UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Analyse S3 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Page perso : http ://www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Devoir Maison

Exercice 1. Développements limités.

Calculer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

(1). $a(x) = \log(\cos(x))$, à l'ordre 6
(2). $b(x) = \tan(x)$, à l'ordre 5
(3). $c(x) = e^{\sin(x)}$, 3
(4). $d(x) = \arcsin(x^2)$, 7
(5). $e(x) = \log(1+x)^2$, 4
(6). $f(x) = \arccos(x)$, 8
(7). $g(x) = \sin(x)^6$, 9
(8). $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 3
(9). $i(x) = \mathrm{ch}(2x)\mathrm{sh}(3x)$, 5
(10). $j(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$, 5
(11). $k(x) = (\frac{\sin(x)}{x})^{\frac{3}{x^2}}$, 2
(12). $l(x) = 2 + 5x - 3x^3$, 3

Quelques indications : Pour le (2), rappelez vous que la fonction tan n'est jamais que la fonction $\sin / \cos$. Pour les (4) et (6) il faut préalablement caluler les développements limités des fonctions arcsin et arccos, pour ce faire calculer les développements limtés de leurs dérivées ($\arcsin' = -\arccos' = 1/\sqrt{1-x^2}$) puis intégrer ces développements en faisant bien attention à la valeur de la fonction en zéro (surtout pour arccos).

Rappel des développements limités usuels

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(x^n) + o(x^n)
\end{aligned}
$$

A partir des développements ci-dessus on peut retrouver tous les autres. Par exemple en utilisant celui de $1/(1-x)$ on retrouve facilement ceux de $1/(1+x)$, $1/(1+x^2)$, puis en intégrant on obtient ceux de $\ln(1+x)$ et arctan.

Exercice 2. Suites récurrentes
Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$(1).\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 1-\frac{2}{u_n}\end{array}\right. \qquad (2).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)}\end{array}\right.$$

$$(3).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2+2u_n\end{array}\right. \qquad (4).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n+\frac{1}{u_n}-1\end{array}\right.$$

Le premier réflexe à avoir est de remarquer que les suites sont définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ une bonne connaissance de la fonction f vous aidera à trouver la solution. Il faut commencer par chercher les points fixes de f (i.e. résoudre $f(x) = x$). Puis par exemple étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$, pour avoir des informations sur la monotonie de la suite u_n. La grosse difficulté de l'étude des suites récurrentes non linéaires c'est que à la différence des suites linéaires il n'y à pas de méthode systématique. Il faut donc être astucieux.

Exercice 3.
On considère la fonction f définie par :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{9}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

Et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [0, 1/2]$.
2. En déduire que α est l'unique point fixe de f dans l'intervalle $[0, 1/2]$
3. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que le suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \le u_n < 1/2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $(u_n) \to \alpha$.

Exercice 4. Séries
Déterminer la nature des séries de terme général suivantes. L'étude doit se faire de la façon suivante :

1. Déterminer le signe du terme général.
2. Si le terme général est de signe constant (toujours positif ou toujours négatif) alors **précisez le** (si vous ne le précisez pas votre raisonnement ne vaut rien), ensuite tous les coups sont permis, majorations, minorations, d'Alembert, petit o, développement limité.
3. Si le terme général n'est pas de signe constant on peut étudier la convergence absolue ce qui nous ramène à l'étude d'une série dont le terme général est de signe constant. Mais **attention**, la convergence absolue implique la convergence la réciproque est fausse. Ainsi si vous n'avez pas obtenu une convergence absolue il ne faut pas en déduire que la série diverge !
4. Si le terme général n'est pas de signe constant et que la série ne converge pas absolument. Alors essayez d'appliquer le critère des séries alternées.
5. Si vous n'êtes dans aucun de tous ces cas il faut trouver une astuce c'est du cas par cas (cela n'arrivera pas dans cet exercice mais il faut savoir que cela peut arriver.)

$$a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \qquad b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad c_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \qquad d_n = \arccos(\frac{n^3+1}{n^3+2})$$

$$e_n = 1-\cos(\frac{1}{n}) \qquad f_n = 2-\sqrt{n} \qquad g_n = \int_0^1 \tan(t^n)dt \qquad h_n = (-1)^n\tan(\frac{1}{n+1})$$

$$i_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \qquad j_n = \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}} \qquad k_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad l_n = \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$p_n = (\frac{1+\cos n\pi}{n^2})^{\sqrt{n}} \qquad q_n = \frac{\log n}{n\sqrt{n}} \qquad r_n = (-1)^n\sqrt{n}\log(\frac{n+1}{n-1}) \qquad s_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}-1$$