Examen d'analyse S3. (MI0A08)

Durée 3 heures. Les documents et les calculatrices sont interdits, excepté le fascicule de développements limités usuels.

Exercice 1. Suites numériques

Etudier la convergence et calculer la limite des suites suivantes.

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}\ ; \quad b_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}\ ; \quad c_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{\sqrt{n} + \ln n}\ ;$$

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2+k^2}\ ; \quad e_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\ ;$$

Indication Pour étudier $(e_n)_n$ on utilisera le fait que la fonction cos est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\ 0 \leq k \leq n, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Exercice 2. Séries numériques

Etudier la convergence des séries de terme général,

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^n}\ ; \quad b_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n(\ln n)^2}\ ; \quad c_n = (\sin \tfrac{a}{n})^2,\ \text{avec } a > 0\ ;$$

$$d_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}\ ; \quad e_n = \frac{a^{(n^2)}}{n!},\ \text{avec } a > 0\ ; \quad f_n = \frac{n^a}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)},\ \text{avec } a > 0\ ;$$

Exercice 3.

Soit $(x_n)_n$ une suite définie par,

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + x_n^2$$

1. Montrer que $x_n \longrightarrow +\infty$.
2. Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{-n} \ln x_n$.
   (a) Vérifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie
   (b) Etudier la convergence de la série $\{u_{n+1} - u_n\}_n$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 4.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on calculera.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$

Tournez la page s.v.p

Exercice 5.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on calculera.
2. Démontrer le résultat suivant,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$$

3. En s'aidant du résultat précédent, montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f.
4. La suite de fonctions $(f_n')_n$ converge-t-elle uniformément sur $[-1,1]$?