UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Analyse S3 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr

Fiche d'exercices 1.

Les exercices marqués par un ★ sont plus difficiles.

1 Comparaisons de suites numériques

Exercice 1.
Soient $(U_n)_{n\in(N)}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

1. Rappeler les définitions de suivantes :
   (a) $U_n = o(V_n)$
   (b) $U_n = O(V_n)$
   (c) $U_n \sim V_n$
2. Que signifie :
   (a) $U_n = o(1)$?
   (b) $U_n = O(1)$?
   (c) $U_n \sim 1$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, que peut-on dire de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :
   (a) $lim\ n^\alpha U_n = 0$?
   (b) $lim\ n^\alpha U_n = 1$?
   (c) $lim\ n^\alpha U_n = \infty$?

Exercice 2.
Soient $(u_n)_{n\in(N)}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, fournir une démonstration (si c'est vrai) ou un contre-exemple (si c'est faux).

(1). $n^2 = O(n^3)$	(2). $n^2 = o(n^{9/4})$
(3). $\log(n) = o(\log(\sqrt{n}))$	(4). $\frac{1}{\log(n)} = O(\frac{1}{n})$
(5). $n \sim n+1$	(6). $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + 1$
(7). $\frac{1}{n} = O(\frac{n+1}{n})$	(8). $u_n = o(\frac{1}{n}) \Rightarrow u_n = O(\frac{1}{n^2})$
(9). La réciproque de l'énoncé précédent.	(10). $u_n = a_n + o(\frac{1}{n}) \Rightarrow u_n \sim a_n$
(11).$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{1}{n!} = o(\frac{1}{n^m})$	

Exercice 3.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n^2}) + o(\frac{1}{n}) + O(\frac{\log(n)}{n})$
2. $u_n = n^4 + o(n^3\log(n)) + O(n^6) + O(n^4) + O(n^2)$
3. $u_n = n + \sqrt{n} + o(n) + O(\frac{\sqrt{n}}{\log(n)})$
4. $u_n = \frac{1}{\log(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + e^{-n} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}) + O(\frac{1}{n})$

Exercice 4. La formule de Taylor.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Redémontrer par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral, à savoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

2. En déduire la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o_{(x\to a)}((x-a)^n)$$

3. Donner une variante de la formule précédente en remplaçant le o par un O.
4. Les deux formules obtenues sont-elles équivalentes ? Si oui, pourquoi ? Sinon, laquelle des deux donne l'information la plus précise sur f ?

Exercice 5. Développements limités.
Calculer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

(1). $a(x) = \log(\cos(x))$, à l'ordre 6	(2). $b(x) = \tan(x)$, à l'ordre 5
(3). $c(x) = e^{\sin(x)}$, 3	(4). $d(x) = \arcsin(x^2)$, 7
(5). $e(x) = \log(1+x)^2$, 4	(6). $f(x) = \arccos(x)$, 8
(7). $g(x) = \sin(x)^6$, 9	(8). $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 3
(9). $i(x) = ch(2x)sh(3x)$, 5	(10). $j(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$, 5
(11). $k(x) = (\frac{\sin(x)}{x})^{\frac{3}{x^2}}$, 2	(12). $l(x) = 2 + 5x - 3x^3$, 3

2 Suites récurrentes

Exercice 6.
Exprimer en fonction de n le terme général des suites suivantes, et étudier leur convergence.

(1). $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ (2). $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$

(3). $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n \end{cases}$ (4). $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - \sqrt{\pi}u_n \end{cases}$

(5). $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$ (6). $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -\frac{7}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n \end{cases}$

Exercice 7.
Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$(1).\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}\end{array}\right. \qquad (2).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)}\end{array}\right.$$

$$(3).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n\end{array}\right. \qquad (4).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1\end{array}\right.$$

$$(5).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \left]-1,0\right[\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + (-1)^n\sqrt{u_n+1}\end{array}\right. \qquad (6).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in [0,1] \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2u_n)\end{array}\right.$$

$$(7).\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t-u_n|dt\end{array}\right. \qquad (8).\left\{\begin{array}{l} u_0 > 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \cdots + \sqrt{u_0}}}\end{array}\right.$$

Exercice 8.
On considère la fonction f définie par :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\end{array}\right.$$

Et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [0, 1/2]$.
2. En déduire que α est l'unique point fixe de f dans l'intervalle $[0, 1/2]$
3. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que le suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq u_n < 1/2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $(u_n) \to \alpha$.

Exercice 9. Autour du théorème de Cesaro.

1. Enoncer le théorème de Césaro.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, telle que $x_n \to l \neq 0$. Alors montrer que $\sqrt[n]{\prod_{k=0}^n x_k} \to l$.
3. Démonter le résultat suivant appelé *Lemme de l'escalier* :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, telle que $u_{n+1} - u_n \to a$ où $a \in \mathbb{C}$. Alors $u_n/n \to a$. En déduire que si $a \neq 0$, alors $u_n \sim na$.
4. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\forall n \geq 1$, $u_n = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}$. Etudier la convergence de cette suite et en donner un équivalent.
5. Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - x_n^2$.
   (a) Montrer que x_n est bien définie et converge vers une limite l à préciser.
   (b) On pose lorsque cela est possible $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$. déterminer la limite de y_n et en déduire un équivalent de x_n.

3 Séries numériques.

Exercice 10.
Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \qquad b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad c_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \qquad d_n = \arccos(\frac{n^3+1}{n^3+2})$$

$$e_n = 1 - \cos(\frac{1}{n}) \qquad f_n = 2 - \sqrt{n} \qquad g_n = \int_0^1 \tan(t^n)dt \qquad h_n = (-1)^n \tan(\frac{1}{n+1})$$

$$i_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \qquad j_n = \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}} \qquad k_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad l_n = \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$p_n = (\frac{1+\cos n\pi}{n^2})^{\sqrt{n}} \qquad q_n = \frac{\log n}{n\sqrt{n}} \qquad r_n = (-1)^n\sqrt{n}\log(\frac{n+1}{n-1}) \qquad s_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$$

$$t_n = (1-\frac{1}{n^2})^{n\sqrt{n}} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \qquad v_n = \frac{1}{\log(n^2+n+1)} \qquad w_n = f(a+\frac{1}{n}) + f(a-\frac{1}{n}) - 2f(a)$$

Remarque. Dans la dernière question f est une fonction de classe C^2 au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Exercice 11.
Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \sqrt{n!}\sin a \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\dots\sin\frac{a}{\sqrt{n}} \qquad b_n = \cos(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}) \qquad c_n = e^{an^2}(1-\frac{a}{n})^{n^2}$$

$$d_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}} \qquad e_n = \log(1+\frac{(-1)^n}{n^a}) \qquad f_n = e^{(\log(n))^a}$$

$$g_n = \cos^{n^2}(\frac{a}{\sqrt{n}}) \qquad h_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}} \qquad i_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t}dt}{1+t^{a+2}}$$

Exercice 12.
Suivant les valeurs de a et de b étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$$

Exercice 13. ★
Quelle est la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{\cos(\log n)}{n}$?
Indication : On pourra commencer par étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^n \frac{\cos(\log x)}{x}dx$$

Puis trouver une expression faisant intervenir à la fois u_n et $\int_n^{n+1}\frac{\cos(\log x)}{x}dx$

Exercice 14. Un résultat théorique. ★
Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites **positives** telles que $a_n \sim b_n$. On note $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ respectivement les suites des sommes partielles des séries de terme général a_n et b_n. C'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

Si les séries de terme général u_n et v_n convergnet, les restes de ces séries sont notés respectivement : Q_n et R_n.

1. Si les séries de terme général a_n et b_n convergent, montrer que $S_n \sim T_n$.
2. Si les séries de terme général a_n et b_n divergent, montrer que $Q_n \sim R_n$.