École polytechnique — Majeure informatique
Promotion 2008

Cours *Conception et analyse d'algorithmes*
TD no 3 – flots et couplages
29 septembre 2010

1. Plan d'évacuation.

On considère un graphe symétrique $G = (X, E)$ ayant n sommets, et deux sous-ensembles Y et Z de X (non nécessairement disjoints) ; les éléments de Y sont les places et les éléments de Z les issues.

Un plan d'évacuation est un ensemble de chemins dans le graphe tels que deux d'entre eux n'ont pas de sommet commun et tels que chacun des chemins mène d'une place à une issue. Déterminer un plan d'évacuation optimal consiste à trouver un plan d'évacuation contenant le nombre maximum de chemins.

Un problème de flot avec contraintes sur les sommets est un problème de flot classique auquel on ajoute des contraintes supplémentaires définies par un ensemble de nombres s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, où chaque s_i est associé à un sommet x_i de X, les contraintes exprimant que pour $i = 1, \ldots, n$, la somme des flots entrants en x_i doit être inférieure ou égale à s_i.

a. Montrer que la détermination d'un plan d'évacuation optimal peut se ramener à un problème de flot avec contraintes sur les sommets.

b. Montrer que cette nouvelle contrainte peut se traduire par des contraintes portant uniquement sur des capacités d'arcs pour un autre graphe dont on précisera la construction.

c. En déduire un algorithme de recherche d'un plan d'évacuation optimal.

2. Commentaires sportifs

Nous souhaitons faire des commentaires sur un championnat en cours de déroulement auquel participent n équipes. Le principe du championnat est que chaque équipe rencontre toutes les autres un certain nombre de fois et marque 1 point par victoire (pas de match nul possible). À la fin du championnat l'équipe ayant le plus de points gagne.

À un moment donné du championnat l'information suivante est disponible :

– le nombre p_i de points de chaque équipe

– le nombre de rencontres $a_{i,j}$ encore à venir entre l'équipe i et l'équipe j.

Notre but est de déterminer les équipes qui peuvent encore prétendre à la victoire à ce moment du championnat.

1. Considérons le cas suivant, avant le dernier round d'un championnat en 6 rounds :

les équipes	points	parties à jouer 1.	2.	3.	4.
1. rouges	10		1	1	1
2. bleus	10	1		1	1
3. blancs	7	1	1		1
4. verts	3	1	1	1	

Vérifier que les verts ne peuvent plus gagner le championnat.

Notons $a_k = \sum_{i \neq k} a_{k,i}$ le nombre de parties restantes pour l'équipe k. Comment savoir si l'équipe k peut encore gagner : elle aura $p_k + a_k$ points à la fin si elle gagne tous ses matchs, et elle peut gagner le championnat si et seulement s'il existe un déroulement des autres parties tel que toutes les autres équipes marquent moins de $p_k + a_k$ points.

2. Utiliser la caractérisation précédente pour donner un algorithme pour décider si l'équipe numéro k peut encore gagner le championnat étant donnés les p_i et les $a_{i,j}$. On pourra utiliser un problème de flot maximum dans un graphe ayant pour ensemble de sommets

$$X = \{s, t\} \cup \{i \mid 1 \leq i \leq n,\, i \neq k\} \cup \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\, i \neq k,\, j \neq k\}$$

   et des arêtes de capacités bien choisies.
3. Donner un argument direct pour montrer que dans l'exemple précédent les blancs ne peuvent plus terminer premiers, même à égalité avec d'autres équipes.
4. Étant donné un sous-ensemble d'équipe $R \subset \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, montrer que le total des scores des équipes de R à la fin du match sera au moins

$$m(R) = \sum_{i \in R} p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \in R} a_{i,j}.$$

5. En déduire que l'existence d'un sous-ensemble R d'équipes ne contenant pas k et tel que $m(R)/|R| > p_k + a_k$ suffit à assurer que l'équipe k ne puisse plus gagner le championnat.
6. Montrer que cette condition est nécessaire : si l'équipe k ne peut plus gagner le championnat, c'est qu'il existe un sous-ensemble R ne contenant pas k tel que $m(R)/|R| > p_k + a_k$. On pourra utiliser le théorème max-flow / min-cut pour construire le R recherché.

3. Couplages et ensembles couvrants.

Dans un graphe symétrique (X, E), on rappelle qu'un couplage est un sous-ensemble F de E tel que deux arêtes de F n'ont pas d'extrémité commune. Un ensemble couvrant est un sous ensemble C de X tel que toute arête $\{x, y\}$ a au moins une de ses extrémités dans C.

On se propose de démontrer ici le théorème de König, qui affirme que pour un graphe biparti le nombre d'arêtes d'un couplage maximal est égal au nombre minimal de sommets d'un ensemble couvrant. Rappelons qu'un graphe $G = (X, E)$ est biparti s'il existe une partition $X = Y \cup Z$ telle que chaque arête a un sommet dans Y et l'autre dans Z.

a. Transformer G en un réseau de transport G' tel que le flot maximal de G' détermine un couplage maximal dans G. Une coupe de G' est alors déterminée par un sous-ensemble Y' de Y et un sous-ensemble Z' de Z.

b. Montrer que toute coupe de G' détermine un ensemble couvrant de G dont le nombre de sommets est inférieur ou égal à la capacité de la coupe.

c. Réciproquement montrer que tout ensemble couvrant $Y_1 \cup Z_1$ de G détermine une coupe dont la capacité est égale à $|Y_1| + |Z_1|$.

d. Déduire le théorème de König des questions qui précèdent.

e. Au cours du bal annuel il y a n femmes et n hommes, chaque femme choisit $k \geq 1$ cavaliers possibles pour la soirée.

Leurs choix sont tels que chaque homme a été choisi exactement k fois. Montrer en utilisant le théorème de König que l'on peut répartir les cavaliers de façon telle que toutes les personnes puissent danser.

4. Résistance aux pannes.

Un paramètre représentant la résistance aux pannes d'un graphe non orienté G est le nombre minimum d'arêtes à retirer de G pour le déconnecter. Calculer ce nombre en utilisant des algorithmes de flot.

5. Car pooling.

Un groupe de n personnes $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ partagent un minicar pour aller travailler pendant m jours. Le jour i, un sous-ensemble S_i de P formé des personnes allant travailler utilisent ce véhicule. Le conducteur ce jour-là sera un élément de S_i. Étant donnés $S_1, \ldots S_m$, le problème est de choisir pour chaque j le conducteur du jour j de façon que la répartition soit *équitable*, c'est-à-dire qu'une personne i ne conduise pas plus de $\lceil \sum_{j:i \in S_j} \frac{1}{|S_j|} \rceil$ jours au total. Par exemple, s'il y a quatre personnes et six jours $S_1 = S_2 = S_3 = \{p_1, p_2\}$ et $S_4 = S_5 = S_6 = \{p_1, p_3, p_4\}$, la personne p_1 doit conduire au maximum $\lceil 3/2 + 3/3 \rceil = 3$ des six jours, la personne p_2 au maximum $\lceil 3/2 \rceil = 2$ et les autres au maximum 1 jour.

Modéliser ce problème comme un problème de flot maximum.

Montrer qu'il existe toujours une répartition équitable.