

FEUILLE D'EXERCICES N°4

EXERCICE 1. Prendre deux vecteurs u et v de taille 3 aléatoirement dans Maple. Calculer $w = u \wedge v$ et les produits scalaires (u, w) et (v, w) . Que constatez-vous ?

EXERCICE 2. Calculer l'angle formé entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3. Prendre deux matrices carrées A et B aléatoirement dans Maple. Vérifier que : $A + B = B + A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et (très probablement) $AB \neq BA$.

EXERCICE 4. Expliquer pourquoi les commandes suivantes fonctionnent ou pas.

```
[> u :=vector([1,0]); v :=vector([3,5,2]); matadd(u,v);  
[> A :=randmatrix(2,2); B :=randmatrix(3,3); matadd(A,B);  
[> multiply(A,v);  
[> C :=matrix([[1,2,3],[4,5,6]]); multiply(C,B); multiply(B,C);
```

EXERCICE 5. Ecrire une procédure qui prend en entrée une matrice M et renvoie la matrice M à laquelle on a ajouté 1 à tous les coefficients de la première colonne.

EXERCICE 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^5 et le déterminant de M . Sans utiliser

Maple, en déduire que $M^4 = I$, $M^{-1} = M^3$ et deviner ce que vaut M^{125} . Vérifier ensuite les résultats avec Maple.

EXERCICE 7.

- 1) Rappeler la définition d'une famille libre (= linéairement indépendante) de vecteurs. Pour chacune des familles suivantes, déterminer si elles sont libres en écrivant le système (linéaire) correspondant, et en le faisant résoudre par la commande *solve* de Maple.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- 2) Rappeler la définition d'une famille génératrice de vecteurs d'un sous-espace vectoriel. Pour chacune des familles suivantes, déterminer si elles sont génératrices de \mathbb{R}^3 en écrivant le système (linéaire) correspondant, et en le faisant résoudre par la commande *solve* de Maple.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par les familles de la question 2 de l'exercice 7,

EXERCICE 9. On considère les vecteurs $v_1 = [2 \ 4 \ 5 \ 6]$, $v_2 = [1 \ 2 \ 5 \ 3]$, $v_3 = [3 \ 1 \ -1 \ 0]$, $v_4 = [4 \ 3 \ 4 \ 3]$. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4 . Le vecteur $w = [4 \ 3 \ -1 \ 3]$ est-il dans ce sous-espace vectoriel? Si oui, exprimez-le comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

EXERCICE 10. Résoudre les systèmes linéaires $A.X = B$ suivants. Quelle est la nature de l'ensemble des solutions? Vérifier les résultats en traçant dans \mathbb{R}^3 les plans correspondant aux équations (commande *implicitplot3d* de la librairie *plots*).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 11. Résoudre le système linéaire $A.X = B$ suivant à un paramètre m en utilisant le pivot de Gauss. On pourra distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de m . Résoudre ensuite ce système en utilisant *linsolve*. Que constatez-vous?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

1) Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2) On appelle dimension d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n le nombre de vecteurs d'une de ses bases. Sur les matrices précédentes, calculer la dimension du noyau, la dimension de l'image et la somme de ces dimensions. Que constatez-vous?

EXERCICE 13. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs

propres de M . Démontrer que les vecteurs propres forment une base de \mathbb{R}^3 . Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base. Calculer $P^{-1}MP$. Pouvez-vous expliquer le résultat obtenu?