UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.1 - M.A.S.S - Algèbre S1 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Devoir Maison 2.

Exercice 1. Séries Numériques.

1. Etudier la nature des séries de terme général :

$$a_n = \frac{a}{n}\sin\frac{a}{n} \qquad b_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \qquad c_n = \frac{3^n - 5}{4^n + n^2} \qquad d_n = (\frac{2n-1}{n+1})^{2n}$$

2. Pour quelles valeurs de a la série de terme général $u_n = n^{-a^2+a-1}$ converge-t-elle ?

Exercice 2. Suites de fonctions.

Important : Dans cet exercice lorsque vous concluez quant à la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions n'oubliez pas de dire **sur quel intervalle a lieu cette convergence**.

1. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme sur $[1, \infty[$ de la suite de fonctions :

$$u_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{nx}{1+nx} \end{array} \right.$$

2. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lr} n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2x & \text{si } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{si } x \geq 2/n \end{array} \right.$$

   Dessiner f_1, f_5 et f_{10}. Puis étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$

3. Même question pour la suite de fonctions définies sur $[0, \pi/2]$ par $g_n(x) = \sin^n(x)$.
   Soit $\epsilon > 0$ *petit*, étudier la convergence uniforme de $(g_n)_n$ sur $[0, \pi/2 - \epsilon]$.

4. Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions définie par $h_n(x) = xe^{-n^2x}$

5. Soit la suite de fonctions définie par :

$$t_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2n}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

   (a) Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de cette suite fonctions sur $[0, 1]$

   (b) Soit $a > 0$ la suite converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

   (c) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} t_n(x)dx$$

   (d) Conclure.