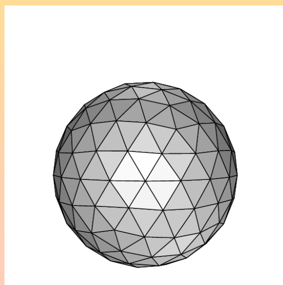


$$\sum_i r_i \approx n$$

$$\sum_i w_i = O\left(\frac{n}{\lg n}\right)$$

$$\sum_j 3.24 r_j + w_i \lg r_i = \boxed{3.24n + o(n)} \text{ bits}$$

coût de la somme des pointeurs



$3.24n$ ou $1.62m$ est l'entropie de la classe originale

Comparaison des résultats

Codage	requêtes	3-connexe	triangulé
Jacobson (Focs89)	$O(\lg n)$	$64n$	$64n$
Munro Raman (Focs97)	$O(1)$	$8n + 2e$	$7m$
Chuang et al. (Icalp98)	$O(1)$	$2e + 2n$	$3.5m$
Chiang et al. (Soda01)	$O(1)$	$2e + 2n$	$4m$
Blandford et al. (Soda03)	$O(1)$	$O(n)$	$O(m)$
Castelli et al. (Wads05 Cccg05)	$O(1)$	no	$2.175m$
Castelli et al. (SoCG06)	$O(1)$	$2e$	$1.62m$

Une structure dynamique

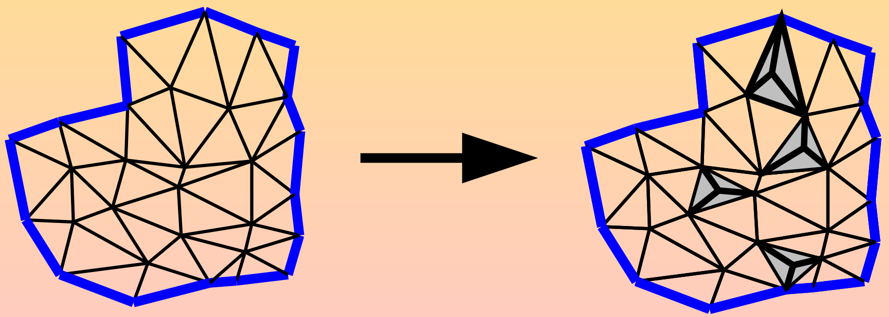
Triangulations compactes dynamiques

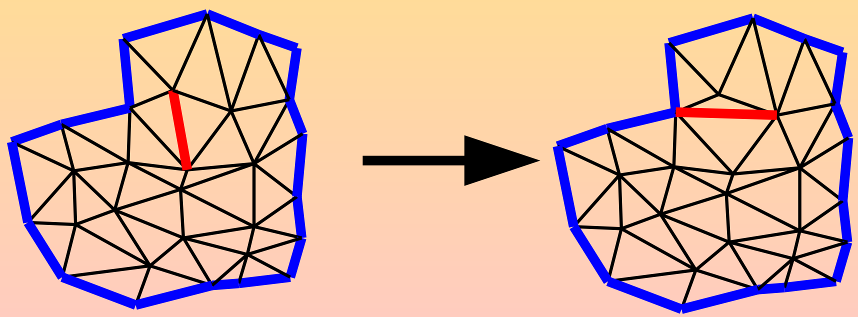
théorème (Castelli Aleardi, Devillers et Schaeffer, CCCG05)
Pour des triangulations ayant m faces, il est possible de maintenir une représentation succincte, après insertion/suppression de sommets et flip arêtes, en gardant un temps $O(1)$ pour la navigation. La taille de la représentation est de

$$2.175m + o(m) \text{ bits}$$

Le coût d'une mise à jour est:

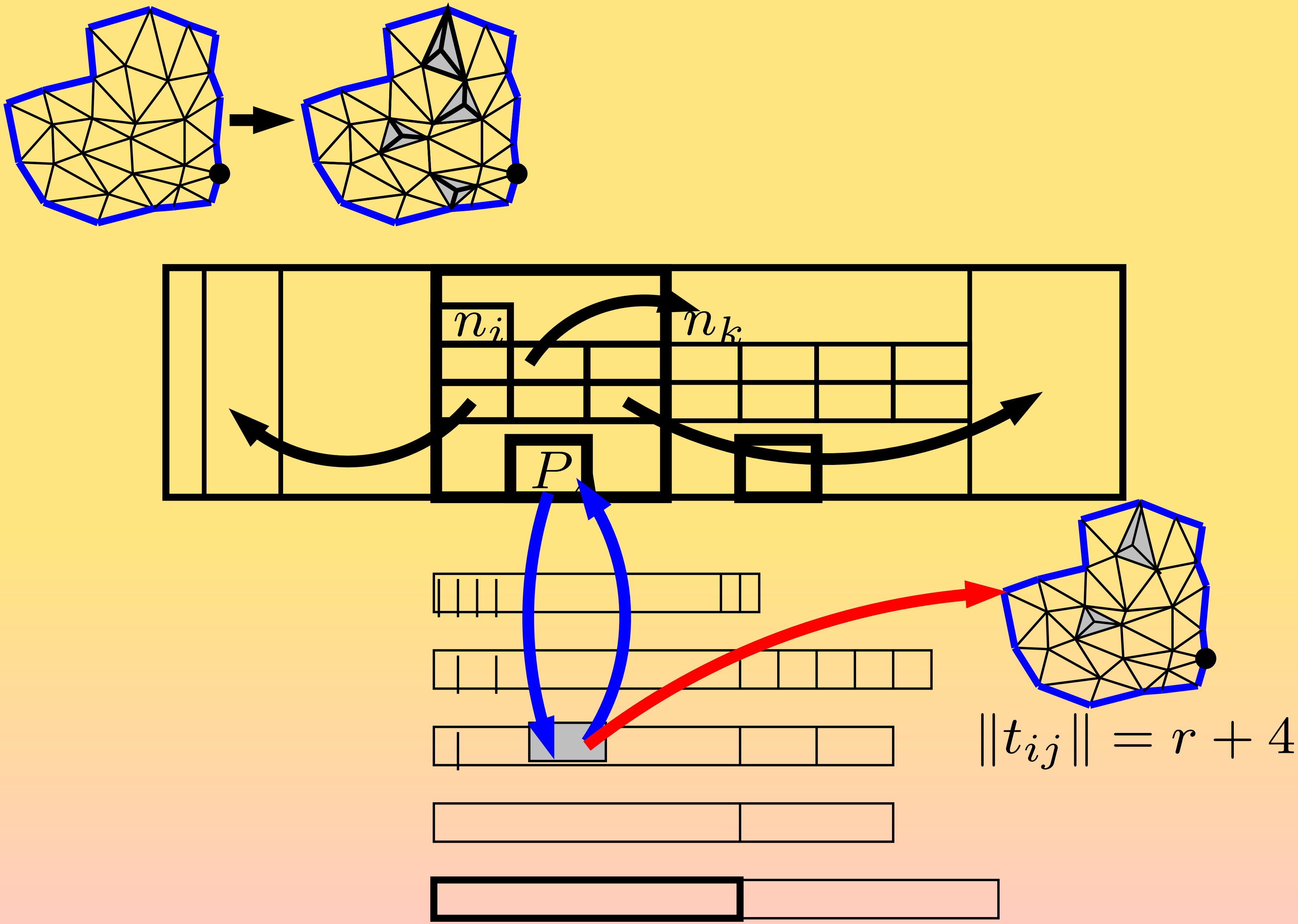
- temps $O(1)$ amorti pour l'insertion de sommet;
- temps $O(\lg^2 m)$ amorti pour la suppression de sommet et flip d'arête;





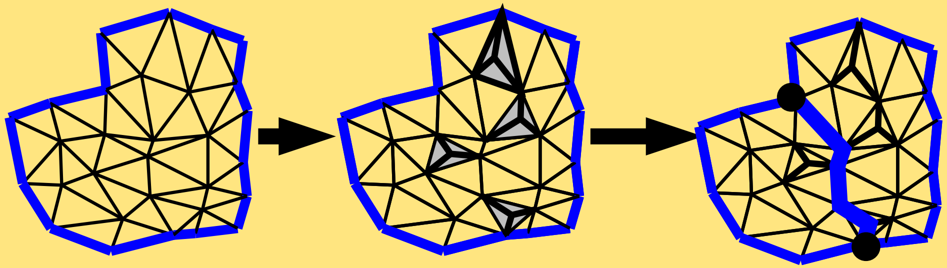
Triangulations compactes dynamiques

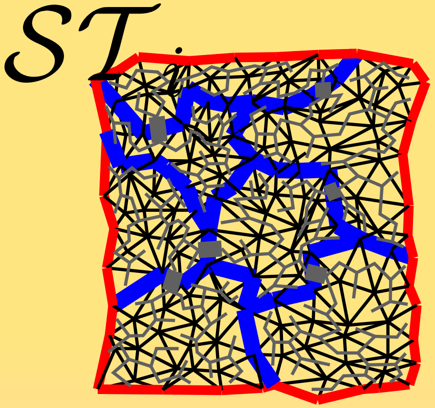
- meilleure organisation de la mémoire (Tableaux dynamiques)

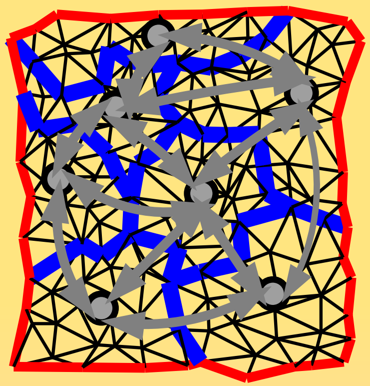


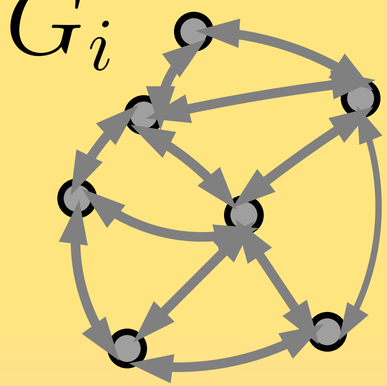
Triangulations compactes dynamiques

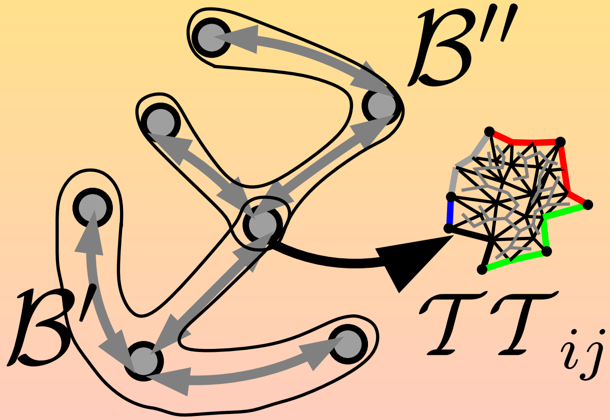
- stratégies de décomposition astucieuses

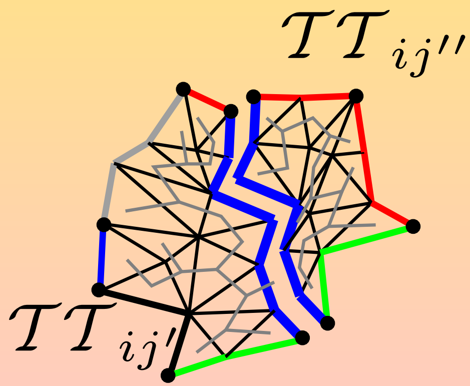










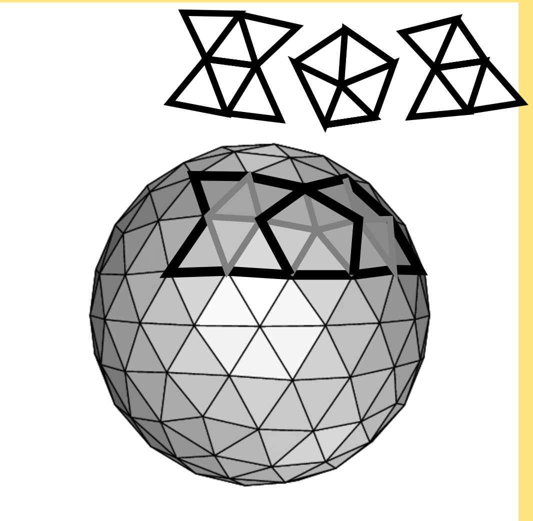


Et dans la pratique?

$$2.175m + 36(g-1)\lg m + \boxed{O(m\frac{\lg\lg m}{\lg m} + g\lg\lg m)} \text{ bits}$$

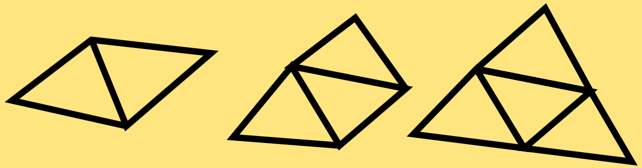
Une version pratique implantable

(en collaboration avec Abdelkrim Mebarki, CCCG06)

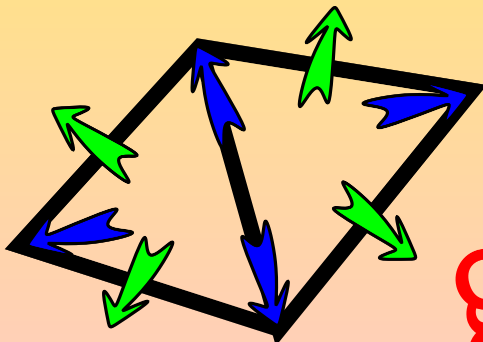


$$\cancel{\frac{1}{12}\log m \text{ to } \frac{1}{4}\log m}$$

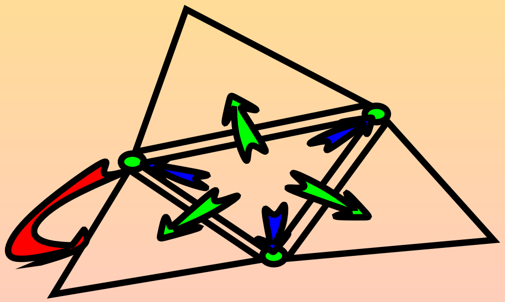
Catalogue



8 références par quad



Structure usuelle
6 references par triangle
1 référence par sommet

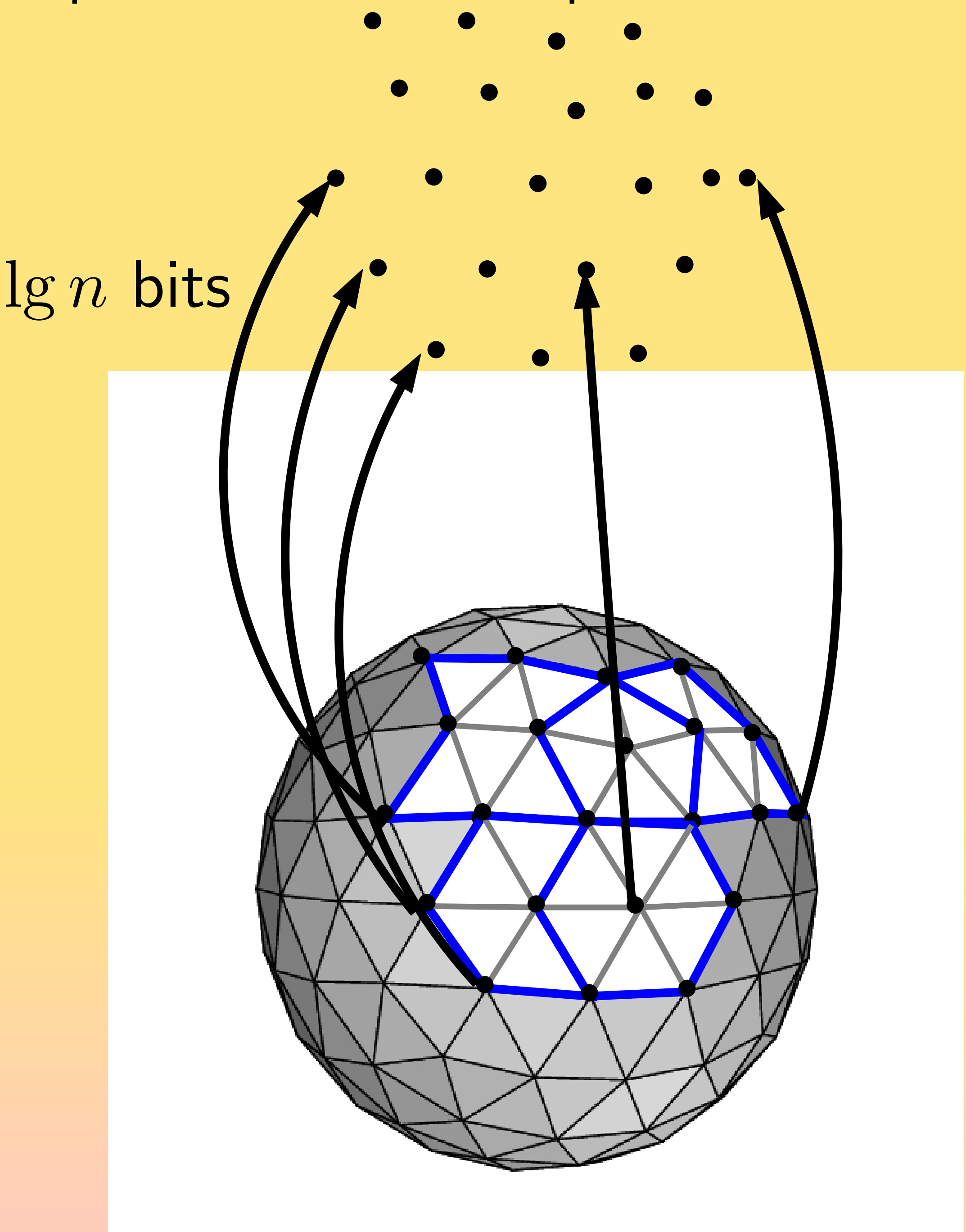


gain 9/13

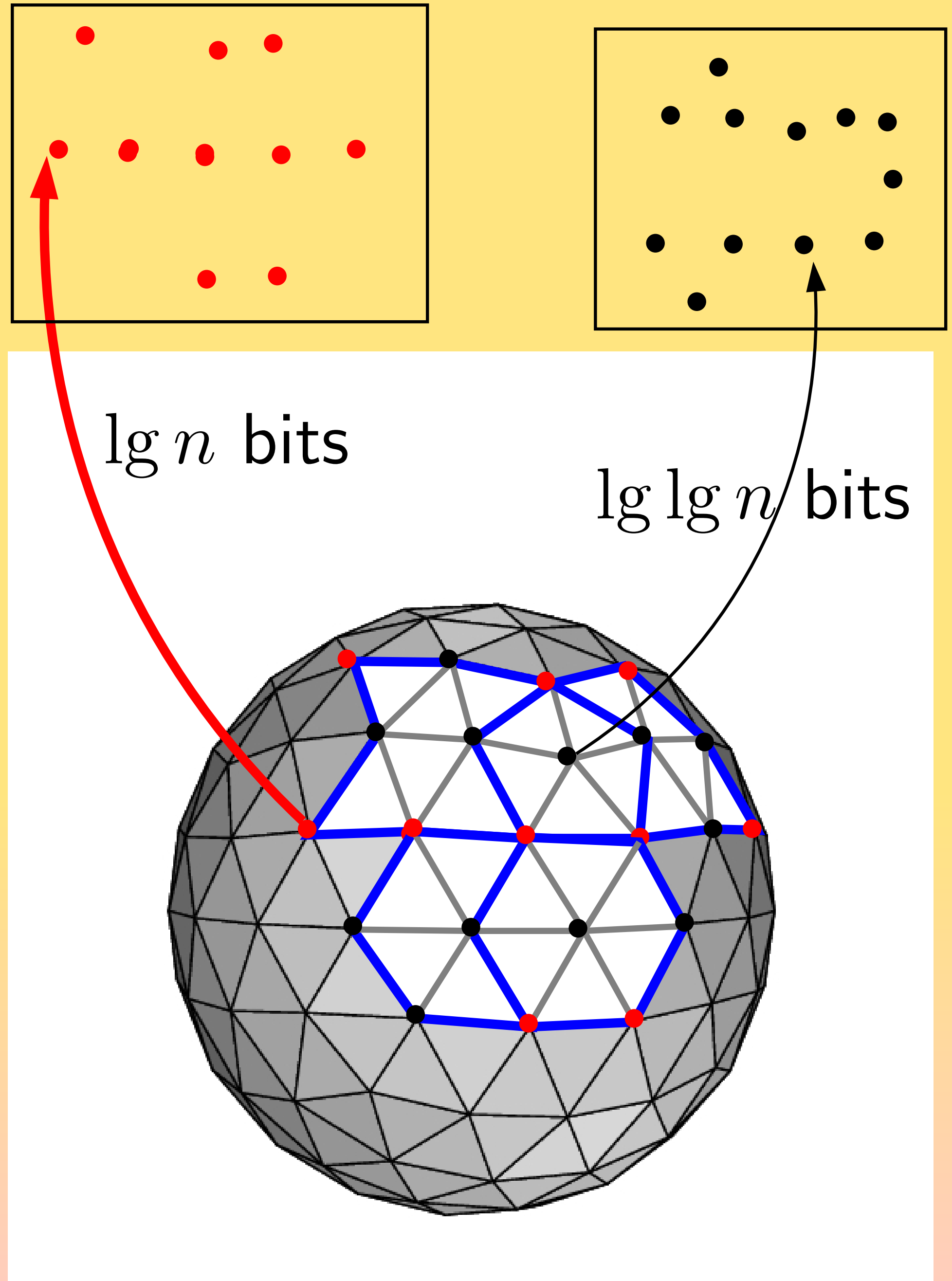
Et la géométrie?

Données géométriques

trop de références multiples



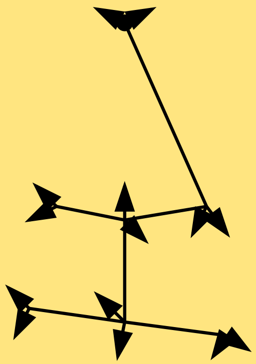
sommets multiples

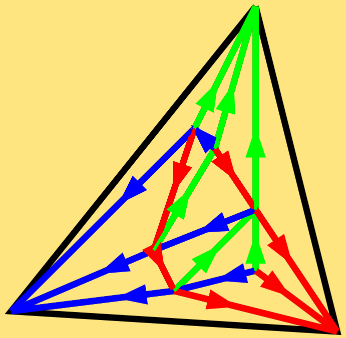


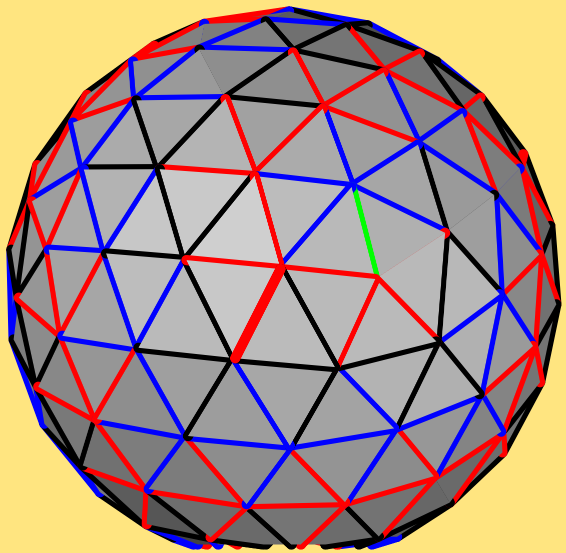
Perspectives futures

Perspectives futures

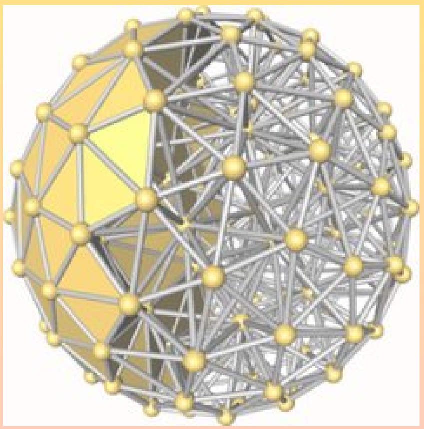
- Extensions en genre supérieur







- Maillages tetrahédriques



Codage de la géométrie

- Repères géométriques locaux