UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Analyse S3 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Page perso : http ://www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Corrigé du devoir maison 1

N.B. N'hésitez pas à venir me poser des questions au sujet de ce corrigé si vous ne comprenez pas certaines choses.

Exercice 1. Développements limités.

$$\begin{array}{rcl}
a(x) & = & -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^6) \\
b(x) & = & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \circ(x^5) \\
c(x) & = & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3) \\
d(x) & = & x^2 + \frac{x^6}{6} + \circ(x^7) \\
e(x) & = & x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + \circ(x^4) \\
f(x) & = & \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \circ(x^8) \\
g(x) & = & x^6 - x^8 + \circ(x^9) \\
h(x) & = & e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + \circ(x^3)\right) \\
i(x) & = & 3x + \frac{21x^3}{2} + \frac{521x^5}{40} + \circ(x^5) \\
j(x) & = & 1 - \frac{x^3}{2} + \circ(x^5) \\
k(x) & = & \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{x^2}{60} + \circ(x^2)\right) \\
l(x) & = & 2 + 5x - 3x^3 + \circ(x^3) \quad \text{Ici le petit o c'est } 0\,!
\end{array}$$

Remarque : Pour les fonctions h, j et k, il fallait commencer par réecrire leurs expressions sous forme exponentielle.

Exercice 2. Suites récurrentes

1. Commençons par remarquer qu'il s'agit d'une suite homographique, le fait qu'elle soit bien définie n'a rien d'évident et on l'admettra **exceptionnellement**.

Introduisons ensuite la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} \end{array} \right.$$

Si l'on résout l'équation : $f(x) = x$ on constate que la fonction f n'a pas de point fixe, donc la suite $(u_n)_n$ ne peut pas converger, elle diverge.

2. Introduisons la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+3}{2(x+1)} \end{array} \right.$$

On doit ensuite vérifer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie, pour ce faire on essaie de trouver un intervalle stable. Ici on remarque assez facilement que si $x > 0$, alors $f(x) > 0$. On en conclut immédiatement que $]0, +\infty[$ est un intervalle stable de f. Donc comme $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_n$ prend toutes ses valeurs dans $]0, +\infty[$. Elle est donc bien définie.

La résolution de l'équation $f(x) = x$ nous donne deux points fixes pour f qui sont 1 et -3. Or comme la suite $(u_n)_n$ est à valeurs positives, elle ne peut pas converger vers -3. Donc le seul candidat pour être la limite de $(u_n)_n$ (si elle converge !) est 1.

Ici l'étude du signe de $f(x) - x$ ou l'étude de la fonction f ne permet pas de conclure. La meilleure solution est de chercher à majorer $|u_{n+1} - u_n|$:

$$\begin{array}{rcl}
|u_{n+1} - 1| & = & \left|\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2(u_n+1)}\right| \\
|u_{n+1} - 1| & = & \left|\frac{(u_n-1)^2}{2(u_n+1)}\right| \\
|u_{n+1} - 1| & \leq & \frac{1}{2}|u_n - 1| \underbrace{\left|\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}\right|}_{<1} \\
& \vdots & \\
|u_{n+1} - 1| & \leq & \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - 1|
\end{array}$$

Donc $u_n \to 1$.

3. Introduisons la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x = x(x-2) \end{array} \right.$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ tout entier, donc la suite est évidemment définie. Une étude rapide de la fonction f permet d'obtenir son tableau de variation :

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

De fait on constate que $[0, +\infty[$ est un intervalle stable, de plus $f(]-\infty, -2]) = [0, +\infty[$. Donc si $u_0 \in [0, +\infty[$ ou $]-\infty, -2]$, alors $\forall n \geq 1,\ u_n \in [0, +\infty[$. Enfin on remarque que $f(]-2, 0[) =]0, -1] \subset]-2, 0[$, donc $]-2, 0[$ et même $]-1, 0[$ sont des intervalles stables de f.

En résolvant l'équation $f(x) = x$ on obtient deux points fixes pour f qui sont 0 et -1. On étudie ensuite le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$:

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Si $u_0 \in]0, +\infty[$ ou $]-\infty, -2[$, alors $\forall n \geq 1,\ u_n \in]0, +\infty[$, donc $(u_n)_n$ est croissante à partir du rang 1 et diverge (elle tend même vers $+\infty$).
- Si $u_0 = 0$ ou -2, $(u_n)_n$ est constante et égale à zéro au moins à partir du rang 1. Donc elle converge vers 0.
- Si $-1 \leq u_0 < 0$ alors $(u_n)_n$ décroit et est minorée par -1 (car $[-1, 0[$ est un intervalle stable !), donc elle converge vers -1.
- Si $-2 < u_0 < -1$, le fait que $f(]-2, 0[) =]0, -1]$ nous ramène au cas précédent donc la suite converge vers -1.

4. On introduit la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x} - 1 \end{array} \right.$$

Remarque : On n'a pas besoin ici de faire une étude détaillée de la fonction f pour vérifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie. En effet, si x est positif, alors la quantité $x + (1/x)$ est toujours supérieure à 1, car si $x = 1$ cette quantité est égale à 2 et si $x \neq 1$ et $x > 0$ alors x ou $1/x$ est supérieur à 1. donc :

$$\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} - 1 = f(x) > 0$$

En d'autres termes l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable pour f. Cette remarque permet de réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, +\infty[$. Puis, la résolution de l'équation $f(x) = x$ ne nous donne qu'un seul point fixe pour f dans l'intervalle $]0, +\infty[$ qui est 1.

On étudie ensuite la fonction f. Sa dérivée est $f'(x) = 1 - (1/x^2)$. Et son tableau de variation :

	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$. Donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$ (si vous préférez $[1, +\infty[$ est un intervalle stable de f). De plus la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur cet intervalle car :

$$f(x) - x = \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \text{ car } x \geq 1$$

.

Conclusion : $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par -1 qui est point fixe de f donc elle converge vers -1.

Exercice 3.

1. Appelons g, la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$. L'étude de la fonction g nous permet d'obtenir son tableau de variation :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0, 1/2]$ elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[0, 1/2]$ vers l'intervalle $[-3/8, 1]$. De fait, tout élément de l'intervalle $[-3/8, 1]$ admet un unique antécédant par g dans l'intervalle $[0, 1/2]$. Par conséquent 0 admet un unique antécédant par f dans $[0, 1/2]$ ce qui signifie bien que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[0, 1/2]$.

2. Il suffit de remarquer que $f(x) - x = g(x)/9$ et d'appliquer le résultat précédent.

3. Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $f(0) = 1/9 > 0$, on a alors $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, donc $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable de f et la suite (u_n) est à valeurs positives. Ainsi (par la méthode Hallouin-Perret !) la suite $(u_n)_n$ est monotone et son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0$ qui est égal à $f(0) - 0 = 1/9$ et est donc > 0. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante.

4. Le fait que $g(1/2)$ soit négatif ($g(1/2) = -3/8$) entraine immédiatement que $f(1/2) < 1/2$. Etant donné que $u_0 = 0$, on a bien $0 \leq u_0 < 1/2$.

Par récurrence, soit $n \geq 0$ supposons que $0 \leq u_n < 1/2$, alors, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq u_n < \frac{1}{2} & \Rightarrow & f(0) \leq f(u_n) < f(\frac{1}{2}) \\ & \Rightarrow & 0 \leq f(0) \leq u_{n+1} < f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow & 0 \leq u_{n+1} < \frac{1}{2} \end{array}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1/2$.

5. $(u_n)_n$ est croissante et majorée par $1/2$, elle converge donc vers le seul point fixe de f, à savoir α.

Exercice 4. Séries

1. La suite a_n semble ne même pas converger vers 0 et pourtant...

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}) = \sin(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \frac{3\pi}{4n^3} + \circ(\frac{1}{n^3})) \\ & = & \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \frac{(-1)^n 37}{48n^3} + \circ(\frac{1}{n^3}) \end{array}$$

Le premier terme du DL est le terme général d'une série altérnée et les autres sont des termes généraux de séries absolument convergentes. La série de terme général a_n converge.

2. On constate que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n > 0$. On peut donc lui appliquer le critère de d'Alembert. Un calcul rapide permet d'otenir : $b_{n+1}/b_n \ \rightarrow\ 1/4$. Donc la série de terme général b_n converge.

3. Ici il ne faut surtout pas appliquer le critère des séries de Bertrand ! L'exposant du terme $\log n$ dépend de n. On fait donc ce qu'il faut faire quand on a un exposant qui dépend de n, on passe à la notation exponentielle.

$$\begin{array}{rcl} c_n & = & \frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \exp(-\log n.\log(\log n)) = \exp(-\log(\log n).\log n) \\ & = & n^{-\log(\log n)} = \frac{1}{n^{\log(\log n)}}. \end{array}$$

A partir d'un certain rang, $\log(\log n) > 2$, donc $n^{\log(\log n)} > n^2$ et donc :

$$c_n = \frac{1}{n^{\log(\log n)}} < \frac{1}{n^2}$$

Comme le terme général c_n s'écrit sous forme d'une exponentielle et qu'une exponentielle est toujours postive, c_n est toujours positive. On peut donc lui appliquer le critère de Riemann, l'inégalité ci-dessus nous permet de conclure que la série de terme général c_n converge.

4. Ici on n'y coupe pas il faut faire un développement limité.

$$\begin{array}{rcl} d_n & = & \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) = \arccos\left(\frac{1+1/n^3}{1+2/n^3}\right) = \arccos\left((n^3+1)(1-\frac{2}{n^3}+\circ(\frac{1}{n^3}))\right) \\ & = & \arccos(1-\frac{1}{n^3}+\circ(\frac{1}{n^3})) \end{array}$$

Il faut ensuite faire un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \arccos(1-x)$. Pour ce faire on va faire un DL en 0 de sa dérivée.

$$\begin{array}{rcl} \arccos(1-x)' & = & \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2x}}.(1+\frac{x}{4}+\circ(x)) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2}} + \circ(\sqrt{x}) \end{array}$$

Puis on intègre ce développement limité :

$$\begin{array}{rcl} \arccos(1-x) & = & \overbrace{\arccos(1-0)}^{=0} + \sqrt{2x} + \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}} + \circ(x^{3/2}) \\ \arccos(1-\frac{1}{n^3}+\circ(\frac{1}{n^3})) & = & \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}n^{9/2}} + \circ(\frac{1}{n^{9/2}}) \end{array}$$

Les termes du développement limité sont des termes généraux de séries absolument convergentes, d'après le critère de Riemann. La série de terme général d_n converge.

5. Une fois de plus le développement limité semble être une bonne approche :

$$e_n = 1-\cos(\frac{1}{n}) = 1-(1-\frac{1}{2n^2}+\circ(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2n^2}+\circ(\frac{1}{n^2})$$

Ici encore les termes du développement limité sont les termes généraux de séries absolument covergentes donc la série de terme général e_n converge.

6. $f_n \ \rightarrow\ -\infty$, donc la série diverge.

7. Ici on commence par remarquer que, étant donné les bornes de l'intégrale, la fonction intégrée est positive (car la fonction tan est positive sur $[0,1]$). On a donc affaire à une série à termes positifs. Ensuite on rappelle l'inégalité suivante qui peut se démontrer en étudiant la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$.

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan(x) \geq x$$

Ainsi :

$$g_n = \int_0^1 \tan(t^n)dt \geq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a minoré g_n par le terme général d'une série divergente, la série de terme général g_n diverge donc.

8. La fonction tan est croissante sur $[0, 1]$, donc la suite $(1/\tan(n+1))$ tend vers 0 en décroissant. On peut donc appliquer le critère des séries alternées à h_n. La série de terme général h_n converge.

9. Ici encore le terme général de la série est positif.

$$i_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \sim \frac{n^2/2}{2n^3/6} = \frac{3}{2n}$$

D'après le critère de Riemann la série de terme général i_n diverge.

10. Ici c'est très tentant d'appliquer le critère des séries alternées (et c'est ce qu'on va faire) mais par contre le fait que la suite de terme général $1/(n^{1+1/n})$ tende vers 0 en décroissant n'a rien d'évident. Il faut donc travailler un peu pour le démontrer. Pour ce faire une méthode consiste à introduire la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} = \exp(-(1 + \frac{1}{x}) \log(x)) \end{array} \right.$$

On calcule sa dérivée :

$$f'(x) = \left(-\log(x) - 1 - \frac{1 - \log(x)}{x^2}\right) . \exp(-(1 + \frac{1}{x}) \log(x))$$

Le signe de f' ne dépend que de l'expression entre parenthèses (une exponentielle étant toujours positive...). Cette expression est négative pour x suffisamment grand. Donc la suite de terme général $1/(n^{1+1/n})$ est décroissante à partir d'un certain rang. Elle tend vers 0 car f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, en effet :

$$\begin{array}{rcl} (1 + \frac{1}{x}) \log(x) & \rightarrow & +\infty \\ \text{donc} \quad \exp(-(1 + \frac{1}{x}) \log(x)) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

A présent on a le droit d'appliquer le critère des séries alternées et de conclure que la série de terme général j_n converge.

11. Le terme général de la série est toujours positif. On va lui appliquer le critère de d'Alembert.

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \rightarrow 0 \quad \text{Par croissance comparée } 2^{2n+1} \text{ l'emporte sur} (n+1)^2$$

Donc la série de terme général k_n converge.

12. Ici encore cela n'a pas de sens d'appliquer le critère de Betrand ! Alors pour y voir plus clair on passe à la notation exponentielle. $l_n = \exp(-n \log(\log n))$. Le terme général est toujours positif, de plus, à partir d'un certain rang,

$$\begin{array}{rcl} \log(\log n) & \geq & 1 \\ -n \log(\log n) & \leq & -n \\ \exp(-n \log(\log n)) & \leq & \exp(-n) \end{array}$$

On a majoré le terme général de la série par le terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général l_n converge.

13. La première chose qu'il faut remarquer c'est que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. De ce fait p_{2n+1} est nul pour tout n. Ainsi, étudier la convergence de la série de terme général p_n revient à étudier celle de terme général p_{2n}. Ensuite on passe à la notation exponentielle, encore...

$$p_{2n} = \exp(\sqrt{2n} \log(\frac{2)}{(2n)^2})) = \exp(-\sqrt{2n} \log(2n^2))$$

Le terme général p_n de la série est toujours positif, de plus pour des raisons de croissance comparée, ce terme général est majoré à partir d'un certain rang par $1/n^2$. La série converge.

14. Ici c'est bien une série de Bertrand avec $\alpha = 3/2$ et $\beta = -1$. Donc la série de terme général q_n converge.

15. Ici pas de doute il faut faire un développement limité.

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n\sqrt{n}\log(\tfrac{1+1/n}{1-1/n}) \\ &= (-1)^n\sqrt{n}\log[(1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}+\circ(\tfrac{1}{n^2}))] \\ &= (-1)^n\sqrt{n}\log(1+\tfrac{2}{n}+\tfrac{2}{n^2}+\circ(\tfrac{1}{n^2})) \\ &= (-1)^n\sqrt{n}(\tfrac{2}{n}+\circ(\tfrac{1}{n^2})) \\ &= \tfrac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}+\circ(\tfrac{1}{n\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

Le premier teme du DL est le terme général d'une série alternée convegente, le second est le terme général d'une série absolument convergente. Donc la série de terme général r_n converge.

16. On rappelle que le symbole $\sqrt[n]{x}$ signifie $x^{1/n}$. Et on se lance.

$$\begin{aligned} s_n &= \exp(\tfrac{1}{n}\log(\tfrac{n}{n+1}))-1 \\ &= \exp(-\tfrac{1}{n}\log(1+\tfrac{1}{n}))-1 \\ &= \exp(-\tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{n}+\circ(\tfrac{1}{n})))-1 \\ &= \exp(-\tfrac{1}{n^2}+\circ(\tfrac{1}{n^2}))-1 \\ &= 1-\tfrac{1}{n^2}+\circ(\tfrac{1}{n^2})-1 = -\tfrac{1}{n^2}+\circ(\tfrac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Tous les termes du développement sont les termes généraux de séries absolument convergentes. La série de terme général s_n converge.